КВАНТ
ЖУРНАЛ

1987

1 - 12

НОМЕР
1

Квант
Основан в 1970 году

1987
1

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 С Новым годом!
3 *С. Р. Филонович.* О столкновении шаров и «серьезной» физике
10 *С. М. Воронин, А. Г. Кулагин.* О задаче Пифагора

Задачник «Кванта»

15 Задачи М1021—М1025; Ф1033—Ф1037
17 Решения задач М1001, М1003—М1005; Ф1013—Ф1016

«Квант» для младших школьников

23 Задачи
24 *А. П. Савин.* На круги свои

28 **Наш календарь**

Школа в «Кванте»

29 Физика 8, 9, 10

Математический кружок

37 *В. Л. Гутенмахер, Ж. М. Раббот.* Выбор наилучшего варианта

Искусство программирования

43 *Л. Ф. Штернберг.* Циклы, циклы, циклы ...

Практикум абитуриента

47 *Ю. И. Ионин, В. Б. Некрасов.* Вычисление расстояний и углов

53 **Варианты вступительных экзаменов**

Информация

55 Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу
56 Новый прием на заочное отделение Малого мехмата
57 Заочная физико-техническая школа при МИСиСе

58 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(36)*
Шахматная страничка
Компьютер анализирует эндшпиль (*3-я с. обложки*)

Наша обложка

Три столетия разделяют задачу классической механики об упругом столкновении шаров и замечательное открытие XX века — эффект Комптона. Что общего у этих явлений? Как они связаны? Об этом читайте в статье на с. 3.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1987

С Новым годом!

Наступил 1987 год — второй год XII пятилетки, год семидесятилетия Великого Октября. Он будет годом напряженного труда в условиях непрерывно углубляющейся перестройки, ускорения социально-экономического развития нашей страны. Необходимо закрепить успехи, достигнутые после апрельского (1985 года) пленума ЦК КПСС и XXVII съезда партии, и уверенно двигаться вперед по пути интенсификации народного хозяйства. Предстоят революционные преобразования производительных сил и совершенствование производственных отношений, всей социальной жизни общества. Многое придется изменить и в современной системе образования и подготовки кадров. Социализм обладает огромными резервами во всех сферах жизни общества, и эти резервы необходимо ввести в действие как можно быстрее.

Впереди XX съезд ВЛКСМ. Он обсудит проблемы, которые жизнь ставит перед комсомолом и молодежью на этапе коренной перестройки нашей экономики. На повестке дня — расширение прав комсомола (в том числе и многомиллионной армии учащихся), развитие его инициативы, самостоятельности, повышение ответственности перед страной. Это позволит еще активнее привлечь к решению общенародных задач молодежь — самую динамичную, напористую часть общества.

Дорогие наши читатели! Вам предстоит интереснейшая жизнь в условиях непрерывно развивающейся и усложняющейся научно-технической революции. Как сказал Генеральный секретарь ЦК КПСС М. С. Горбачев, нынешняя пятилетка — труднейшая, сложнейшая, но и самая интересная пятилетка. Вдумайтесь в эти слова — ведь в них ваше ближайшее будущее. Оно потребует от вас немалых знаний и умений. Одним из самых главных требований жизни становится умение самостоятельно обучаться. Стране нужны высокообразованные работники, влюбленные в процесс приобретения новых знаний и хорошо владеющие технологией этого процесса. И наш журнал будет стремиться помогать вам в развитии этих важнейших навыков.

Желаем вам успехов в новом году!

О СТОЛКНОВЕНИИ ШАРОВ И «СЕРЬЕЗНОЙ» ФИЗИКЕ

(Сложен ли эффект Комптона?)

Кандидат физико-математических наук
С. Р. ФИЛОНОВИЧ

Когда-то было сказано, что всякая научная идея проходит в своей истории три этапа: в момент появления она кажется безумной, затем становится общепризнанной и, наконец, рассматривается как тривиальная. (От себя добавим, что в конечном счете идея может оказаться и ошибочной.) Если не обращать внимания на резкость формулировки, присущую всякому афоризму, то с таким общим представлением судеб многих физических идей и теорий нельзя не согласиться. Можно привести немало примеров того, как положения и формулировки, из-за которых когда-то яростно «ломались копья», теперь встречаются на страницах школьных учебников. Вероятно, один из самых свежих примеров такого рода — так называемый эффект Комптона, рассмотрение которого предусматривается новой школьной программой по физике. А ведь каких-нибудь шестьдесят лет назад вокруг самого эффекта бушевали страсти, а в адрес его первооткрывателя высказывались резкие, незаслуженные обвинения. Теперь же... Однако прежде чем рассказать о самом эффекте, нам необходимо обсудить вопрос, уже отчасти знакомый многим читателям.

Об одной классической задаче

Задумывались ли вы о том, почему в задачниках по физике так часто встречаются задачи на столкновения шаров? Для этого есть много оснований. Прежде всего, удар, происходящий при столкновении шаров, с позиций механики — один из простейших видов взаимодействий, законы которого можно относительно просто исследовать на опыте. Именно поэтому при формировании классической механики в XVII столетии установление законов удара считалось важнейшей задачей. В то время наибольших успехов в исследовании этой задачи добился знаменитый голландский физик и математик Х. Гюйгенс, написавший сочинение «О движении тел под влиянием удара», в котором были рассмотрены многие случаи столкновения шаров.

Значение задач об ударе состоит и в том, что в них в наиболее простой и отчетливой форме можно проследить действие законов сохранения энергии и импульса. Этими законами мы и воспользуемся при решении очень простой задачи: шар массой m_1 налетает на неподвижный шар массой m_2 со скоростью v_1. Найти относительное изменение кинетической энергии первого шара после столкновения, если известно, что удар абсолютно упругий и вращением шаров можно пренебречь.

Поскольку в условии задачи не оговорено, что удар центральный, мы должны предположить, что после

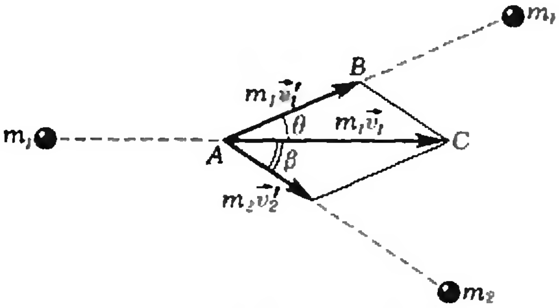


Рис. 1. Диаграмма импульсов для столкновения шаров.

Х. Гюйгенс (1629—1695).

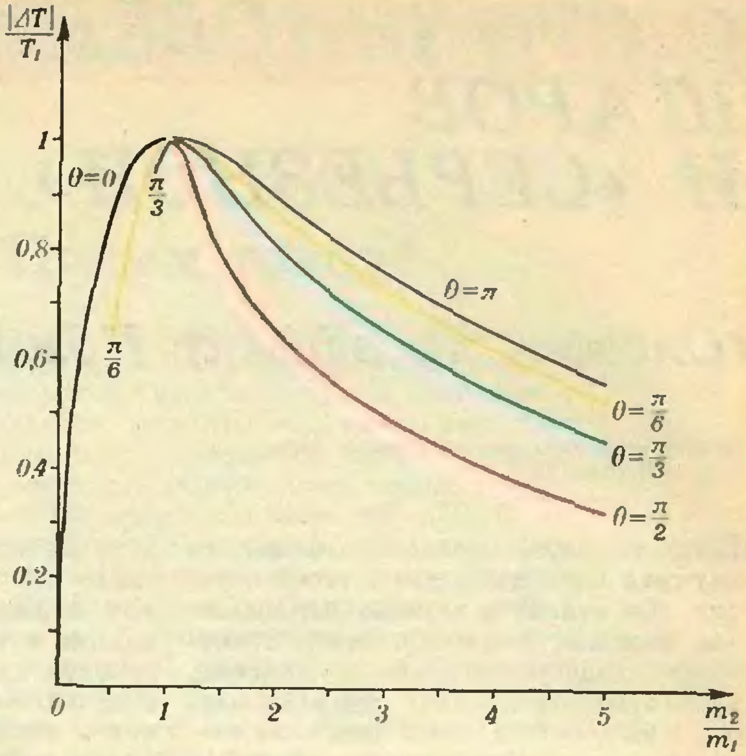


Рис. 2. Зависимость относительного изменения кинетической энергии налетающего шара от отношения масс сталкивающихся шаров для различных углов рассеяния.

удара шары разлетаются под некоторыми углами θ и β к направлению первоначального движения шара m_1. На рисунке 1 треугольник ABC образован векторами импульсов $\vec{p}_1=m_1\vec{v}_1$, $\vec{p}\,'_1=m_1\vec{v}\,'_1$ и $\vec{p}\,'_2=m_2\vec{v}\,'_2$ ($p_2=0$) — таково геометрическое представление закона сохранения импульса в нашей задаче. Применяя теорему косинусов к треугольнику ABC, получаем:

$$(m_1v_1)^2=(m_2v'_2)^2-(m_1v'_1)^2+2m_1^2v_1v'_1\cos\theta. \quad (1)$$

Закон сохранения энергии в данном случае, очевидно, можно записать в виде

$$\frac{m_1v_1^2}{2}=\frac{m_1(v'_1)^2}{2}+\frac{m_2(v'_2)^2}{2}. \quad (2)$$

В систему двух уравнений (1)—(2) входят три неизвестные величины: v'_1, v'_2 и θ, поэтому выразить их независимо друг от друга нельзя. Однако если задаться конкретным значением угла θ — его называют углом рассеяния, — то путем несложных преобразований можно выразить скорость v'_1 как функцию этого угла:

$$v'_1=v_1\frac{m_1\cos\theta-\sqrt{m_2^2-m_1^2\sin^2\theta}}{m_1+m_2}.$$

Отсюда нетрудно найти и относительное изменение кинетической энергии шара m_1:

$$\frac{|\Delta T|}{T_1}=\frac{m_1v_1^2-m_1(v'_1)^2}{m_1v_1^2}=$$

$$=\frac{2}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^2}\left(\frac{m_2}{m_1}+\sin^2\theta+\cos\theta\sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2-\sin^2\theta}\right). \quad (3)$$

Проанализируем полученное решение для простейшего случая лобового столкновения шаров ($\theta=0$ или $\theta=\pi$). При $m_1\ll m_2$ $\Delta T\to 0$; это означает, что шар m_1 отскакивает от шара m_2 в направлении, противоположном первоначальному ($\theta=\pi$), со скоростью, по абсолютной величине равной v_1. При $m_1\gg m_2$ также $\Delta T\to 0$; в данном случае столкновение с шаром m_2 практически не влияет на движение шара m_1 ($\theta=0$). Во всех промежуточных случаях $\Delta T\neq 0$. Следовательно, при некотором значении отношения m_2/m_1 величина ΔT достигает максимума. Простой расчет показывает, что максимум ΔT соответствует условию $m_2/m_1=1$.

На рисунке 2 приведены кривые зависимости относительного изменения кинетической энергии первого шара от величины m_2/m_1 для нескольких углов рассеяния. Видно, что для различных θ кривые несколько различаются, но у всех у них есть общая черта — они имеют максимум при $m_2/m_1=1$. Отметим, что рассеяние на угол, отличающийся от 0 или π, возможно лишь при $m_2/m_1>|\sin\theta|$ (см. (3)), поэтому соответствующие кривые резко обрываются; в частности, рассеяние на угол $\theta=\pi/2$ происходит только при $m_1<m_2$.

Рассмотренная задача, хотя и полезна, все-таки представляет собой не более чем упражнение из школьного задачника. И все же о ней пришлось вспомнить молодому американскому физику Артуру Комптону в начале 20-х годов нашего столетия, когда он занимался исследованиями, весьма далекими от классической механики.

Открытие эффекта

Конец XIX и первые годы XX века ознаменовались серией открытий, последствия которых нельзя было предвидеть; более того, и сейчас, много десятилетий спустя, практически невозможно перечислить все следствия открытия рентгеновских лучей и электрона, выдвижения идеи о кванте энергии. Знаменательно, однако, что все три перечисленные открытия теснейшим образом переплелись в истории обнаружения принципиально нового эффекта, названного впоследствии эффектом Комптона.

Рентгеновские лучи сразу привлекли к себе большое внимание, прежде всего — возможностью их практического использования в медицине. Однако на протяжении многих лет нерешенным оставался вопрос об их природе. Лишь в 1912 году по инициативе М. Лауэ были проведены опыты, убедительно доказавшие волновую природу рентгеновских лучей. Тогда же стало ясно, что к рентгеновским лучам должна быть применима теория рассеяния электромагнитного излучения, созданная задолго до этого первооткрывателем электрона Дж. Дж. Томсоном. Основные черты этой классической теории рассеяния таковы.

Электроны вещества под действием переменного электрического поля падающей на вещество электромагнитной волны приходят в состояние вынужденных колебаний, которые происходят с частотой волны. Согласно представлениям классической электродинамики всякий движущийся с ускорением заряд — источник волн. Значит, электроны вещества становятся источниками вторичных волн. Направление распространения волн может не совпадать с направлением первичной возбуждающей волны — это и называют рассеянием излучения.

Томсон рассчитал зависимость интенсивности рассеянного излучения от угла рассеяния (то есть от угла между направлением первичной волны и направлением наблюдения), исследовал характер его поляризации и т. д. Однако все эти выводы, хотя и имели большое значение, относились все же к деталям теории. Ее важнейшим положением было равенство частот падающего и рассеянного излучения. И многочисленные наблюдения рассеяния видимого света подтверждали, что это действительно так.

Совершенно естественно, что после выяснения природы рентгеновских лучей ученые решили проверить применимость теории Томсона к этому виду электромагнитного излучения. Одним из физиков, занимавшихся проблемой рассеяния рентгеновских лучей, и был А. Комптон. Начиная с 1917 года, он пытался проверить количественные выводы Томсона. Экспериментальные данные не очень хорошо согласовывались с теорией, но Комптон не придавал этому особого значения до тех пор, пока расхождения касались частных выводов классической теории рассеяния. Но в 1923 году он обнаружил уже нечто совершенно удивительное: из опытов следовало, что рассеянное излучение имеет длину волны, отличную от длины волны первичных лучей! Комптон понимал, что любому грамотному физику его результаты должны показаться совершенно «еретическими», и если они обусловлены погрешностями эксперимента, то их поспешная публикация может погубить его репутацию. Поэтому молодой исследователь еще и еще раз проверял данные измерений.

Схема экспериментальной установки Комптона показана на рисунке 3. Результаты, полученные Комптоном в многократно повторенных опытах, сводились к следующему (см. рисунок 4). В рассеянном излучении присутствует не только компонента с длиной волны падающего излучения λ, но и компонента с длиной волны $\lambda'>\lambda$. Разность длин волн $\Delta\lambda=\lambda'-\lambda$ (так называемое «комптоновское сме-

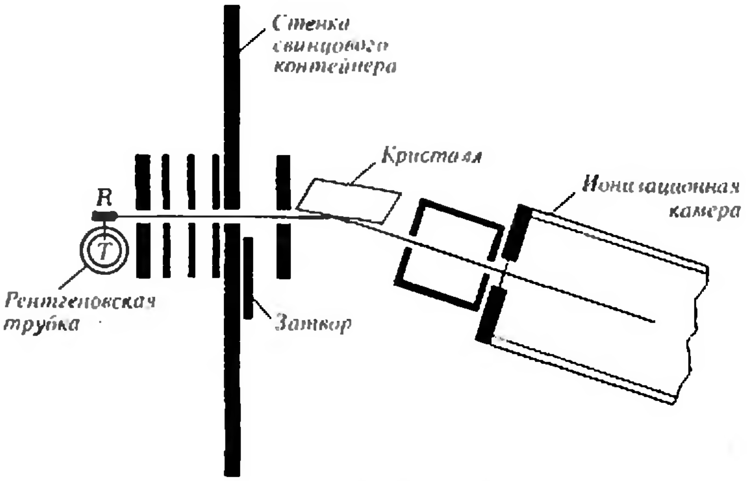


Рис. 3. Схема установки А. Комптона.
Пучок рентгеновских лучей, выходивший из трубки T, рассеивался на объекте R. Чтобы выделить из рассеянного излучения часть, рассеянную под заданным углом θ, использовалась система щелей (рисунок соответствует $\theta=90^\circ$). Прошедшее через щели излучение анализировалось специальным спектрометром. Важнейшей частью спектрометра являлся кристалл, образующий для рентгеновского излучения пространственную дифракционную решетку. Вследствие дифракции на этой решетке отраженные от кристалла лучи распространялись по направлениям, зависящим от длины волны отраженного излучения. Для анализа пространственного распределения лучей применялась ионизационная камера. Попадая в нее, кванты рентгеновского излучения вызывали ионизацию газа, заполнявшего камеру. В результате возрастал ток, протекавший через газ. Меняя ориентацию камеры относительно кристалла и следя за током, можно определить относительную интенсивность рентгеновских лучей разных длин волн, присутствовавших в рассеянном излучении.

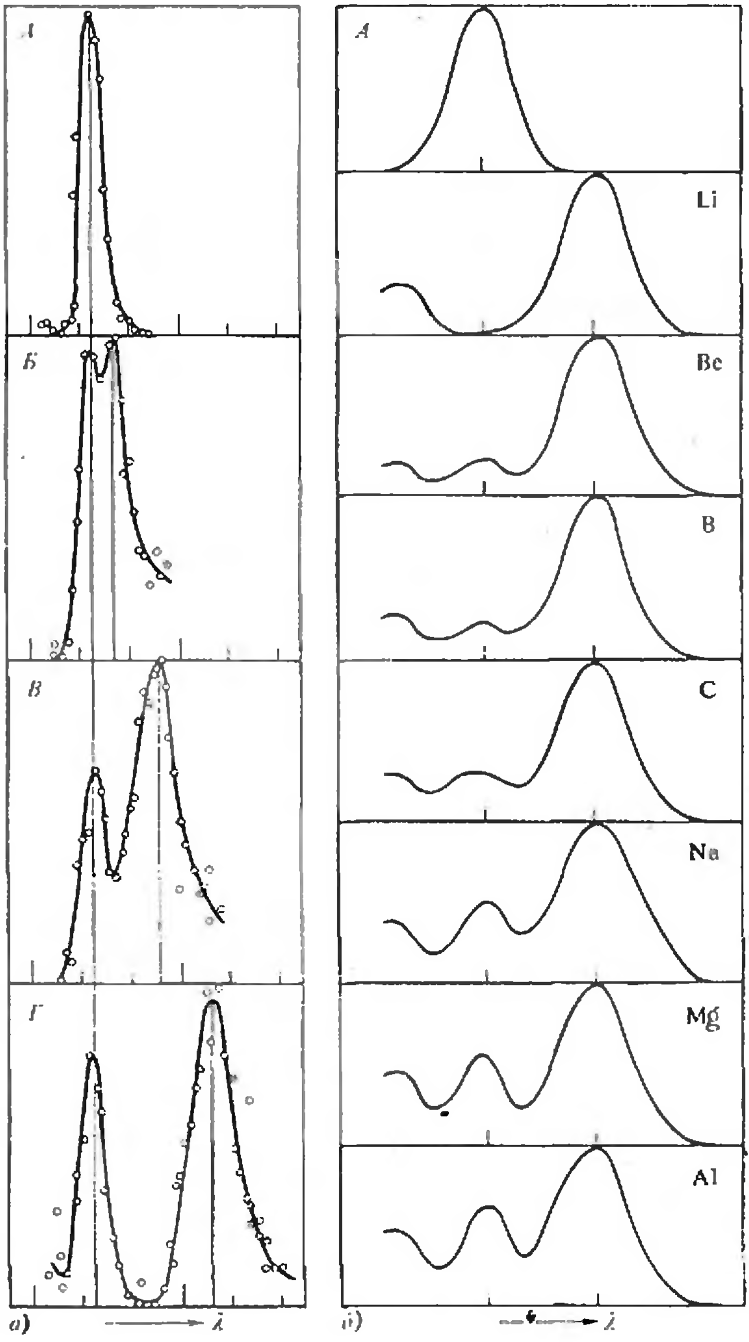


Рис. 4. Результаты экспериментов А. Комптона.
а) — зависимость комптоновского смещения от угла рассеяния θ: А — спектр падающего излучения; Б, В, Г — спектры рассеянного излучения при $\theta=45^\circ$, 90° и 135°, соответственно.
Смещение увеличивается с ростом угла рассеяния.
б) — результаты исследования эффекта для различных рассеивателей; А — спектр падающего излучения.
Чем массивнее атомы элемента-рассеивателя, тем меньше интенсивность смещенной компоненты и больше — несмещенной. Величина смещения остается постоянной.

щение») зависит от угла рассеяния: с ростом θ увеличивается и $\Delta\lambda$ (рисунок 4, *а*). Для данного угла θ величина $\Delta\lambda$ не зависит от природы рассеивателя, то есть при рассеянии на разных веществах $\Delta\lambda$ оказывается одинаковым. При смене рассеивателей меняется соотношение между интенсивностями смещенной (с длиной волны λ') и несмещенной (λ) компонент: с увеличением номера элемента в таблице Менделеева, соответствующего материалу рассеивателя, интенсивность несмещенной компоненты растет, а смещенной — падает (рисунок 4,*б*).

Убедившись в правильности экспериментальных данных, Комптон, несмотря на возражения некоторых коллег, опубликовал свои результаты. Однако мысль о необходимости дать им физическую интерпретацию не покидала ученого. И вскоре Комптон публикует новую работу, в которой дает теорию эффекта. Физик-экспериментатор предлагает теорию, основывающуюся на самых современных для того времени представлениях! Случай в истории физики крайне редкий.

«Рассеяние рентгеновских лучей как частиц»

Так озаглавил Комптон свои воспоминания, в которых рассказывается о событиях, связанных с открытием эффекта, названного его именем. Это заглавие отражает суть предложенного Комптоном объяснения эффекта.

Комптон получил неплохое образование на родине, а затем был направлен на стажировку в Англию, в знаменитую Кавендишскую лабораторию, где познакомился с важнейшими проблемами физики начала XX века. В частности, он знал о теории квантов света Эйнштейна, в основе которой лежало представление о свете как потоке частиц, характеризующихся частотой ν и энергией $h\nu$ ($h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка). Знал он также и о дополнении к этой теории, сделанном самим Эйнштейном, согласно которому квант света обладает не только энергией, но и импульсом $p = h\nu/c$, где c — скорость света. Идея об импульсе фотона была высказана еще в 1916 году, но до начала 20-х годов она не получила экспериментального подтверждения.

Комптон решил использовать квантовые представления об излучении для объяснения обнаруженного им эффекта. Он высказал предложение, что рассеяние рентгеновских квантов происходит на покоящихся свободных электронах твердого тела, причем столкновение кванта с электроном подобно упругому соударению шаров, в результате которого меняются величины энергии и импульса как у кванта, так и у электрона. Фактически диаграмма импульсов (рисунок 5), соответствующая элементарному акту рассеяния, выглядит так же, как и в случае столкновения шаров, поскольку в векторной форме уравнение, отражающее закон сохранения импульсов, также записывается в виде $\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$ ($\vec{p}_2 = 0$). Надо только учесть, что импульс кванта до и после рассеяния — соответственно $p_1 = h\nu/c$ и $p_1' = h\nu'/c$, а импульс, приобретаемый электроном, — $p_2' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v$, где m_0 — масса покоя электрона (ввиду высокой энергии рентгеновских квантов электрон при столкновении может приобрести скорость, сравнимую со скоростью света; поэтому при записи уравнений следует пользоваться релятивистскими формулами). На основе диаграммы можно записать уравнение, отражающее закон сохранения импульса:

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 = \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 - \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{h}{c}\right)^2 \nu\nu' \cos\theta. \quad (4)$$

Релятивистское уравнение для закона сохранения энергии записывается в таком виде:

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5)$$

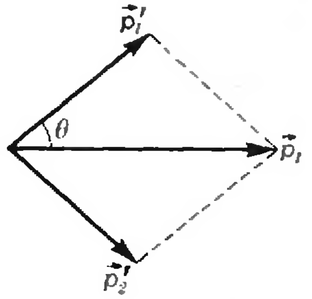


Рис. 5. Диаграмма импульсов для рассеяния фотона на покоящемся электроне.

А. Комптон (1892—1962).

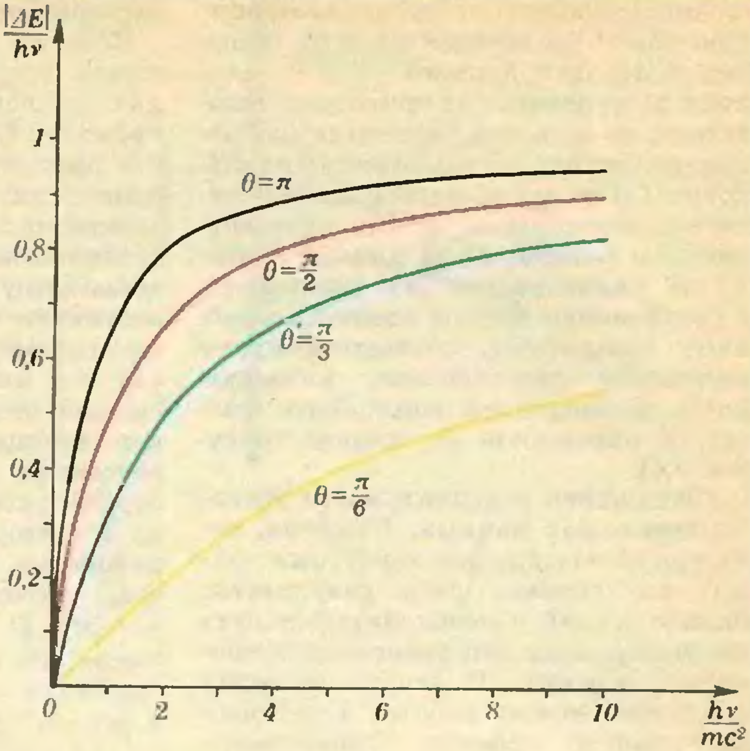


Рис. 6. Зависимость относительного изменения энергии фотона при комптоновском рассеянии от энергии фотона для разных углов рассеяния.

(в левой части уравнения, отражающей состояние системы фотон — электрон до взаимодействия, учтено, что электрон обладает энергией покоя m_0c^2). Эти уравнения позволяют найти величину комптоновского смещения $\Delta\lambda$ для данного угла рассения θ. Учитывая, что $\nu=c/\lambda$, $\nu'=c/\lambda'=$ $=c/(\lambda+\Delta\lambda)$, из (4) и (5) получаем:

$$\Delta\lambda=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta). \qquad (6)$$

О чем говорит этот результат? Прежде всего, величина $\Delta\lambda$ оказывается не зависящей от λ и определяется только углом рассеяния θ и фундаментальными постоянными m_0, c и h *). Из формулы (6) к тому же ясно, почему эффект Комптона практически не наблюдается для фотонов видимого света. Если для рентгеновской области отношение $\Delta\lambda_{\max}/\lambda$ ($\Delta\lambda_{\max}=2h/m_0c$ при рассеянии на угол $\theta=\pi$) составляет несколько процентов (для $\lambda=10^{-10}$м $\Delta\lambda_{\max}/\lambda=$ $=5\cdot10^{-2}$), то для видимого света $\Delta\lambda_{\max}/\lambda$ очень мало (для $\lambda=5\cdot10^{-7}$ м, например, $\Delta\lambda_{\max}/\lambda\approx10^{-5}$). С другой стороны, из формулы (6) следует, что $\Delta\lambda/\lambda$ должно возрастать при переходе от рентгеновского к γ-излучению. Это подтверждается наблюдениями: в γ-диапазоне $\Delta\lambda_{\max}/\lambda>1$. Формула для $\Delta\lambda$ объясняет и тот факт, что комптоновское смещение не зависит от природы рассеивателя: рассеяние происходит на электронах — частицах, входящих в состав всех веществ.

Можно понять и изменения относительной интенсивности смещенной и несмещенной компонент при смене рассеивателя. Наличие несмещенной компоненты обусловлено рассеянием излучения не свободными электронами, а электронами, сильно связанными с ядрами атомов. В этом случае рассеяние происходит так, как будто фотон сталкивается не с электроном, а с частицей гораздо большей массы, по порядку величины равной массе ядра. Отсюда следует, что $\Delta\lambda$ ничтожно мало (см. (6)). Чем больше порядковый номер элемента, тем бо́льшую долю в общем числе электронов составляют «массивные» электроны, вследствие чего относительная интенсивность несмещенной компоненты растет.

Итак, теория Комптона хорошо объясняла основные черты обнаруженного эффекта. Не следует, однако, думать, что она была встречена единодушным одобрением. Ученый в своих воспоминаниях рассказал об одном эпизоде, хорошо отражающем отношение ученого мира к открытию молодого американца. В 1924 году на ежегодной встрече ученых англоязычных стран, где присутствовали такие известные физики, как Резерфорд, Брэгг и другие, вокруг работы Комптона разгорелась столь оживленная дискуссия, что пунктуальные англичане однажды даже пожертвовали обеденным перерывом ради ее продолжения. И все же после встречи к Комптону подошел известный индийский физик Ч. Раман и сказал: «Комптон, вы прекрасный спорщик, но правда не на вашей стороне». По иронии судьбы через три года Раман оказался одним из авторов открытия еще одного вида рассеяния, при котором меняется частота излучения,— так называемого комбинационного рассеяния света *).

---

*) Величина $\Lambda=h/(m_0c)$, равная для электрона $2{,}42\cdot10^{-12}$ м, получила название комптоновской длины волны. Она играет важную роль в современной теоретической физике.

Лишь с течением времени теория Комптона, подтвержденная результатами многочисленных экспериментов, завоевала признание.

Эффект Комптона сыграл важную роль в становлении квантовой теории излучения. Заслуги его первооткрывателя были отмечены присуждением Нобелевской премии по физике за 1927 год. Впоследствии ученые выяснили, что этот факт имеет важное значение для астрофизики. Было установлено, что в космосе наблюдается не только прямой эффект Комптона, о котором шла речь выше, но и так называемое обратное рассеяние. По бесконечным просторам Вселенной движется множество очень быстрых электронов, которые могут сталкиваться с фотонами. Диаграмма импульсов для таких столкновений может выглядеть так же, как и на рисунке 5, но направления всех импульсов необходимо сменить на обратные. В результате столкновения электрон останавливается (или почти останавливается), а импульс и, следовательно, энергия фотона увеличиваются. Таким образом, при обратном комптоновском рассеянии происходит уменьшение длины волны фотона, а не возрастание, как в прямом эффекте.

В чем отличие?

Прежде чем закончить разговор об эффекте Комптона, зададимся вопросом: имеются ли какие-либо принципиальные различия между рассеянием фотона на свободном электроне и столкновением шаров? Рассмотрим, например, задачу, аналогичную обсуждавшейся ранее. Запишем относительное изменение энергии фотона при рассеянии:

$$\frac{|\Delta E|}{E}=\frac{h\nu-h\nu'}{h\nu}=1-\frac{c}{\nu\lambda'}=$$

$$=1-\frac{c}{\nu(c/\nu+\Delta\lambda)}=\frac{h\nu(1-\cos\theta)}{m_0c^2+h(1-\cos\theta)}.$$

На рисунке 6 показаны графики зависимости $|\Delta E|/h\nu$ от отношения $h\nu/m_0c^2$ для нескольких значений θ. Из рисунка видно, что кривые, описывающие рассеяние фотона, существенно отличаются от кривых на рисунке 2. Прежде всего, рассеяние на определенный угол $\theta\neq 0$ возможно при любом отношении $h\nu/mc^2$. Но главное — у кривых на рисунке 6 нет максимумов! Монотонность кривых означает, что с ростом энергии фотона все бо́льшая и бо́льшая ее часть передается при рассеянии электро́ну. Однако к пределу, равному единице, кривые приближаются лишь при $h\nu\to\infty$ — фотон не может полностью передать свою энергию электрону (в отличие от случая столкновения шаров равной массы).

В чем же причина столь существенного различия? В том, что фотон — особая частица, у которой масса покоя равна нулю. Фотон в покое не существует — он не может остановиться, как это делает шар, налетая на покоящийся шар равной массы.

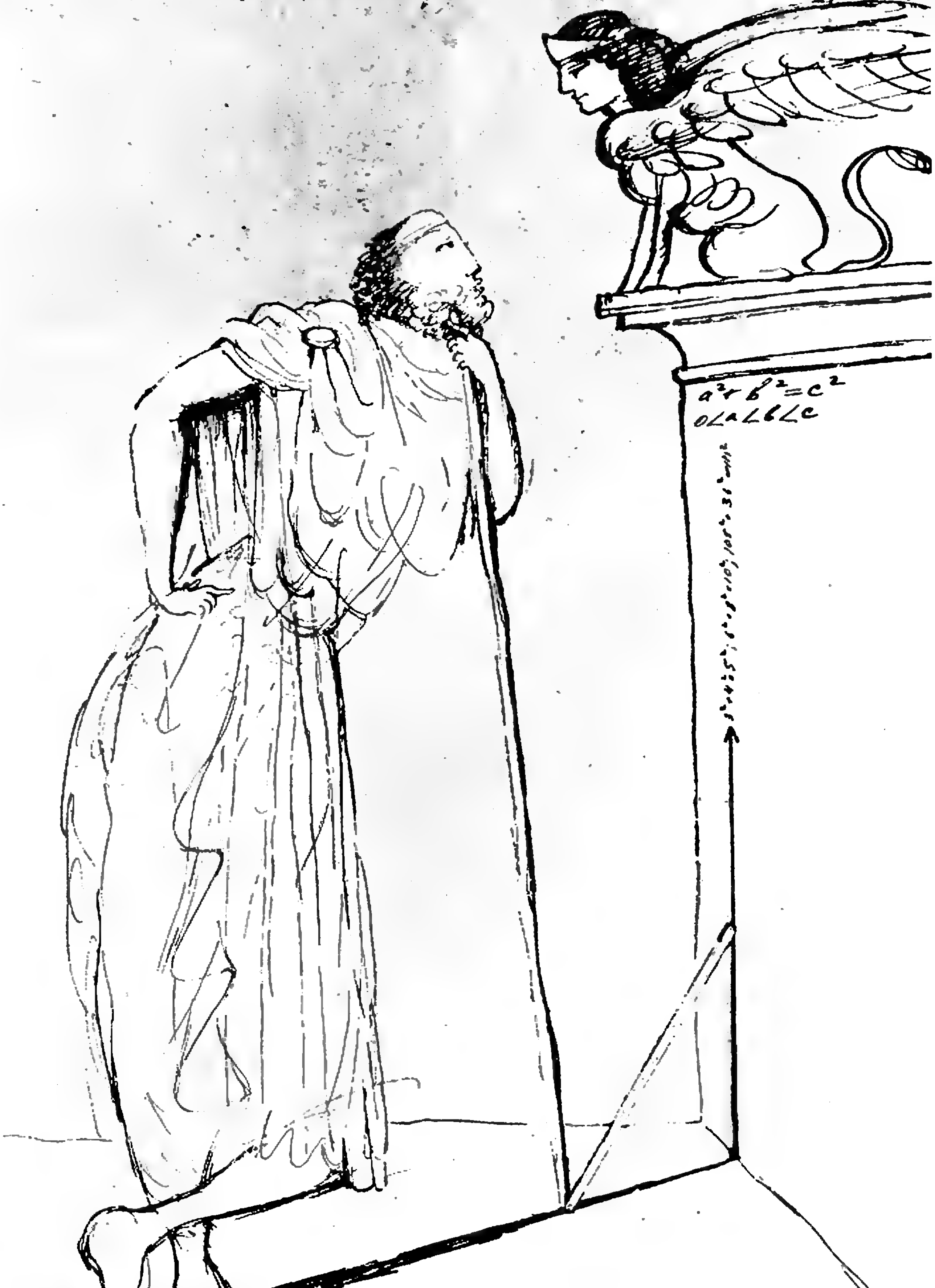
Таким образом, качественно понять эффект Комптона можно на основе аналогии со столкновением шаров, но детали эффекта вывести из аналогии нельзя, поскольку они определяются своеобразными свойствами фотона. Итак, прост ли эффект Комптона? Да, но простота эта оказывается... сложной.

---

*) Независимо от Рамана комбинационное рассеяние было открыто и объяснено советскими физиками Г. С. Ландсбергом и Л. И. Мандельштамом.

Всё — во всем. Однако в каждом — особым образом.

Прокл (V век новой эры)


$a^2+b^2=c^2$
$0<a<b<c$

О ЗАДАЧЕ ПИФАГОРА

Доктор физико-математических наук
С. М. ВОРОНИН.
А. Г. КУЛАГИН

В этой статье мы рассмотрим задачу о нахождении решений уравнения

$$\boxed{a^2+b^2=c^2} \qquad (1)$$

в натуральных числах. Частные решения этой задачи были найдены задолго до появления математики как науки. Так, древние вавилоняне знали решение $(a, b, c)=(3, 4, 5)$ и целый ряд других решений уравнения (1), в том числе такие сложные, как (105, 36, 111) или (12709, 13500, 18541). Хотя существуют различные точки зрения на математику догреческого периода, нет никаких оснований приписывать вавилонянам владение дедуктивным методом математики. Математика как дедуктивная наука появилась в VI веке до нашей эры в Древней Греции. Традиция связывает первые постановки математических задач в современном понимании с именем Пифагора. Вполне возможно, что математики древнего Египта и Вавилона могли бы вычислить число $\sqrt{2}$ с очень высокой точностью, но постановка вопроса о том, является ли $\sqrt{2}$ рациональным числом, была для них чужда. Точно так же для них была чужда постановка вопроса об описании всех решений уравнения (1). Вопрос этот был поставлен и решен в школе пифагорейцев.

Поэтому, а возможно, также из-за очевидных связей с геометрической теоремой Пифагора, уравнение (1) называется *задачей Пифагора*, а тройки натуральных чисел, удовлетворяющих этому уравнению, называются *пифагоровыми тройками*. Из теоремы Пифагора следует, что каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными катетами a, b и гипотенузой c соответствует некоторая пифагорова тройка такая, что $0<a<b<c$, и наоборот. Таким образом, задача Пифагора имеет прозрачный геометрический смысл (рис. 1).

Арифметический способ решения задачи Пифагора

Ясно, что если тройка натуральных чисел (a, b, c) является пифагоровой, то при положительном целом k тройка чисел (ka, kb, kc) также будет пифагоровой. Поэтому для решения задачи Пифагора нет нужды перечислять все пифагоровы тройки (a, b, c) — достаточно перечислить *примитивные* тройки, т. е. такие пифагоровы тройки (a, b, c), для которых нет ни одного целого $k>1$, делящего все три числа a, b, c без остатка.

А перебрать примитивные пифагоровы тройки совсем несложно. Для этого имеется простой рецепт, известный еще пифагорейцам; основанный на следующем утверждении:

> *если p и q — взаимно простые числа разной четности, $p>q$, то тройка чисел*
>
> $$a=p^2-q^2,\quad b=2pq,\quad c=p^2+q^2 \quad (*)$$
>
> *будет примитивной пифагоровой тройкой.*

Например, если взять $q=2\cdot3\cdot7=42$, $p=163$, то получим пифагорову тройку (24805, 13692, 28333).

Доказательство обведенного в рамку утверждения очевидно. Действительно, в силу (*)
$a^2+b^2=(p^2-q^2)^2+4p^2q^2=(p^2+q^2)^2=c^2$,
т. е. тройка (a, b, c) пифагорова. Она к тому же и примитивна: общий мно-

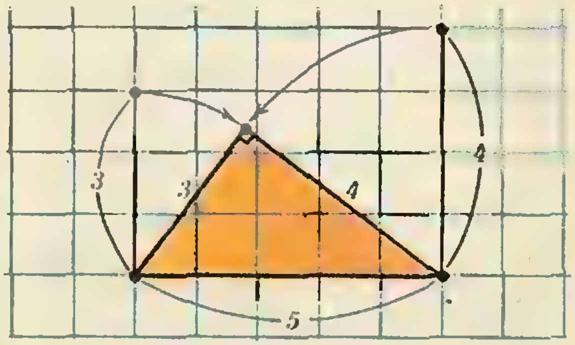


Рис. 1.

житель чисел a, b, c был бы общим множителем чисел $c+a=2p^2$ и $c-a=2q^2$, вопреки взаимной простоте p и q.

Мы доказали, что указанный способ всегда дает примитивную тройку. Оказывается, что:

> *Все пифагоровы тройки могут быть получены способом* (*).

Ниже мелким шрифтом приводится «арифметическое» доказательство этого замечательного факта; из доказательства видно, как можно было догадаться до формул (*). Читатели, не любящие арифметические рассуждения, могут сразу перейти к следующему, геометрическому разделу.

Пусть дана примитивная тройка (a, b, c). Условие примнтивности можно записать в виде равенства

$$\text{НОД}\,(a, b, c)=1, \tag{2}$$

где символ НОД, как обычно, обозначает *наибольший общий делитель* написанных вслед за ним чисел. Обратите внимание, что здесь имеются в виду делители, общие для всех трех чисел a, b, c, а не попарно общие делители. Так, из равенства (2) в общем случае не следует, что

$$\text{НОД}\,(a, b)=\text{НОД}\,(b, c)=\text{НОД}\,(c, a)=1, \tag{3}$$

однако *для любой примитивной пифагоровой тройки равенство* (3) *выполнено.* Действительно, пусть, например, $\text{НОД}\,(a, b)=k>1$. Тогда в силу (1) c^2 делится на k^2, значит, c делится на k, что невозможно в силу (2).

Заметим теперь, что *для любой примитивной тройки* (a, b, c) *числа a и b — разной четности.* Действительно, они оба не могут быть четными в силу (3). Если же они оба нечетны, скажем, $a=2k+1$, $b=2l+1$, то

$$a^2+b^2=4(k^2+l^2+k+l)+2,$$

т. е. a^2+b^2 делится на 2, но не на 4. Тогда в силу (1) c^2 обладает тем же свойством, значит, c четно ($c=2s$), и тогда $c^2=4s^2$ делится на 4 — противоречие!

Мы установили, что a и b — разной четности; для определенности будем считать, что a *нечетно; тогда b четно и c нечетно.*

Тогда уравнеиие (1) можно перепнсать в виде

$$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)=(2m)(2n)=4mn, \tag{4}$$

где m и n — натуральные числа (двойки появились вследствие четности чисел $c+a\ (=2m)$ и $c-a\ (=2n)$).

Лемма. *Числа m и n являются точными квадратами*

$$m=p^2,\ n=q^2$$

двух взаимно простых чисел p и q разной четности.

Доказательство леммы мы оставляем читателю. Указание: покажите, что m и n взаимно просты, воспользовавшись равенствами (3), разложите m и n иа простые множители и подставьте в (4).

Вспомнив, что $2m=c+a$ и $2n=c-a$, мы получаем

$$2p^2=c+a,\ 2q^2=c-a,$$

откуда $c=p^2+q^2$ и $a=p^2-q^2$. Воспользовавшись (1), получаем и $b=2pq$ — формулы (*) доказаны.

Геометрический способ решения задачи Пифагора

Следуя методу координат Р. Декарта, дадим уравнению (1) геометрическую интерпретацию. Пусть тройка чисел (a, b, c) удовлетворяет уравнению (1) и является примитивной. Все остальные решения этого уравнения будут получаться из примитивных умножением на натуральное число k, т. е. будут тройками вида (ka, kb, kc). Из уравнения (1) следует, что

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1. \tag{5}$$

Поскольку $a, b, c>0$ — целые числа, числа a/c и b/c будут рациональными числами. Поскольку $x^2+y^2=1$ есть уравнение окружности единичного радиуса, каждому примитивному решению (a, b, c) уравнения (1) соответствует точка с рациональными координатами ($x=a/c$; $y=b/c$), лежащая на окружности K с уравнением $x^2+y^2=1$. Точку с рациональными координатами будем в дальнейшем называть *рациональной точкой.* И наоборот, если у нас есть рациональная точка $(x; y)$ с координатами $x=m_1/n_1$ и $y=m_2/n_2$, лежащая на окружности K, то, приводя дроби m_1/n_1 и m_2/n_2 к наименьшему общему знаменателю $c>0$, получим равенство (5), которое дает нам примитивную тройку. Таким образом,

> *имеется взаимно однозначное соответствие между рациональными точками, лежащими на окружности K, и примитивными пифагоровыми тройками.*

Тем самым получена геометрическая формулировка задачи Пифагора, а именно: *найти все рациональные точки, лежащие на окружности K с уравнением $x^2+y^2=1$.*

Займемся вопросом о нахождении всех таких точек. Для этого будем проводить прямые (рис. 2) через точку $(x_1; y_1)=(-1; 0)$. Всякая прямая, проходящая через точку $(-1; 0)$ и не являющаяся касательной к окружности, пересечет окружность еще ровно в одной точке, скажем $(x_2; y_2)$. Уравнение каждой такой прямой

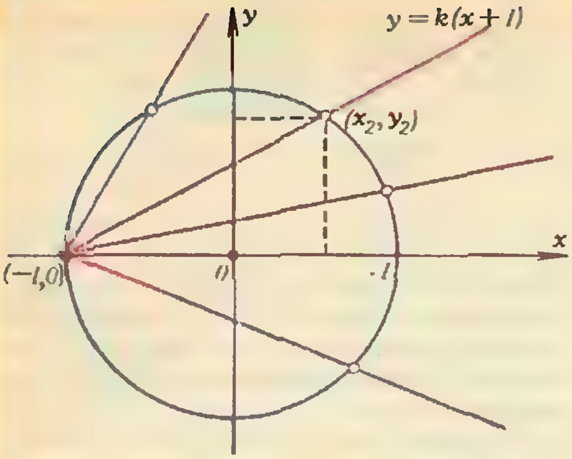


Рис. 2.

имеет вид

$$y=k\,(x+1),$$

где k — угловой коэффициент прямой.

Таким образом, координаты точки $(x_2;\ y_2)$ будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=k\,(x+1). \end{cases}$$

Решим эту систему относительно x и y. Подставляя значение $y=k\,(x+1)$ из второго уравнения в первое уравнение системы, получим

$$x^2+k^2\,(x+1)^2=1,$$

или

$$(1+k^2)\cdot x^2+2k^2\cdot x+k^2-1=0.$$

Если x удовлетворяет последнему уравнению, то x является абсциссой точки пересечения прямой $y=k\,(x+1)$ с окружностью K, т. е. либо $x=x_1=-1$, либо $x=x_2$. Из теоремы Виета следует, что

$$x_1+x_2=-\frac{2k^2}{1+k^2},$$

откуда

$$x_2=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Поскольку точка $(x_2;\ y_2)$ лежит на прямой $y=k\,(x+1)$,

$$y_2=\frac{2k}{1+k^2}.$$

Последние две формулы каждому числу k ставят в соответствие точку

$$(x_2;\ y_2)=\left(\frac{1-k^2}{1+k^2};\ \frac{2k}{1+k^2}\right), \qquad (6)$$

лежащую на окружности $x^2+y^2=1$. Обратно, каждой точке $(x;\ y)\neq(-1;\ 0)$, лежащей на окружности K, соответствует одно и только одно значение углового коэффициента k:

$$k=\frac{y}{x+1}. \qquad (7)$$

Заметим здесь, что если k — рациональное число, то точка $(x_2;\ y_2)$, определяемая формулой (6), имеет рациональные координаты, и обратно, если x_2 и y_2 рациональны, то в силу формулы (7) k рационально. Таким образом,

между точками с рациональными координатами окружности единичного радиуса (за исключением точки (—1; 0)) и рациональными точками вещественной прямой установлено взаимно однозначное соответствие.

Заставляя величину k пробегать все рациональные значения интервала от $-\infty$ до $+\infty$, мы переберем все точки с рациональными координатами на окружности K единичного радиуса (за исключением точки (—1; 0)) и тем самым найдем все примитивные решения задачи Пифагора.

Приведем соответствующие формулы. Пусть $k=p/q$, $q>0$, НОД $(p, q)=1$. Тогда из формулы (6) следует, что

$$\boxed{(x_2;\ y_2)=\left(\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2};\ \frac{2pq}{q^2+p^2}\right).} \qquad (**)$$

Мы вновь получили, по существу, формулы (*)! Чтобы получить тот же результат в точности, осталось немного повозиться с четностью.

В случае разной четности p и q формула (**) соответствует примитивной пифагоровой тройке $(a, b, c)=(q^2-p^2,\ 2pq,\ q^2+p^2)$. Если же p и q одновременно нечетные, то, переходя к новым переменным $q_1=(q+p)/2$, $p_1=(q-p)/2$, НОД $(p,\ q)=1$, получим $q^2+p^2=2(q_1^2+p_1^2)$, $q^2-p^2=4p_1q_1$, $2pq=2\,(q_1^2-p_1^2)$. После сокращения на 2 в (**) получим

$$(x_2;\ y_2)=\left(\frac{2q_1p_1}{q_1^2+p_1^2};\ \frac{q_1^2-p_1^2}{q_1^2+p_1^2}\right). \qquad (8)$$

Заметим, что формула (8) отличается от формулы (**) перестановкой x_2 и y_2. Если окажется, что p_1 и q_1 оба нечетны, то перейдем к переменным $q_2=(p_1+q_1)/2$, $p_2=(q_1-p_1)/2$, НОД $(q_2,\ p_2)=1$ и т. д. В итоге получим либо формулу типа (**), либо формулу типа (8), в которых p_n и q_n имеют разную четность, НОД $(p_n,\ q_n)=1$. Таким образом, примитивное решение, соответствующее рациональной точке $(x_2;\ y_2)\neq(-1;\ 0)$, задается либо формулой типа (**), либо формулой типа (8), в которых p и q — взаимно простые числа разной четности. В силу взаимно однозначного соответствия между примитивными решениями уравнения Пифагора и рациональными точками окружности $x^2+y^2=1$ (исключая точку (—1; 0)) из формул (**) и (8) следует утверждение (*).

Рациональная параметризация конических сечений

Для нахождения рациональных точек, лежащих на окружности с уравнением $x^2+y^2-1=0$, мы вывели формулу (6). Она устанавливает взаимно однозначное соответствие между параметром k, принимающим всевозможные действительные значения, и точками окружности (за исключением точки $(-1; 0)$), причем координаты $(x; y)$ точек, лежащих на окружности, являются рациональными функциями от k. Возникает вопрос: можно ли аналогичным образом задавать точки, лежащие на других кривых, скажем на эллипсе, параболе или гиперболе? (Эллипс, парабола и гипербола являются коническими сечениями; отсюда название этого раздела.)

Для ответа на этот вопрос рассмотрим кривую на плоскости, заданную уравнением $K(x, y)=0$, где $K(x, y)$ — квадратный многочлен от x и от y. Точки, лежащие на параболе, эллипсе и гиперболе, как раз удовлетворяют такого рода соотношению. Пусть $(x_1; y_1)$ — какая-нибудь фиксированная точка такой кривой. Проведем через эту точку прямую с угловым коэффициентом, равным k (рис. 3). Будем искать точки $(x; y)$ пересечения кривой и прямой. Координаты $(x; y)$ этих точек удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} K(x, y)=0, \\ y-y_1=k(x-x_1). \end{cases}$$

Решая эту систему относительно $(x; y)$ так же, как мы это делали раньше для окружности, выразим координаты $(x_2; y_2)$ второй точки пересечения прямой $y=y_1+k(x-x_1)$ с кривой K через параметр k. Легко проверить, что получится выражение вида

$$\boxed{(x_2; y_2)=\left(\frac{A(k)}{C(k)}; \frac{B(k)}{C(k)}\right),} \qquad (***)$$

где $A(k), B(k), C(k)$ — многочлены степени не выше 2 от параметра k. Эта формула задает *рациональную параметризацию* кривой K, т. е. выражает координаты точки на кривой через рациональные функции от одного параметра k.

Формула (***), как и формула (**), позволяет находить целые точки на кривой K. Однако сейчас нас интересует другое — совсем неожиданное — применение этой формулы, к которому мы переходим.

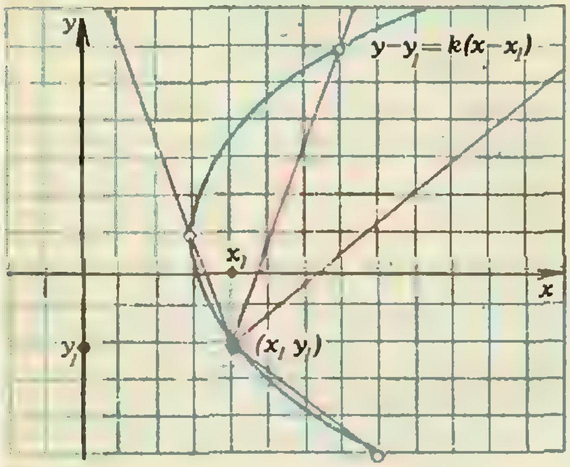


Рис. 3.

Применение к вычислению интегралов

Оказывается, что такие безнадежные с виду интегралы, как

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}},$$

берутся, если воспользоваться рациональной параметризацией подходяще выбранной кривой. Именно, если в данном случае взять кривую

$$K(x, y)=y^2-(x^2+3x-4),$$

заметить, что точка $(x_1; y_1)=(-4; 0)$ лежит на кривой

$$y(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$$

и рассмотреть всевозможные прямые

$$y=k(x+4),$$

то получится следующая параметризация (проделайте выкладки самостоятельно!):

$$(x; y)=\left(\frac{1+4k^2}{1-k^2}; \frac{5k}{1-k^2}\right).$$

Тогда $dx=\frac{10k}{(1-k^2)^2}\,dk$, и поэтому (после сокращений) получим

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{dx}{y(x)}=\int\frac{2dk}{1-k^2}.$$

Последний интеграл уже легко вычислить:

$$\int\frac{2dk}{1-k^2}=\int\frac{dk}{1-k}+\int\frac{dk}{1+k}=$$
$$=\ln|1+k|-\ln|1-k|+C=$$
$$=\ln\left|\frac{1+k}{1-k}\right|+C.$$

(Окончание см. на с. 28)

Задачник „Кванта"

Задачи

M1021—M1025; Ф1033—Ф1037

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 марта 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1 — 87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1021, M1022» или «Ф1033». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике»

M1021. Альпинист хочет подняться на скалу высотой 1000 м. После ночевки в лагере у подножья скалы он может подниматься, навешивая веревку, со скоростью 40 метров в час, а после холодной ночевки на скале — 30 метров в час. По готовой веревке он поднимается со скоростью 400 метров в час. За сколько дней он сможет достичь вершины, если будет работать на скале (включая подъем по веревке) 6 часов в день? (Временем спуска и других операций пренебречь.)

M1022. Первые 8 натуральных чисел можно расставить в две строки так, что сумма чисел в верхней строке равна сумме чисел в нижней, а суммы чисел в столбцах также равны между собой. Можно ли расставить подобным образом первые а) десять, б) двенадцать натуральных чисел?

1	4	6	7
8	5	3	2

в) При каких натуральных n можно расставить таким образом числа от 1 до $2n$?

М. И. Штеренберг

M1023. Всегда ли из 100 треугольников найдется хотя бы один такой, что его можно целиком покрыть остальными 99?

Г. А. Гуревич

M1024*. Докажите, что для любых двух треугольников с углами α, β, γ и α_1, β_1, γ_1 выполнено неравенство

$$\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma_1}\leqslant \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma.$$

Р. П. Ушаков

M1025*. Две прямые, проведенные через одну и другую точку пересечения продолжений противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разрезают его на четыре меньших четырехугольника. Докажите, что если в два из них, не имеющие общей стороны, можно вписать окружности, то и в исходный четырехугольник можно вписать окружность.

И. Ф. Шарыгин

Ф1033. Через блок радиусом R перекинут однородный гибкий канат массой m и длиной l, прикрепленный к двум крюкам на потолке, расположенным на расстоянии $2R$ (рис. 1). На оси блока висит груз, масса которого вместе с блоком M. Трение между канатом и блоком отсутствует. Найти минимальную силу натяжения каната.

В. И. Чивилев

Ф1034. Моль идеального газа из начального состояния *1* с температурой $T_1=100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в состояние *2* (рис. 2). Этот переход происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в процессе $2\to3$, в котором давление является линейной функцией объема, и наконец, в изохорическом процессе $3\to1$ газ возвращается в исходное состояние. Найти работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе $1\to2$, если в процессах $2\to3\to1$ к газу в итоге подведено Q 72 Дж тепла. Изили «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя пишите, пожалуйста, печатными буквами.

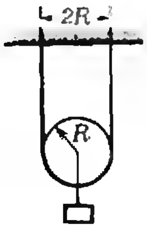


Рис. 1.

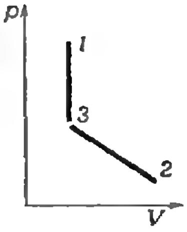


Рис. 2.

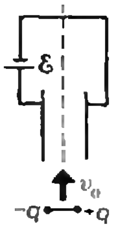


Рис. 3.

вестно также, что $T_2=T_3$, $V_2=3V_1$; газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

А. А. Шеронов

Ф1035. Электрический диполь из двух жестко связанных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, пролетает плоский конденсатор, пластины которого подключены к источнику с ЭДС $\mathscr{E}$ (рис. 3). Определите скорость диполя в центре конденсатора, если известно, что его скорость вдали от конденсатора равна v_0. Расстояние между пластинами конденсатора d, масса диполя m. Силой тяжести пренебречь.

А. В. Шелагин

Ф1036. К телу массой $m=20$ г, лежащему на гладком горизонтальном полу, привязаны две одинаковые упругие нити жесткостью $k=10^4$ Н/м. Одна нить прикреплена к стене, свободный конец второй нити начинают тянуть в горизонтальном направлении со скоростью $v=10$ м/с. Какая нить порвется, если разрыв каждой нити происходит при абсолютном удлинении $\Delta l_{\text{пр}}=5$ см? Считать, что закон Гука выполняется для нитей вплоть до их разрыва; трения нет.

Е. П. Соколов

Ф1037. В полой сфере проделано маленькое отверстие, через которое внутрь проникает узкий параллельный пучок света. Внутренняя поверхность сферы отражает свет во все стороны одинаково (диффузно) и не поглощает его. Как будут различаться в этом случае освещенности в точке, диаметрально противоположной отверстию, и во всех остальных точках сферы?

Problems

M1021—M1025; P1033—P1037

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 15th 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 31/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KWANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclo-

M1021. A mountain climber intends to go up a sheer rock wall of 1000 m. After spending a warm night in camp near the wall's base, he climbs up, hanging up ropes, with vertical velocity 40 m per hour. After a cold night on the wall itself, his velocity decreases to 30 m per hour. When the ropes are already hanging, he climbs 400 m per hour. How many days will he take to reach the top if he is able to work 6 hours a day on the wall. (The time for climbing down and other operations is negligible).

M1022. The first 8 natural numbers may be written in two rows (see the table on p. 15) so that the sum of numbers in the upper row equals that in the lower one, and the column sums are also equal to each other. Can the first a) ten, b) twelve natural numbers be arranged in this way?

c) For what natural n can the numbers 1 to $2n$ be arranged this way?

M. I. Shterenberg

M1023. Is it always possible to find one triangle among any 100 which can be covered entirely by the other 99?

G. A. Gurevich

M1024*. Prove that for any two triangles with angles α, β, γ and α_1, β_1, γ_1 the following inequality holds

$$\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma}\leqslant \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma.$$

R. P. Ushakov

M1025*. Two straight lines, passing each through one of two different intersection points of the extended sides of a convex quadrilateral, divide it into four lesser quadrilaterals. Show that if circles can be inscribed into two of them (not having a common se an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

side) then a circle can be inscribed into the original quadrilateral.

I. F. Sharygin

P1033. A uniform flexible cable of mass m and length l is thrown over a pulley of radius R, fixed to the ceiling by two hooks located at the distance $2R$ from each other (see figure Рис. 1). A weight hangs on the pulley's axis, its mass (together with that of the pulley) being M. There is no friction between the cable and the pulley. Find the minimal tension in the cable.

V. I. Chivilev

P1034. One mole of ideal gas in the initial state *1* with temperature $T_1=100$ K, expanding by means of a turbine into an empty vessel, performs a certain amount of work, passing into state *2* (see figure Рис. 2). This transfer takes place without addition or loss of heat. Then the gas is compressed in the process $2\to3$, in which the pressure is a linear function of volume, and finally in the isochoric process $3\to1$ the gas returns to its initial state. Find the work performed by the gas in expanding via the turbine in the transfer $1\to2$ if the total amount of heat added to the gas in the processes $2\to3\to1$ is $Q=72$ J. It is also known that $T_2=T_3$, $V_2=3V_1$; the gas constant is $R=8.31$ J/ (mole · K).

A. A. Sheronov

P1035. An electric dipole of two rigidly connected point charges $+q$ and $-q$ located at the distance l from each other flies through a flat capacitor whose plates are connected to a source of constant E. M. F. $\mathscr{E}$. Determine the velocity of the dipole in the centre of the capacitor, if it is known that it equals v_0 far away from the latter. The distance between the plates of the capacitor is d, the mass of the dipole is m. The gravitational force is negligible.

A. V. Shelagin

P1036. Two identical inelastic strings of rigidity $k=10^4$ N/m are tied to a body of mass $m=20$ g placed on a smooth horizontal floor. One string is fixed to the wall, the free end of the other is pulled horizontally with velocity $v=10$ m/s. Which string will rip, if the ripping takes place at absolute length increase $\Delta l=5$ cm? Assume that Hooke's law holds for the strings up to the moment of ripping; there is no friction.

E. P. Sokolov

P1037. A narrow beam of parallel light rays penetrates through a little hole into a hollow sphere. The inner surface reflects light identically in all directions (diffusely) and does not absorb light. How will the illumination at the point diametrically opposed to the hole differ from that of the other inner points of the sphere?

Решения задач

M1001, M1003*)—M1005; Ф1013—Ф1016

M1001. *В куче 1001 камень. Она произвольно делится на две кучи, подсчитывается число камней в них и записывается произведение этих двух чисел. Затем с одной из этих куч (в которой больше одного камня) проделывается та же операция: она делится на две и записывается произведение чисел камней в двух вновь образовавшихся кучах. Затем*

Ответ: 500500. Этот ответ легко угадать: если при каждой операции снимать с одной и той же кучи один камень, то искомая сумма окажется равной $1000+999+\ldots+1=(1000\cdot1001)/2$. Докажем индукцией по числу n камней в куче ($n\geqslant2$), что независимо от способа разбиения рассматриваемая сумма $S(n)$ будет равна $(n-1)+(n-2)+\ldots+1=(n-1)n/2$.

При $n=2$ это очевидно. Пусть известно, что $S(k)=(k-1)k/2$ при всех $k<n$. Если на первом шагу куча из n камней была разделена на кучи из k и l камней ($k+l=n$), то независимо от порядка дальнейших разбиений по предположению индукции

$$S(n)=kl+S(k)+S(l)=kl+(k-1)k/2+(l-1)l/2=$$
$$=((2kl+k^2+l^2)-(k+l))/2=(n-1)n/2,$$

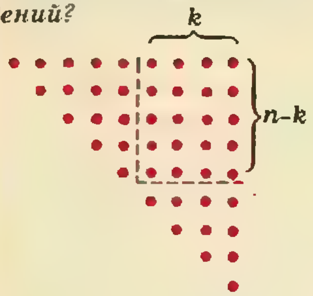
что и требовалось.

У этой задачи есть также красивые решения без индукции.

---

*) Решение задачи M1002 будет опубликовано в следующем номере журнала.

та же операция повторяется с одной из трех получившихся куч и так далее, пока во всех кучах не станет по одному камню. Чему равняется сумма 1000 записанных произведений?



M1003. *В треугольнике ABC проведены три высоты AH, BK, CL. Докажите равенства*

$$AK\cdot BL\cdot CH=AL\cdot BH\cdot CK=HK\cdot KL\cdot LH.$$

M1004. *Через вершину A треугольника ABC, в котором $AB\neq AC$, проводятся всевозможные прямые. Докажите, что*

а) на каждой из них найдется не более одной точки M, отличной от вершин треугольника, для которой $\angle ABM=\angle ACM$;

б) имеется не более пяти из этих прямых, на которых нет ни одной такой точки M.

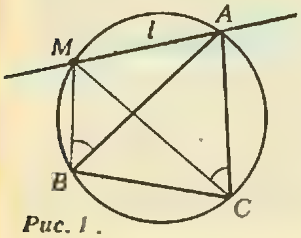


Рис. 1.

Одно показано на рисунке (в верхнем ряду n красных точек, а всего в треугольнике $n+(n-1)+\ldots+1=n(n-1)/2$ красных точек). Разбивая кучу из n камней на две из k и $n-k$ камней, отделяем пунктиром прямоугольник, содержащий $k(n-k)$ красных точек. Ясно, что повторяя эту процедуру мы учтем по разу все красные точки.

Еще одно, пожалуй, самое красивое решение. Свяжем вначале все камни попарно нитями (их будет столько, сколько пар камней). Разбивая очередную кучу на две, будем разрезать все нити, связывающие камни из двух образующихся при этом кучек — число таких нитей равно как раз произведению чисел камней в образующихся кучах. Поэтому итоговая сумма произведений будет равна числу нитей.

А. С. Меркурьев

Пусть углы при вершинах A, B, C данного треугольника равны соответственно α, β, γ. Тогда $AK=AB|\cos\alpha|$, $AL=AC|\cos\alpha|$ (знак модуля предусматривает случай тупого угла α; см. рис. 1, 2), следовательно, треугольник AKL подобен треугольнику ABC с коэффициентом $|\cos\alpha|$ и $KL=BC|\cos\alpha|$. Подставляя в равенства из условия задачи эти выражения и аналогичные выражения через стороны и углы данного треугольника остальных отрезков, входящих в эти равенства, получим, что все три рассматриваемые произведения равны $AB\cdot BC\cdot CA\cdot|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|$.

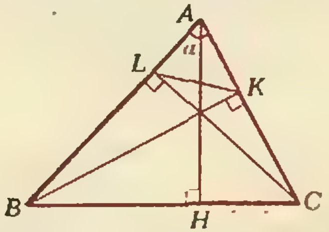


Рис. 1.

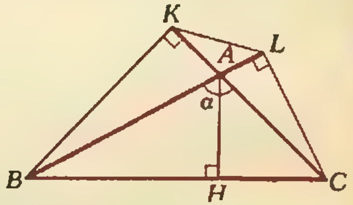


Рис. 2.

С. А. Генкин

а), б) Рассмотрим три случая расположения прямой l, проходящей через A.

1) *Прямая l содержит вершину B или C.* В этом случае, очевидно, искомых точек на ней нет ($\angle ABM$ может равняться $\angle ACM$ только при $M=A$).

2) *Точки B и C лежат по одну сторону от l* (рис. 1). Тогда из равенства $\angle ABM=\angle ACM$ следует, что точки A, B, C и M лежат на одной окружности, то есть M есть отличная от A точка пересечения описанной окружности треугольника ABC с прямой l. Такой точки не существует, если прямая l касается окружности ABC. Для всех остальных рассматриваемых здесь прямых точка M существует и единственна.

3) *Точки B и C лежат по разные стороны от l.* Пусть B_1 — точка, симметричная B относительно l. Если она не лежит на прямой AC (рис. 2), то треугольник ABC можно заменить на AB_1C ($\angle ABM=\angle AB_1M$ для всех точек M прямой l), причем B_1 и C лежат уже по одну сторону от l. Теперь из сказанного в случае 2) следует, что на любой прямой l имеется не более одной искомой точки, и более того, этих точек нет только тогда, когда l касается описанной окружности треугольника AB_1C. Пусть l — такая прямая (рис. 3).

Продолжим прямую BA до пересечения с окружностью AB_1C в еще одной точке B_2. Ясно, что хорды AB_1 и AB_2 образуют равные углы с касательной l, следовательно, они равны между собой, то есть $AB_2=AB$. Таким образом, исключительная прямая здесь только одна — касательная к окружности AB_2C, где B_2 — точка, симметричная B относительно точки A. Наконец, если точка B_1 попадает на прямую AC, то есть l — биссектриса угла BAC, то равенство $\angle AB_1M=\angle ACM$ при $M\neq A$ невозможно (поскольку $AB_1=AB\neq AC$).

Ита́к, мы доказали, что на всех прямых, за исключением пяти (AB и AC, касательных к окружностям ABC и AB_2C и биссектрисы угла BAC), имеется ровно одна искомая точка M.

О. Р. Мусин

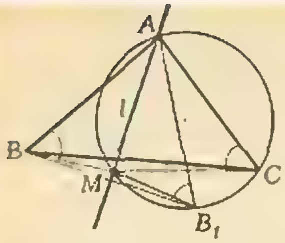


Рис. 2.

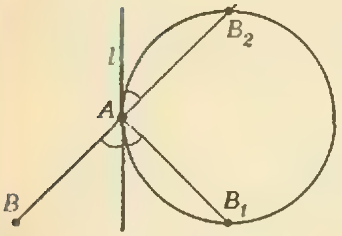


Рис. 3.

М1005. *Клетки квадратной таблицы размером $n\times n$ ($n\geqslant 3$) заполняются числами ± 1 по следующим правилам:*

1) во все граничные клетки таблицы помещаются числа — 1;

2) число, помещаемое в очередную незаполненную клетку таблицы, равно произведению ближайших к этой клетке чисел, расположенных по разные стороны от нее и лежащих или в одной строке с ней, или в одном столбце с ней. Так делается до тех пор, пока все пустые клетки таблицы не будут заполнены.

а) Какое наибольшее количество $+1$ может получиться в таблице?

б) Какое наименьшее количество $+1$ может получиться в таблице?

а) Ответ: 1 при $n=3$, $(n-2)^2-1$ при $n\geqslant 4$. При $n=3$ в единственную свободную клетку ставится $+1$. Пусть далее $n\geqslant 4$.

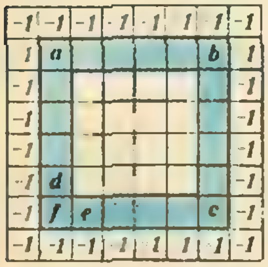
Покажем, что хотя бы в одну клетку, а точнее, хотя бы в одну клетку голубой «рамки» на рисунке будет вписана -1. Допустим, что все числа в рамке равны $+1$. Выберем тот из углов рамки, который заполнялся последним; пусть это будет левый нижний угол. Слева и снизу от него стоят числа -1, а справа и сверху — числа $+1$ (соседние углы рамки уже заполнены!), следовательно, в этот угол можно вписать только -1. Это противоречит нашему предположению, поэтому в таблице не более $(n-2)^2-1$ чисел $+1$.

Если заполнять таблицу в следующем порядке: сначала клетки a и b (см. рисунок), выбирая сомножители по столбцу, потом клетки c и d по строке, а потом e — снова по столбцу, мы поставим во все эти клетки $+1$. Пользуясь ими, можно поставить $+1$ во все клетки рамки, кроме клетки f. После этого все клетки внутри рамки будут заполнены числами $+1$. При таком заполнении мы получим ровно $(n-2)^2-1$ чисел $+1$.

б) Ответ: $n-2$. Допустим, что количество чисел $+1$ в таблице оказалось меньше, чем $n-2$. Тогда найдутся строка и столбец, заполненные сплошь числами -1. Но это невозможно, поскольку клетка, стоящая на их пересечении, при заполнении таблицы все время была бы окружена со всех четырех сторон числами -1, а значит, в нее можно было бы вписать только $+1$.

Таким образом, в таблице всегда не меньше, чем $n-2$ чисел $+1$. Пример заполнения, при котором получается ровно $n-2$ чисел $+1$, строится так: будем вписывать числа построчно, выбирая сомножители по столбцам в следующем порядке — сначала заполним 2-ю строку, затем $(n-1)$-ю, $(n-2)$-ю, ..., 3-ю. В результате во 2-й строке все числа (кроме крайних) будут равны $+1$, а все остальные числа таблицы будут равны -1.

Н. Х. Агаханов

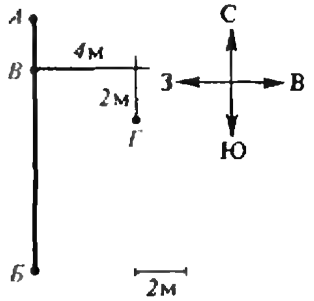


-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1
1	a					b	1
-1							-1
-1							-1
-1							-1
-1	d						-1
-1	f	e				c	-1
-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1

Ф1013. *Два спортсмена стоят в точках А и Б и держат резиновый шнур.*

Во время движения в любой момент времени шнур натянут равномерно, и следовательно, отношение расстояний от узла B до концов шнура с течением

По сигналу спортсмен А начинает двигаться на восток со скоростью $v_0=1$ м/с, а спортсмен Б — на юг с постоянным ускорением. Найдите это ускорение, если известно, что узел В, завязанный на шнуре, при движении прошел через точку Г (масштаб указан на рисунке).



времени меняться не будет. Из рисунка находим, что в начальный момент это отношение равно

$$|AB| : |BБ| = 1 : 4.$$

Очевидно, что смещение Δx узла на восток определяется смещением ΔS_1 бегуна A и в любой момент составляет 4/5 от этого смещения, т. е.

$$\Delta x = \frac{4}{5}\,\Delta S_1 = \frac{4}{5}\,v_0 t.$$

Пользуясь масштабом, приведенным на рисунке, находим, что точка $Г$ смещена на восток от точки $В$ на $\Delta x=4$ м. Следовательно, узел прошел точку $Г$ через время

$$t=\frac{5}{4}\,\frac{\Delta x}{v_0}=5\ \text{с}$$

после начала движения бегунов.

Смещение Δy узла на юг определяется смещением ΔS_y бегуна $Б$, и в любой момент $\Delta y=\frac{1}{5}\,\Delta S$. Пользуясь масштабом, находим, что за время $t=5$ с узел сместился от начального положения (т. $В$) на юг на $\Delta y=2$ м. Следовательно, бегун $Б$, двигаясь с ускорением a, за $t=5$ с прошел путь $\Delta S_y=5\Delta y=10$ м, т. е.

$$\frac{1}{2}\,at^2=\Delta S_y \Rightarrow a=2\,\frac{\Delta S_y}{t^2}=\frac{20}{25}\ \text{м/с}^2=0{,}8\ \text{м/с}^2.$$

С. С. Кротов

Ф1014. *Мощный транзистор, выделяющий тепло, закреплен на теплоотводящей пластине, обдуваемой воздухом, температура которого равна 30 °С. На рисунке показано распределение температур на пластине. Определите рассеиваемую мощность. Известно, что равномерно нагретая до 70 °С пластина рассеивает мощность $P=10$ Вт при температуре воздуха 20 °С. Теплоотдача пропорциональна разности температур пластины и воздуха.*

Разобьем пластину на одинаковые маленькие участки (на рисунке таких участков 130). Понятно, что мощность P, рассеиваемая пластиной, равна сумме Σp_i мощностей, рассеиваемых отдельными участками.

Мощность, которая уносится с каждого участка, равна

$$p_i = p_0\cdot\Delta t_i,$$

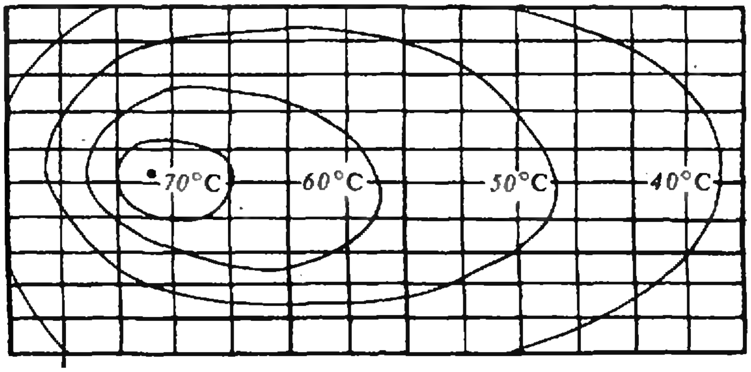
где Δt_i — разность температур участка и воздуха, p_0 — коэффициент пропорциональности. Известно, что при температуре воздуха $t_{\text{в}1}=20$ °С с пластины, равномерно нагретой до $t_1=70$ °С, уносится мощность $P=10$ Вт. При этом с каждого участка уносится одна и та же мощность

$$p=\frac{P}{130}=p_0(t_1-t_{\text{п}1}).$$

Отсюда находим p_0:

$$p_0=\frac{P}{130(t_1-t_{\text{п}1})}=\frac{10}{130\cdot 50}\ \text{Вт/град}=1{,}54\cdot 10^{-3}\ \text{Вт/град}.$$

Для оценки мощности, рассеиваемой неравномерно нагретой пластиной при температуре воздуха 30 °С,



будем считать, что температура участков, лежащих между изотермами 60 °C и 70 °C, равна 65 °C (для этих участков $\Delta t = 35$ °C), между изотермами 60 °C и 50 °C — 55 °C ($\Delta t = 25$ °C), и т. д. Тогда полную мощность, рассеиваемую пластиной, можно найти так:

$$P_1 \approx 1{,}54 \cdot 10^{-3}(45 \cdot 4 + 35 \cdot 17 + 25 \cdot 30 + 15 \cdot 60 + 5 \cdot 20)\,\text{Вт} = 1{,}54 \cdot 10^{-3} \cdot 2525\ \text{Вт} \approx 3{,}9\ \text{Вт}.$$

Для оценки точности этого результата можно посмотреть, как влияет на результат неточность оценки температуры «долей» пластины. Возьмем вместо 65 °C — 67,5 °C, вместо 55 °C — 57,5 °C и т. д. Тогда

$$P_{\text{верх}} \approx 1{,}54 \cdot 10^{-3}(47{,}5 \cdot 4 + 37{,}5 \cdot 17 + 27{,}5 \cdot 30 + 17{,}5 \cdot 60 + 7{,}5 \cdot 20) \approx 4{,}4\ \text{Вт}.$$

Оценку сразу получим, взяв заниженные температуры:

$$P_{\text{ниж}} \approx 1{,}54 \cdot 10^{-3}(42{,}5 \cdot 4 + 32{,}5 \cdot 17 + 22{,}5 \cdot 30 + 12{,}5 \cdot 60 + 2{,}5 \cdot 20) \approx 3{,}4\ \text{Вт}.$$

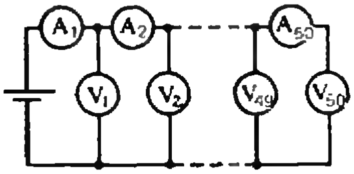
Итак,

$$P_1 \approx (3{,}9 \pm 0{,}5)\,\text{Вт}.$$

Конечно, мы сильно «завысили» возможную неточность определения температуры. Однако нужно понимать, что эта неточность — не единственная (да и не самая важная) причина погрешностей нашего расчета. Условие задачи идеализировано, оно не учитывает конвекции воздуха, которая сильно меняет результат.

А. Р. Зильберман

Ф1015. *Схема, приведенная на рисунке, содержит 50 разных амперметров и 50 одинаковых вольтметров. Показания первого вольтметра $U_1 = 9{,}6$ В, первого амперметра — $I_1 = 9{,}5$ мА, второго амперметра — $I_2 = 9{,}2$ мА. Определите по этим данным сумму показаний всех вольтметров.*



Ток, текущий через амперметр A_1, равен сумме токов, текущих через вольтметр V_1 и амперметр A_2, т. е.

$$I_1 = I_{V_1} + I_2;$$

следовательно, ток, текущий через вольтметр V_1, равен

$$I_{V_1} = I_1 - I_2 = 0{,}3\ \text{мА},$$

и сопротивление вольтметра —

$$R = \frac{U_1}{I_{V_1}} = \frac{9{,}6}{0{,}3 \cdot 10^{-3}}\ \text{Ом} = 32\ \text{кОм}.$$

По условию задачи все вольтметры одинаковые, т. е. сопротивление каждого из них 32 кОм.

Запишем сумму напряжений, показываемых всеми вольтметрами:

$$\sum_{i=1}^{50} U_{V_i} = \sum_{i=1}^{50} I_{V_i} R = R \sum_{i=1}^{50} I_{V_i}.$$

Но $\sum\limits_{i=1}^{50} I_{V_i}$ — это ток, текущий через амперметр A_1, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{50} I_{V_i} = I_1$. Поэтому

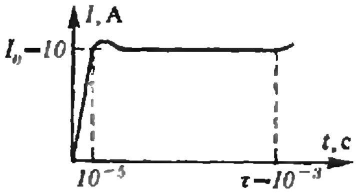
$$\sum_{i=1}^{50} U_{V_i} = RI_1 = 304\ \text{В}.$$

А. Р. Зильберман

Ф1016. *В катушку может свободно втягиваться ферромагнитный сердечник массой $M = 0{,}01$ кг. Катуш-*

При втягивании ферромагнитного сердечника в катушку меняется индуктивность катушки. В этом случае закон электромагнитной индукции должен быть записан следующим образом:

ку подключили к источнику с напряжением $U = 100$ В, и через нее протек ток, показанный на графике на рисунке. Оцените начальную индуктивность катушки. Пренебрегая потерями, найдите скорость сердечника в момент $\tau = 10^{-1}$ с.



$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = U.$$

Здесь L — индуктивность катушки, зависящая от времени, I — ток в катушке, который также зависит от времени. Поэтому

$$\frac{d(LI)}{dt} = I\frac{dL}{dt} + L\frac{dI}{dt} = U. \qquad (*)$$

В начальный период, когда сердечник еще не сдвинулся с места, можно считать, что индуктивность не меняется. Тогда $\frac{dL}{dt} = 0$, и уравнение (*) имеет вид

$$L_0\frac{dI}{dt} = U,$$

где L_0 — начальная индуктивность катушки. Из графика находим, что в этот период $\frac{dI}{dt} = 10^6\ \frac{\text{А}}{\text{с}}$. Следовательно,

$$L_0 = \frac{100\ \text{В}}{10^6\ \text{А/с}} = 10^{-4}\ \text{Гн}.$$

Величина L_0 достаточно мала, чтобы в дальнейшем ее не учитывать (тем более что ток, как видно из графика, в дальнейшем меняется очень мало). Поэтому при $t > 10^{-5}$ с уравнение (*) принимает следующий вид:

$$I\frac{dL}{dt} = U.$$

Отсюда видно, что L будет расти линейно со временем, поскольку $U = 100$ В $=$ const и $I = 10$ А $=$ const:

$$L = \frac{U}{I}t.$$

В момент $t = \tau = 10^{-3}$ с

$$L_\tau = \frac{100}{10}\cdot 10^{-1}\ \text{Гн} = 10^{-2}\ \text{Гн}.$$

Найдем скорость сердечника в этот момент. Пренебрегая потерями, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} + L_\tau\frac{I^2}{2} = IU\tau,$$

где $IU\tau$ — работа источника за время $\tau = 10^{-3}$ с, $L_\tau I^2/2$ — электромагнитная энергия катушки, $mv_1^2/2$ — кинетическая энергия ферромагнитного сердечника. Отсюда находим v:

$$v = \sqrt{\frac{2IU\tau - L_\tau I^2}{m}} = 10\ \text{м/с}.$$

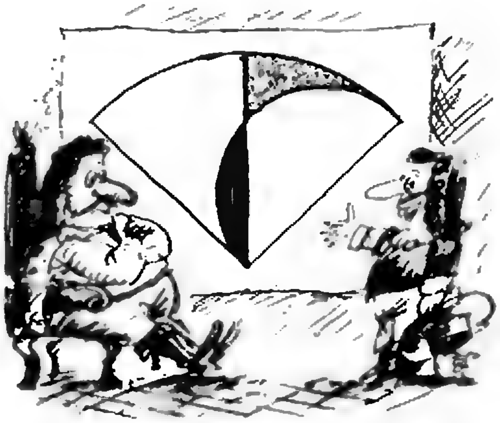
По решению этой задачи необходимо сделать некоторые замечания. Эта задача относится к так называемым «оценочным» задачам, в которых, как правило, некоторые величины задаются приблизительно или их надо найти из графика, другие необходимо найти приближенно, пренебрегая какими-то малыми величинами. В данной задаче мы не учитывали активное сопротивление источника, потери в сердечнике на токи Фуко; не учитывали, что ток в сердечнике после первого скачка не будет постоянным во времени, а будет немного меняться; ну и конечно, мы не рассматривали переходный процесс от малой индуктивности к большой. Точное решение этой задачи достаточно сложно; однако полученные нами оценки близки к реальным величинам.

В. Е. Скороваров

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Король Артур заказал художнику рисунок для своего щита, имеющего форму четверти круга, с просьбой окрасить его в три цвета: желтый — цвет доброты, красный — храбрости и синий — мудрости. Когда художник принес рисунок, оруженосец сказал, что на рисунке храбрости больше, чем ума. Однако художник смог доказать, что там того и другого поровну. Как?



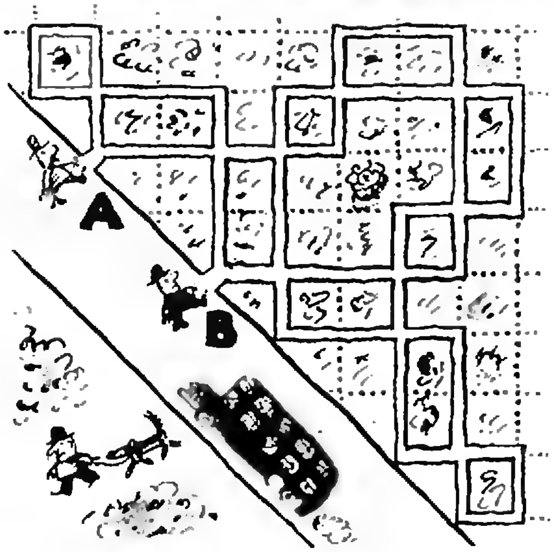
2. Решите числовой ребус, записанный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

$$\begin{array}{rr} & \text{ШЕПНУЛ} \\ + & \text{ШЕПНУЛ} \\ & \text{ШЕПНУЛ} \\ & \text{ШЕПНУЛ} \\ & \text{ШЕПНУЛ} \\ \hline & \text{КРИКНУЛ} \end{array}$$

3. Однажды я заблудился в лесу. Уже собирался остановиться, чтобы развести костер и заночевать, как споткнулся о водопроводную трубу. Ясно, что нужно идти вдоль трубы, но в какую сторону? Туда, куда течет вода, ведь она течет к людям. А как определить, куда течет вода?

4. Урожай фруктов в этом году был отличный. Мы наварили 19 банок варенья. Я расставил их на трех полках в погребе так, чтобы на каждой полке стояло одинаковое количество литров варенья. На первую полку я поставил одну большую и четыре средние банки, на вторую — две большие и шесть литровых банок, а на третью — одну большую, три средних и три литровых банки. Сколько литров варенья мы сварили?

5. Два джентльмена были чрезвычайно схожи в своих привычках и видимо поэтому терпеть друг друга не могли. Однажды, прогуливаясь по улице, они увидели друг друга и одновременно свернули в парк: один в ворота *А* (см. рисунок), второй — в ворота *В*. Каждый решил обойти этот хорошо знакомый им парк, пройдя ровно по одному разу по каждой дорожке. Покажите, что если они все время будут двигаться с одинаковыми скоростями, то непременно встретятся.



Эти задачи нам предложили *А. П. Савин*, ученик 9 класса Кармелавской средней школы Лит. ССР *Герман Сафин*, *М. И. Лобак*, *В. Д. Вьюн*, *В. В. Произволов*.

НА КРУГИ СВОИ

А что будет, если...

Кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН

В детстве я очень любил калейдоскоп. Глядишь в волшебную трубочку и видишь великолепную мозаику. Небольшой поворот — и новый узор, еще поворот — и опять новый и новый узор.

Когда мне в руки впервые попал кубик Рубика, то мне сначала было интересно просто покрутить его, как раньше я крутил калейдоскоп, полюбоваться возникающей игрой красок на его гранях. Однако бессистемное кручение вскоре мне наскучило. После нескольких часов попыток самостоятельно открыть «рецепт» собирания кубика я достал номер «Кванта» *) и, потратив еще около часа, кубик собрал.

Теперь я начал обращаться с кубиком осторожнее, чтобы его можно было легко вернуть в «собранное» положение. Покрутил одну грань раз (рис. 1), еще раз, еще и еще — кубик вновь собран.

А что будет, если вертеть по очереди две соседние грани, скажем, в одну и ту же сторону? Первая-вторая раз, первая-вторая два, первая-вторая три... (рис. 2). В это время я уже знал, что через несколько пар вращений кубик вновь «соберется». У меня начали уставать пальцы, я сбивался со счета, а кубик все не «собирался». Лишь после 105 пар вращений кубик собрал свои цвета на гранях.

Но откуда я знал, что такой момент наступит? Просто перед этим я немного порассуждал. Различных положений у кубика хотя и много, но конечное число. Раз так, то он не может всякий раз оказываться в новом положении, рано или поздно появится положение, в котором кубик уже был. Обозначим такое положение буквой A, а «собранное» положение буквой E (рис. 3, с. 27). После пары вращений кубик переходит из состояния A в состояние B, потом из состояния B в состояние C и т. д., пока он снова не очутится в положении A и все снова начнет повторяться. Как говорят математики, *положения кубика будут периодически повторяться.*

Давайте сформулируем полученный результат, уже отвлекаясь от кубика — объекта, для которого он был получен.

> *Если объект может находиться в конечном числе состояний и определена операция, однозначно переводящая каждое состояние в новое, то, последовательно применяя эту операцию, получим периодически повторяющуюся последовательность состояний объекта.*

---

*) См. «Квант», 1983, № 9, с. 33—36.

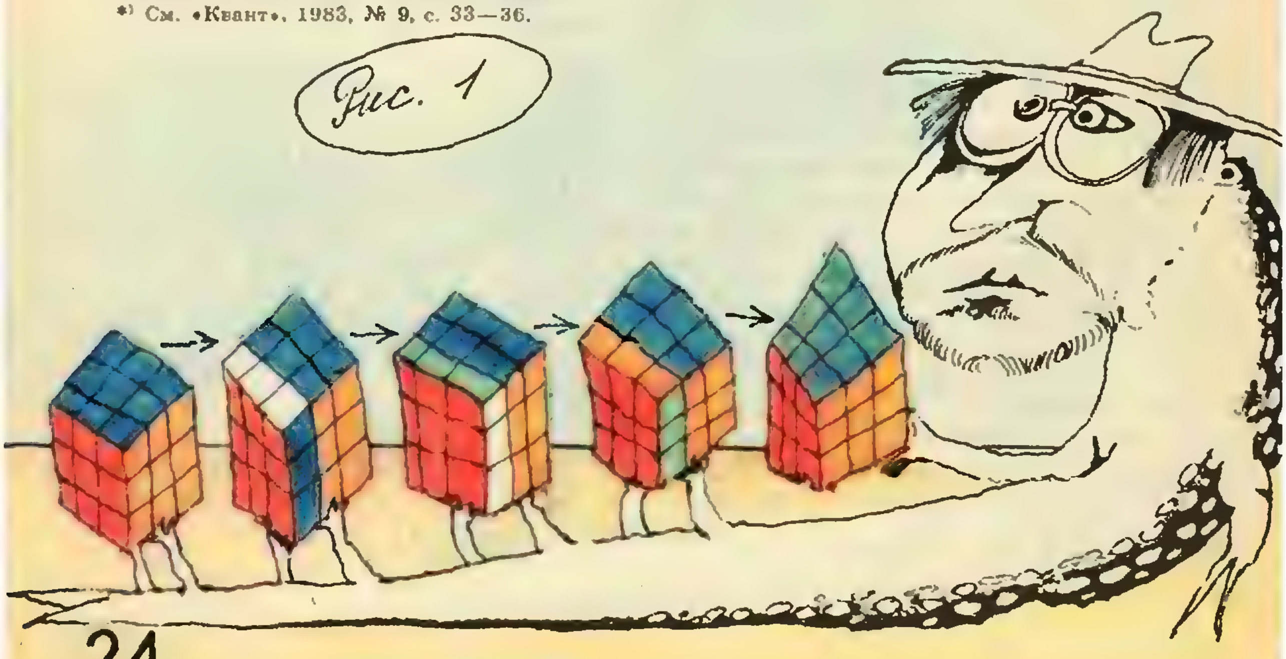


Рис. 1

Это утверждение звучит как закон природы или математическая теорема. На самом деле так оно и есть. Более того, с помощью этого утверждения мы сможем получить очень интересные результаты.

Но сначала закончим рассуждения о кубике Рубика. Заметим еще одну особенность нашей операции: для любого состояния однозначно определено «предыдущее» состояние. А именно, следует повернуть уже в другую сторону сначала вторую, а затем первую грань кубика. Посмотрим на рисунок 4 (с. 27). Двигаясь из положения A «назад», начиная с полученного первым положения A, через несколько шагов мы придем в положение E; значит, и из во второй раз полученного положения A за то же число шагов мы попадем в положение E. Таким образом, между первым и вторым положениями кубика A обязательно находится положение E — собранный кубик.

Вот такие рассуждения промелькнули в моей голове перед тем, как я начал вертеть кубик по описанному правилу. Конечно, количество пар вращений могло оказаться очень большим, ведь состояний у кубика Рубика чрезвычайно много — 43 252 003 274 489 856 000. Я пробовал вертеть грани в разные стороны — первую по часовой стрелке, а вторую — против. В этом случае возвращение наступает через 63 пары ходов, а если вертеть поочередно три соседние грани в одну сторону, то цикл замкнется через 80 троек поворотов.

Тот, кто имеет у себя кубик Рубика, может поэкспериментировать с другими наборами поворотов. Ну а кто его не имеет, берите бумагу, карандаш, и мы начнем экспериментировать с числами. Конечно, не помешал бы и микрокалькулятор или персональный компьютер, но можно обойтись и без них.

Разделим 136 на 11. Кстати, вы знаете признак делимости на 11? Нет? Запомните, это полезно. *Число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делится на 11.* В нашем случае $(1+6)-3=4$, следовательно, 136 на 11 не делится.

А что будет, если мы все-таки начнем делить уголком? Взгляните на рисунок 5 (с. 26). Нетрудно заметить, что цифры после запятой периодически повторяются. Такая десятичная дробь будет бесконечной и называется *периодической десятичной дробью.* Записывается она так: 12,(36) — повторяющийся набор цифр заключается в скобки.

При делении еще каких целых чисел возникают периодические десятичные дроби? Любых, лишь бы делитель был отличен от нуля, при этом мы будем считать конечную десятичную дробь бесконечной, продолжив ее после последней цифры нулями. Почему? Для доказательства нам будет очень удобно воспользоваться ранее сформулированным общим утверждением. В качестве рассматриваемого объекта возьмем разность, стоящую под чертой. В нашем примере это сначала будет 2, потом 4, потом 7, снова 4, снова 7 и т. д. Рассмотрим операцию, которую мы проделываем

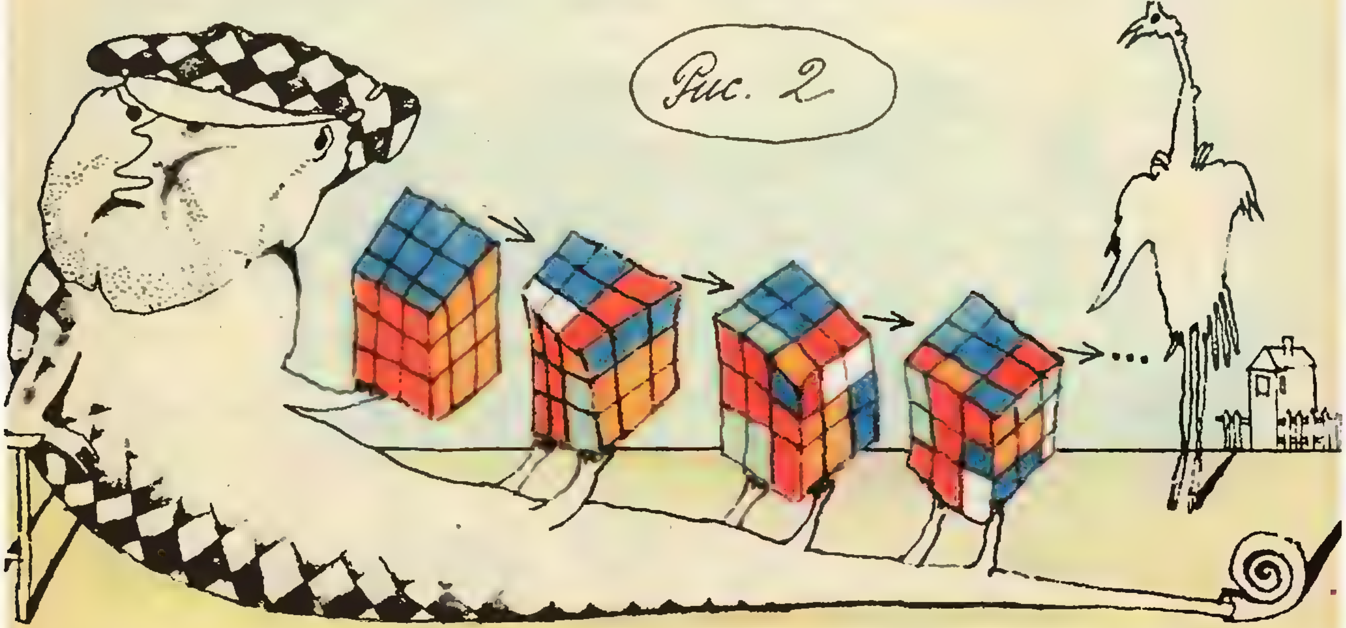


Рис. 2

с этим объектом. Сначала слева приписываем еще одну цифру, потом вычитаем из полученного числа наибольшее число, кратное делителю, но не превосходящее этого числа, записываем разность — это и будет преобразованное число.

Сначала операция зависит от делимого, поскольку приписываемая цифра зависит от делимого, но через несколько шагов (в нашем случае со второго шага) справа приписывается только нуль. После этого мы попадаем в условия действия сформулированного нами закона. Объект — число, оно может находиться в конечном числе состояний: принимать целые неотрицательные значения, меньшие делителя. Операция определена, она однозначно переводит одно число в другое. Значит, последовательность получаемых чисел будет периодически повторяться. Отсюда следует, что и цифры в частном начнут периодически повторяться. Наше утверждение доказано.

А что будет, если у числа взять сумму его цифр, у полученного числа снова взять сумму его цифр и т. д.? Скажем, для числа 1987 все ясно:

1987→25→7→7→7→...

А для других чисел? Нетрудно заметить, что всякое число больше суммы своих цифр (исключение составляют лишь однозначные числа), поэтому после применения операции взятия суммы цифр число будет уменьшаться до тех пор, пока оно не станет однозначным, а однозначное число при нашей операции переходит в равное ему число. Таким образом мы получили доказательство периодичности (с периодом 1) получаемой последовательности, начиная с некоторого места.

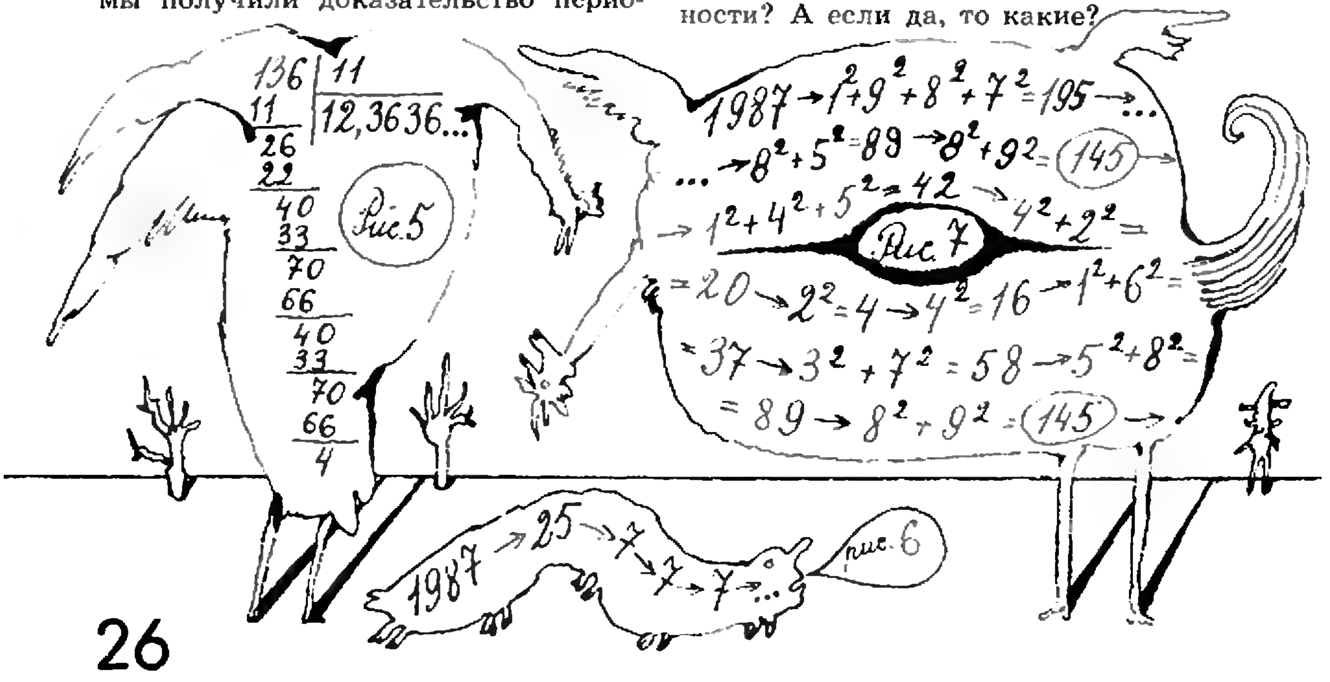
А какое число будет при этом повторяться? На этот вопрос легко ответить, не выписывая саму последовательность. Это будет *остаток от деления первоначального числа на 9, если само число не делится на 9, и 9, если оно делится на 9*. Почему? По признаку делимости на 9. Правда, вы знаете его в «урезанном» виде: «для того чтобы число делилось на 9, нужно, чтобы сумма его цифр делилась на 9». Однако имеет место более сильное утверждение: *само число и сумма его цифр имеют одинаковые остатки при делении на 9.*

Теперь ясно, что у каждого следующего числа будет тот же остаток при делении на 9, что и у начального. Среди однозначных чисел все имеют разные остатки при делении на 9, кроме 0 и 9, но у числа, отличного от нуля, сумма цифр также отлична от нуля. Отсюда и следует наше утверждение. Периодическую последовательность с периодом 1 называют последовательностью с *неподвижной точкой.*

А что будет, если у числа брать не сумму цифр, а сумму квадратов цифр? Снова попробуем для числа 1987 (рис. 7). Получили, что периодически будет повторяться последовательность 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89.

Возьмем число 133 (рис. 8). Здесь «неподвижная точка» — это 1 (период последовательности равен 1).

Но обязательно ли при процедуре взятия суммы квадратов цифр возникнут периодические последовательности? А если да, то какие?



Про введенную нами операцию — *взятие суммы квадратов цифр данного числа* — можно высказать два утверждения:

1. *Всякое число, меньшее 200, переходит в число, меньшее 200.*

2. *Всякое число, большее или равное 200* (и даже 100), *уменьшается при этой операции.*

Первое утверждение нетрудно проверить. Действительно, из чисел, меньших 200, наибольшую сумму квадратов цифр имеет число 199, но эта сумма квадратов для числа 199 равна 163, что меньше, чем 200; значит, и для остальных чисел, меньших 200, *сумма квадратов цифр меньше* 200.

Второе утверждение даже более очевидно, чем первое (стоит лишь испробовать несколько больших чисел, чтобы в него поверить); для любознательных мы приводим ниже строгое доказательство этого факта.

Пусть некоторое число $N=\overline{a_n \ldots a_2 a_1 a_0}$ меньше суммы квадратов своих цифр:

$$a_n \cdot 10^n + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 < a_n^2 + \ldots + a_0^2.$$

Тогда

$$a_n(10^n - a_n) + \ldots + a_2(10^2 - a_2) + a_1(10 - a_1) + a_0(1 - a_0) < 0.$$

Но в этой сумме все числа, кроме последнего, неотрицательны, а последнее больше или равно $9(1-9) = -72$. Если хотя бы одна из цифр a_n с $n \geqslant 2$ была отлична от нуля ($1 \leqslant a_n \leqslant 9$), то было бы

$$a_n(10^n - a_n) > 10^n - 9 \geqslant 91,$$

и вся сумма была бы положительна. Таким образом, $n \leqslant 1$ и $N < 100$.

Из утверждений 1, 2 и закона о периодичности вытекает, что операция взятия суммы квадратов цифр обязательно приводит к периодической последовательности.

Осталось увидеть, какие же периодические последовательности будут при этом возникать. Оказывается, с какого бы числа мы ни начали, мы обязательно придем либо к последовательности 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, либо к 1. Проверьте это самостоятельно (в качестве начальных чисел достаточно рассмотреть лишь числа, меньшие 200 (почему?) и даже меньшие *161*).

А что будет, если брать не сумму квадратов цифр, а сумму их кубов? Попробуйте с этой задачей разобраться самостоятельно.

В заключение расскажем об одной нерешенной проблеме. Возьмем какое-нибудь число. Если оно четное, то разделим его на 2. Если оно нечетное, то умножим его на 3 и прибавим 1. Снова: если полученное число N четное, то берем $N/2$, а если нечетное, то берем $3N+1$. И так далее. Для числа 34 этот процесс изображен на рисунке 9. Он заканчивается периодической последовательностью 4, 2, 1, 4, 2, 1,... с периодом 3.

Были испробованы в качестве начальных чисел очень многие числа, и все они приводили к такой *последовательности*. Однако никто до сих пор не доказал, что так будет всегда.

Мы не надеемся на то, что кто-то из читателей решит эту задачу. Попробуйте решить похожую задачу: *если число четное — делим его пополам, если — нечетное, то прибавляем 101*. (Решение этой задачи, а также задачи об операции взятия суммы кубов цифр числа см. в следующем номере.)

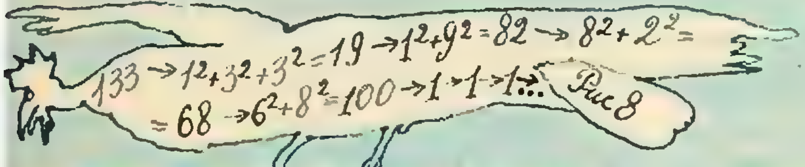


Рис 8

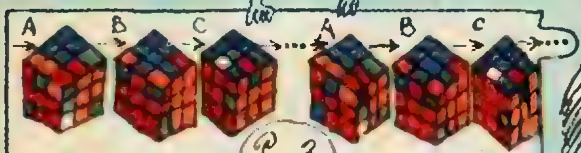


Рис. 3

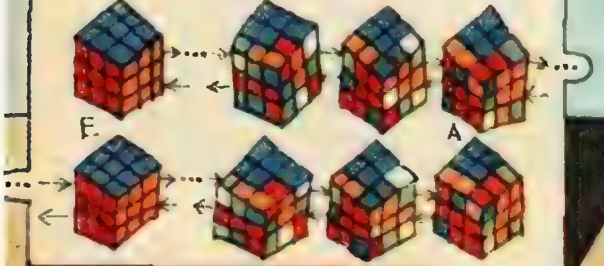


Рис. 4

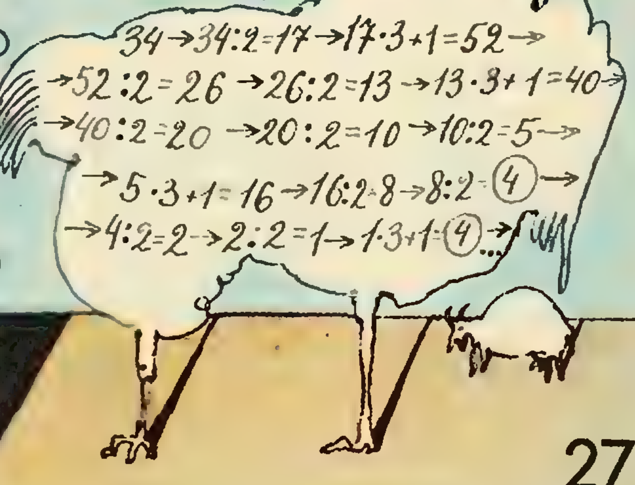


Рис. 9

Наш календарь

На с. 32, 33 нарисованы двенадцать правильных пятиугольников. Пятиугольники окрашены в четыре цвета. Попробуйте склеить из них многогранник так, чтобы никакие соседние грани не были окрашены одинаково. Многогранник, все грани которого правильные пятиугольники, называется додекаэдр (додекаэдр в переводе с греческого означает двенадцатигранник).

Оказывается, раскрасить додекаэдр так, чтобы никакие соседние грани не были окрашены одинаково, меньше, чем четырьмя красками, нельзя. И существует всего два различных способа такой раскраски четырьмя красками.

Можно превратить додекаэдр в оригинальный календарь, расположив на его гранях стандартные таблицы чисел месяца по неделям. А мы на каждой грани, соответствующей своему месяцу, поместили портрет математика, родившегося в этом месяце. (При этом получается удачно: четыре краски отвечают четырем временам года!) Здесь мы даем краткие сведения о каждом из них. Наш выбор математиков был в большой степени случайным. Тем, кто не нашел среди них своих любимых математиков, советуем самостоятельно сделать такой додекаэдр (или несколько). Если их красиво оформить, они могут украсить и новогоднюю елку.

Н. Е. Жуковский. Русский математик и механик, основоположник современной аэродинамики, где применил методы теории функций комплексного переменного. «Дедушка русской авиации» — так называют его авиаторы.

М. В. Келдыш. Советский математик и механик, известен своими работами по дифференциальным уравнениям и прикладной математике. Его работы явились фундаментом многих расчетов в авиационной, атомной и космической технике.

Ж.-Б. Ж. Фурье. Французский математик и физик, один из основателей математической физики. Вывел уравнение теплопроводности и разработал методы его решения. Известны его работы по теории функций, статистике, а также в области египтологии.

К. Ф. Гаусс. Немецкий математик, астроном. Получил выдающиеся результаты во многих областях математики. Современники называли его «королем математики». В физике создал общую теорию магнетизма, явился создателем современной геодезии.

П. С. Александров. Советский математик, основатель советской топологической школы. Им развита теория размерности пространств, разработаны методы алгебраического исследования геометрических характеристик множеств и пространств.

А. М. Ляпунов. Русский математик и механик. Основные его работы посвящены теории устойчивости равновесия механических систем, их поведению вблизи положения равновесия; интересны его работы по математической физике.

Ф. В. Бессель. Немецкий математик и астроном. Проводил наблюдения за звездами и математическую обработку результатов наблюдений. Исследовал функции, впоследствии получившие его имя.

Н. Х. Абель. Норвежский математик. Доказал невозможность представления через радикалы решения алгебраического уравнения пятой степени. Изучал интегралы от алгебраических функций. Один из создателей теории эллиптических функций.

М. В. Остроградский. Русский математик и механик. Его имя носят важный метод интегрирования рациональных функций, формула перехода от интеграла по объему к интегралу по поверхности тела. Многие его работы посвящены прикладным вопросам.

Э. Галуа. Французский математик. Основоположник современной алгебры. Ввел в математику понятие группы, с помощью которого вывел условия разрешимости алгебраического уравнения в радикалах. Работы Галуа были поняты и продолжены лишь через полвека после его смерти.

М. А. Лаврентьев. Советский математик и механик. Математические работы относятся к теории функций комплексного переменного. Исследовал важные задачи гидродинамики, теории направленного взрыва.

С. Рамануджан. Индийский математик. Получил выдающиеся результаты в теории чисел, теории цепных дробей, теории расходящихся рядов. Занимался исследованиями по изучению распределения простых чисел среди натуральных.

(Начало см. на с. 10)

Вспоминая, что

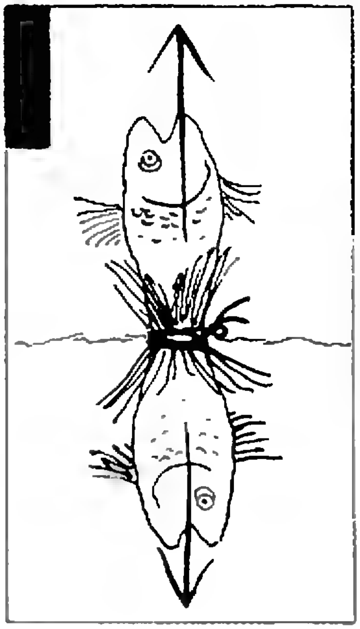
$$k=\frac{y}{x+4}=\frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x-4},$$

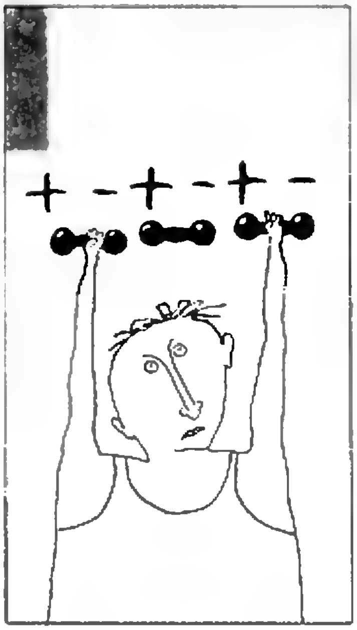
получаем окончательно (проделайте выкладки!)

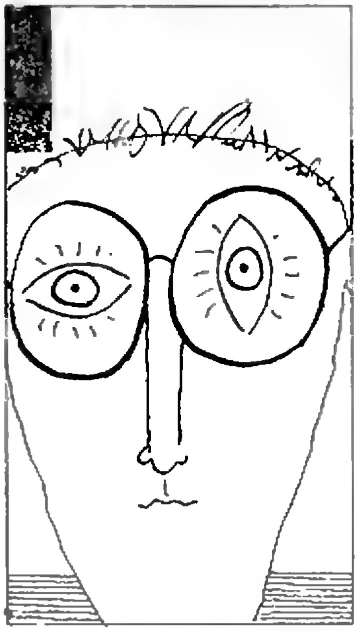
$$J=\ln\left|\frac{x+4+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-4-\sqrt{x^2+3x-4}}\right|+C.$$

Нетрудно понять, что метод, с помощью которого мы вычислили J, позволяет вычислять и многие другие интегралы. Советуем читателям продумать, какие именно.

В нашей статье одним и тем же методом решаются диофантовы уравнения и задачи интегрирования функций, т. е. задачи, относящиеся к совсем разным разделам математики. Дискретность Пифагора и непрерывность Архимеда оказались связанными. Мы не можем объяснить это иначе, как отослав читателя к эпиграфу, с которого начиналась эта статья.







Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Закон Архимеда» предназначена восьмиклассникам, «Силы молекулярного взаимодействия» — девятиклассникам и десятиклассникам, «Поляризация света» — десятиклассникам.

Закон Архимеда

«...Удар сжатого воздуха хлопнул в трубах, вода в цистерне зажурчала, и глубомер пополз вверх. Лодка всплыла на ровном киле, и глубомер показал, что рубка уже вышла из воды», — так описывается всплытие подводной лодки в книге Л. Соболева «Морская душа».

Причина всплытия — сила Архимеда, называемая еще выталкивающей силой, которая после продувки цистерн с водой сжатым воздухом превысила по модулю силу тяжести лодки. Когда же и в каком случае возникает сила Архимеда? Со стороны чего она действует? Куда приложена, как направлена и чему равна?

Выталкивающая сила — это сумма всех сил давления, действующих со стороны жидкости или газа на поверхность погруженного в нее тела (рис. 1). Истинная причина появления выталкивающей силы — наличие различного гидростатического давления на разных уровнях жидкости.

Для нахождения силы Архимеда мысленно заменим погруженное тело жидкостью в объеме этого тела (рис. 2). На нее со стороны окружающей жидкости будет действовать такая же выталкивающая сила, как и на погруженное тело. По третьему закону Ньютона выделенная в объеме тела жидкость (вытесненная жидкость) будет действовать на окружающую жидкость с той же самой по модулю, но противоположно направленной силой. Это — вес вытесненного объема жидкости. Вспомним, что весом тела, неподвижного в некоторой системе отсчета (необязательно инерциальной), называется сила, с которой тело вследствие его притяжения к Земле действует на подставку или подвес. В нашем случае роль под-

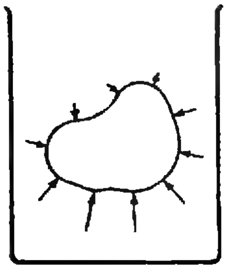


Рис. 1

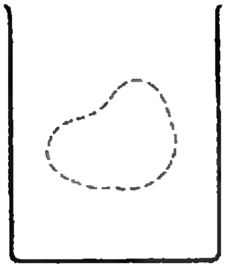


Рис. 2.

ставки для выделенного объема жидкости играет окружающая жидкость.

Итак, выталкивающая сила, действующая на погруженное в жидкость тело, равна по модулю и противоположна по направлению весу вытесненной жидкости. Это и есть закон Архимеда. Заметим, что в формулировке закона говорится именно о весе вытесненной жидкости, а не о силе тяжести. И это весьма существенно, так как вес тела (по модулю) не всегда совпадает с силой тяжести. Например, ящик массой m в кабине поднимающегося с ускорением a лифта давит на пол с силой $m(g+a)$. Это значит, что вес ящика равен $P=m(g+a)$, в то время как сила тяжести, действующая на ящик, равна mg. Когда же кабина лифта опускается с тем же ускорением, вес ящика оказывается равным $P=m(g-a)$.

Из последнего выражения ясно, что выталкивающая сила появляется тогда, когда нет состояния невесомости, то есть любое тело (в том числе и жидкость) имеет вес. Если сосуд с жидкостью свободно падает, то жидкость находится в состоянии невесомости и на погруженное в нее тело сила Архимеда не действует. Не действует эта сила и в космическом корабле, движущемся с выключенными двигателями.

При доказательстве закона Архимеда мы считали, что тело полностью погружено в жидкость и вся его поверхность соприкасается с жидкостью. Если же часть поверхности тела плотно прилегает к стенке или дну сосуда, так, что между ними нет прослойки жидкости, то закон Архимеда неприменим. Яркой иллюстрацией сказанного служит опыт, когда ровную нижнюю поверхность деревянного кубика натирают парафином и плотно приставляют ко дну сосуда. Затем осторожно наливают воду. Брусок не всплывает, так как со стороны воды на него действует сила, не выталкивающая его вверх, а прижимающая ко дну (рис. 3).

Приведенная формулировка закона Архимеда остается справедливой и в случае, когда тело лишь частично опущено в жидкость, но не соприкасается со стенками сосуда. (Доказательство аналогично случаю полностью погруженного в жидкость тела.)

Нам осталось научиться находить вес вытесненной жидкости и линию действия выталкивающей силы. В общем случае (например, когда тело погружено в жидкость, вращающуюся вместе с сосудом) это не так легко сделать.

Рассмотрим наиболее простой и часто встречающийся на практике случай. Пусть сосуд с жидкостью неподвижен в некоторой инерциальной системе отсчета. Тогда, как известно, вес любого неподвижного тела равен силе тяжести, действующей на тело. Поэтому и выталкивающая сила равна по модулю силе тяжести, действующей на вытесненную жидкость, и противоположно ей направлена. Линия действия выталкивающей силы будет проходить через центр тяжести вытесненного объема жидкости. Покажем это.

На вытесненный объем жидкости массой m (рис. 4) действуют две силы — сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная в центре тяжести этого объема, и выталкивающая сила $\vec{F}_в$. Так как жидкость находится в равновесии, то по правилу рычага (см. § 62 «Физики 6-7» или § 47 «Физики 8») действующие на нее силы обратно пропорциональны плечам этих сил. Плечо силы тяжести относительно оси, проходящей через центр тяжести, равно нулю. Значит, и плечо выталкивающей силы тоже равно нулю, т. е. линия действия выталкивающей силы проходит через центр тяжести «вытесненного» объема жидкости.

Поскольку точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия, обычно выталкивающую силу помещают в центр тяжести вытесненной жидкости и называют эту точку также центром давлений.

В. И. Чивилёв

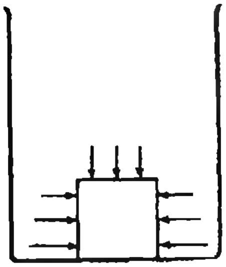


Рис. 3.

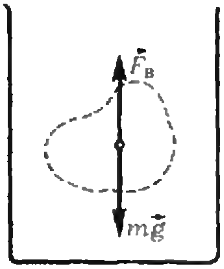


Рис. 4.

Силы молекулярного взаимодействия

Один из крупнейших современных физиков Ричард Фейнман считает, что если бы потребовалось в одной единственной фразе передать самое главное из того, что мы знаем сегодня о мире, то эта фраза должна была бы быть такой: «... все тела состоят из атомов — маленьких телец, которые находятся в беспрерывном движении, притягиваются на небольшом расстоянии, но отталкиваются, если одно из них плотнее прижать к другому» (Фейнмановские лекции по физике, том 1).

За каждым утверждением этой «ключевой» фразы — своя специальная наука. Что такое атомы? Как они устроены и как взаимодействуют друг с другом? Поиски ответов на эти вопросы приводят к квантовой физике, а через нее — к пониманию микромира. Какова роль движения атомов и их взаимодействия в формировании свойств вещества? В ответе на этот вопрос — вся макроскопическая физика и связанные с ней выходы на химию, биологию и другие науки.

Давайте и мы немного пройдем по этому пути и попытаемся, исходя из устройства отдельного атома, понять природу взаимодействия между различными атомами или молекулами.

Вы знаете («Физика 10», глава 11), что атомы состоят из положительно заряженного ядра и довольно сложным образом движущихся вокруг него отрицательных зарядов — электронов. Это столь привычное в наши дни представление об атомах привело в момент своего появления (в начале XX века) к настоящей катастрофе в классической физике. Дело в том, что в соответствии с классическими представлениями электрон при любом неравномерном движении и, в частности, при вращении вокруг ядра обязательно излучает электромагнитные волны. Энергия его при этом уменьшается, и, в конечном счете, он неизбежно должен упасть на ядро.Это означает, что в рамках классической физики атом вообще существовать не может.

Потребовался радикальный пересмотр всех наших представлений о мире, чтобы найти выход из создавшегося тупика. В результате была создана квантовая механика, которая, в частности, показала, что электрон в атоме может иметь лишь дискретные значения энергии. Находясь в состоянии с каким-либо значением энергии из этого «разрешенного» набора, электрон не излучает электромагнитные волны. Излучение (или поглощение) энергии происходит лишь при переходе из одного стационарного состояния в другое. Все сказанное относится и к молекулам.

Так было «оправдано» существование атомов и молекул.

Теперь естественно задать такой вопрос. Если атомы и молекулы нейтральны, то каким же образом они взаимодействуют друг с другом?

Давайте рассмотрим молекулу «поближе». Если центры распределения положительных и отрицательных зарядов внутри нее не совпадают друг с другом, то такую молекулу можно представить как небольшую гантельку («Физика 9», § 46). На одном конце ее находится положительный заряд, а на другом — отрицательный. Такие электрические гантельки называют диполями.*)

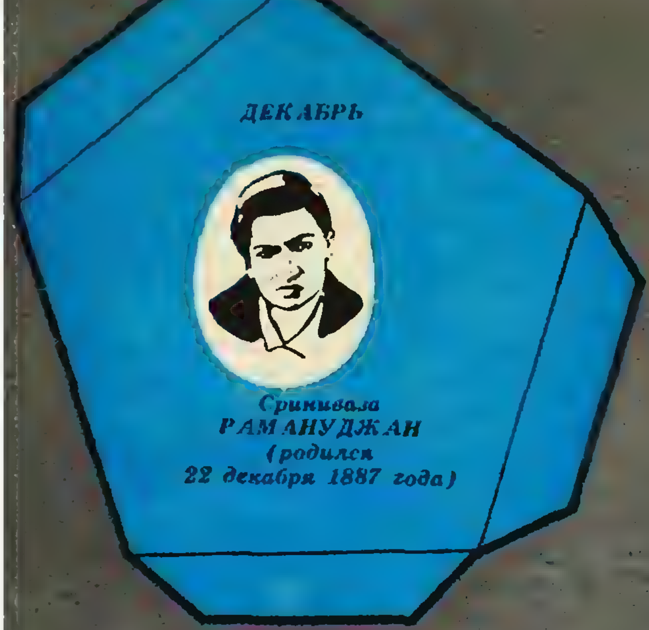
Когда две дипольные молекулы оказываются рядом, каждая из них стремится расположиться так, чтобы положительный конец одной был поближе к отрицательному концу другой, и наоборот. В результате, несмотря на то, что каждая молекула нейтральна, между молекулами возникает довольно заметное притяжение. Такое взаимодействие называется диполь-дипольным. Оно, как мы видели, связано с тем, что у дипольных молекул средние расстояния между разноименными зарядами немного меньше, чем между одноименными. Очевидно, что при удалении молекул друг от друга это различие в расстояниях уменьшается. В какой-то момент оно становится несущественным, и сила взаимодействия между молекулами обращается в ноль.

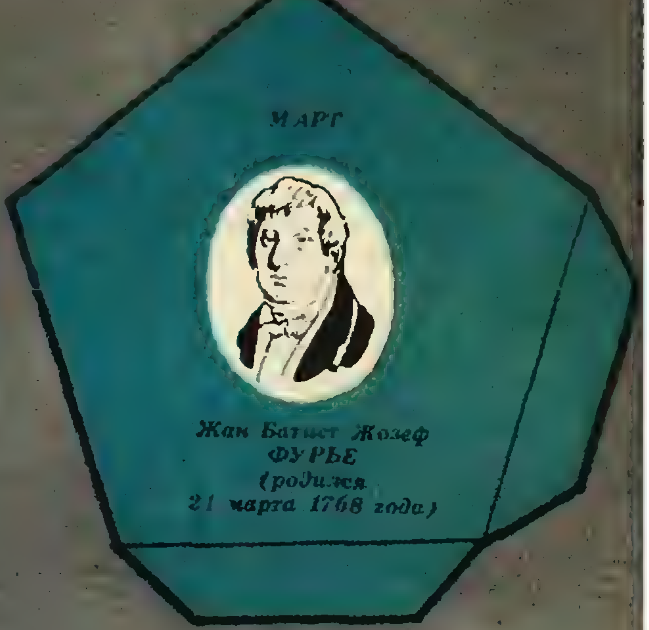
Ну, а как быть в тех случаях, когда молекулы «симметричны», т. е. центры распределения положительных и отрицательных зарядов внутри них совпадают?

(Продолжение см. на с. 34)

---

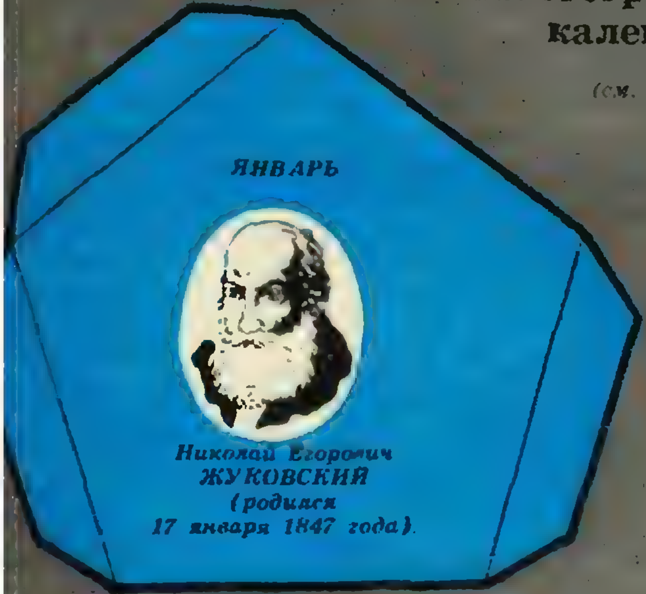
*) О том, какое электрическое поле создает диполь, рассказывалось в заметке «Электрический диполь и его электрический момент» («Квант», 1985, № 11, с. 21).

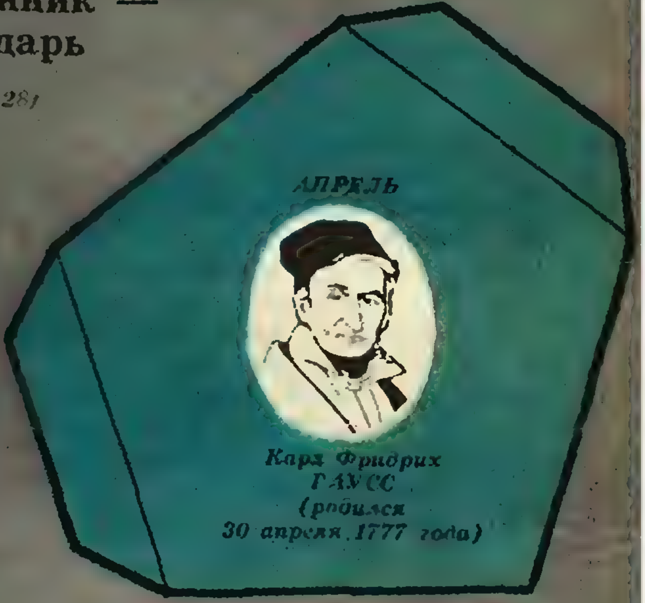

ДЕКАБРЬ
Сриниваза
РАМАНУДЖАН
(родился
22 декабря 1887 года)

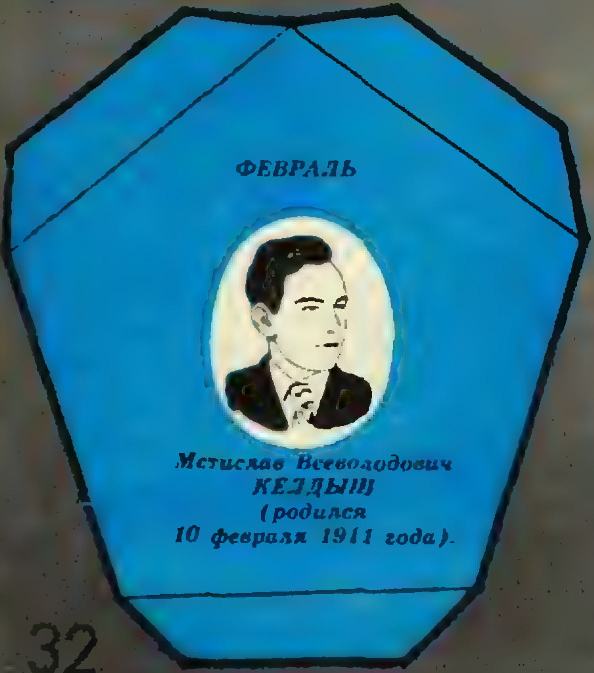

МАРТ
Жан Батист Жозеф
ФУРЬЕ
(родился
21 марта 1768 года)

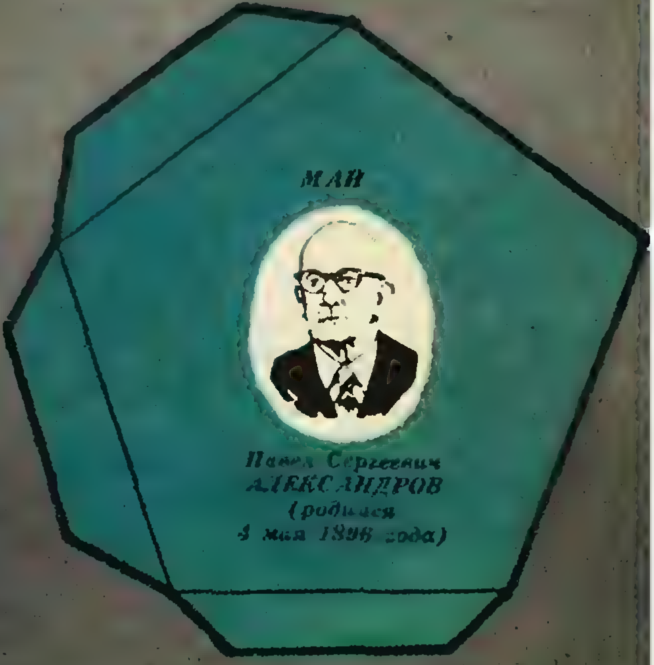
Многогранник — календарь

(см. с. 28)

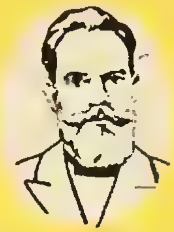

ЯНВАРЬ
Николай Егорович
ЖУКОВСКИЙ
(родился
17 января 1847 года).


АПРЕЛЬ
Карл Фридрих
ГАУСС
(родился
30 апреля 1777 года)


ФЕВРАЛЬ
Мстислав Всеволодович
КЕЛДЫШ
(родился
10 февраля 1911 года).

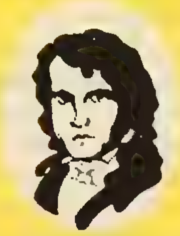

МАЙ
Павел Сергеевич
АЛЕКСАНДРОВ
(родился
4 мая 1896 года)

ИЮНЬ



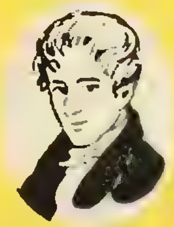
Александр Михайлович
ЛЯПУНОВ
(родился
6 июня 1857 года)

ИЮЛЬ



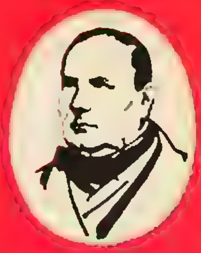
Фридрих Вильгельм
БЕССЕЛЬ
(родился
22 июля 1784 года)

АВГУСТ



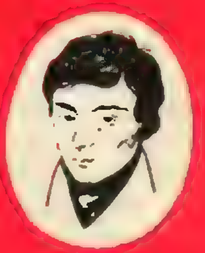
Нильс Хенрик
АБЕЛЬ
(родился
5 августа 1802 года)

СЕНТЯБРЬ



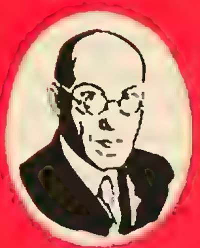
Михаил Васильевич
ОСТРОГРАДСКИЙ
(родился
24 сентября 1801 года)

ОКТЯБРЬ



Эварист
ГАЛУА
(родился
26 октября 1811 года)

НОЯБРЬ



Михаил Алексеевич
ЛАВРЕНТЬЕВ
(родился
19 ноября 1900 года)

Здесь надо прежде всего уточнить, что значит «совпадают». Ведь электроны непрерывно движутся вокруг ядра. Иногда говорят даже, что они «размазаны» вокруг ядра, образуя около него облако. И центр этого отрицательного облака совпадает с центром положительного ядра только в среднем, а в каждый отдельный момент времени они слегка отклонены друг от друга. Просто в один момент центр облака находится по одну сторону от центра положительного заряда, а в другой — по другую. Можно сказать, что в этом случае молекула (или атом) представляет собой непрерывно возникающий и исчезающий диполь.

Если две такие молекулы сближаются на достаточно малое расстояние, то эти «мерцающие» диполи начинают действовать друг на друга так, что в каждый момент времени разноименные заряды в различных молекулах оказываются друг к другу ближе, чем одноименные. Возникают силы притяжения, которые теперь называются ван-дер-ваальсовскими. Эти силы оказываются значительно слабее диполь-дипольных.

Итак, мы получили, что при сближении атомов или молекул между ними возникают силы притяжения.

Что же произойдет, если атомы или молекулы сближать все больше и больше? Понятно, что всегда наступит такой момент, когда электронные оболочки различных атомов начнут перекрываться. В результате между атомами возникнут силы отталкивания, обусловленные их «деформацией». Силы отталкивания гораздо больше диполь-дипольных и тем более ван-дер-ваальсовских сил притяжения, поэтому на малых расстояниях атомы всегда отталкиваются.

Притяжение на больших расстояниях и отталкивание на малых означает, что существует некоторое промежуточное расстояние, на котором силы притяжения и отталкивания компенсируются. Этот характерный размер и определяет среднее расстояние между молекулами в жидкостях и твердых телах (в газах молекулы практически не взаимодействуют друг с другом).

Само существование различных агрегатных состояний вещества (газообразного, жидкого и твердого) связано с описанным здесь взаимодействием. Правда для характеристики свойств систем из большого числа частиц (какой и является вещество) лучше пользоваться понятием не силы, а энергии взаимодействия. Так, если кинетическая энергия молекулы много больше энергии ее взаимодействия со своим окружением, мы имеем газ; если много меньше — твердое тело. В жидкости эти энергии приблизительно равны друг другу.

Е. Е. Городецкий

Поляризация света

Возвращавшиеся из Исландии моряки часто привозили необычные прозрачные камни — кристаллы известкового шпата. Эти камни, позже их стали называть исландским шпатом, были весьма замечательны по своей форме и другим свойствам, но главным образом — своими особенностями преломления света. Так, например, если кусок исландского шпата положить на какую-нибудь надпись, то сквозь него можно увидеть надпись раздвоенной (рис. 1).

В 1669 году датский ученый Э. Бартолин сообщил интересные результаты своих опытов с этими кристаллами. Оказалось, что при прохождении сквозь такой кристалл луч света расщепляется на два — теперь их называют обыкновенным и необыкновенным лучами. Названия лучей оправданы: обыкновенный луч ведет себя так, как это соответствует известным законам преломления света, а необыкновенный луч как бы нарушает эти законы. В частности, когда падающий луч перпендикулярен поверхности кристалла, первый луч проходит сквозь кристалл непреломленным, второй же испытывает преломление (рис. 2).

Бартолин провел тщательные исследования открытого им явления двойного лучепреломления и обнаружил дополнительно, что в кристалле существует некоторое направление, вдоль которого падающий луч не раз-

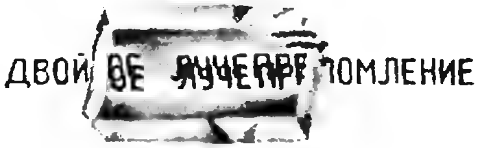


Рис. 1

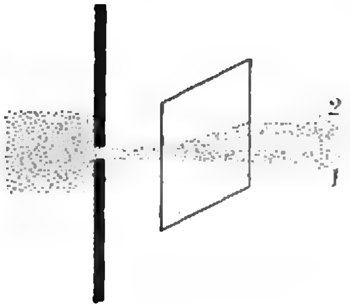


Рис. 2.

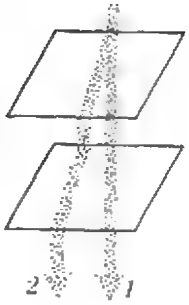


Рис. 3.

дваивается. Однако объяснения всем этим фактам он найти не смог.

Несколько лет спустя открытие Бартолина привлекло к себе внимание нидерландского ученого Х. Гюйгенса. Повторив опыты Бартолина, он идет дальше, пропуская оба луча, вышедшие из кристалла исландского шпата, сквозь второй точно такой же кристалл. Для объяснения результатов опытов Гюйгенс вводит понятие оптической оси кристалла (которую фактически уже обнаружил ранее Бартолин). Ею он называет выделенное направление в кристалле, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются не разделяясь.

Опыты Гюйгенса показали, что в случае, когда оптические оси обоих кристаллов параллельны и луч света падает под прямым углом к передней грани первого кристалла, то при входе во второй кристалл обыкновенный и необыкновенный лучи не претерпевают разделения на два (рис. 3). В других случаях оба луча, вышедшие из первого кристалла, во втором кристалле опять могут разделиться. При этом интенсивность каждого из четырех лучей в сильной степени зависит от угла между оптическими осями кристаллов.

Анализируя результаты опытов, Гюйгенс, придерживавшийся волновой теории света, пришел к выводу, что обыкновенному и необыкновенному лучам соответствуют различные скорости распространения в исследуемом кристалле. Однако Гюйгенс исходил из аналогии между звуковыми и световыми волнами и считал последние, как и первые, продольными. Это заблуждение не позволило ему объяснить некоторые особенности проведенных опытов.

Спустя более чем сто лет, в 1808 году, французский физик Э. Малюс обнаружил двойное лучепреломление при отражении света. Глядя сквозь кристалл исландского шпата на отражение заходящего солнца в окнах Люксембургского дворца в Париже, Малюс к своему удивлению заметил, что два изображения, возникающих в результате двойного лучепреломления, имели различную яркость. В частности, при некотором положении кристалла было видно только одно изображение.

На основании этого и других опытов и опираясь на корпускулярную теорию света Ньютона, Малюс предположил, что корпускулы, которые, по Ньютону, имеют внешнее сходство с магнитиками, обладающими полюсами, в солнечном свете ориентированы беспорядочно, но после отражения от какой-либо поверхности или после прохождения сквозь кристалл они приобретают определенную ориентацию. Такой «упорядоченный» свет он назвал поляризованным.

Сегодня нам хорошо известно, что видимый свет представляет собой поперечные электромагнитные волны. При распространении электромагнитной волны в пространстве в нем совершают колебания вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ и вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$. Эти векторы всегда взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Свет, в котором направления колебаний упорядочены каким-либо образом, называют поляризованным. Если колебания вектора $\vec{E}$ все время происходят в одной плоскости, то говорят, что свет плоскополяризованный (или линейно поляризованный), а саму эту плоскость называют плоскостью поляризации.

Свет, излученный одним атомом, поляризован всегда. Однако излучение макроскопического тела (Солнца, электрической лампочки и т. п.) является суммой излучений огромного числа атомов. Каждый из них излучает световую волну на протяжении примерно 10^{-8} с, и если все атомы будут излучать свет с различной поляризацией, то поляризация всего пучка будет меняться на протяжении таких же промежутков времени. Поэтому в естественном свете все эффекты, связанные с поляризацией, усредняются, и такой свет называют неполяризованным. Для выделения из неполяризованного света «части», обладающей желаемой поляризацией, используют так называемые поляризаторы. В их роли может выступать тот же кристалл исландского шпата, из которого обыкновенный и необыкновенный лучи выходят плоскополяризованными во взаимно перпендикулярных плоскостях, а также искусственные поляризаторы.

Разберем принцип действия этого прибора на известном вам примере поляризатора для электромагнитных волн сантиметрового диапазона (см. «Физику 10», § 47). Он выполнен в виде ряда параллельных металлических прутьев, сделанных из хорошего проводника. При падении на решетку электромагнитной волны (с длиной, сравнимой с расстоянием между прутьями) составляющая электрического поля, параллельная прутьям, сильно затухает, так как под ее воздействием в прутьях возникает электрический ток, что приводит к потерям энергии на джоулево тепло. Кроме того, происходит частичное отражение волны от решетки. В результате параллельная составляющая волны через решетку фактически не проходит. Перпендикулярная же прутьям составляющая электрического поля проходит через такой поляризатор, практически не затухая.

В 1932 году группа американских ученых изобрела оптический поляризатор, который оказывает на световые волны действие, аналогичное описанному выше. Для изготовления такого поляризатора было выбрано вещество, состоящее из длинных углеводородных цепей. Затем его растянули, чтобы молекулы выстроились вдоль направления растяжения, и опустили в раствор йода. Молекулы йода «прикрепились» к углеводородным цепям и отдали им электроны, свободно перемещающиеся вдоль нитей. Образовалась как бы та же «проволочная ограда». При падении электромагнитной волны ее составляющая, параллельная нитям, затухает, так как полю приходится совершать работу (разгоняя электроны вдоль нитей). Поскольку «ограда» оказывается достаточно «частой» даже для световых волн (длины которых составляют доли микрометра), такой поляризатор поглощает свет, поляризованный параллельно нитям, и пропускает излучение, поляризованное перпендикулярно ориентации нитей.

В заключение предлагаем вам самостоятельно объяснить описанные раньше опыты по двойному лучепреломлению света.

А. А. Варламов

Несколько задач на один прием

Предлагаем вам несколько задач на построение с помощью преобразований плоскости — поворотов, параллельных переносов, осевых симметрий, гомотетий. Способ применения преобразований во всех задачах один и тот же. Мы проиллюстрируем его примером.

Даны две окружности ω_1 и ω_2 и точка A. Требуется построить отрезок с концами на данных окружностях, который бы делился точкой A пополам.

Решение. Пусть X и Y — концы искомого отрезка, принадлежащие соответственно ω_1 и ω_2. При центральной симметрии с центром A точка Y должна перейти в X, т. е. попасть на окружность ω_1. В то же время она должна оказаться на окружности ω_2', симметричной ω_2 относительно A (так как $Y \in \omega_2$). Следовательно, X — точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2'. Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

Подумайте какие преобразования надо применить в следующих задачах:

1. Дана прямая и две окружности по разные стороны от нее. Постройте квадрат, диагональ которого лежит на прямой, а концы другой диагонали — на окружностях.

2. Даны три параллельные прямые. Постройте правильный треугольник, вершины которого лежат (по одной) на этих прямых.

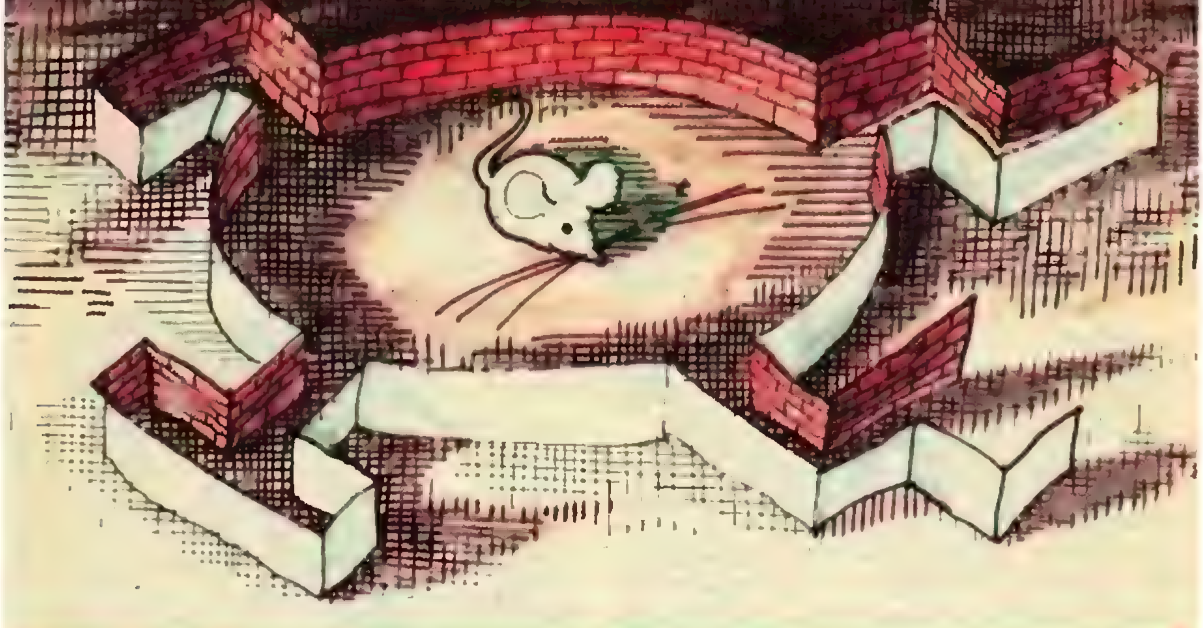
3. Даны окружность и точка A вне нее. Постройте луч с началом в A, пересекающий окружность последовательно в точках B и C таких, что $AB=BC$.

4. Даны точка A, окружность и прямая. Постройте квадрат $ABCD$ такой, что на окружности лежит его вершина B, а на прямой а) вершина D, б) вершина C.

5. Даны две пересекающиеся прямые и две точки, A и B. Постройте параллелограмм $ABCD$, вершины C и D которого лежат (по одной) на данных прямых.

6. Даны две концентрические окружности. Проведите в большей окружности хорду, которая бы делилась меньшей окружностью на три равные части.

Д. В.



Математический кружок

Выбор наилучшего варианта

Кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР,
Ж. М. РАББОТ

В младших классах, а также на вступительных экзаменах в вузы, часто предлагают задачи на составление уравнений. При этом приходится, во-первых, заниматься переводом условия с обычного языка на математический, а во-вторых, решать полученные уравнения и неравенства. В тексте задачи описана какая-нибудь ситуация и требуется по одним указанным данным определить другие. Вот, например, первые и последние фразы условий задач из учебника алгебры для 7 класса:

«Две машинистки получили для перепечатки рукопись... За сколько часов могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка?»

«Катер отправился от речного вокзала вниз по течению... Сколько времени затратил велосипедист на пути от города до турбазы?»

«Сплав меди с цинком, содержащий 5 кг цинка, сплавлен с 15 кг цинка... Какова была первоначальная масса сплава?»

Важно уметь решать такие задачи, так как в производственной и экономической практике часто приходится подводить итоги, пересчитывать и суммировать различные показатели, анализировать работу предприятий и т. п. Результатом этой деятельности является уяснение сложившейся ситуации. После этого естественно сделать следующий шаг — составить план-программу дальнейших действий. Здесь, конечно, возникает множество вариантов и хочется выбрать из них наилучший.

Постановка и решение таких задач являются предметом *математического программирования*. Одним из первых, кто использовал математику в подобных вопросах, был советский математик, академик Л. В. Канторович (1912—1986). В 1939 г. вышла его книга «Математические методы организации и планирования производства». Во введении к этой книге он писал:

> «Существуют два пути повышения эффективности работы цеха, предприятия и целой отрасли промышленности. Один путь — это различные улучшения в технике, то есть новые приспособления в отдельном станке, изменение технологического процесса, нахождение новых, лучших видов сырья. Другой путь, пока гораздо меньше используемый,— это улучшения в организации производства и планирования. Сюда относятся, например, такие вопросы, как распределение работ между отдельными станками предприятия или механизмами, правильное распределение заказов по предприятиям, правильное распределение различных видов сырья, топлива и пр.»

С тех пор прошло много лет, и математическое программирование стало целой наукой, основанной на экономико-математических методах и широко использующей ЭВМ.

В реальных задачах планирования и управления приходится иметь дело одновременно с очень большим количеством переменных. Мы разберем несколько простых учебных примеров с небольшим числом переменных, в которых можно получить решения с помощью математики, известной ученикам 6-7 классов,— пропорций, свойств линейной функции одного переменного, небольшого перебора вариантов и, конечно, смекалки.

Где построить баню? *В деревне Мочалкино 100 жителей, а в деревне Веники — 50 жителей. В каком месте шоссе, соединяющего эти деревни, надо построить баню, чтобы общее расстояние, которое придется пройти по шоссе всем 150 жителям до бани, было наименьшим?*

Переведем условие задачи на математический язык. Пусть расстояние по шоссе между деревнями равно a км и баня находится между деревнями в x км от Мочалкино, тем самым $0 \leqslant x \leqslant a$. Тогда все 100 жителей этой деревни пройдут до бани $100x$ км, а все 50 жителей деревни Веники — $50(a-x)$ км. Всего будет пройдено $S=100x+50(a-x)$ км.

Итак, мы получили следующую математическую задачу: *найти наименьшее значение величины* $S=50x+50a$ *при условии, что* $0 \leqslant x \leqslant a$, *где* a *— фиксированное число.*

Решить задачу очень легко: достаточно заметить, что величина S уменьшается с уменьшением x, поэтому наименьшее значение S будет при наименьшем возможном значении x, то есть при $x=0$, и тем самым *строить баню нужно в деревне Мочалкино.*

Обсудим полученный результат. Почти все, кому мы задавали вопрос, где построить баню, сразу отвечали, что ее надо построить в месте, расстояние от которого до деревни Мочалкино в два раза меньше расстояния до деревни Веники. Наверное, у них возникла такая физическая модель: представляются качели, на одном конце доски сидит человек, в два раза более тяжелый, чем сидящий на другом конце.

Если баня будет находиться на расстоянии $a/3$ от Мочалкино, то все ее жители вместе пройдут до бани такой же путь, что и жители Веников: $100 \cdot a/3=50 \cdot 2a/3$. Наверное, это кажется более справедливым, если иметь в виду не всех жителей, а противопоставлять одну деревню другой и искать «точку равновесия». Но это будет решение совсем другой математической задачи: *при каком значении* x, *где* $0 \leqslant x \leqslant a$, *величина* $f=|100x-50(a-x)|$ *будет наименьшей?*

Конечно, слова «наилучший вариант» могут пониматься совершенно по-разному. Чтобы внести в них точный смысл, мы составляем *целевую функцию.* В нашей задаче это была функция $S=50x+50a$, а в другом варианте — функция $f=|150x-50a|$. Найдя x, при котором целевая функция принимает наименьшее значение, мы получили наилучший (с определенной точки зрения) вариант.

Ясно, что жители деревни Веники могут оказаться не в восторге ни от одного из этих вариантов и, возможно, смогут выдвинуть против них довольно веские аргументы. Скажем, что стариков и детей у них больше, а машин — меньше, чем в Мочалкино, что у них есть водопровод, а в Мочалкино — нет и т. п. Но если все это учесть, то получится совсем другая математическая задача — другая *математическая модель.*

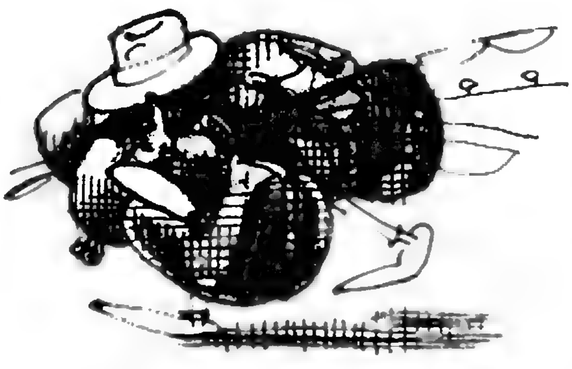
Мы надеемся, что несколько легкомысленный сюжет задачи про баню не создаст у читателей неверного впечатления. Вот похожие, но уже вполне серьезные задачи: *где на территории большого завода с несколькими цехами разместить столовую? Как лучше спланировать в ней обслуживание рабочих?*

Здесь выбор целевой функции в принципе ясен (наименьшая затрата времени), но оптимальное решение зависит не только от числа рабочих в разных цехах, но и от особенностей производства и других факторов.

Лучший способ добраться до вокзала. *Петру Петровичу надо срочно добраться до вокзала. Он может вызвать такси, которое придется ждать 24 минуты, и ехать со скоростью 30 км/ч, а может идти пешком со скоростью 6 км/ч. Как ему лучше поступить, если расстояние от дома до вокзала: а) 2 км; б) 3 км; в) 5 км?*

Чтобы нагляднее сравнить движение пешехода и автомобиля, мы введем еще один персонаж — жену Петра Петровича.

Представим себе, что Петр Петрович пошел на вокзал пешком, но как только он вышел из дома, его жена заметила, что он забыл дома железнодорожный билет, тут же вызвала такси, дождалась его и поехала догонять мужа.



Подсчитаем время, через которое она его догонит. Через время t после своего выхода из дома Петр Петрович будет находиться на расстоянии $6t$ км от дома, а при $t>24$ мин$=2/5$ ч такси пройдет $30(t-2/5)$ км.

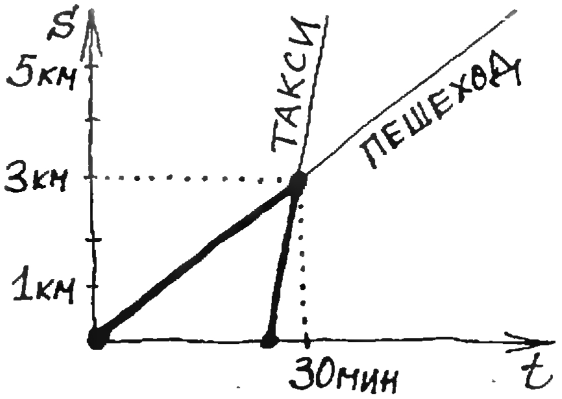
Такси может догнать Петра Петровича в момент, когда

$$6t=30(t-2/5),$$

то есть при $t=1/2$ ч. Если до вокзала меньше, чем $1/2$ ч хода, жена не успеет догнать мужа, если же больше, чем $1/2$ ч, то она его догонит и подвезет на вокзал. За $t=1/2$ ч Петр Петрович может удалиться от дома на 3 км. В результате этих рассуждений мы приходим к следующему выводу.

Если расстояние до вокзала меньше 3 км, как в случае *а*), Петру Петровичу лучше идти пешком; если равно 3 км, то все равно — пешком или на такси; а если больше 3 км, как в случае *в*) — лучше вызвать такси.

Для лучшего понимания решение полезно представить графически



В нашем решении молчаливо сделан ряд предположений: пешеход и такси движутся равномерно, вызов и выезд такси происходит мгновенно (на практике это далеко не так) и т. п. Кроме того, по нашему условию для Петра Петровича самым ценным было время. Но в случае *б*) мы столкнулись с тем, что нашлось два равноценных с этой точки зрения варианта. Для выбора одного из них нужно другое соображение: или стоимость поездки (тогда он, скорее всего, пойдет пешком), или удобства (тогда он поедет на такси).

Один велосипед на двоих. *Два брата, Коля и Сережа, хотят добраться до бабушки, живущей от них в 40 км. У них есть один велосипед, на который они погрузили вещи. Коля ходит пешком со скоростью 6 км/ч, а ездит на велосипеде со скоростью 20 км/ч; скорости Серёжи — соответственно 4 км/ч и 30 км/ч. Велосипед можно оставлять на дороге без присмотра. Как им вместе быстрее всего добраться до бабушки?*

Предположим, что братья прибывают к бабушке одновременно, и найдем время, за которое они могут это сделать. Затем мы покажем, что за меньшее время один из них не сможет добраться до бабушки.

Пусть Коля x км проехал на велосипеде и $(40-x)$ км прошел пешком, а Сережа, наоборот, прошел x км, а проехал $(40-x)$ км.

Тогда Коля затратил на дорогу $(x/20+(40-x)/6)$ часов, а Сережа — $(x/4+(40-x)/30)$ часов.

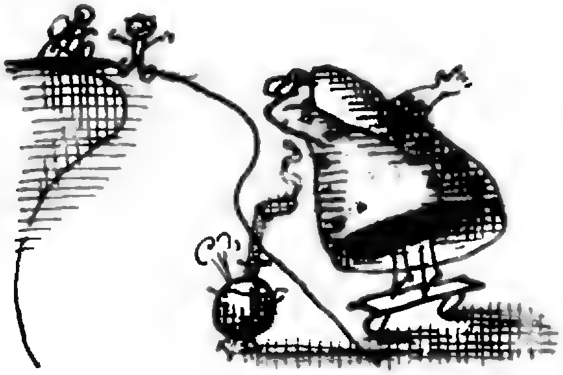
Если они прибыли одновременно,

$$\frac{x}{20}+\frac{40-x}{6}=\frac{x}{4}+\frac{40-x}{30}.$$

Отсюда получается, что $x=16$ км, а добрались они оба за $4\frac{4}{5}$ часа.

Такой вариант возможен, если, например, Коля выезжает из дома на велосипеде, едет 16 км, оставляет велосипед на дороге и дальше идет пешком, а Сережа идет до велосипеда, садится на него и едет до бабушки.

Убедимся в том, что за меньшее время один из них не смог бы добраться до бабушки. Действительно, если Коля проедет на велосипеде на сколько-то километров меньше, чем 16, то эти километры ему придется идти пешком и он затратит на них больше времени, чем в первоначальном варианте. Если же Коля проедет на сколько-то километров больше, чем 16, то тогда Сережа вынужден будет пройти пешком эти километры и позже приедет к бабушке.



При решении этой задачи самые простые практические соображения привели нас к оптимальному варианту: братья должны доставить велосипед к бабушке и, главное, они должны появиться у нее одновременно. Естественно, что если при этом братья не будут отдыхать, они прибудут к бабушке за самое короткое время.

Здесь мы снова встречаемся с возможностью выбора: на самом деле существует даже бесконечное число вариантов, обеспечивающих наименьшее время путешествия — они много раз могут оставлять другу другу велосипед, лишь бы Коля прошел пешком 16 км, а Сережа — 24 км. Какой вариант лучше — судите сами.

Поменьше меди. *В лабораторию привезли три сплава. Первый содержит 40 % меди и 60 % никеля, второй — 60 % меди и 40 % кобальта, третий — 60 % кобальта и 40 % никеля. Для эксперимента понадобился 1 кг нового сплава, который содержал бы 40 % кобальта и как можно меньше меди (см. таблицу). Как его изготовить?*

	Cu	Ni	Co
I	40%	60%	—
II	60%	—	40%
III	—	40%	60%

Составим математическую модель задачи. Возьмем x кг первого сплава, y кг второго и z кг третьего.

По условию $x+y+z=1$. Кобальта в новом сплаве будет $0{,}4y+0{,}6z$. Опять-таки по условию $0{,}4y+0{,}6z=0{,}4$. Меди в новом сплаве окажется $0{,}4x+0{,}6y$.

Итак, модель построена: *требуется найти неотрицательные числа x, y и z, которые удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ 0{,}4y+0{,}6z=0{,}4 \end{cases}$$

и при которых величина $m=0{,}4x+0{,}6y$ принимает наименьшее значение.

С помощью системы уравнений выразим x и z через y и подставим их значения в выражение для величины m, затем найдем наименьшее значение полученной функции от y (учитывая, конечно, что все переменные x, y и z должны быть неотрицательными).

Из второго уравнения

$$z=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}y.$$

Подставим это значение z в первое уравнение:

$$x=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}y.$$

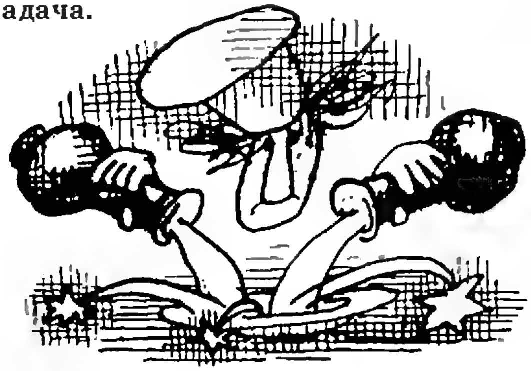
Поэтому $m=\frac{2}{15}+\frac{7}{15}y$.

Мы видим, что величина m тем меньше, чем меньше значение y. Но наименьшее возможное значение y равно 0. Тогда $m=2/15$, при этом $x=1/3$, $z=2/3$, то есть *надо смешать 1/3 кг первого сплава с 2/3 кг третьего, а второй сплав вообще не трогать.*

Заметим, что здесь нам опять встретилась линейная функция

$$m = \frac{2}{15} + \frac{7}{15}y,$$

которая принимает наименьшее значение при наименьшем возможном значении $y=0$. Если бы мы выражали m не через y, а через x или через z, то было бы сложнее выяснить, на каком промежутке надо искать ее наименьшее значение. Как лучше выбирать, к какой переменной сводить функцию — это тоже важная задача.



Можно было бы обойтись без этих выкладок, если подметить следующее обстоятельство. Чтобы новый сплав содержал 40 % кобальта и как можно меньше меди, надо, чтобы в нем было как можно больше никеля. Поэтому второй сплав, который, казалось бы, хорош тем, что в нем уже 40 % кобальта, лучше вообще не трогать, так как в нем совсем нет никеля — см. таблицу. Значит, надо смешать первый и третий сплавы. Пусть мы взяли a кг первого сплава, тогда надо взять $(1-a)$ кг третьего. В новом сплаве будет содержаться $0{,}6(1-a)$ кг кобальта. По условию $0{,}6(1-a)=0{,}4$, поэтому $a=1/3$, что приводит к ответу.

Новогодняя задача*). *На 100 руб. решено купить елочных игрушек. Елочные игрушки продаются наборами. Набор, состоящий из 20 игрушек, стоит 4 руб., набор, состоящий из 35 игрушек, стоит 6 руб., набор, состоящий из 50 игрушек, стоит 9 рублей. Сколько и каких наборов нужно купить, чтобы было куплено наибольшее количество игрушек?*

Одна игрушка в первом наборе стоит 1/5 руб., во втором наборе — 6/35 руб., в третьем наборе — 9/50 руб. Упорядочим эти числа: $6/35<9/50<1/5$. Итак, самые дешевые игрушки во втором наборе, а самые дорогие — в первом.

I	II	III
20шт	35шт	50шт
4руб	6руб	9руб

I	II	III
1шт	1шт	1шт
$\frac{1}{5}$руб	$\frac{6}{35}$руб	$\frac{9}{50}$руб

Чтобы купить на 100 руб. как можно больше игрушек, нужно, конечно, купить побольше дешевых игрушек. Самое большое, мы можем купить 16 наборов по 6 руб. и затратить на это 96 руб.

Остаются 4 руб., на которые можно лишь купить первый набор. Всего мы купим таким способом $16\cdot35+20=580$ игрушек.

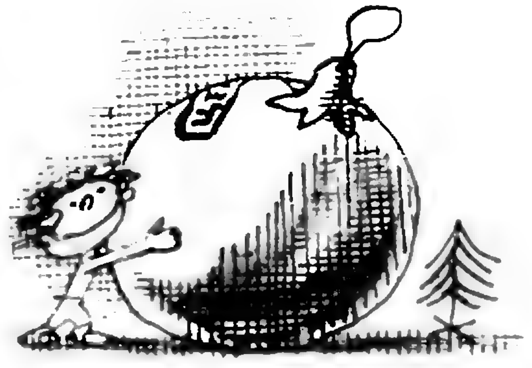
Скорее всего, это самый лучший вариант. Проверим все-таки еще такой: если купить 15 шестирублевых наборов, то остается 10 руб. Мы можем тогда купить еще один девятирублевый набор или два четырехрублевых. И в том, и в другом случае количество игрушек оказывается меньше, чем в первом варианте.

Итак, надо купить 16 наборов по 6 руб. и 1 набор за 4 руб. При этом будет закуплено 580 игрушек.

Мы пришли к этому ответу с помощью такого естественного соображения: можно купить тем больше игрушек, чем они дешевле.

Наши рассуждения правдоподобны, но, вообще говоря, мы перебрали не все возможные варианты. Поэтому приведем более строгое решение.

Пусть x — количество наборов I типа, y — II типа, z — III типа. Надо найти такие неотрицательные



---

*) Эта задача предлагалась на вступительном экзамене на отделении экономической кибернетики экономического факультета МГУ в 1968 г.

числа x, y и z, чтобы выполнялись условия $4x+6y+9z\leqslant 100$ и чтобы величина $S=20x+35y+50z$ была наибольшей.

Поскольку

$$4x+6y+9z=\frac{6}{35}S+\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}z\geqslant\frac{6}{35}S,$$

получается, что $\frac{6}{35}S\leqslant 100$, откуда $S\leqslant 583\frac{1}{3}$.

Так как $S=20x+35y+50z$ — целое число, делящееся на 5, имеем $S\leqslant 580$. При $x=1$, $y=16$, $z=0$ все условия выполняются и $S=580$.

Эта задача относится к *целочисленному программированию*, которое является одним из наиболее сложных разделов математического программирования.

Задачи

1. Трех молодых продавцов — Юрия, Якова и Льва — распределили на работу в универмаг. Директору универмага нужно направить одного из них в отдел радиотоваров, другого — в отдел музыкальных инструментов, а третьего — в отдел фототоваров. Директор попросил психолога помочь ему провести это назначение наилучшим образом. Психолог провел с ними беседу и оценил знания каждого во всех трех областях в баллах. Затем он составил таблицу и представил ее директору универмага. Как директору распределить новичков, чтобы сумма соответствующих баллов была наибольшей? (Например, если Юрия назначить в радиоотдел, Якова — в музыкальный, а Льва — в фотоотдел, то сумма баллов будет равна $5+3+11=19$.)

	РАДИО	ФОТО	МУЗЫКА
Юрий	5	4	7
Яков	6	7	3
Лев	8	11	2

2. На сковородке, вмещающей две котлеты, можно их поджарить с обеих сторон за 10 минут. Как быстрее всего поджарить на этой сковородке 3 котлеты?

3. Даны две точки, A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой. Как расположить на этой прямой отрезок MK данной длины a, чтобы ломаная $AMKB$ имела наименьшую длину?

4. Три брата купили один велосипед, и им нужно добраться до дома, находящегося в 30 км от магазина. Каждый из братьев ходит пешком со скоростью 4 км/ч, а ездит на велосипеде со скоростью 20 км/ч. За какое наименьшее время они могут добраться до дома? (Велосипед можно оставлять на дороге без присмотра.)

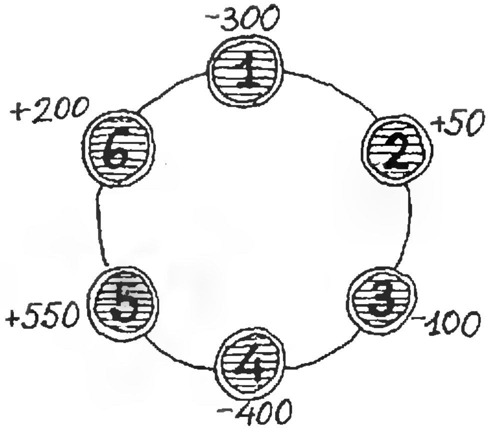
5*). Малыш может съесть торт за 10 мин, банку варенья — за 8 мин и выпить пакет молока за 4 мин. Карлсон может это сделать соответственно в 2 раза быстрее. За какое наименьшее время они могут вместе покончить с завтраком, состоящим из торта, банки варенья и пакета молока?

6. В каждом из четырех сосудов содержится по 1 л смеси кислоты с водой. Процентное содержание кислоты в них равно 10 %, 30 %, 60 %, 80 % соответственно. Лаборанту нужно получить 50 %-ю смесь кислоты с водой. Какое наибольшее количество такой смеси он может получить, сливая смеси из данных сосудов?

7. Нужно изготовить сплав, содержащий 40 % олова. На складе имеются 3 сплава с 60 %, 10 % и 40 % содержанием олова. Цена 1 кг каждого из имеющихся сплавов равна 4,3 руб., 5,8 руб. и 5,5 руб. соответственно. Какие сплавы и в какой пропорции надо взять на складе, чтобы 1 кг нового сплава был как можно дешевле?

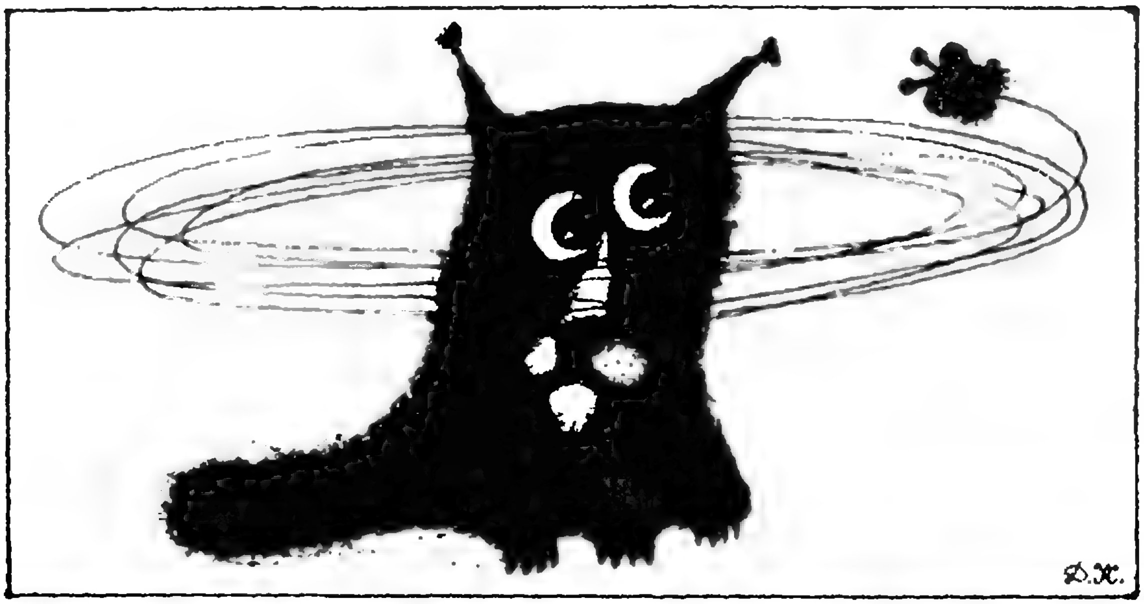
8. (Задача вступительного экзамена отделений планирования народного хозяйства и экономической кибернетики экономического факультета МГУ 1984 г). Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для сборки 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго вида соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

9. На кольцевой магистрали расположены три склада и три магазина; расстояние между каждыми двумя соседними пунктами равно 1 км. На рисунке показано наличие товара на складах (в тоннах) со знаком «+» и потребности магазинов в товаре (в тоннах) со знаком «−». Требуется составить наиболее экономный план перевозок, чтобы перевезти весь груз со складов в магазины и чтобы сумма перевезенных тонно-километров была наименьшей. (Приведите наилучший, с вашей точки зрения, вариант перевозок и изложите те соображения, которые привели вас к этому ответу.)



---

*) Более сложный вариант этой задачи подробно разобран в книге Н. Б. Васильева и др. «Заочные математические олимпиады» (М.: Наука, 1986, задача 4-8).



Искусство программирования

Циклы, циклы, циклы...

Кандидат физико-математических наук
Л. Ф. ШТЕРНБЕРГ

Программирование потеряло бы многое, если бы не было понятия ветвления или вспомогательного алгоритма, но все же сердце программирования — это циклы. Один раз написанная команда, стоящая внутри цикла, будет выполняться многократно — это и придает смысл работе по составлению программы.

Работе команды повторения отведено 3 страницы в учебнике 9 класса, и с ее помощью решается много задач. Еще 2 страницы теории отведено ей в учебнике «Информатика-10» *); вводится дополнительная конструкция — цикл **для**, которая удобна, но без которой можно было бы и обойтись. Так что же можно сказать о циклах? Кому непонятна фраза на русском языке

пока условие **повторять** действия **кц**,

из которой и получается команда повторения (если заменить слово **«повторять»** словом **«нц»**)?. Мы и далее в записи команд цикла будем использовать слово **«повторять»** — записанный так цикл легче читать и понимать. И все-таки циклы *бывают разные.*

Начнем с простейшей задачи: *с помощью описанного на с. 78—81 учебника «Информатика-9» графического исполнителя нарисовать нотный стан с длиной линии 50 и расстоянием между линиями 3.* Это можно сделать такой программой (здесь и далее мы будем писать только тело программы, без заголовка и без описаний):

```
k:=1;
пока k≤5 повторять
   направо (90); рисуй; вперед (50);
   не рисуй; назад (50);
   налево (90); вперед (3);
   k:=k+1
кц
```

Если бы нашим исполнителем командовал человек, не знакомый с программированием, то он бы сказал так: «выполнить 5 раз следующее: направо (90); рисуй ... вперед (3)». И действительно: переменная k нужна нам только для того, чтобы считать количество повторений цикла, в теле цикла она нам не нужна; но исполнитель-то об этом не знает, и он честно заведет переменную k и будет записывать туда текущее значение k: а вдруг его будут использовать в те-

---

*) Так автор кратко называет учебное пособие «Основы информатики и вычислительной техники, II часть» (*Примеч. ред.*)

ле цикла. А если бы исполнителю можно было сказать «выполнить 5 раз...», то он бы мог считать количество повторений цикла в «уме»: и быстрее, и память под переменную k тратить не надо. Так давайте научим наш исполнитель такой команде: введем в алгоритмический язык новую конструкцию цикла

```
повторять M раз действия кц,
```

где M может быть числом или любым выражением, дающим целочисленный результат. С помощью такого цикла программа рисования нотного стана записывается:

```
повторять 5 раз
  направо (90); рисуй; вперед (50);
  не рисуй; назад (50);
  налево (90); вперед (3);
кц
```

Циклы такого вида есть в языках *Робик* и *Рапира*, в на программируемых калькуляторах есть специальные команды для удобной реализации таких циклов; работают такие циклы быстрее цикла **пока**.

Упражнение. Напишите с применением цикла **повторять M раз** программу вычисления площади криволинейной трапеции (см. алгоритм A10 — *«Информатика-9»*, с. 94).

Рассмотрим еще задачу. Пусть надо вычислить квадратный корень из некоторого числа, а под рукой нет таблиц или калькулятора с операцией извлечения корня. Тогда это можно сделать по следующему алгоритму: $y_0=x/2$, $y_i=\frac{1}{2}(y_{i-1}+x/y_{i-1})$.

Последовательность y_i будет приближаться к значению $\sqrt{x}$, и когда $|y_{i-1}-y_i|<\varepsilon$, то y_i отличается от точного значения $\sqrt{x}$ не более чем на ε. Запрограммируем этот метод, применяя известный нам цикл **пока**:

```
$y:=x/2$;
пока $|y-y_{ст}|\geqslant\varepsilon$ повторять
    $y_{ст}:=y$; $y:=(y+x/y)/2$;
кц
```

(здесь $y_{ст}$ — это старое значение y: на каждом шаге в нем запоминается старое (предыдущее) значение y и вычисляется новое значение). Но, посмотрев повнимательнее, мы увидим, что программа работать не будет: на входе в цикл нам надо проверить разность y и $y_{ст}$, а $y_{ст}$ не имеет никакого значения. Проблема в том, чтобы как-то «проникнуть» внутрь цикла, а дальше все пойдет нормально. Для этого можно изменить первую строку:

$$y:=x/2;\ y_{ст}:=y+2\cdot\varepsilon;$$

придав $y_{ст}$ какое угодно значение, отличающееся не менее, чем на ε, от значения y. Это значение нам не нужно, мы его сотрем тут же после входа в цикл, но таким способом мы «обманным путем» выполним условие в цикле и войдем в цикл. Ну и трюк! А все дело в том, что нам надо сначала что-то вычислить, а уж затем проверять. Эх, если бы был цикл, который сначала выполняет действия, а затем проверку!.. Так давайте введем такой цикл — цикл с проверкой условия в конце — он будет иметь вид:

```
повторять действия до условие;
```

и работать в точном соответствии со смыслом его записи на русском языке: выполняются действия, проверяется условие — если оно не удовлетворяется, то опять выполняются действия и т. д., а когда условие удовлетворено, то цикл кончает свою работу. Этот вид цикла называется «цикл до».

Такой цикл есть, например, в языке Паскаль и он очень удобно программируется на калькуляторах.

С помощью цикла **до** вычисление квадратного корня программируется просто и естественно:

```
$y:=x/2$;
повторять $y_{ст}:=y$; $y:=(y+x/y)/2$;
до $|y-y_{ст}|<\varepsilon$;
```

В учебнике нет такой конструкции цикла, но... на с. 15 «Информатики-10» приведен пример программы в командах ЭВМ, где вычисляется значение выражения $k+(k-1)+(k-2)+...+2+1$. Для этой программы нет алгоритма на алгоритмическом языке, но если попробовать его написать, то нам придется использовать цикл **до**, так как в программе проверка окончания работы цикла выполняется в конце цикла:

```
$R_2:=0$; $R_0:=R_1$;
повторять $R_2:=R_2+R_0$; $R_0:=R_0-1$
до $R_0=0$;
```

(здесь в R_1 хранится значение k, а сумма получается в R_2).

Упражнение. Шарик массой 0,1 кг подвесили к пружине жесткостью 40 Н/м, оттянули вниз на 1 см и отпустили. Напишите программу с циклом **до**, вычисляющую момент прохождения шарика через положение равновесия. (Теория качания шарика см. на с. 71—72, «Информатика-9».)

Продолжаем анализировать алгоритмы с циклами. На с. 63 («Информатика-9») приведен алгоритм вычисления значения многочлена по схеме Горнера:

```
$i:=0$; $y:=a[0]$;
пока $i \neq n$ повторять
   $i:=i+1$; $y:=y \cdot x+a[i]$
кц
```

Посмотрите на переменную i: на каждом шаге цикла она изменяется на одно и то же значение (в данном случае на 1), и именно по этой переменной определяется, когда надо кончать цикл. Пролистайте учебник — почти на каждой странице вы найдете цикл, в котором какая-то переменная каждый раз изменяется на одно и то же значение, и именно по ее значению определяется завершение работы цикла. Такая ситуация встречается очень часто, поэтому такие циклы получили специальное название — *циклы с параметром*.

Параметром цикла называется та самая переменная, которая меняется одинаковым образом и служит для определения окончания работы цикла. Есть для них и специальная форма записи:

```
меняя параметр от значение 1
шагом значение 2
до значение 3 повторять действия
кц
```

Смысл этой конструкции, как всегда, соответствует значению фразы на русском языке. С ее помощью алгоритм схемы Горнера можно записать

```
$y:=a[0]$;
меняя $i$ от 1 шагом 1 до $n$ повторять
   $y:=y \cdot x+a[i]$
кц
```

Как видим, здесь заголовок цикла вобрал в себя и установку начального значения параметра, и изменение его, и проверку на окончание цикла. При этом шаг, если он равен единице, можно не задавать. Так, в нашем случае можно написать

```
меняя $i$ от 1 до $n$ повторять
```

Такой цикл имеется практически во всех языках программирования, но по традиции имеет чуть другую форму записи:

для .... от ... шаг ... до ... цикл

и называется еще «цикл для». Именно в таком виде он есть в языках *Рапира*, ПЛ/1, *Алгол*-60, *Алгол*-68 и т. д. При этом в некоторых языках (*Фортран*, например, или школьный алгоритмический язык) сначала задается конечное значение, а затем шаг, а в некоторых (ПЛ/1) — можно писать и так, и так.

Почему же эта конструкция цикла появилась в учебнике «Информатика-10»? На первый взгляд этот цикл, как и цикл **повторять ... раз**, не дает нам ничего нового — только запись стала поудобнее: вместо

```
$x:=a$;
пока $x \leqslant b$ повторять
   ...     $x:=x+h$;
кц
```

пишем

```
меняя $x$ от $a$ шагом $h$ до $b$ повторять ... кц
```

и все. Но это не совсем так: например, если $a=0$, $b=1$, а $h=0{,}1$, то оба цикла сработают одинаково, но если $h=-0{,}1$, то цикл **пока** зациклится (значение a никогда не станет больше b), а цикл с параметром просто не выполнится ни одного раза: дело в том, что в этом цикле не просто проверяется условие «$x \leqslant b$», а контролируется нахождение значения параметра между a и b; при попытке выйти из диапазона в любую сторону, в частности, если шаг направлен не к b, а в обратную сторону, цикл выполняться не будет. Итак, цикл с параметром, как и цикл **повторять ... раз** — это *защищенная конструкция*: такие циклы никогда не зацикливаются.

Упражнение. Напишите с применением цикла для (цикла **меняя**) алгоритмы МИНЭЛЕМЕНТ и УПОРЯДОЧЕНИЕ (А7, А8 на с. 93, «Информатика-9»).

Но и у цикла с параметром может встретиться ситуация, когда заранее не ясно, сколько надо сделать шагов изменения параметра. Например, пусть в таблице из M элементов надо найти позицию, в которой встречается элемент, равный i. Для поиска элемента надо просмотреть таблицу элемент за элементом, меняя индекс на 1, но сколько шагов надо сделать — это заранее неизвестно. Справиться с этой задачей нам поможет гибрид из цикла **меняя** и цикла **пока**:

```
меняя $i$ от 1 шагом 1 пока $a[i] \neq x$ повторять кц
```

Обратите внимание: тело цикла пустое — все, что надо, выполняет заголовок цикла; выход из цикла произойдет, когда $a[i]=x$, притом в i останется номер того элемента таблицы, на котором прервался цикл.

Такой цикл есть в языке ПЛ/1.

Понятно, что можно образовать и гибрид

```
меняя ... от ... шагом ... повторять ... до ... ,
```

в котором изменяется параметр, а проверка производится в конце. Приведенный выше метод поиска нужного элемента в таблице будет работать только тогда, когда мы уверены в том, что искомый элемент в таблице есть. Если его нет, то через M шагов значение i выйдет за границу таблицы, и нам будет выдано сообщение об ошибке, либо же ЭВМ начнет делать что-то непредсказуемое. Изменим наш алгоритм так, чтобы при отсутствии нужного элемента он давал нам, например, нулевое значение номера. Казалось бы, можно сделать так:

```
меняя $i$ от 1 шагом 1 пока $i \leq M$ и $a[i] \neq x$
повторять кц;
если $i > M$ то $i := 0$; все;
```

но так делать нельзя: если нужного элемента нет, то на шаге ($M+1$), даже убедившись в том, что $i > M$, ЭВМ все равно попробует сравнить несуществующий элемент $a[M+1]$ с x — и может дать сообщение об ошибке. Заглянув в учебник на с. 57, мы найдем способ выкрутиться из этого положения ценой введения дополнительной переменной и дополнительных сравнений (число сравнений придется ни много ни мало — удвоить), и изучив его, признаем, что не каждый смог бы его самостоятельно придумать. Вот если бы нам удалось заставить ЭВМ сначала сравнить i с M, а второе сравнение проводить только при положительном результате первого сравнения...

Но читатель уже, наверное, понял основную нашу мысль: *если нам неудобно работать, значит, нам чего-то не хватает и это «что-то» надо ввести.* А не хватает нам возможности выполнять две отдельные проверки и два выхода из цикла: по обнаружению элемента и по исчерпанию таблицы. Если учесть, что задача поиска — это весьма частая задача, то введение удобных средств для поиска — не мелочь. Но признав, что в цикле может быть более одной причины выхода, не стоит ограничиваться и двумя. И вот в нашем алгоритмическом языке появляется мощная и удобная конструкция цикла, охватывающая почти все нужные случаи:

```
меняя ... от ... шагом ... до ...
пока ... повторить ... раз
тело цикла
до ... кц.
```

где может отсутствовать любая из подчеркнутых частей, причем не должны присутствовать одновременно слова **меняя** и **раз**, а также **до** и **кц** (но либо **до**, либо **кц** должно быть). Работает этот цикл так: сначала изменяется параметр, если он есть; затем проверяется, не вышел ли параметр за диапазон, если параметр и диапазон заданы; либо проверяется, не превышено ли заданное число повторений, если есть слово **раз**; если первая проверка не вызвала окончания цикла, то проверяется условие, стоящее после **пока** (если оно есть); если и это условие не привело к окончанию цикла, то выполняется тело; далее проверяется выполнение условия, стоящего после **до** (если оно есть). После выхода из цикла параметр, если он есть, сохраняет последнее полученное значение.

Почти такая конструкция цикла есть в языке ПЛ/1.

С этим мощным циклом задача поиска элемента решается просто:

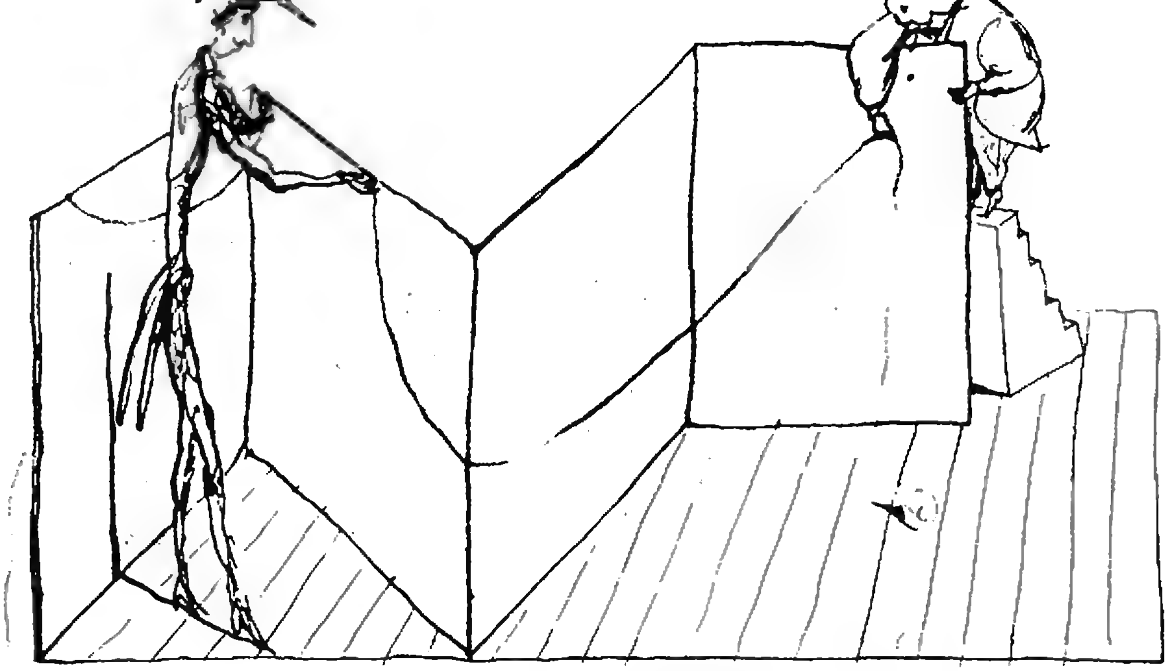
```
меняя $i$ от 1 до $M$ пока $a[i] \neq x$ повторять кц;
если $i > M$ то $i := 0$ все
```

или второй вариант:

```
меняя $i$ от 1 до $M$ повторять до $a[i] = x$;
если $i > M$ то $i := 0$ все
```

Обратите внимание: *в* **пока** *стоит условие продолжения цикла, а в* **до** *— условие окончания.* После цикла, проверив значение i, мы определяем, по какой именно из двух причин произошел выход из цикла.

Умело выбирая из своего арсенала подходящую конструкцию цикла, мастер-программист получит самую простую, короткую, быструю или понятную программу. Но следует подчеркнуть, что в этой статье, конечно, раскрыты далеко не все секреты циклов.



Практикум абитуриента

Вычисление расстояний и углов

Кандидат педагогических наук
Ю. И. ИОНИН,
В. Б. НЕКРАСОВ

В этой статье рассматривается несколько геометрических задач, для решения которых необходимо вычислить те или иные расстояния или углы в пространстве (эти задачи предлагались на вступительных экзаменах в разные вузы). Задачи такого типа удобно решать с помощью скалярного произведения векторов. Основной метод решения заключается в том, что в пространстве выбирается подходящий базис и составляется *таблица умножения* — таблица скалярных произведений векторов этого базиса. Имея такую таблицу и зная разложения векторов в выбранном базисе, вычислить длины этих векторов и углы между ними уже легко. Мы начнем с простой задачи, где этот метод напрашивается сам собой, а затем перейдем к более сложным задачам, продемонстрировав на них все основные случаи.

Задача 1 (МАИ, 1981). *В треугольной пирамиде ABCD все ребра имеют одинаковую длину. Точка M — середина ребра AD, точка O — центр треугольника ABC, точка N — середина ребра AB и точка K — середина ребра CD. Найдите угол между прямыми MO и KN.*

Решение. Примем длину ребра тетраэдра за единицу и выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$. Составим таблицу умножения для этого базиса (табл. 1, с. 48). Разложим векторы $\overrightarrow{MO}$ и $\overrightarrow{KN}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}\vec{a}=$$
$$=\frac{1}{6}(-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}),$$

$$\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}\vec{c}=$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}).$$

Угол φ между прямыми MO и KN вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{KN}|}{|\overrightarrow{MO}|\cdot|\overrightarrow{KN}|}.$$

Найдем $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{KN}$, $|\overrightarrow{MO}|$ и $|\overrightarrow{KN}|$, пользуясь таблицей 1:

	$\vec a$	$\vec b$	$\vec c$
$\vec a$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\vec b$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\vec c$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Таблица 1

	$\vec m$	$\vec n$	$\vec p$
$\vec m$	h^2	0	0
$\vec n$	0	a^2	$\frac{a^2}{2}$
$\vec p$	0	$\frac{a^2}{2}$	a^2

Таблица 2

	$\vec a$	$\vec b$	$\vec c$
$\vec a$	16	16 cos φ	4 cos φ
$\vec b$	16 cos φ	16	4 cos φ
$\vec c$	4 cos φ	4 cos φ	1

Таблица 3

$$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{KN}=$$

$$=\frac{1}{12}(-\vec a+2\vec b+2\vec c)(\vec a+\vec b-\vec c)=\frac{1}{12};$$

$$|\overrightarrow{MO}|=\frac{1}{6}\sqrt{(-\vec a+2\vec b+2\vec c)^2}=\frac{1}{2};$$

$$|\overrightarrow{KN}|=\frac{1}{2}\sqrt{(\vec a+\vec b-\vec c)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{6}$, $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Однако условие задачи не всегда позволяет выбрать базис с полностью определенной таблицей умножения. В этом случае нужно попытаться составить уравнение относительно недостающего элемента.

Задача 2 (МФТИ, 1974). *Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a, точки O и O_1 являются центрами оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $\frac{5a}{6}$. Определите высоту призмы.*

Решение. Выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{AA_1}=\vec m$, $\overrightarrow{AB}=\vec n$, $\overrightarrow{AC}=\vec p$ (рис. 1). Пусть $h=|\vec m|$. Таблица 2 — это таблица умножения для базиса $(\vec m, \vec n, \vec p)$.

Ортогональная проекция отрезка AO_1 на прямую B_1O равна длине этого отрезка, умноженной на косинус угла φ между прямыми AO_1 и B_1O. Чтобы вычислить $|\overrightarrow{AO_1}|$ и $\cos\varphi$, разложим векторы $\overrightarrow{AO_1}$ и $\overrightarrow{B_1O}$ в базисе $(\vec m, \vec n, \vec p)$:

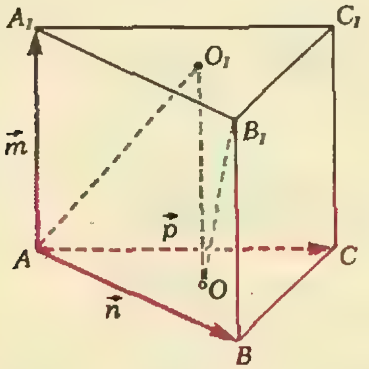


Рис. 1.

$$\overrightarrow{AO_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1})=$$

$$=\frac{1}{3}(\vec m+\vec m+\vec n+\vec m+\vec p)=$$

$$=\frac{1}{3}(3\vec m+\vec n+\vec p);$$

$$\overrightarrow{B_1O}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB_1}=\frac{1}{3}(\vec n+\vec p)-(\vec m+\vec n)=$$

$$=\frac{1}{3}(-3\vec m-2\vec n+\vec p).$$

Используя таблицу 2, находим:

$$|\overrightarrow{AO_1}|=|\overrightarrow{B_1O}|=\frac{1}{3}\sqrt{9h^2+3a^2},$$

$$\overrightarrow{AO_1}\cdot\overrightarrow{B_1O}=-\frac{1}{6}(6h^2+a^2),$$

$$\cos\varphi=\frac{6h^2+a^2}{2(3h^2+a^2)}.$$

Поскольку $|\overrightarrow{AO_1}|\cdot\cos\varphi=\frac{5a}{6}$, мы получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{9h^2+3a^2}\,(6h^2+a^2)}{6(3h^2+a^2)}=\frac{5a}{6}.$$

Отсюда $h=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Можно выделить четыре основных типа задач на вычисление расстояний и углов:

1. Расстояние от точки до прямой

Дано: *точка M; прямая l с направляющим вектором $\vec a$, точка A, принадлежащая прямой l; $\overrightarrow{AM}=\vec m$.*

Найти: *расстояние от точки M до прямой l.*

(Векторы $\vec a$ и $\vec m$ в условии задачи даны в том смысле, что известны их разложения в некотором базисе с заданной таблицей умножения.)

Приведем схему решения этой задачи.

Пусть N — ортогональная проекция точки M на прямую l (рис. 2). Тогда $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=x\vec a-\vec m$. Неизвестный коэффициент x находится из условия перпендикулярности векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\vec{a}$: $(x\vec{a}-\vec{m})\cdot\vec{a}=0$. Искомое расстояние $|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(x\vec{a}-\vec{m})^2}$.

Задача 3 (МФТИ, 1984). *В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $SA=4$) точка D лежит на ребре SC, $CD=3$, а расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найдите объем пирамиды.*

Решение. Выберем базис из векторов $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{c}$. Составим таблицу умножения для этого базиса, обозначив через φ плоский угол при вершине пирамиды (табл. 3). По условию расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Вычислив это расстояние с помощью таблицы 3, мы получим уравнение, позволяющее найти $\cos\varphi$.

Пусть N — проекция точки A на прямую BD (рис. 3). Тогда $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DA}=x\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=x(\vec{b}-\vec{c})-(\vec{a}-\vec{c})=-\vec{a}+x\vec{b}+(1-x)\vec{c}$. Так как векторы $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{DB}$ перпендикулярны, получаем $(-\vec{a}+x\vec{b}+(1-x)\vec{c})(\vec{b}-\vec{c})=0$. Используя таблицу 3, после упрощений находим:

$$(17x-1)-8(x+1)\cos\varphi=0. \quad (1)$$

Вычислим теперь длину вектора $\overrightarrow{AN}$:

$$|\overrightarrow{AN}|^2=(-\vec{a}+x\vec{b}+(1-x)\vec{c})^2=17x^2-2x+17-8(x+1)^2\cos\varphi.$$

Так как $|\overrightarrow{AN}|^2=4$,

$$17x^2-2x+13-8(x+1)^2\cos\varphi=0. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем $x=\frac{7}{9}$.

Поэтому $\cos\varphi=\frac{55}{64}$.

Найдем теперь длину отрезка SO — высоту пирамиды. Так как O — центр треугольника ABC, $\overrightarrow{SO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c})$, откуда

$$|\overrightarrow{SO}|=\frac{1}{3}\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c})^2}=\frac{1}{3}\sqrt{48+96\cos\varphi}=\frac{1}{2}\sqrt{58}.$$

Чтобы найти площадь основания пирамиды, вычислим $|\overrightarrow{AB}|^2$:

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=\frac{9}{2}.$$

Теперь искомый объем

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot|\overrightarrow{SO}|=\frac{3\sqrt{174}}{16}.$$

2. Расстояние от точки до плоскости. Угол между прямой и плоскостью

Дано: *плоскость α с базисом $(\vec{a}, \vec{b})$, точка A, принадлежащая плоскости α, точка M, не лежащая в плоскости α, $\overrightarrow{AM}=\vec{m}$.*

Найти: *расстояние от точки M до плоскости α и угол между прямой AM и плоскостью α.*

Схема решения этой задачи такова.

Пусть N — ортогональная проекция точки M на плоскость α (рис. 4). Тогда $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m}$. Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{MN}$ векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\begin{cases}(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m})\cdot\vec{a}=0,\\(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m})\cdot\vec{b}=0.\end{cases}$$

Зная x и y, находим расстояние от точки M до плоскости α, равное $\sqrt{(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m})^2}$.

Если $x\vec{a}+y\vec{b}\neq\vec{0}$, то угол между прямой AM и плоскостью α равен углу между векторами $\vec{m}$ и $x\vec{a}+y\vec{b}$, а если $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$, то прямая AM перпендикулярна плоскости α.

Задача 4 (МФТИ, 1983). *В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом*

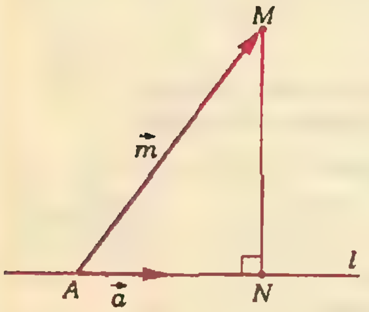


Рис. 2.

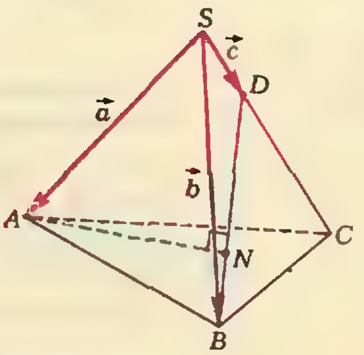


Рис. 3.

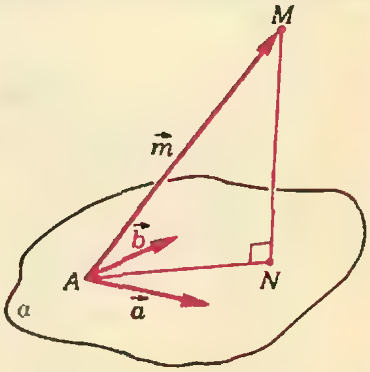


Рис. 4.

	$\vec{m}$	$\vec{n}$	$\vec{p}$
$\vec{m}$	a^2	$\frac{a^2}{2}$	0
$\vec{n}$	$\frac{a^2}{2}$	a^2	0
$\vec{p}$	0	0	a^2

Таблица 4

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	32	16	0
$\vec{b}$	16	32	0
$\vec{c}$	0	0	4

Таблица 5

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	3	0	0
$\vec{b}$	0	1	$\frac{1}{2}$
$\vec{c}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Таблица 6

$\widehat{A}=60°$. *Все ребра призмы имеют длину a. Точка K является ортогональной проекцией точки B_1 на плоскость DA_1C_1, а точка L — ортогональной проекцией точки K на плоскость DD_1C_1C. Найдите объем пирамиды $DCLK$.*

Решение. Примем за основание пирамиды $DCLK$ треугольник CDL, лежащий в плоскости DD_1C_1C. Тогда отрезок KL — высота пирамиды (рис. 5). Следовательно, $V_{KCDL}=\frac{1}{3}S_{CDL}\cdot KL=\frac{1}{6}DC\cdot LM\cdot KL$, где M — ортогональная проекция точки L на прямую DC.

Выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{C_1B_1}=\vec{m}$, $\overrightarrow{C_1D_1}=\vec{n}$, $\overrightarrow{C_1C}=\vec{p}$ и заполним таблицу 4 — таблицу умножения для этого базиса.

Далее,

$$\overrightarrow{B_1K}=\overrightarrow{C_1K}-\overrightarrow{C_1B_1}=$$
$$=x\overrightarrow{C_1A_1}+y\overrightarrow{C_1D}-\overrightarrow{C_1B_1}=$$
$$=x(\vec{m}+\vec{n})+y(\vec{n}+\vec{p})-\vec{m}=$$
$$=(x-1)\vec{m}+(x+y)\vec{n}+y\vec{p}.$$

Так как вектор $\overrightarrow{B_1K}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{C_1A_1}$ и $\overrightarrow{C_1D}$, получаем систему

$$\overrightarrow{B_1K}\cdot(\vec{m}+\vec{n})=0,\quad \overrightarrow{B_1K}\cdot(\vec{n}+\vec{p})=0.$$

Заменив вектор $\overrightarrow{B_1K}$ его разложением в базисе $(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p})$ и воспользовавшись таблицей 4, придем после упрощений к системе уравнений $2x+y=1$, $3x+4y=1$, откуда $x=\frac{3}{5}$, $y=-\frac{1}{5}$.

Следовательно, $\overrightarrow{C_1K}=\frac{3}{5}(\vec{m}+\vec{n})-\frac{1}{5}(\vec{n}+\vec{p})=\frac{1}{5}(3\vec{m}+2\vec{n}-\vec{p})$. Аналогично $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{C_1L}-\overrightarrow{C_1K}=z\overrightarrow{C_1D_1}+t\overrightarrow{C_1C}-\overrightarrow{C_1K}=z\vec{n}+t\vec{p}-\frac{1}{5}(3\vec{m}+2\vec{n}-\vec{p})=\frac{1}{5}(-3\vec{m}+(5z-2)\vec{n}+(5t+1)\vec{p})$. Так как $\overrightarrow{KL}\cdot\vec{n}=0$ и $\overrightarrow{KL}\cdot\vec{p}=0$, то $-\frac{3}{2}+5z-2=0$, откуда $z=\frac{7}{10}$, и $5t+1=0$, откуда $t=-\frac{1}{5}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{5}\left(-3\vec{m}+\frac{3}{2}\vec{n}\right)=\frac{3}{10}(-2\vec{m}+\vec{n}).$$

Теперь можно найти высоту пирамиды $KCDL$:

$$KL=\frac{3}{10}\sqrt{(-2\vec{m}+\vec{n})^2}=\frac{3a\sqrt{3}}{10}.$$

Осталось найти $\overrightarrow{LM}$:

$$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CL}=u\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{C_1L}-\overrightarrow{C_1C})=$$
$$=u\vec{n}-z\vec{n}-t\vec{p}+\vec{p}=\left(u-\frac{7}{10}\right)\vec{n}+\frac{6}{5}\vec{p}.$$

Так как $\overrightarrow{LM}\cdot\vec{n}=0$, то $u=\frac{7}{10}$, откуда $\overrightarrow{LM}=\frac{6}{5}\vec{p}$, $|\overrightarrow{LM}|=\frac{6a}{5}$. Таким образом,

$$V_{KCDL}=\frac{1}{6}\cdot a\cdot\frac{6a}{5}\cdot\frac{3a\sqrt{3}}{10}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{50}.$$

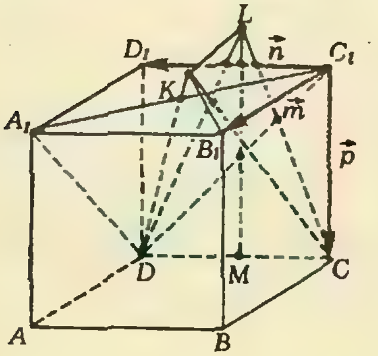


Рис. 5.

3. Расстояние и угол между скрещивающимися прямыми

Дано: *прямая l_1 с направляющим вектором $\vec{a}_1$, точка A_1, принадлежащая прямой l_1; прямая l_2 с направляющим вектором $\vec{a}_2$, точка A_2, принадлежащая прямой l_2; $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{m}$.*

Найти: *расстояние и угол между прямыми l_1 и l_2.*

Задачи этого типа решаются по следующей схеме.

Косинус угла φ между прямыми l_1 и l_2 находится по формуле

$$\cos\varphi=\frac{|\vec a_1\cdot\vec a_2|}{|\vec a_1|\cdot|\vec a_2|}.$$

Чтобы определить расстояние между прямыми l_1 и l_2, то есть длину их общего перпендикуляра P_1P_2 ($P_1\in l_1$, $P_2\in l_2$, рисунок 6), представим вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$ в виде $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2P_2}=x\vec a_1+\vec m+y\vec a_2$. Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условий перпендикулярности вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$ векторам $\vec a_1$ и a_2:

$$\begin{cases}(x\vec a_1+y\vec a_2+\vec m)\,\vec a_1=0,\\(x\vec a_1+y\vec a_2+\vec m)\,\vec a_2=0.\end{cases}$$

Искомое расстояние — длина вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$, то есть $\sqrt{(x\vec a_1+y\vec a_2+\vec m)^2}$.

Задача 5 (МГУ, мех.-мат., 1977). *Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.*

Решение. Пусть M и N — середины ребер BC и AB (рис. 7). Выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{CA}=\vec a$, $\overrightarrow{CB}=\vec b$, $\overrightarrow{CS}=\vec c$. Таблица умножения для этого базиса — это таблица 5. Найдем угол φ между прямыми SM и CN:

$$\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CS}=\frac{1}{2}\vec b-\vec c=$$
$$=\frac{1}{2}(\vec b-2\vec c);\quad \overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\vec a+\vec b).$$

Вычислим $\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{CN}$, $|\overrightarrow{SM}|$, $|\overrightarrow{CN}|$:

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{CN}=12,\ |\overrightarrow{SM}|=2\sqrt{3},\ |\overrightarrow{CN}|=2\sqrt{6}.$$

Следовательно, $\cos\varphi=\dfrac{12}{2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi=45^\circ$.

Вычислим теперь расстояние между прямыми SM и CN, то есть длину их общего перпендикуляра PQ ($P\in SM$, $Q\in CN$)

$$\overrightarrow{PQ}=x\overrightarrow{SM}+y\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{SC}=$$
$$=\frac{x}{2}(\vec b-2\vec c)+\frac{y}{2}(\vec a+\vec b)-\vec c=$$
$$=\frac{1}{2}\left(y\vec a+(x+y)\,\vec b-(2x+2)\,\vec c\right).$$

Из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{PQ}$ векторам $\vec b-2\vec c$ и $\vec a+\vec b$ получаем систему уравнений

$$3x+3y=-1,\ x+2y=0,$$

откуда $x=-\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{1}{3}$.

Следовательно, $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{6}(\vec a-\vec b-2\vec c)$,

$$PQ=\frac{1}{6}\sqrt{(\vec a-\vec b-2\vec c)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

4. Угол между плоскостями

Угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярными им прямыми. Действительно, пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c (рис. 8). Через какую-нибудь точку, не лежащую на прямой c, проведем прямые a и b, перпендикулярные плоскостям α и β соответственно. Тогда плоскость, проходящая через прямые a и b, пересекает плоскости α и β по прямым a_1 и b_1, перпендикулярным прямой c (см. рис. 8). Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a_1 и b_1, который, в свою очередь, равен углу между прямыми a и b (так как прямые a, b, a_1, b_1 лежат в одной плоскости и $a\perp a_1$, $b\perp b_1$).

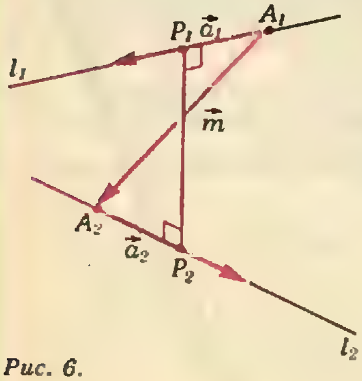


Рис. 6.

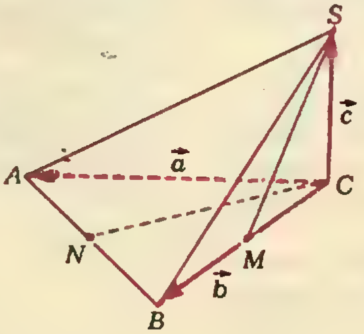


Рис. 7.

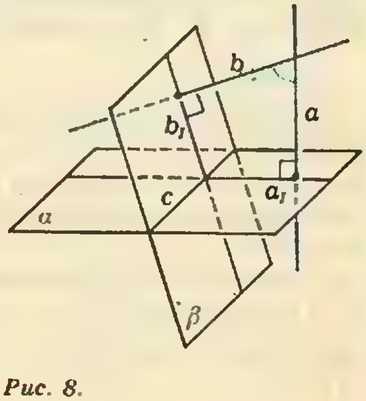


Рис. 8.

Таким образом, *задача нахождения угла между плоскостями сводится к вычислению угла между прямыми.*

Задача 6 (НГУ, 1981). *В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $SA=\sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SB и AC, плоскость β параллельна прямым SC и AB. Определите величину угла между плоскостями α и β.*

Решение. Выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{AS}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Таблица 6 (с. 50) — это таблица умножения для векторов этого базиса.

Если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — ненулевые векторы, перпендикулярные плоскостям α и β соответственно, а φ — угол между этими плоскостями, то

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}.$$

В качестве вектора $\vec{m}$ можно взять любой ненулевой вектор, удовлетворяющий условиям $\overrightarrow{SB}\cdot\vec{m}=0$, $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{m}=0$.

Запишем вектор $\vec{m}$ в виде $\vec{m}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$. Так как $\overrightarrow{SB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases}(\vec{b}-\vec{a})(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=0,\\ \vec{c}\,(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=0.\end{cases}$$

С помощью таблицы 6 приводим эту систему к виду

$$6x-2y-z=0,\ y+2z=0.$$

Число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных. Это объясняется тем, что вектор $\vec{m}$ условием $\vec{m}\perp\alpha$ не определен однозначно. Решение такой системы сводится к выражению двух неизвестных через третье. Выразим x и y через z: $y=-2z$, $x=-\frac{1}{2}z$.

Положив теперь, например, $z=-2$, найдем x и y: $x=1$, $y=4$. Вектор $\vec{m}=\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}$ — **один** из ненулевых векторов, перпендикулярных плоскости α.

Аналогично будем искать ненулевой вектор $\vec{n}=t\vec{a}+u\vec{b}+v\vec{c}$, перпендикулярный плоскости β: $\overrightarrow{SC}\cdot\vec{n}=0$, $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$;

$$\begin{cases}(\vec{c}-\vec{a})(t\vec{a}+u\vec{b}+v\vec{c})=0,\\ \vec{b}\,(t\vec{a}+u\vec{b}+v\vec{c})=0,\end{cases}$$

так что

$$t=-\frac{1}{2}u,\quad v=-2u.$$

Можно взять $u=-2$. Тогда $v=4$, $t=1$, так что $\vec{n}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$. (Выражение для вектора $\vec{n}$ можно было получить из выражения для вектора $\vec{m}$, заметив, что условие, задающее плоскость β, получается из условия, задающего плоскость α, перестановкой точек B и C.)

Теперь вычисляем $\cos\varphi$:

$\vec{m}\cdot\vec{n}=(\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c})(\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c})=-3$,

$|\vec{m}|=\sqrt{(\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c})^2}=\sqrt{15}$, $|\vec{n}|=\sqrt{15}$,

$\cos\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}}=\dfrac{1}{5}$.

Таким образом, $\varphi=\arccos\frac{1}{5}$.

Упражнения

1 (МИНХ, 1977). В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC, а точка M — середина стороны CD. Найдите AD, если $AK=6$, $AM=3$ и $\angle KAM=60°$

2 (МФТИ, 1969). В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BDC, а точка E — середина ребра AB. Найдите угол между прямыми MN и DE.

3 (НГУ, 1978). В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длины катетов AB и AC которого равны a. Боковые ребра AA', BB', CC' образуют с плоскостью основания углы в 60°, а диагональ BC' боковой грани $CBB'C'$ перпендикулярна ребру AC. Найдите объем призмы, если длина диагонали BC' равна $a\sqrt{6}$.

4 (МФТИ, 1983). В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна a, длина бокового ребра равна $a/2$. Точка D является ортогональной проекцией середины ребра A_1C_1 на плоскость AB_1C, а точка E — ортогональной проекцией точки D на плоскость AA_1B_1B. Найдите объем пирамиды A_1B_1DE.

5 (МФТИ, 1977). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC, параллельные плоскости SAD.

а) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BD такую, что $DM:DB=1:3$. Найдите его длину.

б) Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

Варианты вступительных экзаменов

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На координатной плоскости расположены точки $A(3;\ 1)$ и $B(-2;\ 4)$. Найдите координаты точки C, лежащей на биссектрисе I и III координатных углов и одинаково удаленной от точек A и B.

2. Решите неравенство

$$\sqrt{9x+\frac{1}{2x+1}}\cdot(9-25x^2)\geqslant 0.$$

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(1-a)\,\mathrm{tg}^2\,x-\frac{2}{\cos x}+1+3a=0$$

имеет более одного решения на интервале $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

4. Длина стороны AB параллелограмма $ABCD$ равна 2, $\widehat{BAD}=45^\circ$. Точки E и F расположены на диагонали BD, причем $\widehat{AEB}=\widehat{CFD}=90^\circ$, $BF=\frac{3}{2}BE$. Найдите площадь параллелограмма.

5. Длина ребра основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) равна 8. Точки K и L расположены на ребрах AB и AC соответственно, причем $AK=7$, $AL=4$. Известно, что для данной пирамиды существует единственный конус, вершина которого совпадает с точкой K, центр основания лежит на прямой SC, а отрезок KL является одной из образующих. Найдите объем конуса.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)}\cdot\log_5 x=-2.$$

2. Точка D лежит на стороне BC прямоугольного треугольника ABC ($\widehat{C}=90^\circ$), причем $AB=5$, $\widehat{ADC}=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$, $DB=\frac{4\sqrt{10}}{3}$. Найдите площадь треугольника ABC.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x=\sin 2y,\\ 2\sin(4x+8y)\sin(3x+10y)+\\ \qquad\qquad+5\cos(7x+2y)=4.\end{cases}$$

4. Длина высоты правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) в $\sqrt{3}$ раз больше длины ребра основания. Точка E — середина апофемы грани ASB. Найдите угол между прямой DE и плоскостью ASC.

5. Для каждого числа p на координатной плоскости рассматривается множество M всех точек, координаты $(a;\ b)$ которых удовлетворяют условиям $a>0$, $b>0$, $a+b>1$, $3ap<bp+2p^2$ и таковы, что система уравнений

$$\begin{cases}px^2+2xy+y^2=b^2,\\ 3x+y=a\end{cases}$$

не имеет решений.

а) Найдите площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество M, если $p=\frac{21}{5}$.

б) Найдите все действительные p, при которых множество M является внутренней областью многоугольника.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Чашка пружинных весов массой m_1 совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой A (рис. 1). Когда чашка находилась в крайнем нижнем положении, на нее положили груз массой m_2. В результате колебания прекратились. Определите первоначальный период колебаний чашки.

2. Два теплоизолированных баллона соединены трубкой, перекрытой вентилем. В первом баллоне объемом $V_1=500$ л находится $m_1=16{,}8$ кг азота под давлением $p_1=3\cdot10^6$ Па; во втором баллоне объемом $V_2=250$ л находится $m_2=1{,}2$ кг аргона под давлением $p_2=5\cdot10^5$ Па. Какие давление и температура установятся в баллонах, если открыть вентиль? Теплоемкость моля азота $C_1=5/2\ R$, его молярная масса $M_1=28$ г/моль; теплоемкость моля аргона $C_2=3/2\ R$, молярная масса $M_2=40$ г/моль; газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

3. По вертикальным проводящим рельсам в поле тяжести может скользить без трения контакт массой m и длиной l. Рельсы замкнуты на идеальную катушку с индуктивностью L и находятся в горизонтальном магнитном поле, перпендикулярном плоскости рисунка 2. Вначале контакт поддерживался в покое внешней силой. В некоторый момент времени внешняя сила убирается, и контакт начинает двигаться вниз с нулевой началь-

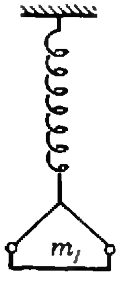


Рис. 1.

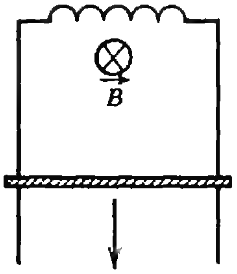


Рис. 2.

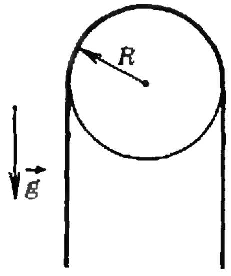


Рис. 3.

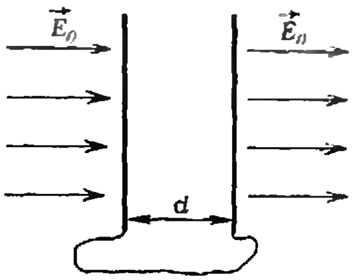


Рис. 4.

ной скоростью. Определите модуль вектора магнитной индукции B, если известно, что максимальная скорость, с которой движется контакт, равна v_0. Сопротивлением контакта и рельсов пренебречь.

4. С помощью тонкой линзы получают изображение предмета. К линзе вплотную приставляют другую линзу. При неизменном расстоянии до предмета получают изображение той же величины, что и ранее. Найдите, с каким увеличением изображается предмет. Абсолютные значения фокусных расстояний линз равны.

Вариант 2

1. На гладком блоке радиусом R висит однородный гибкий канат массой m и длиной l (рис. 3). Найдите максимальную силу натяжения каната.

2. В последние годы популярность приобретает катание на воздушных шарах. Воздух в таком шаре нагревается с помощью газового факела, расположенного у отверстия в нижней части шара. Какую температуру должен иметь воздух в шаре, чтобы поднять двух человек? Масса людей, оболочки шара, корзины и баллона с газом составляет $m=420$ кг, диаметр шара $D=20$ м, температура окружающего воздуха $t_0=+17\,^\circ$C, средняя молярная масса воздуха $M=29$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К), атмосферное давление $p=10^5$ Па.

3. Две соединенные проводником пластины конденсатора площадью S каждая находятся на расстоянии d друг от друга (это расстояние мало по сравнению с размерами пластин) во внешнем однородном электрическом поле, напряженность которого равна $\vec{E}_0$ (рис. 4). Какую работу нужно совершить, чтобы медленно сблизить пластины до расстояния $d/2$?

4. Телеобъектив с фокусным расстоянием $F=1$ м и переходное кольцо толщиной $a=9$ см позволяют снимать фотоаппаратом с расстояния не меньше $d=11$ м. С какого минимального расстояния можно вести съемку с помощью этого объектива без кольца? Примечание. Переходное кольцо устанавливается между объективом и плёнкой и служит для дополнительного увеличения расстояния между ними.

Публикацию подготовили
К. Л. Самаров, А. А. Шеронов

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+x+\frac{p^2}{(x-1)^2}}=x-\frac{p}{x-1}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{18+82\sin x}+3\cos x=0.$$

3. AB и CD — параллельные прямые, лежащие в двух пересекающихся плоскостях, образующих угол в 60°. Точки A и D удалены от линии пересечения плоскостей на расстояния a и b. Найдите расстояние между AB и CD.

4. Найдите интервалы монотонности и точки экстремума функции, заданной равенством

$$f(x)=2\ln(x-2)-x^2+4x+1.$$

Постройте график этой функции.

5. Решите уравнение

$$(\sqrt{\operatorname{ctg} x}-x+2)(12x^2-25x+12)=0.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$x=a-\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{a\sin x-2}{a-2\cos x}=\frac{a\cos x-2}{a-2\sin x}$$

и определите число его корней на отрезке $[20\pi;\ 29\pi]$.

3. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой угол в 60°. Две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

4. При $a=0$ исследуйте функцию

$$y=x^4+2ax^3-2x^2-6ax$$

и постройте ее график. Покажите, что график имеет ось симметрии. При каких еще значениях a график имеет вертикальную ось симметрии?

5. Решите уравнение

$$\sin x=2\sin^2 x$$

и определите значения a, при которых это уранение равносильно уравнению

$$\sin 3x=(a+1)\sin x-2|a-1|\sin^2 x.$$

Публикацию подготовил *В. А. Тонян*

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Каждое боковое ребро равно a и наклонено к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.

2. Решите неравенство

$$\log_{0,3}(x^2-x-20)-\log_{0,3}(x+4)>0.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\cos x-\cos 3x}{\sin x}=0.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^2(x-6)$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, угол между диагоналями

боковых граней, исходящими из одной вершины, равен β. Найдите объем призмы.

2. Решите неравенство

$$\frac{29-x-x^2}{5x+2}<1.$$

3. Решите уравнение

$$\log_3(4\cdot 3^x-1)=2x+1.$$

4. Решите уравнение

$$(1+\cos 2x)\sin x=\cos^2 x.$$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{(x+3)^2}{x-4}$ на отрезке $(-6;\ 0)$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. С какой высоты падало тело, если в последнюю секунду оно прошло путь $l=65$ м? Начальная скорость равна нулю.

2. С горы высотой $h=2$ м и основанием $a=5$ м съезжают санки. Они останавливаются, пройдя по горизонтальному участку путь $l=35$ м от основания горы. Найдите коэффициент трения.

3. До какого давления накачали футбольный мяч емкостью $V=3$ л, если при этом было сделано $n=40$ качаний поршневого насоса? За каждое качание мяч захватывает из атмосферы $V_0=150$ см^3 воздуха. Вначале мяч был пустой. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па.

4. В сосуд, содержащий $m_1=3$ кг воды при $t_1=20$ °С, впускают $m_2=300$ г водяного пара при $t_2=100$ °С. Какая температура установится в сосуде? Удельная теплоемкость воды $c_1=4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r=2{,}3\cdot 10^6$ Дж/кг.

5. К источнику тока с внутренним сопротивлением $r=0{,}4$ Ом подключен резистор сопротивлением $R=6$ Ом. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая во внешней части цепи, если последовательно первому подключить еще один такой же резистор?

6. Два электронагревателя, сопротивления которых $R_1=25$ Ом и $R_2=20$ Ом, могут быть включены в сеть с напряжением $U=200$ В. Какое количество теплоты выделят нагреватели в течение $\tau=2$ мин при их последовательном и параллельном соединении?

7. Луч света переходит из воды в стекло. Угол падения $\alpha=35°$. Найдите угол преломления, если показатель преломления воды $n_в=1{,}3$, стекла $n_{ст}=1{,}6$.

8. Свет какой длины волны следует направить на поверхность платины, чтобы скорость вылетающих из нее электронов $v=2\cdot 10^6$ м/с? Работа выхода электронов из платины $A=1\cdot 10^{-18}$ Дж, постоянная Планка $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с, масса электрона $m=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

Публикацию подготовили
К. И. Дуничев, О. Ю. Овчинников

Информация

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова принимаются на индивидуальное обучение учащиеся седьмых классов общеобразовательных школ и СПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Цель ВЗМШ — рассказать своим ученикам о многих интересных вещах, связанных со школьным курсом математики, научить решать самые разнообразные задачи, приучить самостоятельно работать с книгой и грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге. Всем успешно окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик») выдаются соответствующие удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ надо успешно выполнить первое задание. Преимуществами пользуются ребята, проживающие в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах.

Задание 1. *Изучите статью В. Л. Гутенмахера и Ж. М. Раббота «Выбор наилучшего варианта» в этом номере журнала (см. с. 37) и постарайтесь решить задачи для самостоятельного решения.* Решить все задачи вовсе не обязательно; отдельные пункты засчитываются как самостоятельные задачи.

Решения задач надо выполнить на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью; не надо сворачивать ее в трубку. На обложку тетради надо наклеить листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	*Московская*
Фамилия, имя ученика	*Иванов Петр*
Год рождения	*1973*
Класс и школа	*7 класс «Б» школы № 2*
Фамилия, и. о. учителя математики	*Орлов Борис Петрович*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 3, мать — медсестра*
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	*123456, г. Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1.*

В тетрадь надо вложить два листка бумаги размерами 6×14 см с четко написанным почтовым адресом, фамилией и именем ученика.

Задачи в решениях должны идти в том же порядке, как и в статье: сначала условие, потом решение.

Срок отправки задания № 1 — не позднее 15 марта 1987 г. (по почтовому штемпелю).

Для того чтобы задание было зачтено, нужно решить бо́льшую часть задач. Если вы успешно выполните это задание, то, начиная с сентября 1987 г., вы будете получать все дальнейшие задания, которые содержат теоретический материал и задачи для самостоятельного решения, а также контрольные задачи. Все дальнейшие контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ. Филиалы работают по тем же программам и пособиям, что и Московская группа ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться (это можно сделать без ограничений с любого месяца в любом отделении связи; подписной индекс 70465; журнал распространяется только по подписке).

Задание № 1 надо выслать по адресу: «119823, Москва В-234, ГСП, МГУ, ВЗМШ, на прием» или по адресу соответствующего филиала. Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Ташкент, Устинов, Фрунзе, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Магнитогорск, Орел, Павлодар, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в Дубне при Объединенном институте ядерных исследований, в Могилеве — при областном Дворце пионеров и школьников и Заочная физико-техническая школа при Московском институте стали и сплавов (см. с. 00 этого номера «Кванта»).

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), присылают свои работы по адресу: «193130, г. Ленинград, 8-я Советская ул., 3, С-З ЗМШ. На прием».

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься по той же программе в группах «Коллективный ученик ВЗМШ». Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1987 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1987 г. начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе (соответственно для учащихся I и II курсов СПТУ). Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться в 1987/88 учебном году. Заявление должно быть заверено директором школы (СПТУ) и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Без контрольной работы, только по заявлениям, принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзной и республиканских, а также победители краевых и областных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием на заочное отделение учащихся седьмых классов общеобразовательных школ. Зачисление на Малый механико-математический факультет (МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в сентябре. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно закончившие 8-й или 9-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверения об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 15 апреля выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;

2) фамилия, имя учащегося;

3) школа и класс (полное название);

4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);

5) фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см^2, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и пришлите по адресу: 119899 Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечания:

1. Для школьников 7—10 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону: 139-39-43.

2. Для школьников Казахстана и Молдавии действуют филиалы МММФ МГУ: при математическом факультете Казахского государственного университета и при факультете математики и кибернетики Кишиневского государственного университета. Их адреса:

480012 Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи 47/39, Каз.ГУ, математический факультет, филиал МММФ МГУ.

277003 Кишинев, ул. Садовая 60, КГУ, факультет математики и кибернетики, филиал МММФ МГУ.

Задачи вступительной работы на Малый механико-математический факультет в 1987 году

1. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,1?

2. В треугольнике совпадают центры вписанной и описанной окружностей. Докажите, что этот треугольник равносторонний.

3. Докажите, что если a, b — положительные числа, то

$$\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}.$$

4. Длины сторон треугольника — последовательные целые числа, большие 3. Докажите, что основание высоты, опущенной на среднюю по величине сторону, лежит внутри стороны и делит ее на отрезки, разность длин которых равна 4.

5. Сколькими нулями оканчивается произведение

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 98\cdot 99\cdot 100?$$

6. Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин имеет наименьшую длину.

7. Докажите, что число 11 ... 1122 ... 22, состоящее из 100 единиц и 100 двоек, есть произведение двух последовательных целых чисел.

8. Докажите, что если $b=a-1$, то

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)\times$$
$$\times(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})=a^{64}-b^{64}.$$

9. В пруд выпустили 30 щук, которые постепенно поедали друг друга. Щука считается сытой, если она съела не менее трех щук (сытых или голодных). Докажите, что наибольшее число щук, которые могут насытиться, равно 9 (в это число входят и сытые щуки, которые сами были съедены).

10. Улитка ползет из точки А плоскости с постоянной по величине скоростью, поворачивая на 90° налево или направо каждые 15 минут. Докажите, что она может вернуться в точку А только через целое число часов.

Заочная физико-техническая школа при МИСиСе

Филиал Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые, девятые и десятые классы на 1987/88 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике, а также в профориентации по профилю МИСиСА.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры общей физики и кафедры теоретической физики МИСиСа.

Работа школы организована следующим образом. Четыре-пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач, а также профориентационные материалы. Присланные учащимися работы проверяются и вместе с оценками и комментариями отправляются учащимся.

Успешно занимающиеся десятиклассники, показавшие профессиональную ориентированность и проявившие интерес к специальностям института, во время зимних каникул будут приглашены для очного прохождения курса «Введение в специальность» и участия в научно-технической олимпиаде. Учащиеся, успешно окончившие школу в полном объеме, получают удостоверение, которое дает преимущество при поступлении в МИСиС — так, в прошлом году выпускники ЗФТШ получили дополнительно 1—2 балла.

Занятия в ЗФТШ начнутся с 1 октября 1987 года. Для зачисления в школу необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного домашнего адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по физике и математике. Заявление и справку вместе с решением первого (вступительного) задания по математике, о котором написано в статье «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» в этом номере журнала, нужно выслать не позднее 5 мая по адресу: 117049 Москва, Ленинский пр., 4, МИСиС, ЗФТШ.

Несколько слов о самом институте. Московский институт стали и сплавов готовит инженерные и научные кадры для металлургической и машиностроительной промышленности и ряда новых отраслей науки и техники. На многих кафедрах института обучение строится так, что студенты уже с первого курса приобщаются к самостоятельной научной работе.

Поступив в МИСиС, вы сможете заниматься теорией и экспериментом в области физики твердого тела, исследовать свойства вещества при низких температурах, изучать высокотемпературные процессы в жидкостях и твердых телах, создавать сплавы с новыми свойствами и новые полупроводниковые приборы.

Выпускники института работают в академических и отраслевых научно-исследовательских институтах, в лабораториях крупных промышленных предприятий. Многие продолжают свое образование в аспирантуре института.

Ответы, указания, решения

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $C = (-2{,}5;\ -2{,}5)$.

2. $\left]-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{6};\ \frac{3}{5}\right]$.

3. $1/3 < a < 1$, $a \neq 1/2$. Указание. Выполните замену $y = 1/\cos x$; выясните, при каких a полученное уравнение имеет два различных корня, больших 1.

4. 3. Указание. Пусть $BE = x$, $AD = y$; тогда $FD = x$, $EF = x/2$ и по теореме Пифагора $AE^2 = 4 - x^2 = y^2 - \frac{9x^2}{4}$. По теореме косинусов для треугольника ABD получим $\frac{25}{4}x^2 = 4 + y^2 - 2\sqrt{2}\,y$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 4 + \dfrac{5x^2}{4}, \\ \dfrac{25x^2}{4} = 4 + y^2 - 2\sqrt{2}\,y, \end{cases}$$

решая которую, получим $x = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $y = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, после чего площадь параллелограмма находится без труда.

5. $10\pi\sqrt{3}$. Решение. Пусть D — середина ребра AB, $HS = h$ — высота пирамиды, O — центр основания конуса. Рассмотрим три попарно перпендикулярных вектора длины 1:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB},\ \vec{e}_2 = \frac{1}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{DC},\ \vec{e}_3 = \frac{1}{h}\overrightarrow{HS}.$$

Тогда любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: $\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$. Мы будем для сокращения писать $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Кроме того, положим $\overrightarrow{CO} = x\overrightarrow{CS}$. Тогда

$\overrightarrow{DK} = (3;\ 0;\ 0)$; $\overrightarrow{DL} = (-2;\ 2\sqrt{3};\ 0)$;

$$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC} + x\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DC} + x(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HS}) = \left(0;\ 4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3}x;\ xh\right);$$

$$\overrightarrow{KO} = \left(-3;\ 4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3}x;\ xh\right);$$

$$\overrightarrow{LO} = \left(2;\ 2\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3}x;\ xh\right).$$

Поскольку высота конуса перпендикулярна плоскости его основания, имеем $\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{LO} = 0$, то есть

$$x^2\left(h^2 + \frac{64}{3}\right) - 48x + 18 = 0. \qquad (1)$$

Условие единственности конуса означает, что уравнение (1) имеет единственное решение, то есть дискриминант его равен нулю:

$$24^2 - 18\left(h^2 + \frac{64}{3}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$h = 4\sqrt{\frac{2}{3}};\ x = \frac{24}{h^2 + \frac{64}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Объем конуса находим по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi|\overrightarrow{KO}|\cdot|\overrightarrow{LO}|^2 = 10\sqrt{3}\pi.$$

Вариант 2

1. $x = \frac{1}{25}$.

2. $S = \frac{15}{4}$.

3. $$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{n\pi}{4} + 2k\pi, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{48} + \dfrac{n\pi}{8} \end{cases};$$
$$\begin{cases} x = \mp\dfrac{1}{6}\left(\pi - \arccos\dfrac{4}{5}\right) - \dfrac{n\pi}{3} + (2k+1)\pi, \\ y = \pm\dfrac{1}{12}\left(\pi - \arccos\dfrac{4}{5}\right) + \dfrac{n\pi}{6}, \quad n, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

4. $\varphi = 45^\circ$.

5. а) $S = 3{,}16 = \frac{79}{25}$.

б) $p \in \left]-\frac{7}{2};\ -3\right[\cup \left]\frac{7}{6};\ +\infty\right[$.

Система не имеет решений тогда и только тогда, когда $(3 + p)b^2 < (p - 1)a^2$.

При $p > 1$: $M = \left\{(a;\ b):\ a + b > 1,\ b > 3a - 2p,\ b < \sqrt{\frac{p-1}{p+3}}\,a\right\}$.

M — внутренняя область многоугольника при $p > \frac{7}{6}$.

При $p < -3$: $M = \left\{(a;\ b):\ a + b > 1,\ b < 3a - 2p,\ b > \sqrt{\frac{p-1}{p-3}}\,a\right\}$.

M — внутренняя область многоугольника при $-\frac{7}{2} < p < -3$.

Физика

Вариант 1

1. Колебания чашки весов массой m_1 происходят относительно положения равновесия, в котором удлинение пружины Δx_0 определяется условием

$$m_1 g = k\Delta x_0,$$

где g — ускорение свободного падения, k — жесткость пружины. В крайнем нижнем положении на чашку весов действует (по закону Гука) со стороны пружины сила упругости $k(\Delta x_0 + A)$, скорость движения чашки весов в этот момент равна нулю. Если в этот момент на чашку положить перегрузок массой m_2, такой, чтобы сила тяжести чашки с перегрузком была равна силе упругости, то, очевидно, колебания прекратятся. Таким образом,

$$(m_1 + m_2)g = k(\Delta x_0 + A).$$

Приведенные равенства позволяют найти жесткость пружины: $k = m_2 g/A$, откуда для первоначального периода T колебаний чашки весов получаем

$$T = 2\pi\sqrt{m_1/k} = 2\pi\sqrt{(m_1 A)/(m_2 g)}.$$

При решении этой задачи многие абитуриенты сделали характерную ошибку, забыв, что колебания совершаются относительно статического положения равновесия, и жесткость пружины находили из условия $(m_1 + m_2)g = kA$.

2. После открытия вентиля происходит процесс перемешивания газов, в результате которого в баллонах установится одинаковое давление p_0 и температура T_0. Давление смеси газов (по закону Дальтона) определяется суммой парциальных давлений компонентов, а температура смеси определяется законом сохранения внутренней энергии системы. Таким образом, имели

$$p_0=(\nu_1+\nu_2)RT_0/(V_1+V_2),$$
$$\nu_1C_1T_1+\nu_2C_2T_2=(\nu_1C_1+\nu_2C_2)T_0,$$

где $\nu_1=m_1/M_1$ и $\nu_2=m_2/M_2$ — число молей азота и аргона соответственно. Начальные температуры газов T_1 и T_2 найдем из уравнений состояния:

$$T_1=p_1V_1/(R\nu_1),\ T_2=p_2V_2/(R\nu_2).$$

Тогда окончательно получаем

$$T_0=\frac{C_1p_1V_1+C_2p_2V_2}{R(\nu_1C_1+\nu_2C_2)}\approx 306\ \text{К},$$

$$p_0=(\nu_1+\nu_2)\frac{RT_0}{V_1+V_2}\approx 2{,}1\cdot 10^6\ \text{Па}.$$

3. Приведем подробный анализ решения этой задачи, хотя возможны и более краткие решения. Докажем сначала, что контакт, движущийся под действием силы тяжести и силы Ампера, будет совершать колебания около некоторого положения равновесия. Выберем положительное направление оси координат вниз (по направлению силы тяжести), а положительное направление обхода контура, образованного катушкой, рельсами и контактом, — против часовой стрелки (рис. 1). Пусть в данный момент контакт движется вниз со скоростью v, ток I в контуре течет в положительном направлении, а магнитное поле $\vec{B}$ перпендикулярно плоскости рисунка и направлено от нас. Запишем уравнение движения контакта:

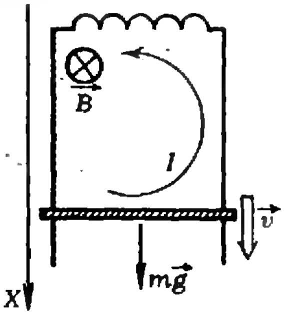


Рис. 1.

$$mv'=mg-IBl,$$

где v' обозначает производную по времени от скорости, то есть ускорение контакта (при выбранном направлении тока в контуре сила Ампера по правилу левой руки тормозит движение контакта). При движении контакта меняется магнитный поток $\Phi=Blx$, пронизывающий замкнутый контур, и возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}=-\Phi'$, которая уравновешивается ЭДС самоиндукции $-LI'$, возникающей в катушке:

$$\mathcal{E}-LI'=0.$$

Когда контакт движется вниз, магнитный поток через контур увеличивается и возникающая в контуре ЭДС вызывает появление в контуре тока, препятствующего увеличению потока, то есть тормозящего движение контакта. При выбранном направлении обхода контура это означает, что в закон Ома эта ЭДС входит с положительным знаком. Так как $|\mathcal{E}|=|\Phi'|=Blx'=Blv$, закон Ома в нашем случае имеет вид

$$Blv-LI'=0.$$

Продифференцировав по времени уравнение движения контакта и подставив I из предыдущего равенства, имеем окончательно

$$v''+\frac{B^2l^2}{mL}v=0.$$

Мы получили относительно скорости контакта в уравнение колебаний и, следовательно, доказали, что движение контакта носит колебательный характер. Это дифференциальное уравнение мы решать не будем, а воспользуемся законом сохранения энергии.

Пусть к данному моменту контакт опустился вниз на x, имеет скорость v, и ток в контуре равен I. По закону сохранения энергии потенциальная энергия контанта превращается в его кинетическую и запасается в катушке индуктивности в виде энергии магнитного поля:

$$mgx=mv^2/2+LI^2/2.$$

Скорость контакта максимальна в положении равновесия x_0, когда сила тяжести уравновешена силой Ампера:

$$mg=BlI_0.$$

Из закона Ома следует, что ток в контуре пропорционален смещению контакта, поэтому

$$Blx_0=I_0L,$$

и работу силы тяжести до положения равновесия можно записать так:

$$mgx_0=mg\frac{I_0L}{Bl}=L\left(\frac{mg}{Bl}\right)^2.$$

Таким образом, закон сохранения энергии дает

$$L\left(\frac{mg}{Bl}\right)^2=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{L}{2}\left(\frac{mg}{Bl}\right)^2,$$

и окончательно

$$B=g\frac{\sqrt{mL}}{v_0l}.$$

При решении этой достаточно сложной задачи многие абитуриенты сделали физическую ошибку, считая, что кинетическая энергия контакта набирается за счет работы сила Ампера, а не силы тяжести. На самом деле половина работы силы тяжести превратилась в кинетическую энергию контакта, а другая ее половина перешла в энергию магнитного поля в катушке индуктивности.

4. При сложении двух одинаковых линз их оптическая сила увеличивается вдвое. Так как при неизменном расстоянии до предмета размер изображения (то есть увеличение) остается одинаковым для одной и двух линз, то неизбежно должен поменяться характер изображе-

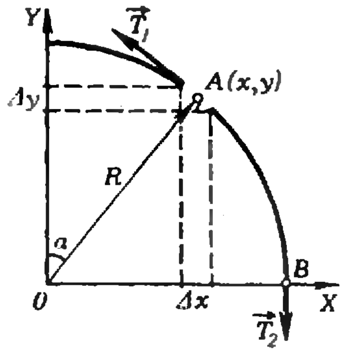


Рис. 2.

ния: сначала оно было мнимым, а потом стало действительным. Запишем формулу линзы и найдем увеличение в первом и во втором случаях соответственно:

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F},\quad \Gamma_1=\frac{f_1}{d}=\frac{F}{F-d},$$

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f_2}=\frac{2}{F},\quad \Gamma_2=\frac{f_2}{d}=\frac{F/2}{d-F/2}.$$

По условию $\Gamma_1=\Gamma_2$, откуда находим

$$3d=2F \text{ и } \Gamma_1=\Gamma_2=3.$$

Вариант 2

1. Рассмотрим кусочек каната длиной Δl (рис. 2), находящийся в точке A с координатами (x, y). Момент силы тяжести относительно точки O равен $\Delta M=(m/l)\,g\Delta lx=(m/l)\,g\Delta lR\sin\alpha=(m/l)\,gR\Delta y$. Следовательно, момент силы тяжести куска каната AB относительно точки O равен $M_{AB}=(m/l)\,gRy$ и условие его равновесия имеет вид

$$T_1R=T_2R+M_{AB}=T_2R+(m/l)\,gyR,$$

где T_1 и T_2 — натяжение каната в точках A и B соответственно. Из последнего равенства видно, что $T_{1\,\max}=T_2+(m/l)\,gR$. Так как $2T_2=(m/l)\,g\,(l-\pi R)$, то

$$T_{1\,\max}=\frac{m}{l}\,g\,\frac{l+(2-\pi)\,R}{2}.$$

2. По закону Архимеда вес шара mg численно равен выталкивающей силе: $mg=(\rho_{\text{сн}}-\rho_{\text{вн}})\,Vg$, где $\rho_{\text{сн}}$ и $\rho_{\text{вн}}$ — плотность воздуха снаружи и внутри оболочки объема $V=\pi D^3/6$.
С помощью уравнения состояния $p=\rho RT/\mathrm{M}$ находим

$$m=\frac{pV\mathrm{M}}{R}\left(\frac{1}{T_{\text{сн}}}-\frac{1}{T_{\text{вн}}}\right).$$

Отсюда получаем, что температура внутри шара

$$T_{\text{вн}}\approx 316\ \text{К}\approx 43\ ^\circ\text{C}.$$

3. Заряды $+q$ и $-q$ на пластинах создают поле, равное и противоположное внешнему: $q=\varepsilon_0SE_0$. Сила, действующая на одну из пластин, определяется внешним полем и полем другой пластины:

$$F=\left(E_0-\frac{E_0}{2}\right)q.$$

Работа против этой силы равна

$$A=F\,\frac{d}{2}=\frac{1}{4}\,\varepsilon_0SdE_0^2.$$

4. Из формулы линзы, записанной для объектива с кольцом и без кольца:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F} \text{ и } \frac{1}{d'}+\frac{1}{f-a}=\frac{1}{F},$$

найдем

$$d'=101\ \text{м}.$$

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $x=1-2p$ при $p<0$; $x=0$ при $p=0$; $x_1=0$, $x_2=1-2p$ при $0<x\leqslant\frac{3}{4}$; $x=0$ при $p>\frac{3}{4}$.
Указание. Уравнение равносильно системе

$$x^2+x+\frac{p^2}{(x-1)^2}=x^2-\frac{2px}{x-1}+\frac{p^2}{(x-1)^2},$$

$$x\geqslant\frac{p}{x-1}.$$

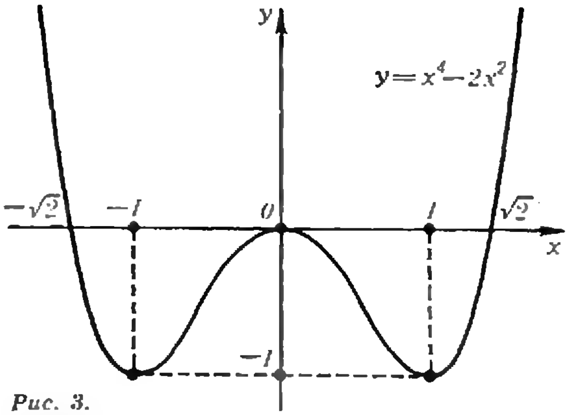


Рис. 3.

Решая уравнение, находим $x_1=1-2p$, $x_2=0$. Подставляя x_1 и x_2 в неравенство, получаем ответ.

2. $x=\arcsin 1/9+(2k+1)\,\pi$.

3. $\sqrt{a^2+b^2-ab}$.

4. Функция возрастает при $x\in\,]2;3[$, убывает при $x\in\,]3;+\infty[$. $y_{\max}=y\,(3)=4$.

5. $\{3/4\}$. Указание. Из корней уравнения $12x^2-25x+12=0$ условию $\operatorname{ctg} x>x$ удовлетворяет лишь $x=\frac{3}{4}$, так как $\operatorname{ctg}\frac{4}{3}<\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1<\frac{4}{3}$.

Вариант 2

1. $\left\{0;\frac{3}{4}a\right\}$ при $a>0$, $[-\infty;0]$ при $a=0$; $\varnothing$ при $a<0$.

2. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$ при $a\neq\pm\sqrt{2}$; $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$ при $a=-\sqrt{2}$, $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi l$ при $a=\sqrt{2}$. На промежутке $[20\pi;29\pi]$ уравнение имеет [illegible] корней, если $a\neq\pm\sqrt{2}$; 5 корней, если $a=-\sqrt{2}$, и 4 корня, если $a=\sqrt{2}$.

3. $S=a^2\,(3+\sqrt{3})/2$.

4. График функции показан на рисунке 3. Ось симметрии существует при $a\in\{-2;0;2\}$. Указание. Для существования вертикальной оси симметрии $x=\alpha$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f\,(x-\alpha)$ была четной, т. е. чтобы при всех x было $f\,(-x-\alpha)=f\,(x-\alpha)$. В нашем случае это значит, что коэффициенты многочлена $f\,(x-\alpha)=(x-\alpha)^4+2a\,(x-\alpha)^3-2\,(x-\alpha)^2-6a\,(x-\alpha)$ при нечетных степенях x равны нулю.

5. $a=3$; $a=2$; $a>4$. Указание. Выполнив замену $y=\sin x$, получим $y=2y^2$, откуда либо $y=0$, либо $y=\frac{1}{2}$. Второе уравнение принимает вид $y\,(4y^2-2\,|a-1|\,y+a-2)=0$; $y=0$ является корнем этого уравнения. Подставляя $y=\frac{1}{2}$, получим $1-|a-1|+a-2=0$ или $|a-1|=a-1$, откуда $a\geqslant 1$. Итак, все решения первого уравнения удовлетворяют второму при $a\geqslant 1$. При таких a получаем уравнение $y\,(4y^2-2\,(a-1)\,y+a-2)=0$, корни которого 0, 1/2 и $(a-2)/2$. Корень $(a-2)/2$ удовлетворяет первому уравнению, если $(a-2)/2=0$, $(a-2)/2=1/2$, то есть при $a=2$ и $a=3$. Кроме того, при $\left|\frac{a-2}{2}\right|>1$ уравнение $\sin x=\frac{a-2}{2}$ корней не имеет, и следовательно, все решения второго уравнения удовлетворяют первому уравнению.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. $\frac{2}{3}a^3 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos^2\beta$. 2. $]5;\ 56[$.

3. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k\ (k\in Z)$.

4. $\max\limits_{[-1;\,3]} f(x)=f(0)=0,\quad \min\limits_{[-1;\,3]} f(x)=f(3)=-27$.

Вариант 2

1. $\frac{a^3}{8\sin\frac{\beta}{2}}\sqrt{3-12\sin^2\frac{\beta}{2}}$.

2. $]-9;\ -2/5[\cup]3;\ +\infty[$.
3. $\{-1;\ 0\}$.

4. $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x_2=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\ (k, n\in Z)$.

5. $\max\limits_{[-6;\,0]} y(x)=y(-3)=0,$
$\min\limits_{[-6;\,0]} y(x)=y(0)=-\frac{9}{4}$.

Физика

1. $h=\frac{g}{2}\left(\frac{l}{g\Delta t}-\frac{\Delta t}{2}\right)^2\approx 180$ м (здесь $g=9{,}8$ м/с^2, $\Delta t=1$ с).
2. $\mu=h/(a+l)=0{,}05$.
3. $p=np_0V_0/V=2\cdot 10^6$ Па.
4. $t=\frac{rm_2+c_1(m_1t_1+m_2t_2)}{c_1(m_1+m_2)}\approx 77$ °C.
5. $P_2/P_1=2(R+r)^2/(2R+r)^2=0{,}53$.
6. $Q_1=U^2\tau/(R_1+R_2)\approx 106{,}6$ кДж;
$Q_2=U^2\tau(R_1+R_2)/(R_1R_2)=432$ кДж.
7. $\beta=\arcsin(\sin\alpha\cdot n_{в}/n_{ст})\approx 28°$.
8. $\lambda=\frac{hc}{A+mv^2/2}\approx 7\cdot 10^{-8}$ м (здесь $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме).

XVII Международная физическая олимпиада

(см. «Квант», 1986, № 12)

Решения задач подготовили члены нашей команды: А. Гущин (теоретическая задача № 1), А. Матыцин (теоретическая задача № 2), О. Волков (теоретическая задача № 3), С. Мягчилов (экспериментальная задача № 1), Г. Николаишвили (экспериментальная задача № 2).

Теоретический тур

Задача 1

1) Разность хода двух волн, выходящих из щелей L и M, равна $d\sin\theta$, следовательно, разность фаз $\Delta\varphi=(2\pi d\sin\theta)/\lambda$. Складывая колебания, получаем

$$y=a\cos(2\pi\nu t-2\pi x/\lambda)+ +a\cos(2\pi\nu t-2\pi x/\lambda+\Delta\varphi)= =2a\cos(\Delta\varphi/2)\cos(2\pi\nu t-2\pi x/\lambda+\Delta\varphi/2).$$

Если обозначить $\Delta\varphi/2=\beta$, то результирующая амплитуда $A=2a\cos\beta$. Векторная диаграмма изображена на рисунке 4.

2) Сложим колебания от N щелей с помощью векторной диаграммы (рис. 5). Все стороны полученного многоугольника равны a, углы между сторонами равны $(\pi-2\beta)$, следовательно, около многоугольника можно описать окружность радиусом R. Нетрудно показать геометрически, что

$$R=a/(2\sin\beta)\ \text{и}\ A=a(\sin N\beta/\sin\beta).$$

Разность фаз между исходной и результирующей волнами определяется углом α:

$$\alpha=(\pi/2-\beta)-(\pi/2-N\beta)=(N-1)\beta.$$

3) Построим графики $\sin N\beta$ и $1/\sin\beta$ как функцию β в одном масштабе при $N=8$ (рис. 6). Учитывая, что интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды, построим график $I=I_0\sin^2 N\beta/\sin^2\beta$ (I_0 — интенсивность излучения от одной цели) для $N=8$ (рис. 7).

4) В главных максимумах векторная диаграмма представляет собой прямую линию. При этом $2\beta=2\pi n$, где $n=0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots$ Амплитуда результирующей волны равна Na, а интенсивность $I=N^2I_0$.

5) Условие главных максимумов:

$$\beta=\pi n,\ \text{или}\ (\pi d\sin\theta)/\lambda=\pi n,$$

где $n=0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots$ Так как $|\sin\theta|\leqslant 1$, число главных максимумов не превышает $2d/\lambda+1$.

6) Дифференцируя условие главных максимумов по θ, получаем

$$\lambda'(\theta)=(d\cos\theta)/n.$$

Следовательно, при $\Delta\lambda\ll\lambda$

$$\Delta\lambda=(d\cos\theta\,\Delta\theta)/n,$$
$$\Delta\theta=n\,\Delta\lambda/(d\sqrt{1-(n\lambda/d)^2}).$$

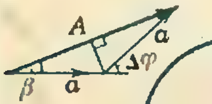


Рис. 4.

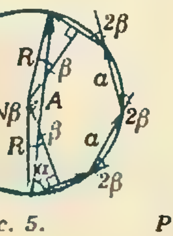


Рис. 5.

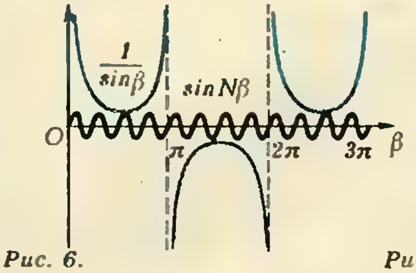


Рис. 6.

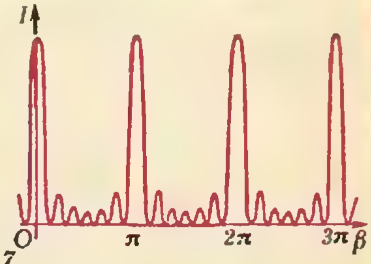


Рис. 7.

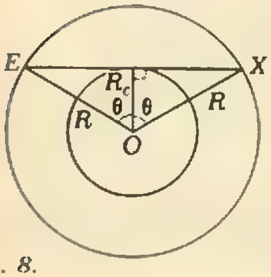


Рис. 8.

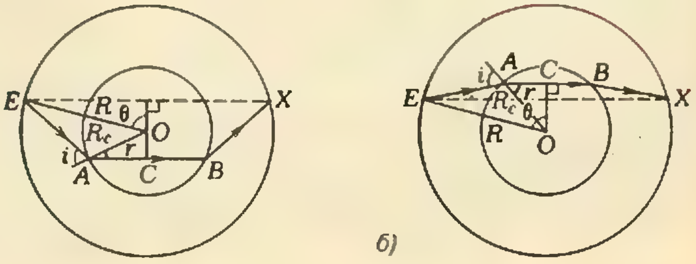


Рис. 9. а) б)

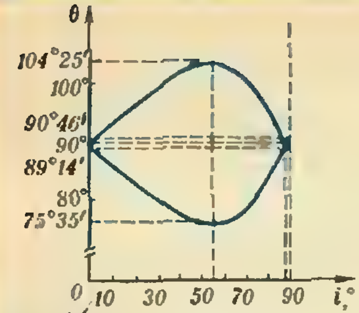


Рис. 10.

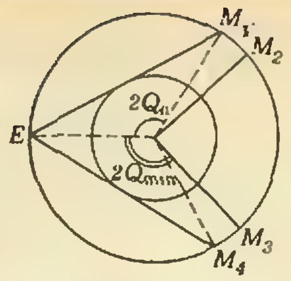


Рис. 11.

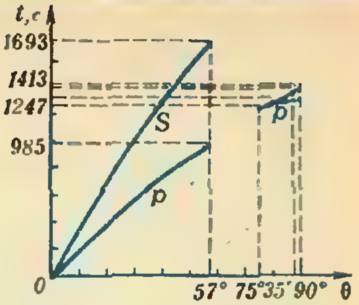


Рис. 12

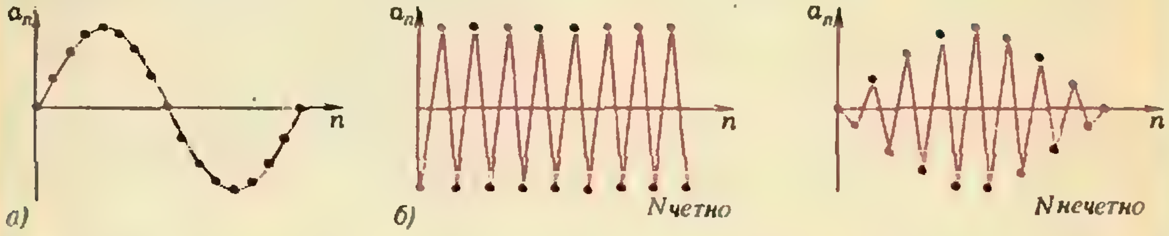


Рис. 13.

Подставляя $\lambda=589{,}0$ нм, $\Delta\lambda=0{,}6$ нм, $n=2$ и $d=1{,}2\cdot10^{-6}$ м, получаем

$$\Delta\theta=5{,}2\cdot10^{-3}\ \text{рад}=0{,}3^\circ.$$

Задача 2

1) Прямолинейное распространение волн возможно, если отрезок EX весь лежит в оболочке (рис. 8). При этом время распространения волн, имеющих скорость v, равно

$t=EX/v=(2R\sin\theta)/v$ для $\theta\leqslant\arccos(R_c/R)$.

2) Возможные пути волн p в случае $\theta>\arccos(R_c/R)$ показаны на рисунке 9, *а*) и *б*) (в обоих случаях $AB\parallel EX$). Если i — угол падения волны на границу «ядро — оболочка», а r — угол преломления, то по закону преломления $\sin i/\sin r=v_p/v_{ср}$. Тогда из треугольника AOE по теореме синусов для угла θ получим: в случае а)

$$\theta=90^\circ-i+(\arcsin(v_{ср}\sin i/v_p)+\\ +\arcsin(R_c\sin i/R)),$$

в случае б)

$$\theta=90^\circ+i-(\arcsin(v_{ср}\sin i/v_p)+\\ +\arcsin(R_c\sin i/R))$$

(i может меняться от 0 до 90°).

3) Графики зависимости θ от i приведены на рисунке 10 (для каждого значения i мы имеем два возможных значения θ). Видим, что существуют минимальное и максимальное значения θ: $\theta_{\min}=75^\circ35'$ и $\theta_{\max}=104^\circ25'$ при $i=55^\circ$. Поэтому преломленные волны смогут зарегистрировать только наблюдатели, находящиеся в зоне M_2M_3 (рис. 11), а «прямые» волны — на участках M_1E и EM_4. Так как $\theta_0=\arccos(R_c/R)=57^\circ<\theta_{\min}=75^\circ35'$, существуют зоны ($M_3M_4$ и M_1M_2), где землетрясение чувствуется очень слабо — туда волны могут дойти только после отражения от одной из границ ядра или оболочки. График зависимости времени пробега волн p и S от угла θ дан на рисунке 12. Для $0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$ время определяется выражением $t=(2R\sin\theta)/v$ ($v=v_p$ или $v=v_S$), в зону $\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_{\min}$ волны практически не попадают, в зону $\theta_{\min}\leqslant\theta\leqslant90^\circ$ попадают только преломленные волны.

4) Учитывая, что время распространения волны по прямой равно $t=(2R\sin\theta)/v$ ($v=v_p$ или $v=v_S$), получим, что задержка волны S равна

$$\Delta t_{12}=t_S-t_p=2R(1/v_S-1/v_p)\sin\theta\quad(v_S<v_p).$$

Отсюда угловое расстояние

$$\widehat{EOX}=2\theta=2\arcsin(v_Sv_p\Delta t/(2R(v_p-v_S)))\approx\\ \approx17{,}84^\circ.$$

Это соответствует $\theta=8{,}92^\circ<\theta_0=57^\circ$, то есть волны действительно доходят до наблюдателя без преломления.

5) Два последних отсчета вызваны отражениями волн на границе между оболочкой и ядром. Промежуток времени между этими отсчетами

$$\Delta t_{24}=2(v_p-v_S)\sqrt{R^2+R_c^2-2RR_c\cos\theta}/(v_pv_S).$$

Подставив $\theta=8{,}92^\circ$, находим $\Delta t_{34}\approx396{,}7$ с ≈6 мин 37 с, т. е. наше предположение подтверждается.

Задача 3*)

1) Запишем основное уравнение динамики вращательного движения для n-й частицы:

$$kR((u_{n-1}-u_n)+(u_{n+1}-u_n))=I\ddot{u}_n/R,$$

где R — радиус окружности, $I=mR^2$ — момент инерции частицы, $\ddot{u}_n=\dfrac{d^2u_n}{dt^2}$, или

$$\ddot{u}_n=\omega_0^2(u_{n-1}+u_{n+1}-2u_n). \qquad (1)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1&=\omega_0^2(u_3+u_2-2u_1),\\ \ddot{u}_2&=\omega_0^2(u_1+u_3-2u_2),\\ \ddot{u}_3&=\omega_0^2(u_2+u_1-2u_3),\end{aligned}\qquad (2)$$

где $\omega_0^2=k/m$.

2) Система уравнений (2) имеет решением суперпозицию гармонических колебаний — нормальных мод. Для их нахождения подставим в систему уравнения гармонических колебаний

$$u_1=a_1\cos\omega t,\ u_2=a_2\cos\omega t,\ u_3=a_3\cos\omega t,$$

сложим все уравнения системы и получим

$$\omega^2(a_1+a_2+a_3)=0.$$

Отсюда следует: а) $\omega=0$; б) $a_1+a_2+a_3=0$, что соответствует значению частоты $\omega=\sqrt{3}\,\omega_0$.

3) Прямой подстановкой нетрудно убедиться,

---

*) Решение этой задачи несколько выходит за рамки программы по физике для нашей средней школы. (*Примеч. ред.*)

что функция

$$u_n(t)=a_s\sin(2\pi ns/N+\varphi)\cos\omega_s t$$

действительно удовлетворяет уравнению (I) при условии, что $\omega_s=2\omega_0\sin(\pi s/N)$. Из последнего равенства следует, что $0<\omega_s\leqslant 2\omega_0$ (при $N\to\infty$). Это соответствует диапазону $1\leqslant s\leqslant N/2$.

4 а) Для низких частот

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{\sin(2ns\pi/N+\varphi)}{\sin(2(n+1)s\pi/N+\varphi)}=$$

$$=\frac{1}{1+2\pi s/N\operatorname{ctg}(2ns\pi/N+\varphi)}.$$

При этом чаще всего

$$u_n/u_{n+1}\approx 1.$$

4 б) Для максимальных частот $\omega=\omega_{\max}=2\omega_0$, соответствующих $s=N/2$,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{\sin(\pi n+\varphi)}{\sin(\pi(n+1)+\varphi)}=-1.$$

Распределение амплитуд в цепи показано на рисунке 13.

5) Если $m'\ll m$, то можно считать, что колебания маленькой частицы происходят между соседними неподвижными частицами с массой m. Собственная частота таких колебаний определяется из уравнения $m'\ddot{x}=-2kx$:

$$\omega'=\sqrt{2k/m'}\approx\omega_0\sqrt{2m/m'}\gg\omega_{\max}.$$

Экспериментальный тур

Задача 1

Ход лучей, с помощью которых образуются радуги первого, второго и пятого порядков, представлены на рисунке 14. Наблюдая каплю через зрительную трубу, при определенных углах можно заметить на капле яркую точку, которая меняет окраску при небольших смещениях зрительной трубы. Это и есть радуга. Как видно из рисунка 14, радуга первого и пятого порядков видна с правой стороны капли, а радуга второго порядка — с левой стороны. Результаты наблюдения и расчетов для капли воды представлены на рисунках 15 и 16.

Экстраполируя последний график до значения $n=2$, получаем значение $\varphi=304°\pm25°$. Полученные экспериментальным путем результаты можно проверить теоретически. Обозначив через i угол падения луча на каплю, а через r угол преломления, выразим угол поворота луча φ:

$$\varphi=k(\pi-2r)+2(i-r),$$

где $k(\pi-2r)$ — угол поворота в результате k отражений, $2(i-r)$ — угол поворота в результате двух преломлений. Подставив в полученную формулу значение $r=\arcsin(\sin i/n)$, получим

$$\varphi(i)=k\pi-2r(k+1)+2i=$$
$$=k\pi-2(k+1)\arcsin(\sin i/n)+2i.$$

При этом существует такой угол φ, для которого лучи, вышедшие из капли, идут параллельным пучком, не рассеиваясь. Под этим углом и будет видна радуга. Итак, условие наблюдения радуги $\dot{\varphi}(i)=0$, откуда после преобразования получим

$$\cos i=\sqrt{\frac{n^2-1}{k^2+2k}}.$$

Заметим, что теоретические результаты хоро-

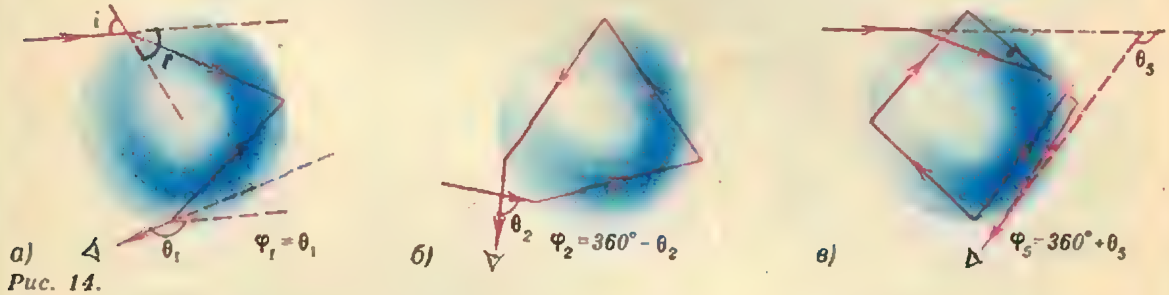


Рис. 14.

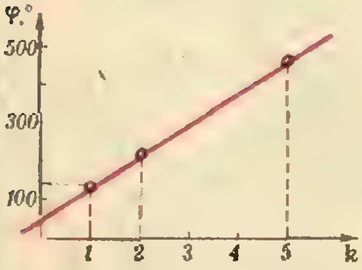


Рис. 15.

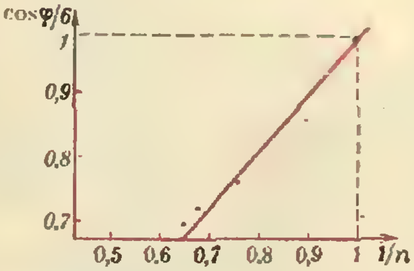


Рис. 16.

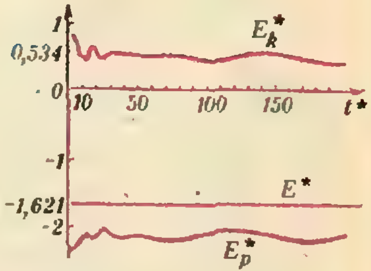


Рис. 17.

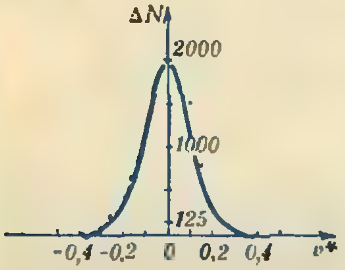


Рис. 18.

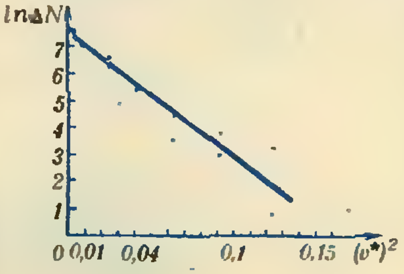


Рис. 19.

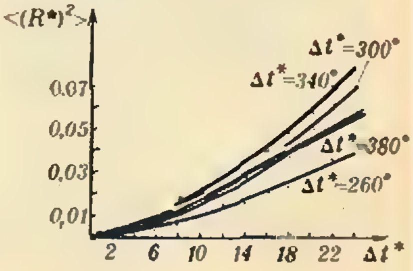


Рис. 20.

шо совпадают с экспериментальными. Правда, если построить теоретический график зависимости $\cos\varphi/6$ от $1/n$, то точки не лягут точно на прямую. Очевидно, функция $\cos\varphi/6$ — лишь удачно подобранная зависимость от $1/n$, с помощью которой можно приближенно находить угол φ.

Задача 2

1) С помощью соответствующих клавиш на дисплей ЭВМ выводились значения проекций скоростей частиц для данной последовательности времен. Затем вычислялись проекции импульса системы на оси OX и OY. По их значениям можно заключить, что импульс системы сохраняется.

2)—4) Графики зависимости кинетической энергии E_k^*, потенциальной E_p^* и полной E^* от времени t^* представлены на рисунке 17. Как видно, полная энергия постоянна и равна $-1{,}621\pm0{,}1$.

5) Среднее значение кинетической энергии и время установления термодинамического равновесия определяются из графиков на рисунке 17 ($E_{k\,\text{ср}}^*=0{,}53\pm0{,}06$; $\Delta t^*=10-20$).

6) На экран выводилась таблица зависимости ΔN от v^* для $\Delta t^*>20$ и по этим данным строилась гистограмма (рис. 18). Так как $\Delta N = Ae^{-24(v^*)^2/\alpha}$, то

$$\ln\Delta N=\ln A-24\,(v^*)^2/\alpha,$$

и графически зависимость $\ln\Delta N$ от $(v^*)^2$ должна представлять прямую. Построив график по экспериментальным точкам, видим, что это действительно прямая (рис. 19). По наклону графика определяется коэффициент α: $\alpha=0{,}503\pm0{,}002$.

7) Далее на дисплей выводились таблицы зависимости $\langle (R^*)^2\rangle$ от Δt^* для начальных моментов времени и строились соответствующие графики, а также график зависимости $\langle\overline{(R^*)^2}\rangle$ от Δt^* (рис. 20). По этим графикам вычисляют градиент функции в линейной области: он изменяется в пределах от 0,027 до 0,047. Для усредненного графика градиент линейной его части равен $0{,}035\pm0{,}01$. Как видно из графика, $\langle (R^*)^2\rangle$ пропорционален времени, т. е. данная компьютером модель — это модель вещества в жидком состоянии.

Шахматная страничка
(см. «Квант», 1986, № 10)

Обе задачи принадлежат выдающемуся советскому проблемисту Л. Куббе́лю.

Задание 19. 1. Фа8! Ферзь становится в засаде за пешками — красивое вступление. 1...b6 (b5, ba) 2. Фh1+ Сg1 3. Сd4! и 4. Кd1+! С:d4×, 1...Сg1 (1...g2 2. Ка4+ С:e5×) 2. ab+ Са7 3. Сd4! и 4. Ка4+! С:d4×. Два изящных эхо-варианта.

Задание 20. 1. Кb2. Теперь возникают два симпатичных варианта: 1...а4 2. Кс4 а3 3. Крd8 а2 4. Лс8 а1Ф 5. Ф:а1 С:g5+ 6. Фf6+! С:f6×, 1...с4 2. Ка4 с3 3. Крb8 с2 4. с8С! с1Ф 5. Ф:с1 С:g5 6. Фf4! С:f4×. Два эхо-мата.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук,
В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин,
Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев,
Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов,
Ю. В. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин,
Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский,
А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов,
Д. А. Крымов, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева,
И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина,
П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор Т. С. Вайсберг

Сдано в набор 20.11.86. Подписано к печати 26.12.86
Т-23999. Бумага 70×108/16
Печать офсетная. Усл. кр.-от. 23,8
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,01
Тираж 202 453 экз. Цена 40 коп. Заказ 3169

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский
полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

142300 г. Чехов Московской области

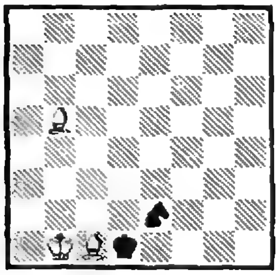
103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

КОМПЬЮТЕР АНАЛИЗИРУЕТ ЭНДШПИЛЬ

В прошлом году мы рассказывали о новых достижениях ЭВМ в исследовании шахматных окончаний. В № 2 сообщалось о том, что компьютер досконально проанализировал весьма сложное окончание «король и два разноцветных слона против короля и коня». До недавних пор оно считалось ничейным, но ЭВМ доказала, что оно выиграно для сильнейшей стороны, причем в рекордной позиции, когда обе стороны играют наилучшим образом, два слона справляются с конем лишь за 67 ходов. Еще один серьезный удар по правилу 50 ходов!

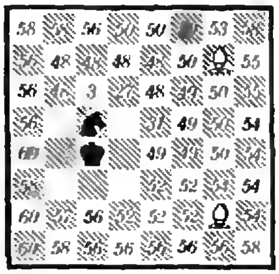


Приведем основной вариант, указанный программой, которую написал О. Комэй. **1. Са4+ Крe1 2. Cb2 Kpd2 3. Kpa1 Kc3 4. Cc6 Kpc2 5. Ca3 Kpb3 6. Cf8 Kpc2 7. Cg7 Kpb3 8. Ce8 Kpc2 9. Cg6+ Kpb3 10. Ch7 Kpc4 11. Kpb2 Ke2 12. Kpc2 Kd4+ 13. Kpd2 Kpd5 14. Kpe3 Ke6 15. Cf6 Kc5 16. Cg8+ Kpd6 17. Ca2 Kd7 18. Cg7 Kc5 19. Cf8+ Kpc6 20. Kpd4 Kb7 21. Ce7 Kpb6 22. Cf6 Kpc6 23. Cd5+ Kpb6 24. Ce4 Kpa7 25. Kpc3 Kpa6 26. Kpb4 Kpb6 27. Cg5 Kpc7 28. Cf4+ Kpb6 29. Cg3 Kd8 30. Cf2+ Kpc7 31. Kpb5 Kpd6 32. Cg3+ Kpe6 33. Ce2 Kf7 34. Cb3+ Kpf6 35. Ch4+ Kpg6 36. Kpc5 Kg5 37. Cc2+ Kph5 38. Cg3 Kpg4 39. Cd6 Kpf3 40. Kpd4 Kpf2 41. Kpd3 Kf3 42. Cc5+ Kpg3 43. Kpe3 Kh4 44. Cd6+ Kpg4 45. Kpe4 Kf5 46. Cc5 Kh4 47. Cf2 Kg6 48. Cb3 Kpg5 49. Cb6 Kf8 50. Cd8+ Kpg6 51. Kpd5 Kpf7 52. Kpd6+ Kpg7 53. Kpe7 Kg6+ 54. Kpe6 Kf8+ 55. Kpf5 Kd7 56. Ce7 Kf8 57. Cf6+ Kph6 58. Ch8 Kph7 59. Cd4 Kph6 60. Cf7 Kh7 61. Ce8 Kf8 62. Kpf6 Kh7+ 63. Kpf7 Kg5+ 64. Kpg8 Kf3 65. Ce3+ Kg5 66. Kpf8 Kph7 67. C:g5,** и черный конь погиб.

К. Томпсон, автор программы «Белл», третьей чемпионки мира среди ЭВМ, в последние годы разработал много машинных программ для анализа тех или иных окончаний. Для эндшпиля с двумя слонами против коня его программа немного не дотянула до рекорда (66 ходов), зато проделала серьезную аналитическую работу и определила характерные выигранные положения, а также девять классов позиций, в которых (вопреки общему правилу) сильнейшая сторона не может избежать размена одного из слонов на коня или дело кончается вечным шахом (разумеется, позиции, где черные первым же ходом берут слона, не в счет).

Таким образом, мы имеем здесь первый образец компьютерной программы, которая не только умеет оценивать окончания достаточно сложного типа, но и создала определенную классификацию эндшпилей, полезную для теории.

Итак, в борьбе двух слонов против коня ничья достигается в редких случаях. При помощи ЭВМ Томпсон составил таблицы с четырьмя фиксированными фигурами, а пятая — белый король — может занимать любое поле.

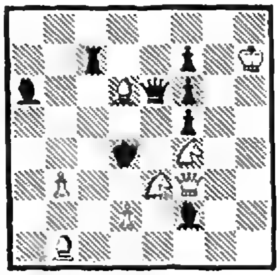


При расположении короля на произвольном доступном ему поле белые, начиная, выигрывают. А сколько для этого требуется ходов, указано непосредственно на каждом поле. Видно, что здесь выигрыш более чем в 50 ходов скорее не исключение, а правило.

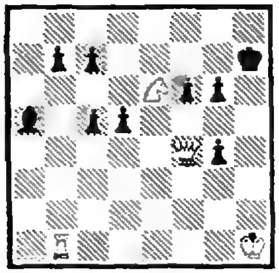
Раньше в шахматном кодексе в правиле 50 ходов оговаривалось, что для позиций, где такого числа недостаточно, его надо соответственно увеличить. Однако этим пунктом никто ни разу не воспользовался, и в дальнейшем его отменили. Взамен в кодексе были сделаны исключения для трех видов окончаний. Теперь, когда компьютеры добились столь внушительных успехов в исследовании эндшпиля, ясно, что это полумера, и есть прямой смысл вернуться к старому положению. Точнее говоря, кодекс должен содержать список всех «исключительных» видов позиций и предусматривать возможность его пополнения.

Конкурсные задания

В этом номере мы начинаем новый шахматный конкурс. Его победителям будут присвоены спортивные разряды, они будут также награждены шахматной литературой с автографом А. Карпова, дипломами и значками журнала «Квант».



1. Белые начинают и дают мат в 2 хода.



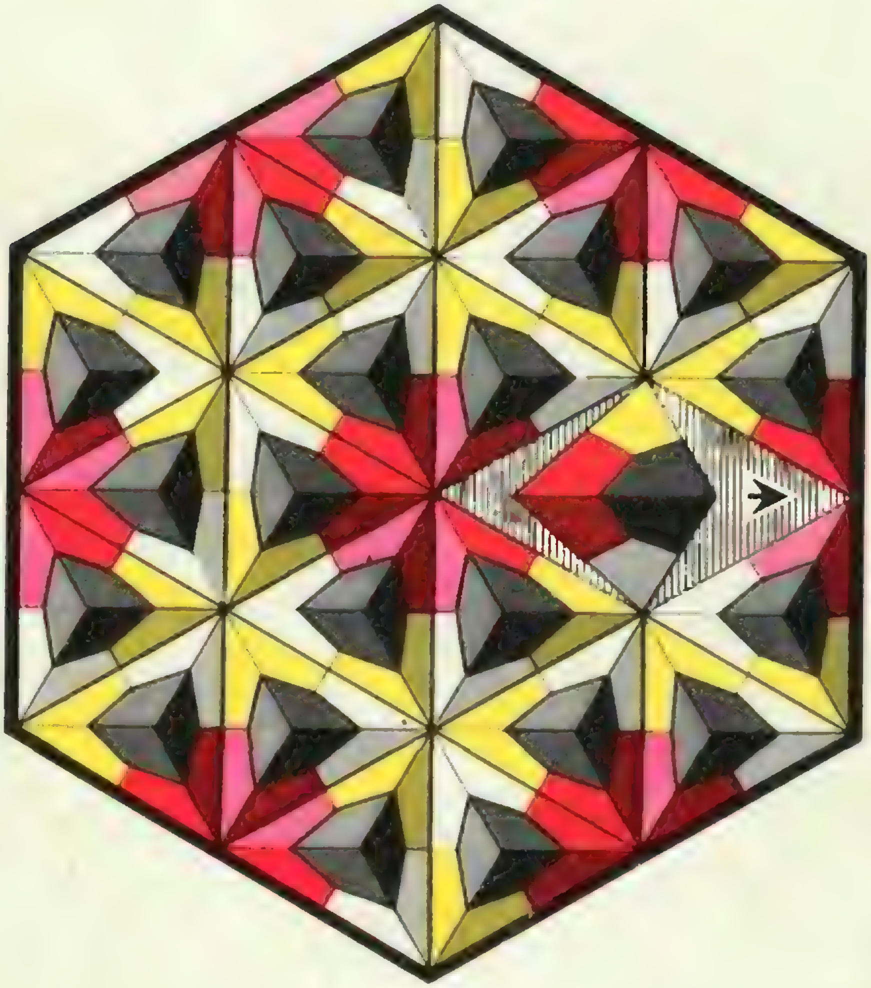
2. Белые начинают и дают мат в 3 хода.

Срок отправки решений — 20 марта 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 1, 2».

x
Cu
Fe
B
S
Li

Цена 40 коп.
Индекс 70465

В головоломке «Волшебные пирамидки» двадцать три правильных тетраэдра в первоначальном положении образуют красивый симметричный узор. По правилам игры нужно сначала произвольно изменить расположение тетраэдров, а затем постараться восстановить первоначальную картинку. Делать это можно только перекатывая тетраэдры из одной ячейки в соседнюю, пустую. Вынимать их из коробочки и менять местами нельзя.



Головоломка интересна и с математической точки зрения. Легко проверить, что тетраэдр с разноцветными гранями можно установить на одном и том же месте двенадцатью различными способами. Но можно ли получить все эти положения, если при установке не разрешается поднимать и вращать тетраэдр, а только перекатывать его через ребро различными маршрутами по плоскости так, чтобы он возвращался на исходное место? Подумайте — в этом ключ успеха в игре.

Другой интересной задачей является построение симметричных узоров, отличных от показанного на рисунке. Просим всех, кому удастся получить новые симметричные узоры, прислать их в редакцию.

Игрушку нетрудно сделать самим, склеив тетраэдры и коробочку из плотной бумаги или тонкого картона. Раскраска всех элементов одинакова. «Волшебные пирамидки» придумали А. Дремов и Г. Шевцова из Кривого Рога. Они стали победителями конкурса игр-головоломок газеты «Комсомольская правда».

А. Т. Калинин

НОМЕР
2

КВАНТ

1987
2

Основан в 1970 году

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *А. И. Кострикин.* Простые группы
8 *А. Б. Сосинский.* Конечные группы
13 *С. Г. Семенчинский.* Эффект Холла: год 1879 — год 1980
19 *Д. Г. Крутогин.* Путешествие по микрокомпьютеру

Задачник «Кванта»
22 Задачи М1026 — М1030; Ф1038 — Ф1042
24 Решения задач М1006 — М1009; Ф1017 — Ф1022
32 Трехзначные числа и орграфы

«Квант» для младших школьников
37 Задачи
38 *Н. А. Родина.* О чем могут рассказать цифры

Школа в «Кванте»
41 Математика 8, 9, 10
Лаборатория «Кванта»
43 *М. П. Бронштейн.* Изобретатели радиотелеграфа

Практикум абитуриента
48 *В. Е. Белонучкин.* Маневрирование в космосе

52 **Варианты вступительных экзаменов**

57 **Ответы, указания, решения**
«Квант» улыбается *(18, 51)*
Наша обложка *(36)*
Смесь *(36)*
Шахматная страничка
Парадоксальные находки ЭВМ *(3-я с. обложки)*

Наша обложка

На первой странице обложки показан многогранник, построенный по эпюру, приведенному на второй странице обложки. О том, как построить такой многогранник, рассказано на с. 36.

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1987

ПРОСТЫЕ ГРУППЫ

Член-корреспондент АН СССР
А. И. КОСТРИКИН

В конце 1980 г. математический и околоматематический мир облетела новость первостепенной важности: конечные простые группы классифицированы! На обложку одного математического журнала был вынесен список 26 известных «спорадических» групп. Этот список, воспроизводимый ниже в чуть измененном виде (см. таблицу), кочевал на протяжении пяти лет по алгебраическим конференциям и сам по себе не был новостью. Но — и это самое существенное — под списком помещено яркое примечание: ...«классификация конечных простых групп завершена; других спорадических групп нет». На обложке слово «известных» перед списком было красноречиво зачеркнуто.

Непосвященному читателю значение таинственной таблицы чисел, сопровождаемой не менее таинственными терминами, вряд ли о чем говорит. Более того, специализация наук такова, что для большинства математиков кое-какие разъяснения тоже необходимы.

Время от времени в каждой области человеческого знания происходят кардинальные изменения. В нашем случае специалисты склонны говорить о сенсации века. О полной драматических поворотов истории этого события — наш рассказ.

Галуа и группа уравнения

Все началось более 150 лет тому назад. Студент-первокурсник парижской высшей Нормальной школы Эварист Галуа решает едва ли не важнейшую математическую задачу своего времени: он дает полный ответ на вопрос о разрешимости в радикалах алгебраических уравнений любых степеней*). Гениальность Галуа проявляется не только в неожиданном и исчерпывающем решении древней проблемы: он переносит центр тяжести исходной задачи на методы ее решения. А этим методам, связанным с понятием *группы* данного уравнения, суждено проникнуть во все без исключения разделы математики, в физику, химию, кристаллографию...

Но злой рок преследует работы Галуа. В Парижской академии наук дважды теряют его рукописи. В очередном варианте работы не могут разобраться рецензенты-академики. А сразу после смерти двадцатилетнего юноши на дуэли (обстоятельства дуэли сродни политическому убийству) чудом уцелевший окончательный вариант его работы ... не принимает к публикации ни один научный журнал.

Клейн и Ли: группы в геометрии и в анализе

Лишь 35 лет спустя, когда яркий образ студента-республиканца и математика стал постепенно исчезать из человеческой памяти, идеи Галуа получили признание. Сначала, в 1846 году, Ж. Лиувилль опубликовал его работу в своем научном журнале. Работа, однако, была оценена по достоинству не сразу. Первым, видимо, ее значение понял французский алгебраист Камиль Жордан. Но широкому проникновению идей теории групп в математическую науку мы в первую очередь обязаны двум начинающим математикам, его ученикам: Феликсу Клейну и Софусу Ли.

И здесь не обошлось без политики. Начавшаяся в 1870 году франко-прусская война привела к гибели почти всего тиража книги Жордана о теории Галуа и на долгие годы разъединила француза Жордана и немца Клейна. А ни в чем не повинный норвежец Ли и вовсе оказался за решеткой: подталкиваемые волной шовинистического угара, набравшей силу с первых дней войны 1870 г., не в меру бдительные французские граждане определили, что светловолосый голубоглазый красавец, сосредоточенно заносивший таинственные знаки в небольшой блокнот и говорящий с акцентом, конечно же — немецкий шпион.

---

*) Именно, с каждым алгебраическим уравнением Галуа связывает некоторый объект — «группу уравнения»; уравнение оказывается разрешимым в радикалах (т. е. его корни выражаются через коэффициенты уравнения с помощью арифметических операций и извлечения корней) в том и только в том случае, когда группа уравнения обладает некоторым просто проверяемым свойством. Подробнее об этом см. «Квант», 1986, № 12, с. 2.

В тюрьме недалеко от Парижа созревают глубокие идеи Софуса Ли о применении теории групп в анализе, в частности — в дифференциальных уравнениях. Зарождаются основы теории, плодотворно развивающейся и по сей день,— *теории групп Ли*. А у себя на родине Клейн обдумывает роль групп в геометрии. Роль эта оказывается определяющей для самих оснований геометрической науки, и Клейн разъясняет это с блеском в своей знаменитой *эрлангенской программе.**)

Задача классификации конечных групп

Группы выступают не только в качестве метода в различных областях математики, но постепенно становятся самостоятельным предметом изучения. Особенно это касается конечных групп, изучение которых идет еще от самого Галуа. Математиками XIX столетия ставилась задача их классификации: предъявить полный список, без повторений, всех конечных групп.*) Насколько это трудно, свидетельствует тот факт, что настойчивые усилия по составлению каталогов конечных групп заводят в тупик даже при сравнительно небольших порядках групп (порядок $|G|$ — число элементов в группе G). Например, списка групп порядка $1024=2^{10}$ до сих пор нет.

Поэтому задачу классификации стоит ослабить. Подобно тому, как белки составлены из аминокислот, химические соединения состоят из атомов или натуральные числа являются произведением простых, конечные группы тоже строятся (хотя и весьма сложным образом) из элементарных составляющих: именно, из так назы-

---

*) См. «Квант», 1975, № 12, с. 6.

*) Для понимания математической части дальнейшего текста достаточно знать, что такое конечная группа (в частности, циклическая группа и группа перестановок) и гомоморфизм. Об этом написано на с. 9, 11.

Спорадические конечные простые группы

Группа	Год открытия	Порядок группы	Авторы
M_{11}	1861	$2^4 3^2 5\cdot 11=7920$	Матье
M_{12}	1861	$2^6 3^3 5\cdot 11=95040$	
M_{22}	1873	$2^7 3^2 5\cdot 11=443\,520$	
M_{23}	1873	$2^7 3^2 5\cdot 7\cdot 11\cdot 23=10\,200\,960$	
M_{24}	1873	$2^{10} 3^3 5\cdot 7\cdot 11\cdot 23=244\,823\,040$	
J_1	1965	$2^3 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 19=175\,560$	Янко
HS	1967	$2^9 3^2 5^3 7\cdot 11=44\,353\,000$	Хигман, Симс
$J_2=HJ$	1967	$2^7 3^3 5^2 7=604\,800$	Холл, Уелс
Mc	1968	$2^7 3^6 5^3 7\cdot 11=898\,128\,000$	Маклафлин
Sz	1968	$2^{13} 3^7 5^2 7\cdot 11\cdot 13$	Судзуки
$J_3=HJM$	1968	$2^7 3^5 5\cdot 17\cdot 19=50\,232\,960$	Хигман, Мак-Кей
Co_1	1968	$2^{21} 3^9 5^4 7^2 11\cdot 13\cdot 23$	Конвей
Co_2	1968	$2^{18} 3^6 5^3 7\cdot 11\cdot 23$	
Co_3	1968	$2^{10} 3^7 5^3 7\cdot 11\cdot 23$	
$He=HHM$	1968	$2^{10} 3^3 5^2 7^3\cdot 17$	Хелд, Хигман и др.
F_{22}	1969	$2^{17} 3^9 5^2 7\cdot 11\cdot 13$	Фишер
F_{23}	1969	$2^{18} 3^{13} 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 23$	
F_{24}	1969	$2^{21} 3^{16} 5^2 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 23\cdot 29$	
$Ly=LyS$	1970	$2^8 3^7 5^6\cdot 7\cdot 11\cdot 31\cdot 37\cdot 67$	Лионс, Симс
Ru	1972	$2^{14} 3^3 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 29$	Рудвалис, Конвей и др.
$O=O'NS$	1973	$2^9 3^4 5\cdot 7^3\cdot 11\cdot 19\cdot 31$	О'Нэн, Симс
$F_2=B$	1973	$2^{41} 3^{13} 5^6 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\times$ $\times 31\cdot 47$	Фишер, Симс и др.
$F_3=E$	1974	$2^{15} 3^{10} 5^3 7^2\cdot 13\cdot 19\cdot 31$	Смит, Томпсон
$F_5=O$	1974	$2^{14} 3^6 5^6\cdot 7\cdot 11\cdot 19$	Конвей, Фишер и др.
$M=F_1$	1974	$2^{46} 3^{20} 5^9 7^6 11^2 13^3\cdot 17\cdot 19\cdot 23\times$ $\times 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71$	Фишер, Грисс
J_4	1975	$2^{21} 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11^3\cdot 23\cdot 29\cdot 31\times$ $\times 37\cdot 43$	Конвей, Янко и др.

ваемых *простых групп*. И поэтому первоочередной становится *задача классификации конечных простых групп*.

Известно, что любая конечная группа является подгруппой одной из групп перестановок S_n, $n=1, 2, \ldots$ (см. с. 9 этого номера). Поэтому поиск простых конечных групп можно начать с исследования подгрупп группы S_n.

Но что же такое простая группа? Назовем гомоморфизм $\alpha\colon G\to H$ *упрощающим*, если в его образе $\alpha(G)\subset H$ более одного элемента, но меньше, чем в G. Конечная группа G называется *простой*, если у нее нет упрощающих гомоморфизмов.

Самый очевидный пример простой группы — это *циклическая группа* $\mathbf{Z}_p$ любого простого порядка p:

$$\mathbf{Z}_p=\left\{z, z^2, \ldots, z^p=e \;\middle|\; z=\begin{pmatrix}1&2&\ldots&(p-1)&p\\2&3&\ldots&p&1\end{pmatrix}\right\}\subset S_n.$$

Действительно, если бы существовал упрощающий гомоморфизм $\alpha\colon \mathbf{Z}_p\to H$, то один из не равных e элементов $w\in\mathbf{Z}_p$ перешел бы в единицу, но тогда и любой элемент из $\mathbf{Z}_p$ перешел бы в единицу (подумайте, почему) и $\alpha(\mathbf{Z}_p)=\{e\}$ — противоречие! Простота p здесь существенна, ибо группу $\mathbf{Z}_m$ при составном m можно гомоморфно отобразить на $\mathbf{Z}_k$, где k — делитель m.

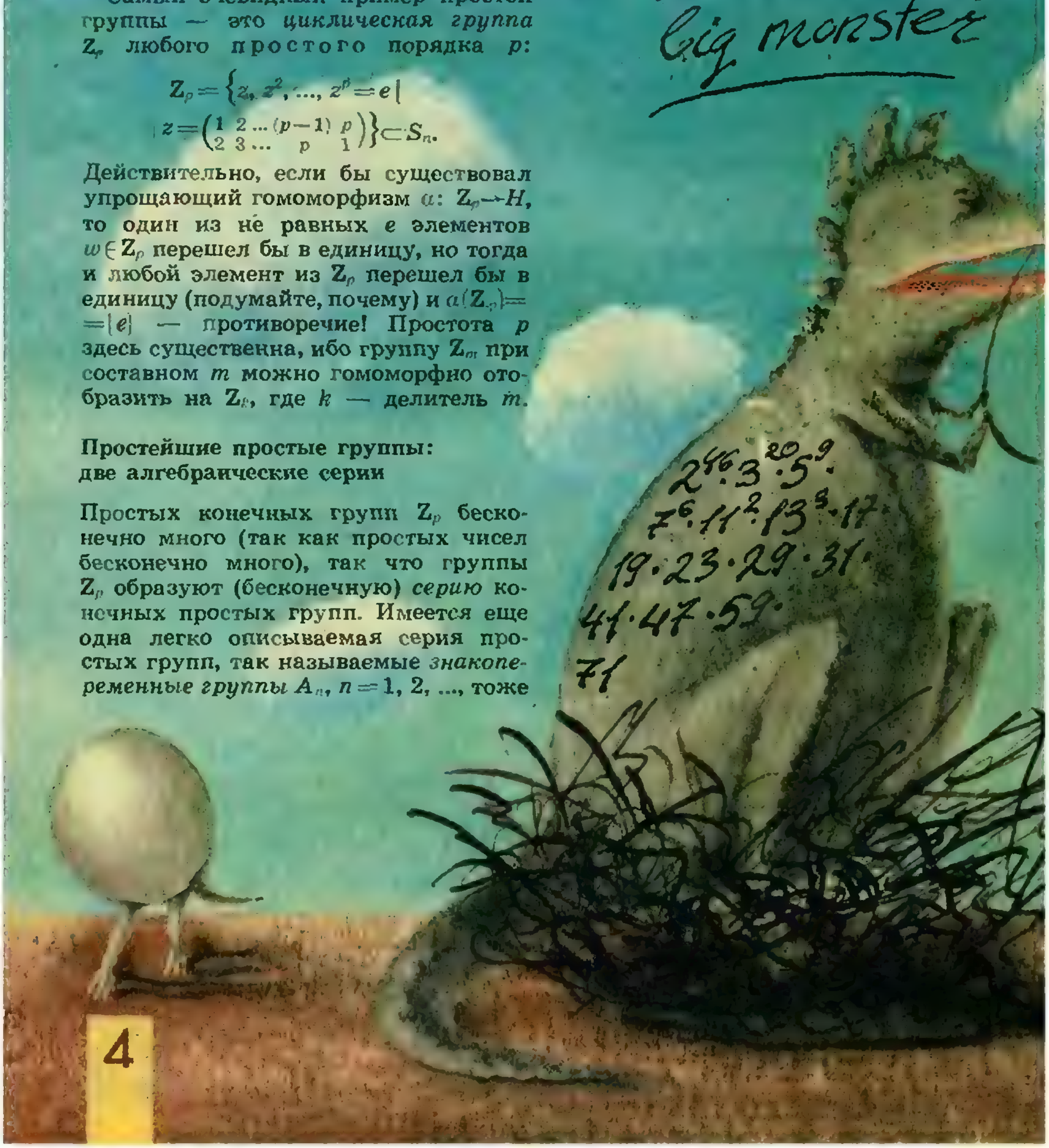
Простейшие простые группы: две алгебраические серии

Простых конечных групп $\mathbf{Z}_p$ бесконечно много (так как простых чисел бесконечно много), так что группы $\mathbf{Z}_p$ образуют (бесконечную) *серию* конечных простых групп. Имеется еще одна легко описываемая серия простых групп, так называемые *знакопеременные группы* A_n, $n=1, 2, \ldots$, тоже алгебраического происхождения. Опишем эти группы.

Рассмотрим группу S_n. Ее элемент $t\in S_n$ называется *транспозицией*, если он оставляет на месте все элементы 1, 2, ..., n кроме двух, которые он переставляет местами. Примеры:

$$S_5\ni\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\&&&\times&\\1&2&5&4&3\end{pmatrix},\quad S_4\ni\begin{pmatrix}1&2&3&4\\&\times&&\\2&1&3&4\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что любая перестановка может быть представлена в виде композиции транспозиций; перестановка $\sigma\in S_n$, которую можно представить в виде композиции четного числа транспозиций, называется *четной*; множество всех четных перестановок очевидно образует подгруппу группы S_n, которая и называется *знакопере-*


big monster
$2^{46}\cdot3^{20}\cdot5^{9}\cdot$
$7^{6}\cdot11^{2}\cdot13^{3}\cdot17\cdot$
$19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot$
$41\cdot47\cdot59\cdot$
71

женной группой n-й степени и обозначается через A_n. Можно доказать, что в группе A_n имеется $n!/2$ элементов и что при $n > 4$ группа A_n — простая. Таким образом, *знакопеременные группы*

$$A_n,\ n = 5, 6, 7, \ldots,$$

составляют вторую серию конечных простых групп.

Шестнадцать геометрических серий

Конечные простые группы не исчерпываются сериями Z_p и A_n. *Имеется* еще 16 других серий конечных простых групп. Они устроены уже более *сложно. Группы этих серий*, как правило, — конечные подгруппы «групп Ли». Можно сказать, что они скорей геометрической, чем алгебраической природы. В их открытии участвовало много математиков. Основополагающую роль сыграли работы француза К. Шевалле, выполненные вскоре после войны и завершенные в пятидесятые годы. Бесконечные геометрические серии охватывают основную массу типичных простых групп и допускают много разных описаний, приспособленных для тех или иных целей.

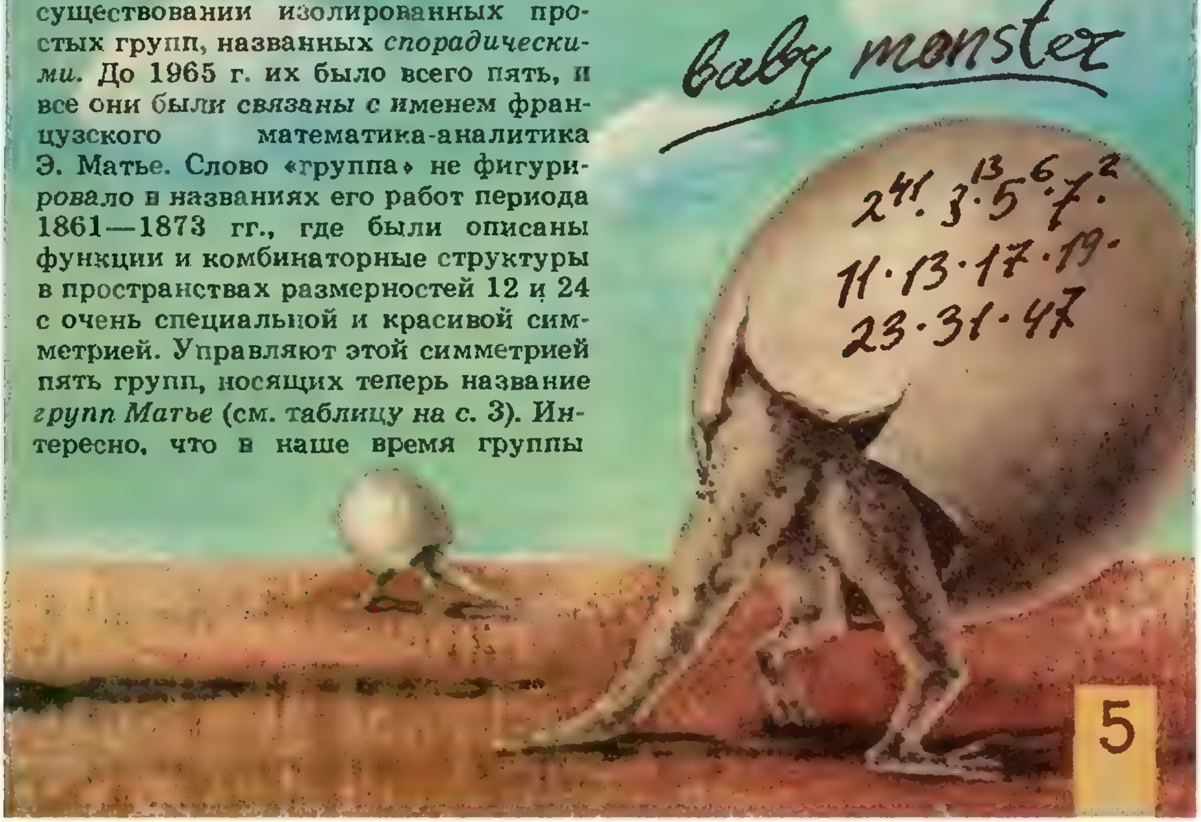
Спорадические простые группы

Задолго до того как задача выявления всех 18 бесконечных серий конечных простых групп уступила перед натиском исследователей, было известно о существовании изолированных простых групп, названных *спорадическими*. До 1965 г. их было всего пять, и все они были *связаны с именем* французского математика-аналитика Э. Матье. Слово «группа» не фигурировало в названиях его работ периода 1861—1873 гг., где были описаны функции и комбинаторные структуры в пространствах размерностей 12 и 24 с очень специальной и красивой симметрией. Управляют этой симметрией пять групп, носящих теперь название *групп Матье* (см. таблицу на с. 3). Интересно, что в наше время группы Матье послужили основой для конструирования высокоэффективных корректирующих кодов.

В целом же пять простых групп Матье *простояли особняком*, полузабытые, около столетия, пока в 1965 г. З. Янко из Гейдельберга не нашел еще *одну простую группу*, тоже не укладывающуюся ни в какую бесконечную серию. Но найдена она была не случайным образом, а в ходе решения одной специальной классификационной задачи. Подобными задачами занимались десятки других математиков. Успех З. Янко, открывшего *впоследствии* еще три спорадические группы, послужил своего рода катализатором. *Как грибы после дождя*, для постороннего наблюдателя — без всякой причины, непонятно откуда, с помощью ЭВМ и без, стали появляться все новые спорадические простые группы. Имена удачливых «грибников», в сокращенном виде повторяемые названиями самих «грибов» — спорадических групп, приведены в уже упомянутой таблице, второй столбец которой указывает на год находки. Этот год не всегда совпадает с годом фактического построения группы.

«Большой монстр» и «бэби монстр»

Наибольшая из спорадических групп F_1, или M, заслуживает отдельного рассказа. Ее существование впервые



было предсказано независимо Б. Фишером, Дж. Томпсоном и Р. Гриссом еще в 1974 г. Строгую конструкцию этой группы лишь в 1981 г. предложил Грисс, основываясь на некотором семействе поворотов в пространстве размерности 196883 (!) Число элементов этой — с позволения сказать — простой группы равно 808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368·10^9 (примерно 10^{54}). Не удивительно, что математики окрестили ее «big monster» («большой монстр») и долго подбирались к доказательству ее существования. Примечательно, что Грисс обошелся без помощи ЭВМ и тем самым избавил от первоначальных компьютерных родов многие другие спорадические группы, оказавшиеся «детенышами» (т. е. подгруппами) монстра F_1. К ним относится, в частности, группа F_2, известная под названием «baby monster» и ранее реализованная перестановками в S_n при n, близком к $14 \cdot 10^9$ (!). С течением времени были обнаружены поразительные связи монстра с классическими разделами математики (такими, как теория чисел) и получили широкое распространение «фантазии на тему монстра», не исключающие далеких параллелей между симметрией типа F_1 и новейшими физическими теориями.

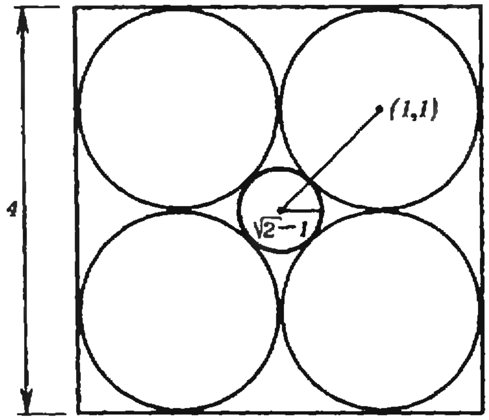
Теория и интуиция

Хотя ажиотаж вокруг упомянутых выше конструкций возник немалый, не нужно думать, что поиск рекордных спорадических групп превратился в бессмысленное спортивное соревнование, сродни популярным в США конкурсам по количеству студентов, поместившихся в телефонную будку. Построение спорадических групп проходило на пути глубочайшей интуиции и разумных догадок, предписываемых классификационной теорией, которая была развита на протяжении 25 лет целым рядом крупных математиков. В самом начале этого удивительного периода в истории алгебры стоят Дж. Томпсон и У. Фейт, доказавшие, что *всякая простая группа нечетного порядка* (т. е. с нечетным числом элементов) *должна быть циклической группой* Z_p *для некоторого простого* p. Это доказательство заняло 250 страниц сухого журнального текста (!), но зато оно содержало в зародыше всю последующую теорию.

Помимо общих теоретико-групповых соображений, конструирование каждой отдельной спорадической группы основывалось на глубоких идеях из других разделов математики. Так, в работах Дж. Конвея, открывшего три спорадические группы, используются одновременно и теория кодирования, и замечательные результаты о плотной упаковке сфер в многомерной геометрии. А тут обычная трехмерная интуиция часто отказывает.

Поучительный пример *)

Рассмотрим квадрат со стороной длиной 4 с центром в начале координат плоскости $\mathbf{R}^2$. В его четыре угла впишем четыре окружности радиуса 1, так как показано на рисунке. Каждая окружность касается двух других, и вся конфигурация симметрична относительно начала координат. Добавим теперь окружность с центром в начале координат, касающуюся четырех вписанных внешним образом. Точка (1; 1).— центр окружности в правом верхнем углу. Расстояние между центром внутренней окружности и центром единичной окружности в правом верхнем углу равно $\sqrt{2}$. Следовательно, радиус центральной окружности должен быть $\sqrt{2}-1$.



Перейдем теперь в трехмерное пространство $\mathbf{R}^3$ и повторим процесс, начав с куба ребром 4 с центром в начале координат и поместив в его 8 углов сферы радиуса 1. Каждая из сфер касается трех других, а все 8 симметричны относительно начала. Добавим теперь сферу с центром в начале координат, касающуюся восьми вписанных внешним образом. Ее радиус легко вычислить, снова обратив внимание на центр (1; 1; 1) сферы в правом верхнем углу куба, который находится на расстоянии $\sqrt{3}$ от начала. Поскольку внутренняя сфера касается этой единичной сферы, ее радиус должен быть $\sqrt{3}-1$.

Продолжим в том же духе! В пространстве $\mathbf{R}^n$ рассмотрим n-мерный куб с ребром 4 с центром в начале координат и поместим в его

---

*) По Дж. Ивингу (*The Mathematical Intelligencer*, 1980, 3, № 1, с. 45—46).

2^n углах единичные сферы*). Каждая касается n других, и все они симметричны относительно начала. Поместим сферу с центром в начале координат, касающуюся внешним образом n вписанных. Чему равен ее радиус? То же рассуждение показывает, что он должен быть $\sqrt{n}-1$.

Например, в $\mathbf{R}^{10}$ радиус внутренней сферы равен $\sqrt{10}-1\approx 2{,}16$. Но ... минуточку! Что случилось? «Внутренняя» сфера выглядывает из куба!

Этот поразительный факт противоречит нашей интуиции. Но он верен. И дает некоторое представление о неожиданностях, поджидающих исследователей теории простых групп.

Вместо заключения: решена ли проблема классификации конечных простых групп?

Так или иначе, было найдено всего 26 спорадических групп. Но все ли? Какова их роль в системе всех конечных простых групп? Стоят ли они особняком или образуют начало новой серии? Или начало нескольких серий? На все эти вопросы могла дать ответ только глубоко развитая теория. Такая теория была создана международным коллективом математиков. После многолетних настойчивых усилий специалисты постепенно пришли в выводу, что *весь список конечных простых групп должен состоять из 18 известных серий и еще 26 отдельно стоящих, и тоже известных, спорадических групп.*

Вводные слова нашего рассказа, основанные на сообщениях (и даже рекламных интервью в газетах) двух ведущих специалистов М. Ашбахера и Д. Горенстейна, категоричны и оптимистичны. Но тот же Ашбахер несколько раньше писал: «Я верю, что существует не слишком много групп, которые ожидают своего открытия. Однако если бы я держал пари, у меня не нашлось бы дополнительных аргументов». Все дело в том, что текста доказательства как такового нет, а многие его куски попросту аккуратно не записаны. Рассчитывать на появление связного текста в ближайшие годы не приходится. Арифметической суммой из 5 или 15 тысяч журнальных страниц, написанных почти за три десятилетия сотнями специалистов во многих странах мира, можно пользоваться лишь как черновым материалом, содержащим множество неточностей. Ими было недосуг заняться, а между тем из каждой дырки, по мнению пессимистов, готова выскочить спорадическая группа. Как пишет Дж. Конвей, начинается длительный период «ревизионизма», идейного пересмотра и упрощения доказательств, после завершения которого потомкам останутся ... несколько толстых, тщательно подготовленных томов.

В последние годы начато издание трехтомного сочинения Д. Горенстейна, содержащего детальный набросок (всего-то!) в принципе осуществленной программы, которая привела к впечатляющим результатам и коренным образом перестроила теорию конечных групп. Наиболее интересный вводный том издан в переводе на русский язык.*)

Итак, драматическая история простых групп еще не окончена. Скорее всего, таинственные тысячи страниц сплошного, тщательно подготовленного текста никто не напишет, да и достоверность их в любом случае вышла бы за рамки обычных математических стандартов. Сила математики — в ее единстве, и кто знает, на каком пути и какими средствами будут даны убедительные, легко проверяемые аргументы в пользу с таким трудом полученных выводов. Проблема заключается не только в перечислении всех конечных простых групп, но и в том, чтобы развить удобный сопутствующий аппарат, который имел бы общематематическое значение. Первые обнадеживающие связи с конечной геометрией и с теорией комплексных групп Ли уже обнаружены. Во всяком случае, конечные простые группы, о которых мы так много узнали в XX веке, продолжают оставаться чрезвычайно интересной и интригующей областью современной алгебры, ждущей молодых исследователей и свежих идей.

---

*) О том, что такое n-мерный куб, можно прочитать в «Кванте» 1986, № 6, с. 7.

*) Горенстейн Д., *Конечные простые группы. Введение в их классификацию.* М.: Мир, 1985 г.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

Кандидат физико-математических наук
А. Б. СОСИНСКИЙ

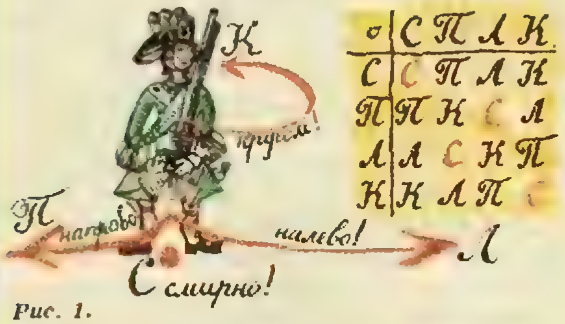
Понятие группы, в частности, конечной группы — одно из важнейших понятий математики. И вместе с тем одно из самых распространенных и наиболее полезных для приложений.

Без конечных групп нельзя, например, указать, какие алгебраические уравнения разрешимы в радикалах, а какие — нет, описать, как устроены кристаллы, создавать коды, исправляющие ошибки. Об этом, однако, мы здесь рассказывать не будем, а ограничимся простейшими примерами конечных групп.

Иллюстрации: группы действий

Непустой набор некоторых действий, которые можно последовательно выполнять, называют *группой*, если в этом наборе для каждого действия обязательно присутствует обратное к нему, а результат последовательного выполнения любых двух действий тоже является действием из этого набора.

В качестве иллюстрации рассмотрим действия солдата, выполняющего команды строевой подготовки (рис. 1). Эти четыре действия составляют группу $R(\square)=\{С, П, Л, К; \circ\}$. Так, результат последовательного выполнения действий П и К (направо и кругом) будет совпадать с результатом действия Л (налево); это записывается в виде равенства $К \circ П = Л$. Точно так же $Л \circ Л = П \circ П = К$, $Л \circ П = П \circ Л = К \circ К = С$. Остальные соотношения в группе можно извлечь из ее *таблицы умножения*, показанной на рисунке 1. Особую роль играет здесь действие С, которое можно назвать «ничегонеделание». (Такое действие обязательно есть в любой группе: мы его получим, выполнив произвольное действие, а затем обратное к нему.) У нас действия П и Л обратны друг к другу, действие К — обратно к самому себе, и т. д.


К
кругом!
П
направо!
налево!
Л
С смирно!

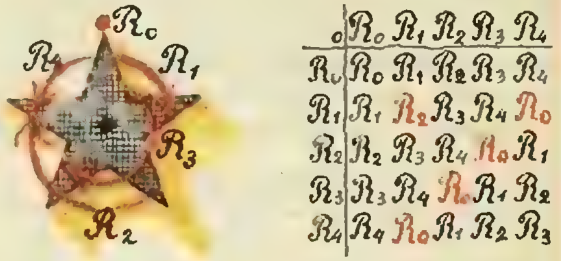
∘	С	П	Л	К
С	С	П	Л	К
П	П	К	С	Л
Л	Л	С	К	П
К	К	Л	П	С

Рис. 1.

Рассмотрим другую группу, тоже состоящую из поворотов. Именно — группу поворотов пятиконечной звезды $П(\bigstar)$ относительно ее центра (рис. 2). «Ничегонеделание» (в этом случае — поворот на 0°) обозначено через R_0, а остальные повороты (на 72°, 144°, 216°, 288°) — через R_1, R_2, R_3, R_4. Здесь $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2 = R_3$, $R_3 \circ R_3 = R_1$, $R_1 \circ R_4 = R_0$ (последнее означает, что R_4 обратно к R_1) и т. д. Набор

$$П(\bigstar)=\{R_0,\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4;\circ\}$$

образует группу.



∘	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4
R_1	R_1	R_2	R_3	R_4	R_0
R_2	R_2	R_3	R_4	R_0	R_1
R_3	R_3	R_4	R_0	R_1	R_2
R_4	R_4	R_0	R_1	R_2	R_3

Рис. 2.

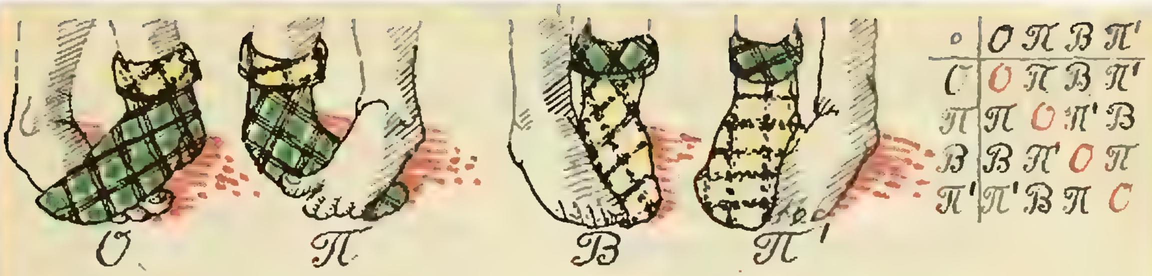
Рассмотрим, наконец, «группу надевания носка» (рис. 3), состоящую из следующих действий:

О = «Оставь, как есть»,
П = «Сними и надень на другую ногу»,
В = «Сними, выверни и надень на ту же ногу»,
П′ = «Сними, выверни и надень на другую ногу».

Здесь ничегонеделание — это О, далее $П \circ В = П'$, $П \circ П = В \circ В = П' \circ П' = О$, $П' \circ П = В$ и т. д.

Снова получается группа $Н=\{О,\ П,\ В,\ П';\ \circ\}$, состоящая, как и $R(\square)$, из четырех действий. Группы Н и $R(\square)$, однако, принципиально разные: у них таблицы умножения отличаются не только обозначением элементов, но и своим строением. Так, по диагонали таблицы умножения Н стоит одно и то же действие О, в то время как на этой диагонали у $R(\square)$ стоят разные элементы.

Подозреваю, что у самых серьезных читателей нарастает возмущение: какая-то там строевая подготовка, надевание носков — что за глупости такие, не научно это все! Спешу возразить: научно, даже очень. Знаете, как на самом деле называется набор действий солдата? *Циклическая группа 4-го порядка* или *группа вычетов по модулю* 4. А наше «надевание носков» — *группа Клейна*. Повороты же звезды — это одна из так называемых *простых конечных групп*, о которых в этом номере «Кванта» написана целая статья (см. с. 2), а в других журналах — тысячи статей.



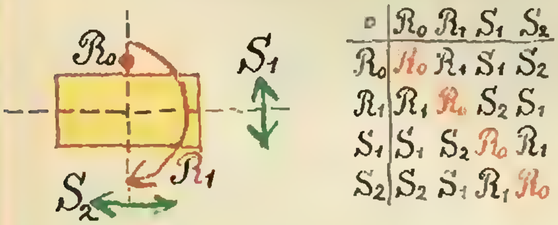
∘	О	П	В	П′
О	О	П	В	П′
П	П	О	П′	В
В	В	П′	О	П
П′	П′	В	П	О

Рис. 3.

Группы симметрий геометрических фигур

С каждой геометрической фигурой F можно связать вполне определенную группу $S(F)$, *называемую группой самосовмещений* или *группой симметрий* этой фигуры; по определению, ее набор действий состоит из всех перемещений, *совмещающих* фигуру F саму с собой. Например, $S(\square)$ состоит из 8 действий: четырех поворотов квадрата (относительно его центра, в том числе на 0°) и четырех *отражений* (относительно двух диагоналей и двух «средних линий» квадрата).

В группе $S(\triangle)$ самосовмещений правильного треугольника — 6 действий, *в группе* $S(▭)$ прямоугольника — 4. Таблица умножения группы $S(▭)$ изображена на рисунке 4.



∘	$\mathcal{R}_0$	$\mathcal{R}_1$	S_1	S_2
$\mathcal{R}_0$	$\mathcal{R}_0$	$\mathcal{R}_1$	S_1	S_2
$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_0$	S_2	S_1
S_1	S_1	S_2	$\mathcal{R}_0$	$\mathcal{R}_1$
S_2	S_2	S_1	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_0$

Рис. 4.

Если сравнить таблицу умножения для группы $S(▭)$ с таблицей умножения для группы Н, можно заметить, что эти таблицы отличаются только обозначением действий. Если переименовать действия так:

$$\text{О} \to R_0,\quad \text{П} \to R_1,\quad \text{В} \to S_1,\quad \text{П}' \to S_2,$$

то одна таблица превратится в другую. Группы с совпадающими (при подходящем переименовании действий) таблицами умножения называются *изоморфными*. Мы сейчас установили, что группы $S(▭)$ и Н изоморфны (их обычно в честь Ф. Клейна обозначают буквой K), а ранее заметили, что эти группы не изоморфны группе $R(\square)$ *действий солдата*.

Читатель, возможно, догадался, почему мы обозначили группу действий солдата через $R(\square)$: она изоморфна *группе поворотов квадрата* относительно его центра на углы $2k\pi/4$, $k=0, 1, 2, 3$. Эта группа — частный случай (при $n=4$) *группы поворотов правильного n-угольника* (относительно его центра), которая еще называется *циклической группой n-го порядка* и обычно обозначается через Z_n.

В алгебре группы изучают «с точностью до изоморфизма», т. е. не различают изоморфные группы: алгебраисту не интересно, как называется группа и ее действия, ему важно знать структуру таблицы умножения группы.

Группы перестановок и их подгруппы

Рассмотрим конечный набор предметов — скажем, пять. Обозначим предметы цифрами, а весь набор через $N_5=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Перестановкой* $i\in S_5$ этих предметов называется любое взаимно однозначное отображение i: $N_5\to N_5$, т. е., попросту говоря, перенумерация предметов. *Новый номер* $i(k)$ k-го предмета мы будем обозначать через i_k. Для наглядности перестановку i обычно представляют в виде таблицы:

$$i=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5\end{pmatrix}.$$

Это позволяет легко находить произведение перестановок i и j. Например, если

$$i=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix},\ j=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix},$$

то $k(3)=(i\circ j)(3)=i(j(3))=i(5)=2$, так что

$$i\circ j=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

(обратите внимание, что при $k=i\circ j$ сначала выполняется j, *а потом* i, *причем* это не все равно: $i\circ j\neq j\circ i$ — проверьте!) Также легко находить обратные перестановки («чтением снизу вверх»):

$$i^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что S_5 образует группу, состоящую из $5!=120$ перестановок. Эта группа называется *группой перестановок пяти предметов* или *симметрической группой пятой степени*. Совершенно аналогично определяется *симметрическая группа S_n n-й степени* для любого натурального n.

Группы перестановок интересны в частности тем, что содержат много *подгрупп* (т. е. частей, которые сами являются группами). В группах перестановок содержатся подгруппы, изоморфные всем нашим ранее рассмотренным группам. Заинтере-

Группа $\mathbb{Z}_{12} = \{R^{2\pi/12} = z, z^2, z^3, \dots z^{10}, z^{11}, z^{12} = e\}$

1 элемент II порядка : $\{z^6, \quad e\} \cong \mathbb{Z}_2$

2 элемента III порядка: $\{z^4, \quad z^8, \quad e\} \cong \mathbb{Z}_3$

2 элемента IV пор. : $\{z^3, \quad z^6, \quad z^9, \quad e\} \cong \mathbb{Z}_4$

2 элемента VI пор. : $\{z^2, \; z^4, \; z^6, \; z^8, \; z^{10} \; e\} \cong \mathbb{Z}_6$

4 элемента XII пор. : $z, \quad z^5, \quad z^7, \quad z^{11}$.

Группа $\mathbb{S}_4 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4\end{pmatrix} : \text{всего } 4! = 24 \text{ перест.}\right\}$

9 элем. II пор

$(12), (13), (14), (23), (24), (34), e \cong \mathbb{Z}_2$

$(12)(34), (13)(24), (14)(23), e \cong \mathbb{Z}_2$

$\mathcal{A}_4 = (e,$

8 элем. III пор.

$(123), (124), (134), (234),$

$(132), (142), (143), (243), e \cong \mathbb{Z}_3$

6 элем. IV пор.

$(2341), \; (3412), \; (4123), e \cong \mathbb{Z}_4$

$(2431), \; (4312), \; (3124), e \cong \mathbb{Z}_4$

$\{(12), (34), (12), (34), e\} \cong \mathcal{K}$ (гр. Клейна)

$\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ i_1 & i_2 & i_3 & 4\end{pmatrix} : i_n \in \{1, 2, 3\}\right\} \cong \mathbb{S}_3 \cong S(\Delta)$

Группа $\mathbb{S}_5 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5\end{pmatrix} : 5! = 120 \text{ элементов}\right\}$

Есть элементы порядков II, III, IV, V, VI;

пример элемента порядка VI: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$.

Есть подгруппы, изоморфные $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6$.

Есть подгруппы, изоморфные $\mathbb{S}_3, \mathbb{S}_4$, и $\mathcal{K}$.

Есть подгруппы, изом. $\mathcal{A}_4$ ($12^{\text{го}}$ порядка).

Есть единственная подгруппа $\mathcal{A}_5$ порядка 60.

сованный читатель может в этом убедиться, проштудировав рисунок 5.

Рассматривая этот рисунок, читатель наверняка обратит внимание на красивые числовые закономерности, которые на нем проявляются. В частности, если назвать *порядком группы* число ее элементов, а *порядком элемента* g — наименьшее число k, для которого $g^k=e$, то можно сформулировать следующую теорему.

Теорема Лагранжа. *Порядок любой подгруппы, также как порядок любого элемента группы, является делителем порядка группы.*

Доказательство (не очень сложное) мы здесь не приводим.

Взаимоотношения групп: гомоморфизмы

Группы изучают не каждую саму по себе, а в их взаимодействии. Назовем *гомоморфизмом* $\gamma:G\to H$ группы G в группу H всякое отображение, ставящее в соответствие каждому действию g из G вполне определенное действие $h=\gamma(g)$ из H, если для любых g и g' из G выполняется

$$\gamma(g\circ g')=\gamma(g)\circ\gamma(g').$$

(Коротко говорят так: гомоморфизм — это отображение, сохраняющее операцию $\circ$.)

Бестолковый солдат, который игнорирует команды «кругом» и «смирно», а в ответ на команды «налево» и «направо» поворачивается кругом, тем самым задает гомоморфизм

$$\beta:R(\square)\to\mathbf{Z}_2=\{\text{С, К};\circ\}$$

по правилу $\beta(\text{С})=\beta(\text{К})=\text{С}$, $\beta(\text{П})=\beta(\text{Л})=\text{К}$. Задумавшийся солдат, не реагирующий ни на какую команду, определяет *тривиальный гомоморфизм* в *тривиальную группу*:

$$\alpha:R(\square)\to\{e\}.$$

Нетривиальные гомоморфизмы не всегда существуют. Например, любой гомоморфизм $\alpha:\mathbf{Z}_5\to\mathbf{Z}_2$ или $\beta:\mathbf{Z}_5\to\mathbf{Z}_6$ — тривиален.

Абстрактные группы и теорема Кэли

До сих пор мы рассматривали вполне конкретные группы, состоящие из действий — поворотов, симметрий и других преобразований. Но к понятию группы можно подходить с более формальных, общих позиций; группы тогда считаются состоящими из элементов произвольной природы, а умножение — тоже произвольная операция (не обязательно композиция действий). Получается следующее аксиоматическое определение. Множество G элементов произвольной природы, в котором задана *бинарная операция* $*$ (состоящая в том, что каждой паре элементов $a, b\in G$ ставится в соответствие их *произведение* $c=a*b$, тоже являющееся элементом G) называется (*абстрактной*) *группой*, если

1°. операция $*$ *ассоциативна*, т. е. для любых $a, b, c\in G$

$$a*(b*c)=(a*b)*c;$$

2°. в G имеется единственный *нейтральный элемент* $e\in G$, для которого

$$a*e=e*a=a$$

при любом $a\in G$;

3°. для каждого $a\in G$ существует единственный *обратный элемент* $a^{-1}\in G$ такой, что

$$a^{-1}*a=a*a^{-1}=e.$$

Это общее определение позволяет сразу получить много новых примеров групп. Так, целые числа $\mathbf{Z}$ образуют группу (в качестве $*$ берем операцию $+$, нейтральный элемент — это 0, а обратным к $a\in\mathbf{Z}$ служит $(-a)$); ненулевые действительные числа $\mathbf{R}\{0\}$ образуют группу относительно умножения и т. д.

Однако по существу абстрактный подход ничего нового не дает: оказывается, что любая абстрактная группа изоморфна некоторой группе действий. Мы докажем это здесь лишь для конечных групп.

Теорема Кэли. *Всякая конечная группа G изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок S_n.*

Доказательство. Пусть $G=\{e=g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Каждому элементу $g_k\in G$ поставим в соответствие перестановку

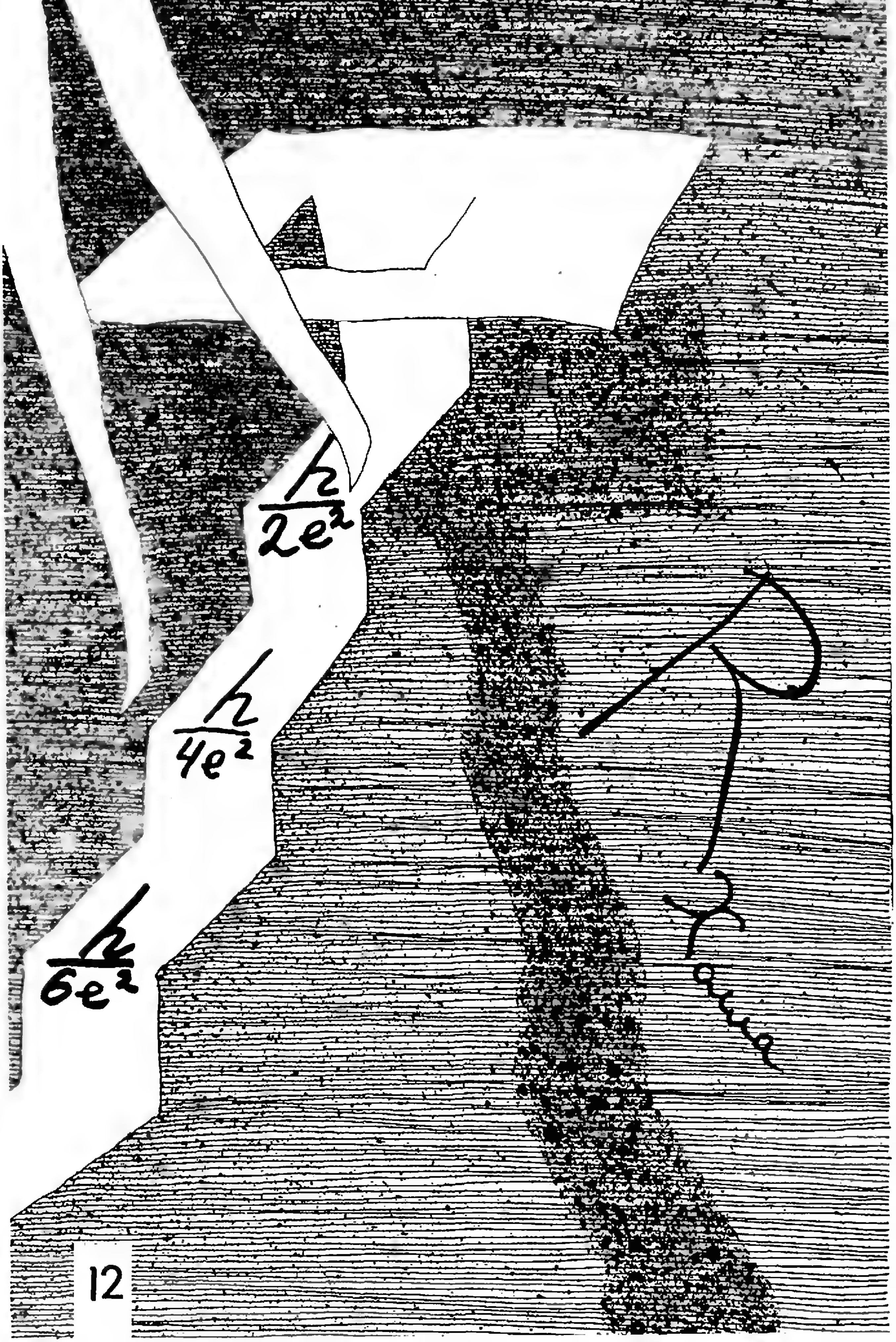
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n\end{pmatrix},$$

где i_1 — номер элемента $g_k*g_1=g_k*e$ (на самом деле $i_1=k$), i_2 — номер элемента g_k*g_2, ..., i_n — номер элемента g_k*g_n. Тогда все i_s различны (т. е. действительно получается перестановка) и соответствие

$$g_k\to\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\end{pmatrix}$$

задает гомоморфизм $h:G\to S_n$ (это следует из ассоциативности), притом h отображает G взаимно однозначно на подгруппу $h(G)\subset S_n$ (это следует из аксиом 2° и 3°).

Рис. 5. Подгруппы циклической группы $\mathbf{Z}_{12}$ и групп перестановок S_4 и S_5. Красным выделены циклические подгруппы $\mathbf{Z}_k$, зеленым — так называемые знакопеременные группы (A_4 и A_5). В описании групп S_4 цифры в круглых скобках обозначают циклы, т. е. перестановки, меняющие цифры по кругу, например $(123)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$ *(т. е.* $1\to2\to3\to1$, $4\to4$*) или* $(24)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$, $(13)(24)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$.


$\frac{h}{2e^2}$
$\frac{h}{4e^2}$
$\frac{h}{6e^2}$

ЭФФЕКТ ХОЛЛА: ГОД 1879 — ГОД 1980

Кандидат физико-математических наук
С. Г. СЕМЕНЧИНСКИЙ

Нобелевская премия по физике в 1985 году была присуждена ученому из ФРГ профессору Клаусу фон Клитцингу за цикл работ по физике полупроводников. Основным результатом этих работ было открытие квантового эффекта Холла — эффекта, в котором оказались «замешанными» классический эффект Холла, известный уже сто лет, квантовые законы поведения электронных систем, сформулированные в середине XX века, необычные свойства «двумерных» структур, впервые обнаруженные в 1966 году, и МОП-транзисторы, создание которых относится к пятидесятым годам. Открытие К. фон Клитцинга заинтересовало физиков самых различных специальностей, поскольку оно открыло новые возможности измерения фундаментальных констант и создания нового эталона сопротивления.

В чем суть этого открытия? Чтобы понять это, начнем с открытия столетней давности.

Классический эффект Холла

В 1879 году американский физик Эдвин Холл обнаружил, что если проводник с током поместить в магнитное поле, перпендикулярное току, то в проводнике возникнет электростатическое поле, направленное перпендикулярно магнитному полю и току (рисунок 1).

Напряженность этого поля мы можем рассчитать. Ток в проводнике — это направленное движение электронов. Величина тока и средняя скорость этого движения связаны соотношением $v = I/(nes)$, где n — концентрация электронов в проводнике, e — заряд электрона, s — площадь сечения проводника. Поместим прямоугольный образец, по которому течет ток I, в магнитное поле с индукцией B (см. рисунок 1). На движущиеся электроны со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $F = evB$, направленная перпендикулярно $\vec{v}$ и $\vec{B}$. В результате действия этой силы электроны будут смещаться к боковой грани образца, так что на одной из граней возникнет избыток электронов, а на другой — недостаток. Это приведет к возникновению электростатического поля, перпендикулярного току, — его называют полем Холла. Перемещение электронов поперек тока прекратится, как только сила, действующая на электрон со стороны поля Холла, сравняется с силой Лоренца: $E_X e = evB$, откуда $E_X = vB$, или

$$E_X = \frac{IB}{nes}.$$

Холловское поле создает на гранях проводника разность потенциалов, равную

$$U_X = E_X b = \frac{IBb}{nes} = \frac{IB}{nea},$$

где b — ширина проводника, a — его толщина. Эту разность потенциалов на гранях можно непосредственно измерять в экспериментах, и такие измерения дают очень важные сведения о количестве электронов в единице объема проводника, так как отношение напряжения Холла U_X к току I, пропускаемому через проводник, как следует из приведенных рассуждений, зависит от n. Это отношение обычно называют холловским сопротивлением и обозначают R_X:

$$R_X = \frac{U_X}{I} = \frac{B}{nea}. \qquad (1)$$

Как видно из формулы (1), R_X пропорционально индукции магнитного

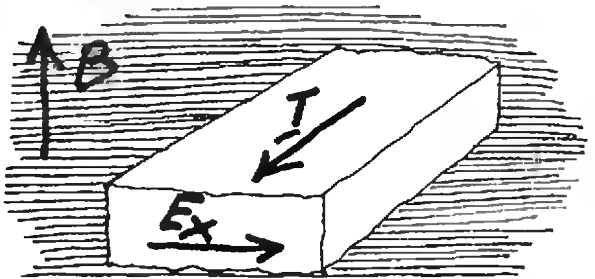


Рис. 1.

поля *B* и обратно пропорционально концентрации электронов *n*.

Наличие магнитного поля сказывается и на обычном сопротивлении проводника (на сопротивлении протекающему току) — оно, как правило, увеличивается.

Качественно это можно пояснить следующим образом. Причиной электрического сопротивления является рассеяние электронов на препятствиях, встречающихся на их пути, — на примесях, на дефектах кристаллической решетки и т. д. При столкновениях с препятствиями направления скоростей электронов могут изменяться произвольным образом. Однако в промежутках между столкновениями электроны разгоняются электрическим полем — проекции их скоростей вдоль поля растут. Таким образом, в проводнике устанавливается отличная от нуля средняя скорость дрейфа электронов вдоль поля — по проводнику течет ток. При наличии магнитного поля траектории движения электронов между столкновениями искривляются, и в результате скорость их дрейфа несколько уменьшается. Следовательно, при той же разности потенциалов уменьшается ток, т. е. растет сопротивление. Следует, однако, отметить, что холловское поле частично ослабляет описанный эффект (а иногда и компенсирует его полностью).

За сто лет, прошедших со дня открытия эффекта Холла, в его изучении было сделано много. Было выяснено, как влияет на холловское сопротивление присутствие примесей в материале образца, наличие носителей другого знака, изменения температуры и т. д. Однако формула (1) все это время, в основном, не вызывала сомнений у физиков.

И вот в 1980 году К. фон Клитцинг обнаружил, что в особых системах, называемых двумерными электронными слоями, зависимости холловского сопротивления от индукции магнитного поля и концентрации электронов совсем не такие, как это предписывает формула (1). И сопротивление току в двумерном электронном слое при наличии магнитного поля ведет себя по-особенному.

Причины этих «необычностей» кроются в свойствах самого объекта, на котором они наблюдались.

Двумерный электронный слой

Что это такое? Как его создать?

Оказывается, двумерный слой электронов возникает в электронных приборах, имеющих самое широкое применение, — в полевых МОП-транзисторах. Этот прибор схематически изображен на рисунке 2. Пластина полупроводника — например кремния — покрыта слоем диэлектрика (оксидом кремния), на который сверху напылен так называемый затвор — пленка металла (обычно алюминия; по первым буквам слов металл — оксид — полупроводник прибор и назван МОП-транзистором). Если к затвору приложить положительное напряжение относительно полупроводника, то электроны, находящиеся в полупроводнике, притянутся к затвору. Но пройти сквозь оксид они не смогут и образуют вблизи него тонкий слой (его толщина 20—30 Å, т. е. $\sim 10^{-9}$ м). Этот слой можно назвать двумерным — в том смысле, что в двух измерениях вдоль слоя электроны могут двигаться свободно, в то время как отойти вглубь полупроводника им не дает электростатическое поле затвора.

Затвор и слой образуют плоский конденсатор, емкость которого можно с достаточной точностью считать равной $C=\varepsilon_0\varepsilon S/d$, где ε — диэлектрическая проницаемость оксида, d — его толщина, S — площадь слоя. Заряд слоя можно определить по формуле $Q=CU_з$, где $U_з$ — напряжение между затвором и полупроводником. Таким образом, число электронов в слое

$$N=\frac{Q}{e}=\frac{CU_з}{e}=\varepsilon_0\varepsilon\frac{S}{de}U_з \qquad (2)$$

зависит лишь от напряжения на затворе и, в отличие от числа свободных электронов в полупроводнике, не зависит от температуры. Следовательно, при понижении температуры вплоть до абсолютного нуля слой не исчезнет. Сопротивление же полупро-

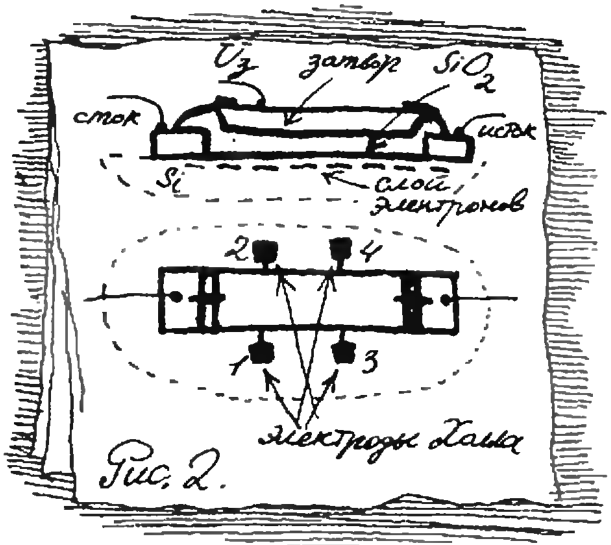


Рис. 2.

водника станет бесконечным, так как его собственные носители тока исчезнут — полупроводник станет изолятором. Теперь ничто не помешает нам изучать свойства двумерного слоя, измеряя падение напряжения между контактами к слою. Ток через образец при этом пропускают между контактами, называемыми, по вполне понятным причинам, истоком и стоком (см. рисунок 2). Если нас интересует холловское сопротивление R_X, то его можно определить, измерив напряжение U_X между контактами *1* и *2* или *3* и *4* и разделив результат на величину тока I. Информацию о сопротивлении протекающему току R можно получить, измеряя напряжение между контактами *1* и *3* или *2* и *4*. Для измерения холловского сопротивления такого двумерного слоя надо, разумеется, поместить его в магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости слоя. Но в достаточно сильном поле под действием силы Лоренца электроны будут двигаться по окружностям с одной и той же частотой вращения

$$\omega = Be/m, \tag{3}$$

где m — масса электрона.

Таким образом, мы получили электронную систему, в которой движение электронов ограничено в любом из направлений — в плоскости слоя их закручивает магнитное поле, а уйти из этой плоскости им не дает электрическое поле затвора.

С точки зрения классической физики двумерный проводник качественно не отличается от трехмерного. Ток через такой проводник все так же связан с дрейфом электронов (вдоль слоя). Холловское сопротивление должно определяться по формуле (1), с той, однако, разницей, что под n надо понимать количество электронов, приходящихся на единицу площади, и в знаменателе, таким образом, уже не будет толщины проводника:

$$R_X = \frac{B}{ne}. \tag{4}$$

Ничего необычного не должно происходить и с сопротивлением протекающему через слой току — оно должно возрастать с увеличением B. Однако ...

Квантовые причуды двумерного слоя

С точки зрения квантовой механики, однако, у такой системы электронов должны возникнуть принципиально новые свойства. Вы, вероятно, знаете, что энергия микрочастицы, которая движется в ограниченной области пространства, согласно квантовой теории не может быть произвольной. Например, при движении электронов в атоме энергия электронов может принимать лишь определенные значения W_0, W_1, W_2, ... и не может — промежуточные. В этом случае говорят, что возникают разрешенные уровни энергии W_0, W_1, W_2, ... То же происходит и с электронами, вращающимися в магнитном поле. Оказывается, их энергия может быть равна только дискретным значениям

$$W_i = \left(i + \frac{1}{2}\right)\frac{h\omega}{2\pi}, \tag{5}$$

где i — целое число, а ω — частота вращения, определяемая формулой (3). Эти разрешенные уровни энергии принято называть уровнями Ландау.

Согласно законам квантовой механики, электроны, находящиеся в одном и том же месте пространства, должны хоть чем-нибудь отличаться — иметь разные энергии, разные спины и т. д. Попробуем подсчитать, сколько электронов с энергией W_0 ($i=0$) — это нижний уровень Ландау — может поместиться на единице площади. Пусть электрон вращается по окружности радиуса r с частотой ω, определяемой формулой (3). Его кинетическая энергия равна $m\omega^2 r^2/2$. Приравняем эту энергию W_0:

$$\frac{h\omega}{4\pi} = \frac{m\omega^2 r^2}{2}, \text{ или } \frac{h}{4\pi}\frac{Be}{m} = \frac{m}{2}\frac{B^2e^2}{m^2}r^2.$$

Отсюда находим, какая площадка приходится на один электрон с энергией W_0: $\pi r^2 = h/(2Be)$. На этой же площадке может разместиться еще один электрон с той же энергией W_0, но с противоположно направленным спином — так велит принцип Паули (тот же принцип Паули, который участвует в «расселении» электронов в атоме). Другие электроны с энергией W_0 могут поместиться рядом, так, чтобы «орбиты» электронов не перекрывались. Таким образом, на единице площади можно разместить $n = \frac{2}{\pi r^2} = \frac{4Be}{h}$ электронов с энергией W_0.

В наших расчетах мы пользовались чисто механической моделью движения электронов в магнитном поле. Точный квантово-механический расчет показывает, что плотность электронов одинакова для всех уровней Ландау и равна

$$n_{\text{л}} = 2Be/h. \qquad (6)$$

(Как видите, мы ошиблись всего в два раза, что совсем не так плохо для использованной нами грубой модели.)

А теперь вернемся к двумерному электронному слою в МОП-транзисторе. Число n электронов на единице площади слоя можно изменять, меняя напряжение на затворе $U_{\text{з}}$ (см. формулу (2)). При увеличении $U_{\text{з}}$ электроны постепенно заполняют уровень Ландау: когда (при некотором $U_{\text{з}}$) окажется, что всем электронам не хватает места на нижнем уровне Ландау, они начнут заполнять следующий уровень (с $i=1$, затем с $i=2$ и т. д.).

Как сказывается квантованность энергии электронов на токе, текущем вдоль слоя? Пока на уровне Ландау есть свободные места, электроны, сталкиваясь с препятствиями (неоднородностями в образце), могут перескакивать на эти свободные места, оставаясь на том же энергетическом уровне. Такие перескоки, как мы уже говорили, приводят к уменьшению средней скорости направленного коллективного движения электронов, т. е. в этом случае ток в двумерном слое испытывает сопротивление. Если же электроны полностью заполняют уровни от нулевого до i — 1-го, а i-ый уровень пуст, то единственная для электрона возможность изменить состояние — это перейти на i-ый уровень. Но для этого ему нужна дополнительная энергия $W_i - W_{i-1} = \frac{1}{2\pi} h\omega$ (см. формулу 5)). Если бы температура была высокой, электрон мог бы получить необходимую порцию энергии из энергии тепловых колебаний. Эта энергия по порядку величины равна kT (k — постоянная Больцмана). Если же температура настолько низкая, что $kT \ll \frac{1}{2\pi} h\omega$, то электрону неоткуда взять энергию для перехода на следующий энергетический уровень. Это значит, что у электрона не осталось больше никакой возможности реагировать на препятствия, и он на них не реагирует. Поэтому сопротивление протекающему току в момент, когда заполнено целое число i уровней Ландау, становится равным нулю.

Квантовый эффект Холла

Но мы отвлеклись от основного предмета нашего разговора — от эффекта Холла.

Итак, в 1980 году, когда классическому эффекту Холла было уже сто лет, К. фон Клитцинг обратил внимание на необычное поведение холловского сопротивления и сопротивления току в двумерном электронном слое. Насколько оно было необычным, видно из рисунка 3: вместо плавной зависимости от напряжения $U_{\text{з}}$ (или, что эквивалентно, — от n) — она приведена пунктирной линией на кривой $R_{\text{Х}}(U_{\text{з}})$ наблюдались «ступеньки» — участки, где $R_{\text{Х}}$ оставалось постоянным в довольно широком интервале $U_{\text{з}}$. Значение $R_{\text{Х}}$ на ступеньках оказалось независящим ни от каких параметров системы: оно определяется только фундаментальными физическими постоянными — постоянной Планка h и зарядом электрона e — и для ступеньки с номером N

$$R_{\text{Х}} = \frac{1}{N}\frac{h}{2e^2}. \qquad (7)$$

Иными словами, сопротивление Холла квантуется!

Теперь, когда мы познакомились с квантовым характером поведения электронов в двумерном слое, попытаемся разобраться в этих фактах.

Давайте определим значение холловского сопротивления $R_{\text{Х}} = B/(ne)$ (см. формулу (4)) для того же особого в жизни двумерного слоя случая, когда заполнено точно i уровней Ландау. На единице площади при этом находятся $n = in_{\text{л}} = i(2Be/h)$ электронов (см. формулу (6)), и

$$R_{\text{Х}} = \frac{1}{i}\frac{h}{2e^2}.$$

— мы получили формулу (7)!

Посмотрим еще раз на рисунок 3. На нем приведена также полученная экспериментально зависимость сопротивления току ($R(U_{\text{з}})$). Как видно из рисунка, при некоторых значениях $U_{\text{з}}$ сопротивление R падает практически до нуля. Мы уже выяснили, что такая ситуация возможна в тех случаях, когда электроны в слое заполняют целое число уровней Ландау и не имеют возможности приобрести дополнительную энергию для перехода на следующий уровень. И в этой ситуации, как видно из рисунка 3, холловское сопротивление определяется

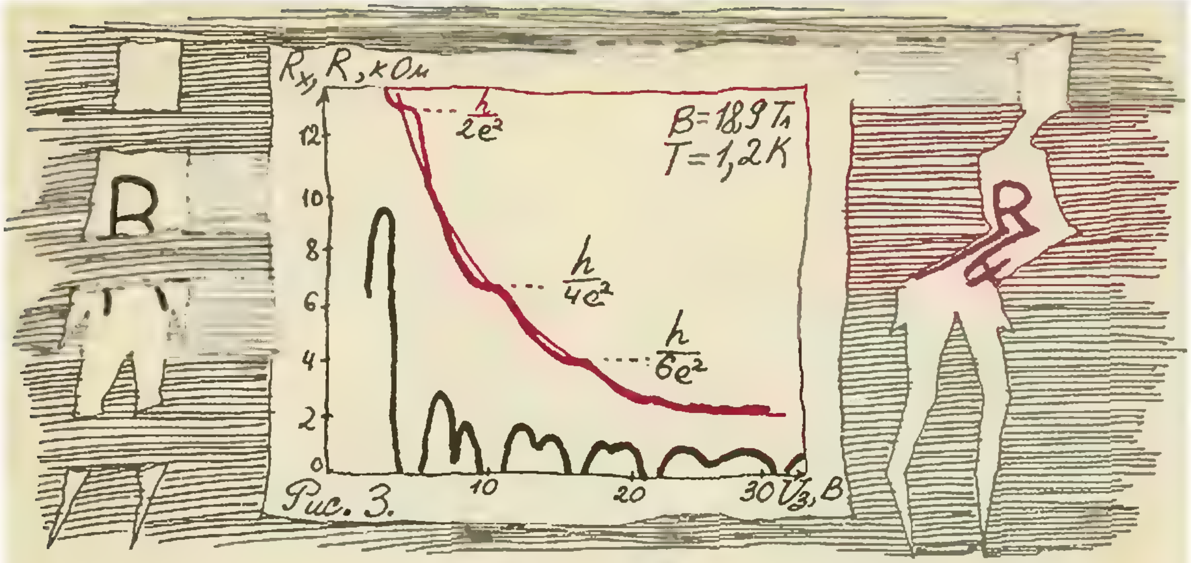


Рис. 3.

лишь фундаментальными константами. Но из того же рисунка 3 видно, что сопротивление R продолжает оставаться нулем в некотором интервале изменения $U_{\text{з}}$ и, следовательно, n. А ведь наши выводы относились лишь к ситуации, когда заполнено точно целое число уровней Ландау, т. е. к некоторым точным значениям концентрации $n=in_{\text{л}}$. То же относится и к кривой $R_{\text{х}}(U_{\text{з}})$, на которой в тех местах, где $R_{\text{х}}=h/(2ie^2)$, образуются почему-то ровные «полочки». Эти «подозрительные» места на графиках объясняются тем, что реальный полевой транзистор далеко не идеален. В частности, не постоянна толщина оксида. Это приводит к тому, что при одном и том же напряжении на затворе в разных местах слоя возникает разная концентрация электронов. При постепенном увеличении $U_{\text{з}}$ концентрация будет изменяться по всему слою, оставаясь где-то немного больше, а где-то — немного меньше средней. Рано или поздно на некоторых участках n достигнет значения $in_{\text{л}}$. Как только возникнет «дорожка» с такой концентрацией от истока до стока, весь ток пойдет по ней — ведь сопротивление дорожки равно нулю. Если мы слегка увеличим $U_{\text{з}}$, то где-то появится другая дорожка с концентрацией $in_{\text{л}}$, и весь ток потечет по ней. И до тех пор, пока не исчерпаются все такие пути от истока до стока, R будет равно нулю и будет длиться «плато» $R_{\text{х}}=h/(2ie^2)$. При дальнейшем увеличении $U_{\text{з}}$ все повторяется с той лишь разницей, что следующая «ступенька» будет соответствовать $n=(i+1)n_{\text{л}}$ и $R_{\text{х}}$ будет равно $h/(2(i+1)e^2)$.

Итак, мы немного разобрались в причинах, вызывающих квантование холловского сопротивления в двумерном слое. Не следует, однако, думать, что все здесь совершенно ясно. До сих пор физики еще не нашли ответов на многие вопросы, и главный из них — в чем причина той чрезвычайно высокой точности выполнения равенства (7), которая экспериментально наблюдается при конечной (не нулевой) температуре.

Уже в 1982 году группой американских физиков было показано, что с точностью 10^{-7} (т. е. до седьмого знака после запятой) равенство (7) справедливо. Предел ли это?

Сейчас принято считать, что $R_{\text{х}}$ отличается от $h/(2ie^2)$ примерно на столько же, на сколько R отличается от нуля. Это было установлено для таких экспериментальных условий, когда поддаются измерению как R, так и отличие $R_{\text{х}}$ от $h/(2ie^2)$. Можно предположить, что такая связь между $R_{\text{х}}$ и R существует и тогда, когда ни то, ни другое уже прямым измерениям не поддается, так как они становятся слишком малыми. Однако всегда есть возможность оценить R, например, по времени затухания в образце токов Фуко. Возбудить токи можно, скажем, изменяя магнитное поле. Такие эксперименты, проведенные группой советских физиков в 1984 году, дали удивительный результат. Они показали, что при температуре 0,4 К в магнитном поле с индукцией 9 Тл вихревой ток «живет» столько, сколько длится эксперимент, то есть часы. За это время ток затухает столь незначительно, что оценка полного времени его затухания дает многие годы. Оценки сопротивления R, сделанные по результатам этих экспериментов, дают значение $R \lesssim 10^{-11}$ Ом. Это, возможно, означает, что равенство (7) выполняется лучше, чем до пятнадцатого знака!

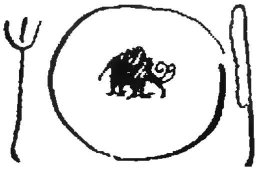
Новый эталон ома?

Открытие эффекта квантования холловского сопротивления вызвало огромный интерес у физиков. Интерес этот понятен — сейчас известно не так много способов измерения фундаментальных физических постоянных, и появление новых возможностей в этом направлении всегда в конечном итоге приводит к уточнению значений этих постоянных, что крайне важно для всех направлений физики. Однако не меньший интерес к этому открытию проявили и специалисты в области измерений — метрологии. Интерес метрологов вызван тем, что они разглядели в эффекте квантования холловского сопротивления способ поддержания точных знаний электрического сопротивления. Вы знаете, конечно, что у единиц всех основных физических величин есть эталоны. Такой эталон есть и у единицы электрического сопротивления «Ом». Эталон представляет собой набор проволочных сопротивлений, и измеряя любое сопротивление любым прибором, мы, в конечном итоге, сравниваем его с сопротивлением этой группы катушек. Но у такого эталона есть недостатки. Во-первых, его сопротивление, пусть незначительно, но все же изменяется со временем, что очень существенно сказывается на той точности, с которой можно верить измерениям сопротивления. Во-вторых, такой эталон может быть только один — если мы заведем два одинаковых эталона, а их значения через некоторое время перестанут совпадать, то нам все равно придется выбрать, кто из них «главный». В-третьих, эталон может пропасть — скажем, он может погибнуть от стихийного бедствия, и это сразу нарушит стройность всей системы измерения электрического сопротивления. Если же создать эталон 1 Ом на основе эффекта квантования холловского сопротивления, то все перечисленные недостатки исчезнут. Поэтому во многих странах сейчас ведутся работы по созданию эталона, основанного на квантованном эффекте Холла. Уже достигнуто соглашение, что переход на такие эталоны начнется, как только в лабораториях по крайней мере трех стран удастся воспроизвести квантованные значения R_X, отличающиеся между собой не более, чем на $2 \cdot 10^{-7}$ Ом. По-видимому, это произойдет скоро.

„Квант" улыбается

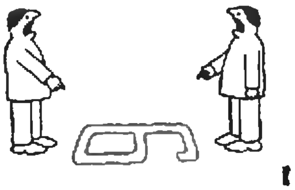
Новости археологии

По последним данным археологических раскопок, понятие дроби как части целого зародилось еще в эпоху первобытно-общинного строя, когда съесть мамонта целиком было не по силам ни одному дикарю. Впоследствии же с исчезновением мамонтов и в связи с переходом на более мелкую дичь надобность в дробях понемногу отпала, и вскоре они вообще вышли из употребления.



Простота математики

Джон фон Нейман, один из крупнейших математиков нашего столетия, выступая в конце 40-х годов с докладом о будущем электронно-вычислительных машин, сказал, что математика — только очень малая и очень простая часть жизни. Когда в ответ на это аудитория зашумела, фон Нейман добавил: «Если люди не верят в то, что математика проста, то только потому, что они не осознают, как сложна жизнь».



Материалы представили
В. А. Пилюш, Б. Е. Явелов

ПУТЕШЕСТВИЕ ПО МИКРОКОМПЬЮТЕРУ

Кандидат технических наук *Д. Г. КРУТОГИН*

Год назад мы рассматривали «процесс строительства» большой интегральной схемы (БИС), сравнивая его со строительством города («Квант», 1986, № 2). Тогда мы интересовались в основном технологией строительного дела, а теперь приглашаем вас познакомиться с самим городом, его структурой, пройтись по отдельным районам и кварталам, осмотреть архитектурные достопримечательности...

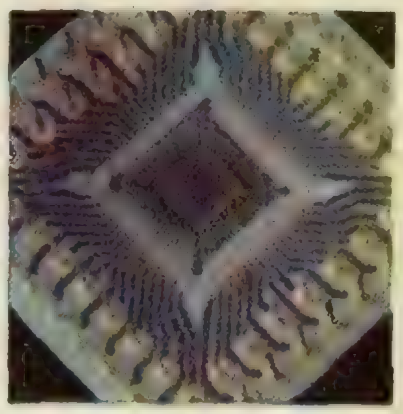
Размышления у панорамы

Для знакомства выберем сверхбольшую интегральную схему (СБИС) — например, микросхему однокристальной микроЭВМ. Такая схема содержит 10^5—10^6 отдельных транзисторов. Что умеет делать микроЭВМ, или, как ее часто называют, микрокомпьютер (МК)? Во-первых, считать, т. е. выполнять математические действия с довольно высокой скоростью — до миллиона простых операций в секунду. Простыми мы будем называть те немногие операции, которые ЭВМ умеет выполнять «от рождения»; в основном это сложение (вычитание) и сравнение. Для выполнения сложных действий нужно сначала научить машину «преобразовывать» эти действия в последовательность простых операций. Во-вторых, выполнять логические операции с такой же быстротой. Не вдаваясь в тонкости логических операций, рассмотрим подходящий пример: требуется составить алфавитный список из заданного множества в один миллион фамилий. Это, в общем, простая, не требующая вычислений работа — нужно сравнить фамилии по первой, затем второй, затем третьей и т. д. буквам, и по результатам сравнений заносить фамилии в список под соответствующими номерами. Для человека эта работа и утомительна, и скучна, и весьма продолжительна. ЭВМ, в том числе микроЭВМ, выполнит эту работу довольно быстро. В-третьих, микрокомпьютер может управлять машинами, производственными агрегатами, процессами. Эта его способность складывается из первых двух, ибо очень упрощенно процесс управления можно представить как расчеты нескольких допустимых вариантов действия, сравнение результатов и выбор оптимального решения.

Понятно, что самая прекрасная СБИС «мертва», бесполезна, если лишена системы питания, средств ввода информации (например, клавиатуры) и отображения результатов (например, экрана или печатающего устройства). Управляющему компьютеру также нужна система связи с исполнительными механизмами. (Так, мозг человека, наш многоцелевой персональный компьютер, бессилен без двусторонней связи с глазами, ушами, ртом, руками.)

Итак, констатируем: СБИС — это мозг компьютера, сложнейшая его часть. Именно СБИС микрокомпьютера будет целью нашего путешествия, и, несколько упрощая, именно СБИС мы будем называть городом МК.

Посмотрите на фотографию, помещенную на этой странице (она сделана с увеличением 1,5): из корпуса СБИС выходит несколько десятков выводов. Это дороги, связывающие город МК с «периферией» — так несколько пренебрежительно называют клавиатуру, дисплей, цифропечатающее устройство и т. п., и дороги, по которым в город поступает питание — постоянное напряжение (чаще всего это 5 В). В случае работы с задачами большой сложности или большого объема (например, тот же список из миллиона фамилий) на помощь привлекается архивная, или внешняя, память; для связи с внешними запоминающими устройствами (ВЗУ) тоже предусмотрены выводы-дороги.



Напомним, что сверхбольшая интегральная схема — очень маленькая. Кристалл кремния — основание СБИС — имеет размер около 5×5 мм, а сама СБИС в корпусе и с выводами — это коробочка не больше 40×25 мм, и весит она 15—20 г. Поэтому для удобства путешествия по городу МК предлагаем вам мысленно уменьшиться в миллион раз. (В сказочной литературе такой прием не раз использовался, хотя коэффициент подобия был поменьше.) При таком уменьшении, когда наш рост стал 1,5—1,8 мкм, экскурсия по СБИС МК — это то же, что в нашем обыкновенном масштабе знакомство с городом площадью около 30 квадратных километров.

Обычно, если есть такая возможность, города осматривают с возвышенной точки (с Останкинской телебашни, с Исаакиевского собора и т. п.). Мы же с вами остановимся на краю корпуса СБИС на высоте около 1000 метров (с учетом масштаба!) над городом МК и отсюда начнем.

Внизу, в долине — наш город. Он построен на берегу моря Физики Твердого Тела, у залива Полупроводников, и, без сомнения, это один из крупнейших населенных пунктов на побережье*). Своеобразие нашего города, так же, например, как города Сочи или Юрмала, в том, что он построен для приема и обслуживания большого количества туристов. Постоянное население города только этим и занимается. Как это часто бывает, в таком городе постоянных жителей намного меньше, чем гостей. Город МК — новостройка, подобные крупные схемы-ансамбли созданы в течение последних пяти лет. Впервые столь крупный город построен на одной площадке. Ранее задачи туристского обслуживания решались целым комплексом небольших поселков, расположенных иногда в сотнях километров друг от друга (не забудьте умножить на 10^{-6}!). Представляете, сколько было переездов?

Слово о словах

Теперь следует пояснить, о каких туристах идет речь. Туристами в МК являются отрезки (элементы) информации, для которых хорошо подходит название «машинное слово». Это никак не те стихийные толпы отдыхающих-«дикарей», которые летом рвутся наудачу в приморские города-курорты. Наши туристы — частицы организованного информационного потока, называемого программой работы ЭВМ. Потеря любого слова угрожает разрушить смысл всей программы, но и лишних слов быть не должно. (В этом отношении хорошая программа подобна хорошим стихам.)

Ну, а постоянные жители города, кто они? Это тоже машинные слова, «прописанные», или записанные, в самом МК. Они необходимы для того, чтобы упростить обращение с программами.

Слова машинные, как и слова обычные, несут некоторую конкретную информацию. Для себя мы можем разделить машинные слова на две группы: слова-команды (что сделать) и слова-данные (это числа или логические величины, то, чем распоряжаются, чем оперируют команды; их еще называют операндами, по созвучию с командами). Но это — для себя, а для электронных схем МК любое машинное слово — всего лишь последовательность единиц и нулей, а точнее, высоких (обычно более 2,5 В) и низких (менее 0,5 В) напряжений на входах транзисторных элементов. Таким образом, машинные слова — это серии электрических импульсов, пробегающих по дорогам и кварталам МК.

Задача каждого отдельного импульса — включить тот или иной транзистор в логическом или запоминающем элементе ЭВМ. В свою очередь, каждое такое включение приводит к перемещению по кристаллу МК зарядовых пакетов — электронов и дырок. Так информация в МК обретает физически зримую форму пакетов заряженных частиц, которые целенаправленно продвигаются по микросхеме, пока, наконец, появление импульсов напряжения на выходных контактах МК не известит о завершении процесса переработки информации и получении результата.

И еще немного о словах. Мы обычно почти не затрудняемся в выборе слов для выражения своих мыслей. У всех ЭВМ, и в том числе у нашего МК, есть жесткий порядок — можно пользоваться словами одной определенной длины: например, из 8 или 16 букв притом буквы — это 0 или 1 (такие буквы называют битами). Для сравнения отметим, что большие ЭВМ «разговаривают» словами в 64 и 128 бит, а лучшие микрокомпьютеры пока лишь 32-битовые. Конечно, словарь коротких слов (8- или 16-битовых) менее выразителен, зато намного компактнее. Для «карманной» ЭВМ нужен и карманный словарь!

В общении человека с машиной есть неизбежные трудности. Составление программ на машинном языке — дело трудоемкое, оно требует определенного навыка. Нам гораздо удобнее общаться с машиной на языке, логически близком к человеческому (скажем, русскому или английскому). Таких языков-посредников для задач разного назначения создано несколько десятков: это фортран, алгол, кобол и т. д. Ну, а там, где используются несколько разных языков, не обойтись без переводчика... Но разговор о переводчиках и о бюро переводов, которое есть в нашем городе, мы продолжим в следующем номере.

---

*) По берегам залива Полупроводников вы прошли, если читали книгу «Знакомство с полупроводниками» М. Е. Левинштейна и Г. С. Симина, выпущенную в Библиотечке «Квант» (вып. 33, с. 238).

Задачник „Кванта"

Задачи

M1026—M1030, Ф1038—Ф1042

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 апреля 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2-87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1026, M1027» или «Ф1038». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию, имя и домашний адрес просим писать печатными буквами.

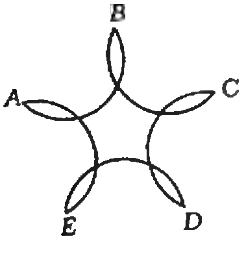


Рис. 1.

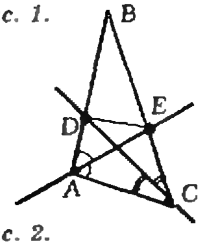


Рис. 2.

M1026. а) Пять равных дуг AB, BC, CD, DE, EA расположены так, что каждая делится соседними на три равные части (рис. 1). Найдите величину каждой дуги (в градусах).

б) Тот же вопрос для «розетки» из m равных дуг, каждая из которых делится соседними на три равные части.

А. В. Швецов

M1027. Докажите, что число $1985!!+1986!!$ делится на 1987. (Через $n!!$ обозначается произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих ту же четность, т. е. $n!!=n(n-2)(n-4)\ldots$)

В. В. Произволов

M1028. а) На плоскости заданы две пересекающиеся прямые, и на них отмечено по одной точке (D и E). Постройте треугольник ABC, у которого биссектрисы CD и AE лежат на данных прямых, а их основания — данные точки D и E (рис. 2).

б)* Докажите, что если при этом $\angle CDE=30^\circ$, то один из углов треугольника ABC равен 60° или 120°.

М. Волчкевич, ученик 10 кл. (Москва)

M1029. Среди n членов арифметической прогрессии удалось выбрать k членов, образующих возрастающую геометрическую прогрессию. Докажите, что $n\geqslant 2^{k-1}$.

В. Ф. Лев

M1030. Для выпуклого многогранника M обозначим через $S(M)$ сумму площадей его граней, через $P(M)$ — сумму произведений длин всех его ребер на соответствующие им внешние углы многогранника (внешний угол при данном ребре — это угол между перпендикулярами к граням, примыкающим к ребру, и направленными во внешнюю область многогранника; он равен 180° минус величина соответствующего двугранного угла). Докажите, что если многогранник M_1 лежит внутри многогранника M_2, то

а) $S(M_1)\leqslant S(M_2)$;

б) $P(M_1)\leqslant P(M_2)$.

А. Б. Гончаров

Ф1038. Три одинаковые нерастяжимые нити прикреплены на одинаковых расстояниях друг от друга к кольцу радиусом r_0 и аналогичным образом — к кольцу радиусом $2r_0$. Нити пропущены через третье кольцо радиусом r_0 (рис. 3). Кольцо *1* закреплено в горизонтальной плоскости, и вся система находится в равновесии. Найти расстояние между центрами колец *2* и *3*. Все кольца сделаны из одной и той же проволоки. Трением пренебречь.

В. П. Бородин

Ф1039. К бруску, лежащему на наклонной плоскости, прикреплена нить, перекинутая через проволочную петлю; на другом конце нити висит грузик (рис. 4). При этом брусок неподвижен. Когда грузик качнули, брусок начал двигаться. Объясните явление.

Г. В. Меледин

Ф1040. Три одинаковые проводящие пластины площадью S каждая расположены параллельно друг другу на расстояниях d_1 и d_2 (рис. 5). Вначале на пластине *1* находился заряд Q, а пластины *2* и *3* были незаряжены. Затем пластины *2* и *3* присоединяют к батарее с напряжением U, пластины *1* и *3* соединяют проводником. Найти установившиеся заряды на пластинах.

В. Н. Иванченко

Ф1041. Проводящий стержень длиной l и массой m подвешен на двух невесомых жестких стержнях длиной h к горизонтальной оси (рис. 6). Эта рамка находится в однородном вертикальном магнитном поле, индукция которого B. Через рамку пропускают импульс тока I_0 малой длительности τ. Определить максимальное отклонение рамки от вертикальной плоскости. Смещение рамки за время τ очень мало.

В. В. Пай

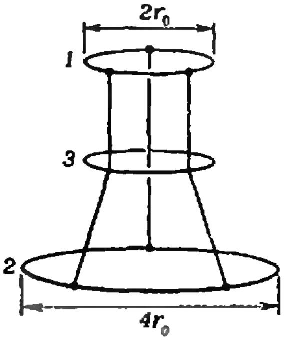


Рис. 3.

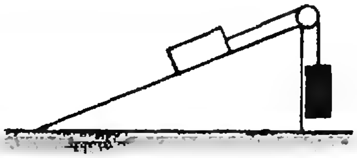


Рис. 4.

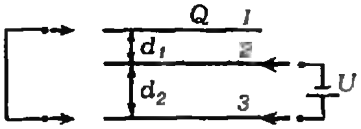


Рис. 5.

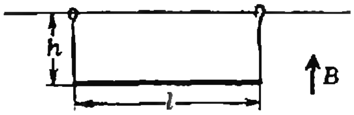


Рис. 6.

Ф1042. Оцените, на каком расстоянии железнодорожные рельсы кажутся слившимися. Предполагается, что вы, хорошо представляя физику наблюдаемого явления, можете сами задать числовые значения необходимых величин.

П. И. Зубков

Problems

M1026—M1030; P1038—P1042

M1026. a) Five equal arcs AB, BC, CD, CE, EA are chosen so that each is divided by its neighbours into three equal parts (see figure рис. 1). Find the magnitudes of all the arcs (in degrees).
b) Same question for a «flower» made up of m equal arcs, each of which is also divided into three equal parts by its neighbours.

A. V. Shvetsov

M1027. Prove that the number 1985!!+1986!! is divisible by 1987. (Here $n!!$ denotes the product of all natural numbers no greater than n and of the same parity, i. e. $n!!=n(n-2)(n-4)\ldots$)

V. V. Proizvolov

M1028. a) The points D and E are chosen on two intersecting lines in the plane. Construct the triangle ABC whose bissectors CD and AE lie on the given lines, their intersection points with the opposite sides being D and E (see figure рис. 2).
b)* Prove that if, under these conditions, $\angle CDE=30°$, then one of the angles of triangle ABC equals 60° or 120°.

M. Volchkevich, 10th form student

M1029. Among n terms of an arithmetical progression we succeeded in choosing k terms constituting an increasing geometric progression. Prove that $n\geqslant 2^{k-1}$.

V. F. Lev

M1030. For any convex polyhedron M denote by $S(M)$ the total area of its faces and by $P(M)$ the sum of the products of lengths of all its edges by the corresponding exterior angles of the polyhedron (the exterior angle at the given edge is the angle between the perpendiculars to the faces intersecting at that edge and directed outward). Prove that if the convex polyhedron M_1 is contained in the polyhedron M_2, then
a) $S(M_1)\leqslant S(M_2)$; b) $P(M_1)\leqslant P(M_2)$.

A. B. Goncharov

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than April 15th 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original prob-

lem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

P1038. Three identical inelastic strings are fixed at equal distances from each other on a ring of radius r_0 and, in a similar way, on a ring of radius $2r_0$. The strings pass through a third ring of radius r_0 (see figure рис. 3). The ring 1 is fixed in the horizontal plane and the whole system is in equilibrium. Find the distance between the centres of the rings 2 and 3. All the rings are made of the same wire. Friction is negligible.

V. P. Borodin

P1039. A string passing through a wire loop is fixed to a slab placed on an inclined plane; a small weight hangs on the other end of the string (see figure рис. 4). Initially the slab is motionless. When the weight is pushed, the slab begins to move. Explain this phenomenon.

G. V. Meledin

P1040. Three identical conducting plates of area S each are placed parallel to each other at the distances d_1 and d_2 (see figure рис. 5). Initially plate 1 has the charge Q, the plates 2 and 3 are uncharged. Then the plates 2 and 3 are connected to a battery of tension U and the plates 1 and 3 are joined by a conductor. Find the established charges on the plates.

V. N. Ivanchenko

P1041. A conducting rod of length l and mass m is suspended by two weightless rigid rods of length h to a horizontal axis (see figure рис. 6). This frame is in a homogeneous vertical magnetic field of induction B. An impulse of current I_c passes through the frame during the brief time interval τ. Determine the maximal inclination of the frame away from the vertical position. The motion of the frame during the interval τ is very small.

V. V. Pay

P1042. Estimate the distance at which railroad tracks seem to come together. It is assumed that you understand the physics of the phenomenon and can choose appropriate numerical values of the magnitudes involved.

P. I. Zubkov

Решения задач

М1006—М1009; Ф1017—Ф1022

М1006. *Через две вершины треугольника проведены две прямые, разбивающие его на три треугольника и четырехугольник.*
а) Могут ли площади всех четырех частей быть равными?
б) Какие три из этих частей могут иметь равные площади? Во сколько раз отличается от них площадь четвертой части?

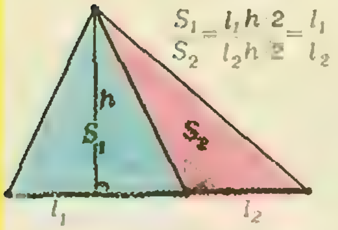
В решении много раз будет использована следующая почти очевидная

Лемма. *Отношение, в котором прямая, проведенная через вершину треугольника, делит его площадь, равно отношению, в котором она делит его основание (см. рис. 1).*

а) Ответ: не могут. Если бы даже только три треугольника разбиения были равновелики (предположение о величине площади четырехугольника нам и не нужно), то по лемме отрезки, разбивающие данный треугольник, должны были бы делить друг друга пополам (рис. 2), т. е. были бы диагоналями параллелограмма. Но это невозможно, поскольку две противоположные стороны этого «параллелограмма» лежат на пересекающихся прямых — сторонах данного треугольника.

б) Ответ: равновеликими могут быть четырехугольник и любые два треугольника разбиения; отношение площади 4-й части к площади каждой из трех равновеликих частей может быть равно либо 3, либо $\sqrt{5}-2$.

Введем обозначения, как на рисунке 3. Из решения задачи а) видно, что одна из равновеликих частей — это четырехугольник $CLPK$, другая — один из треугольников APL и BPK; будем считать, что это треугольник APL (случай треугольника BPK рассматривается точно так же). Третья часть — это треугольник BPK или APB; эти два случая надо рассмотреть отдельно.



$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{l_1h/2}{l_2h/2}=\frac{l_1}{l_2}$$

Рис. 1.

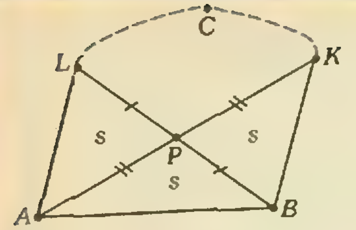


Рис. 2.

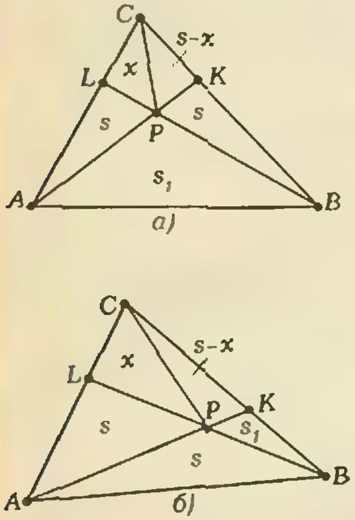


Рис. 3.

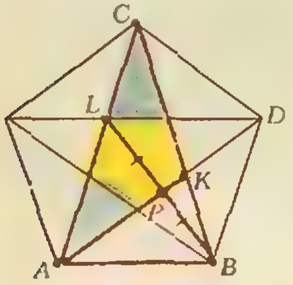


Рис. 4.

Обозначим площадь трех равновеликих частей через s ($s=S_{CLPK}=S_{APL}$), площадь 4-й части через s_1. Чтобы найти искомое отношение s_1/s, выразим двумя способами отношения, в которых точки L и K делят стороны AC и BC, через площади с помощью леммы:

$$\begin{gathered}\frac{CL}{LA}=\frac{S_{CLB}}{S_{LAB}}=\frac{S_{CLP}}{S_{LAP}},\\ \frac{CK}{KB}=\frac{S_{CKA}}{S_{KBA}}=\frac{S_{CKP}}{S_{KBP}}.\end{gathered}\tag{*}$$

а входящие сюда площади — через s, s_1 и $x=S_{CPL}$.

В первом случае (рис. 3, а) имеем:

$$\frac{2s}{s+s_1}=\frac{x}{s},\quad \frac{2s}{s+s_1}=\frac{s-x}{s}.$$

Отсюда легко найти, что $x=s/2$, $s_1/s=3$.

Во втором случае (рис. 3, *б*) *система запишется* так:

$$\frac{s+s_1}{2s}=\frac{x}{s},\quad \frac{2s}{s+s_1}=\frac{s-x}{s_1}.$$

Первое из этих уравнений дает $x=(s+s_1)/2$; подставляя это выражение во второе уравнение, получим, что отношение s_1/s удовлетворяет квадратному уравнению $(s_1/s)^2+4(s_1/s)-1=0$, т. е. $s_1/s=\sqrt{5}-2$.

Остается еще проверить, что если разделить стороны треугольника ABC *в отношениях*

$$CL:LA=CK:KB=2s:(s+s_1)=1:2$$

в 1-м случае и

$$CL:LA=BK:KC=(s+s_1):2s=(\sqrt{5}-1)/2$$

во 2-м случае, то соответствующие три части разбиения действительно будут равновелики. Пользуясь равенствами (*), это совсем легко сделать в 1-м случае и несколько сложнее во 2-м. Мы приведем для 2-го случая другое рассуждение, поясняющее, почему в нашей задаче возникло число $\alpha=(\sqrt{5}-1)/2$. (Число $\tau=\frac{1}{\alpha}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ — это знаменитое «золотое сечение».)

Заметим, что наше утверждение является, как говорят, *аффинным*, т. е. содержит только такие геометрические понятия и величины, *которые сохраняются* при параллельном проектировании: прямая, отношение длин отрезков одной прямой, равенство площадей и т. п. (Напротив, такие понятия, как величина угла, отношение длин сторон треугольника или, скажем, *биссектриса, не сохраняются* при проекции — и не входят в наше утверждение.) А поскольку любой треугольник можно с помощью некоторой параллельной проекции превратить в треугольник заданной формы (подумайте, почему!), наше утверждение достаточно проверить только для треугольников какого-то одного, наиболее удобного вида. В качестве такого «хорошего» треугольника возьмем треугольник ABC, образованный двумя диагоналями и стороной правильного пятиугольника (рис. 4). Нетрудно показать, что отношение стороны правильного пятиугольника к его диагонали равно α. Отсюда ясно, что *на рисунке 4*

$$CL:LA=BK:KC=BD:AC=\alpha;$$

и в то же время $S_{APB}=S_{APL}=S_{CKPL}$, поскольку очевидно, что $BP=PL$, а треугольник APL просто равносоставлен с четырехугольником $CKPL$.

Г. А. Гальперин,
А. П. Савин

M1007. *Докажите, что треугольники с длинами сторон a, b, c и a_1, b_1, c_1 подобны, если и только если*

$$\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}=\sqrt{(a_1+b_1+c_1)(a+b+c)}.$$

После возведения обеих частей доказываемого равенства в квадрат и несложных преобразований оно приводится к виду

$$(\sqrt{ab_1}-\sqrt{a_1b})^2+(\sqrt{ca_1}-\sqrt{c_1a})^2+(\sqrt{bc_1}-\sqrt{b_1c})^2=0,$$

и следовательно, оно равносильно равенствам $a/a_1=b/b_1=c/c_1$, т. е. подобию треугольников.

Другое доказательство можно получить, заметив, что левая часть равна скалярному произведению векторов с координатами $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ и $(\sqrt{a_1}, \sqrt{b_1}, \sqrt{c_1})$ и не может быть больше правой части, которая равна произведению длин этих векторов; равенство возможно лишь, когда угол между векторами нулевой, т. е. они пропорциональны друг другу.

По существу, мы использовали во втором рассуждении так называемое *неравенство Коши—Буняковского*:

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n<\sqrt{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)},$$

которое обращается в равенство, лишь когда наборы чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ пропорциональны (у нас $n=3$, $(x_1, x_2, x_3)=(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$, $(y_1, y_2, y_3)=(\sqrt{a_1}, \sqrt{b_1}, \sqrt{c_1})$).

В. П. Чичин, В. Н. Дубровский

M1008. *Лестница состоит из $2n+1$ ступеней. На n нижних ступенях лежит по одному камню. Двое по очереди таскают камни. Первый может переложить любой камень вверх на первую свободную ступеньку, а второй — переложить камень на одну ступеньку вниз, если она свободна. Цель первого — положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли второй ему помешать?*

Ответ: может.

Во избежание путаницы будем номера действующих лиц задачи (их «имена») писать с большой буквы. Правило действия Второго такое: он всякий раз кладет камень на ступень, освободившуюся после хода Первого (это всегда возможно, поскольку камень на следующей ступени либо лежал еще до хода Первого — и остался там после этого хода, либо оказался там в результате хода Первого). Если Второй будет следовать этому правилу, то после любого хода Первого и ответа Второго или ничего не изменится (рис. 1), или на некотором участке лестницы, все ступени которого, кроме верхней, заняты, освобождается вторая снизу ступень и ставится камень на верхнюю (рис. 2). Ясно, что при этом нижняя ступень всегда остается занятой и не может образоваться группа из двух или более идущих подряд пустых ступеней (не считая, конечно, ступеней над верхним камнем, с самого начала свободных). Следовательно, число свободных ступеней, лежащих ниже верхнего (n-го) камня, перед любым ходом Первого не превосходит $n-1$, т. е. две верхние ступени будут свободны, и Первый не сможет занять верхнюю ступень.

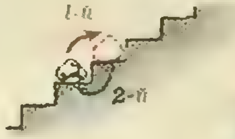


Рис. 1.

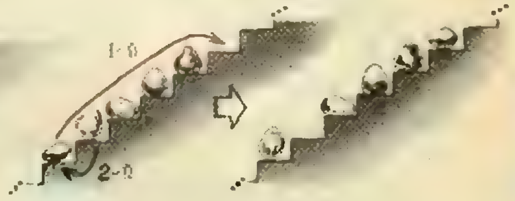


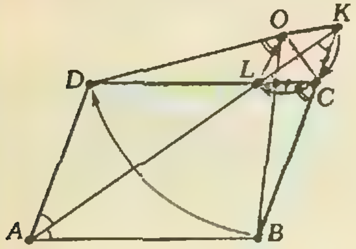
Рис. 2.

С. Л. Елисеев, Н. Н. Константинов

M1009. *Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает прямые BC и*

Обозначим центр окружности CKL через O; нам достаточно доказать, что $\angle BOD=\angle BCD$ (см. рисунок). Заметим сначала, что отрезки AB и BK, а также LC

CD в точках K и L соответственно. Докажите, что центр окружности, проведенной через точки C, K и L, лежит на окружности, проведенной через точки B, C и D.



и CK равны, поскольку в треугольнике ABK равны углы при стороне AK ($\angle BAK=\angle KAD=\angle AKB$), и прямая LC параллельна AB. Отсюда, в частности, следует равенство треугольников OKC и OCL ($OK=OC=OL$, $KC=CL$). Повернем плоскость вокруг точки O так, чтобы треугольник OKC совпал с треугольником OCL. Тогда луч KC совместится с лучом CL, поэтому угол между этими лучами, т. е. $\angle BCD$, равен углу поворота. В то же время точка B при этом повороте перейдет в D, так как $KB=AB=CD$, следовательно, угол BOD также равен углу поворота; тем самым равенство углов BOD и BCD доказано.

Рисунок на полях иллюстрирует случай, когда $AB>BC$, а угол BAD — острый, однако наше рассуждение без каких-либо изменений применимо и во всех других случаях.

И. Ф. Шарыгин

Ф1017. *Крупнейший в мире советский телескоп имеет в качестве объектива зеркало диаметром $D=6$ м. Какое время потребуется, чтобы, сравнивая полученные на этом телескопе фотоснимки, можно было заметить взаимное вращение нашей Галактики и туманности Андромеды вокруг общего центра масс? Расстояние до Андромеды $R=1{,}42\cdot10^{11}\,R_0$, где R_0 — радиус орбиты Земли. Массы Галактики и Андромеды равны, соответственно, $M_Г=2{,}5\cdot10^{11}\,M_0$, $M_A=3{,}6\cdot10^{11}\,M_0$, где M_0 — масса Солнца. Фотографирование ведется в видимом свете на длине волны $\lambda=5\cdot10^{-7}$ м.*

Минимальное угловое расстояние между двумя объектами, при котором их можно наблюдать раздельно, определяется дифракцией и равно приблизительно λ/D. Чтобы можно было заметить, что Андромеда изменила свое положение, она должна сдвинуться именно на такой угол:

$$\varphi_0\approx\frac{\lambda}{D}=\frac{5\cdot10^{-7}}{6}\text{ рад}\approx8\cdot10^{-8}\text{ рад}. \qquad (1)$$

Если период обращения Галактики и Андромеды вокруг общего центра масс равен T, то поворот на угол φ_0 происходит за время

$$\tau=\frac{T}{2\pi}\varphi_0. \qquad (2)$$

Период T можно найти из обобщенного (в школьном учебнике астрономии он называется уточненным) III закона Кеплера:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\left(\frac{M_1+m_1}{M_2+m_2}\right)=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3.$$

Записывая его для систем Земля — Солнце и Галактика — Андромеда и пренебрегая массой Земли, получаем:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\left(\frac{M_Г+M_А}{M_0}\right)=\left(\frac{R}{R_0}\right)^3, \qquad (3)$$

где $T_0=1$ год (земной).

Из уравнений (1), (2) и (3) находим:

$$\tau=\frac{\lambda}{2\pi D}T_0\left(\frac{R}{R_0}\right)^{3/2}\left(\frac{M_0}{M_Г+M_А}\right)^{1/2}\approx10^3\text{ лет}.$$

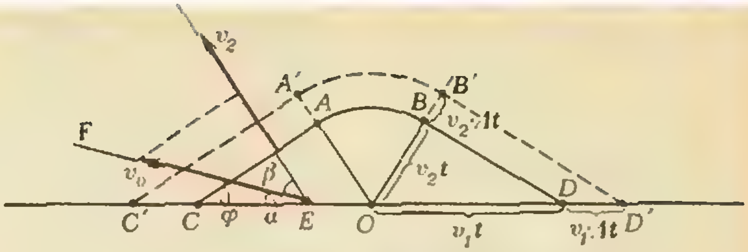
В. Е. Белонучкин

Ф1018. *Катер, привязанный у берега большого озера (береговая линия — прямая), неожиданно отвязался, и ветер погнал его с постоянной скоростью $v_0=2{,}5$ км/ч под углом $\alpha=15°$ к берегу. Сможете ли вы догнать катер, если ваша скорость*

Пусть в момент обнаружения обрыва катера вы находились на берегу в точке O (см. рисунок), а катер, оторвавшись в точке E, движется по прямой EF, составляющей с линией берега угол $\alpha=15°$, со скоростью $v_0=2{,}5$ км/ч. Чтобы ответить на вопрос задачи, построим границу области достижимости — той области, в которой спустя время t после начала вашего движения вы можете оказаться, «комбинируя» ходьбу и плавание. Эта граница (см. рисунок) представляет собой дугу AB окружности радиусом $|OA|=$

на берегу $v_1=4$ км/ч, в воде — $v_2=2$ км/ч? При какой скорости катера это вообще возможно?

Ф1019. *В большой сосуд с жидкостью, плотность которой ρ_1, опущен маленький цилиндрический сосуд с площадью основания S, в дно которого вставлена трубочка длиной l (рис. 1); стенки сосудов жестко скреплены между собой. В маленький сосуд наливают подкрашенную жидкость плотностью ρ_2 ($\rho_2>\rho_1$) до высоты H так, что уровни жидкостей в большом и малом сосудах совпадают. В некоторый момент времени отверстие в трубочке открывают. Тяжелая жидкость начинает вытекать в большой сосуд, через некоторое время легкая жидкость из большого сосуда втекает в маленький сосуд; затем процесс повторяется. Какая масса тяжелой жидкости вытечет из маленького сосуда в первый раз? Какая*



$=|OB|=v_2t$ и два отрезка касательных к этой окружности — CA и DB, причем $|OC|=|OD|=v_1t$ (подробно о построении этой границы рассказывалось в статье «Об оптимальных траекториях движения» в «Кванте» № 6 за 1982 год, с. 30). Спустя время Δt граница области достижимости займет новое положение $C'A'B'D'$, причем $|CC'|=|DD'|=v_1\cdot\Delta t$, $|AA'|=|BB'|=v_2\cdot\Delta t$. Легко понять, что если проекция скорости катера на направление OA (в этом направлении распространяется со скоростью v_2 плоский участок границы области достижимости) будет больше скорости v_2, то вы никогда не догоните катер. Минимальное значение скорости катера, при которой догнать катер уже невозможно, определяется из условия (см. рисунок)

$$v_{\min}\cos\beta=v_2, \text{ где } \beta=\varphi-\alpha.$$

Поскольку $\varphi=\arcsin\dfrac{v_2}{v_1}=\arcsin\dfrac{1}{2}=30°$, $\cos\beta=\cos 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, и

$$v_{\min}=v_2\sqrt{2}\approx 2{,}8 \text{ км/ч}.$$

При движении катера со скоростью $v_0=2{,}5$ км/ч ($v_0<v_{\min}$) проекция скорости катера на направление OA меньше v_2, поэтому, как бы долго вы ни задержались на берегу, при правильной стратегии передвижения догнать катер можно (граница области достижимости обязательно нагонит катер).

С. С. Кротов

После открытия отверстия в трубочке жидкость плотностью ρ_2 будет вытекать в большой сосуд до тех пор, пока давление в точке A (рис. 2) со стороны жидкости плотностью ρ_1 не станет равно давлению жидкости плотностью ρ_2. Из этого условия легко находится масса жидкости, которая вытечет из маленького сосуда в первый раз.

Для этого запишем условия равновесия (см. рис. 2):

$$\rho_1 g(H+l)=\rho_2 g(h+l)=\rho_2 g(H-\Delta h+l), \qquad (1)$$

где $\Delta h=(H-h)$ — понижение уровня жидкости в маленьком сосуде. Отсюда

$$h=\frac{\rho_1}{\rho_2}H-\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}l, \qquad \Delta h=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}(H+l),$$

и

$$\Delta m=\rho_2\cdot\Delta h\cdot s=(\rho_2-\rho_1)(H+l)s$$

(s — площадь основания маленького сосуда).

Для упрощения дальнейшего решения сделаем некоторые предположения.

1. Площадь сечения большого сосуда настолько велика, что если жидкость вытекает из маленького сосуда или втекает в него, то уровень жидкости в большом сосуде не меняется.

2. Диаметр трубочки и длина ее настолько малы, что объемом этой трубочки по сравнению с объемами сосудов можно пренебречь, т. е. когда жидкость из

масса тяжелой жидкости будет вытекать каждый раз в дальнейшем? Какая масса легкой жидкости будет втекать каждый раз в маленький сосуд? Считать, что жидкости не смешиваются; поверхностным натяжением пренебречь.

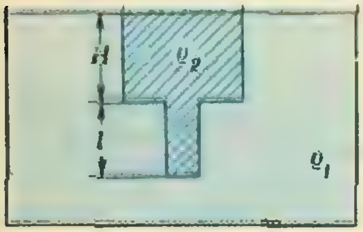


Рис. 1.

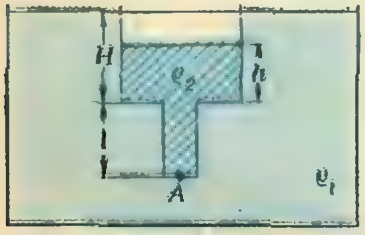


Рис. 2.

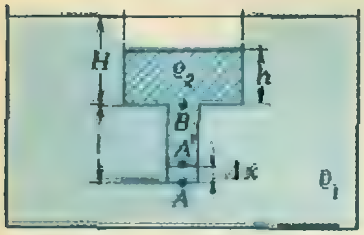


Рис. 3.

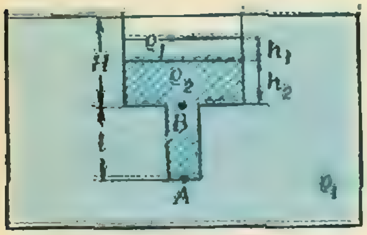


Рис. 4.

трубочки вытекает, уровень жидкости в маленьком сосуде не меняется.

На первый взгляд может показаться, что, после того как давления в точке A выравняются, *процесс должен остановиться*; но это не так. Такое положение неустойчиво. Предположим, что жидкость плотностью ρ_1 втечет в трубочку на небольшую высоту Δx (рис. 3); тогда давление в точке A' со стороны жидкости плотностью ρ_1 будет больше, чем давление в точке A' со стороны жидкости плотностью ρ_2.

Действительно, давление в точке A' со стороны жидкости плотностью ρ_1 будет равно $p_1=\rho_1 g(H+l-\Delta x)$, а со стороны жидкости плотностью ρ_2 — $p_2=\rho_2 g(h+l-\Delta x)$; разность этих давлений

$$\Delta p=p_1-p_2=(\rho_2-\rho_1)g\cdot\Delta x$$

будет двигать жидкость вверх, поскольку $\rho_1 g(H+l)=\rho_2 g(h+l)$ — условие равновесия (см. (1)). Жидкость плотностью ρ_1 будет втекать в маленький сосуд до тех пор, пока давления сверху и снизу в точке B (см. рис. 3) не выравняются. Жидкость плотностью ρ_1 будет всплывать над жидкостью плотностью ρ_2 (по условию задачи они не смешиваются).

Запишем условие равенства давлений в точке B:

$$\rho_1 gH=\rho_1 g\Delta h_1+\rho_2 gh, \tag{2}$$

где Δh_1 — высота жидкости плотностью ρ_1, которая *втекла в маленький сосуд*.

Из (1) и (2) находим: $\Delta h_1=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}l$, и

$$\Delta m_1=(\rho_2-\rho_1)ls.$$

Теперь, когда стала ясна причина перетеканий жидкостей из одного сосуда в другой, напишем уравнения равновесия в более общем случае. *Предположим*, что равновесие в точке B наступает в момент, когда

$$\rho_1 gH=\rho_1 gh_1+\rho_2 gh_2, \tag{3}$$

где h_1 — высота жидкости плотностью ρ_1 и h_2 — высота жидкости плотностью ρ_2 в маленьком сосуде (рис. 4). Мы уже знаем, что положение равновесия неустойчиво, и жидкость будет вытекать из маленького сосуда, пока давления в точке A не выравняются, а это значит, что

$$\rho_1 g(H+l)=\rho_1 gh_1+\rho_2 g(h_2'+l). \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем: $\Delta h_2=h_2-h_2'=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}l$, и

$$\Delta m_2=(\rho_2-\rho_1)ls.$$

Когда давления в точке A равны, положение неустойчиво, и жидкость плотностью ρ_1 будет втекать в маленький сосуд до тех пор, пока давления в точке B не выравняются, а это значит, что

$$\rho_1 gH=\rho_1 gh_1'+\rho_2 gh_2'. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем: $\Delta h_3=h_1'-h_1=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}l$, и

$$\Delta m_3=(\rho_2-\rho_1)ls=\Delta m_2.$$

Значит, каждый раз из маленького сосуда будут вытекать и *втекать одинаковые массы жидкости*

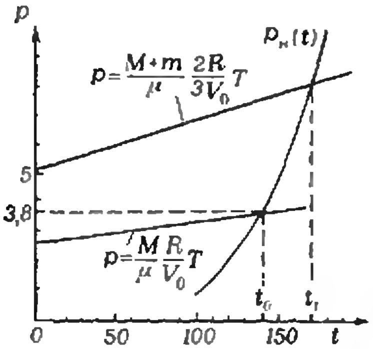
$$\Delta m=(\rho_2-\rho_1)ls.$$

Заметим, что объемы жидкостей, которые втекают и вытекают из сосуда, будут разные; почему это так, подумайте самостоятельно.

В. Е. Скороваров

Ф1020. *Подвижный поршень делит цилиндр на две одинаковые части объемом $V_0=10^{-3}$ м^3. В одной части находится сухой воздух, в другой — водяной пар и $m=4$ г воды. При медленном нагревании цилиндра поршень приходит в движение. После смещения поршня на 1/4 длины цилиндра движение прекратилось. Какая масса водяных паров находилась в сосуде до нагревания? Какова масса воздуха, находящегося в сосуде, и его начальная температура? При какой температуре поршень перестал двигаться? Зависимость давления насыщенных паров воды от температуры приведена в таблице.*

t, °C	$p_н \cdot 10^{-5}$, Па
100	1
120	2
133	3
152	5
180	10



Ф1021. *В цепи, показанной на рисунке, $R=100$ Ом, $C=10$ мкФ, $U_0=10$ В, внутреннее сопротивление батареи и сопротивление амперметра пренебрежимо малы. Ключ K периодически замыкают на время $\tau_1=1\cdot10^{-3}$ м и размыкают на время $\tau_2=20\cdot10^{-3}$ с. При таком режиме переключений стрелка амперметра практически не дрожит. Какой ток показывает амперметр?*

Движение поршня прекратится, когда вся вода испарится; при этом слева и справа от поршня будут газы (воздух и водяной пар), состояния которых описываются уравнением Менделеева — Клапейрона. Легко понять, что до этого при движении поршня уменьшался объем воздуха от V_0 до $V_0/2$, а водяной пар все время оставался насыщенным.

Пусть начальные температура и давление T_0 и p_0, конечные — T_1 и p_1, и масса водяного пара до нагревания M. Тогда мы можем записать следующие уравнения: для воздуха —

$$\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{p_1V_0}{2T_1}\,; \qquad (1)$$

для пара в начальный момент —

$$p_0V_0=\frac{M}{\mu_п}RT_0,\quad p_0=p_н(t_0), \qquad (2)$$

в конце процесса —

$$p_1\frac{3}{2}V_0=\frac{M+m}{\mu_п}RT_1,\ p_1=p_н(t_1), \qquad (3)$$

где $\mu_п$ — молярная масса водяного пара. Решая совместно уравнения (1) — (3), находим массу водяного пара до нагревания:

$$M=m/2=2\text{ г}.$$

Пользуясь приведенной в условии таблицей, построим график зависимости $p_н(t)$ для водяного пара (см. рисунок). Тогда температура T_0 определяется из условия пересечения этого графика с прямой $p=\frac{M}{\mu_п}\frac{R}{V_0}T$, а T_1 — с прямой $p=\frac{M+m}{\mu_п}\frac{2R}{3V_0}$. Используя этот графический метод решения, находим:

$$t_0=140\ °\text{C},\ t_1=170\ °\text{C},$$
$$p_0\approx3{,}8\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Зная температуру $T_0=413$ К и величину p_0, из уравнения Менделеева — Клапейрона для воздуха ($\mu_в=29$ г/моль) находим массу воздуха M_0:

$$M_0=\frac{p_0V_0\mu_в}{RT_0}\approx3{,}2\text{ г}.$$

А. И. Буздин

При замыкании ключа конденсаторы почти мгновенно (сопротивление амперметра и внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо малы) заряжаются до напряжения $U_з=\frac{U_0}{2}$, а при размыкании ключа практически полностью разряжаются. Поясним это.

Разряжается каждый конденсатор через резистор R. Ток разряда в первый момент —

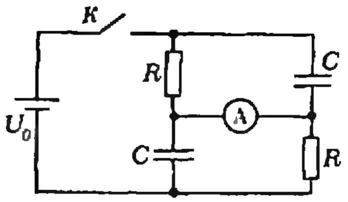
$$I_0=\frac{U_з}{R}=\frac{U_0}{2R}\,.$$

Если бы этот ток не изменялся, то конденсатор полностью разрядился бы за время

$$\tau=\frac{q}{I_0}=\frac{CU_з}{I_0}=RC.$$

На самом деле ток уменьшается по мере разряда конденсатора, и конденсатор разряжается все медлен-

Задачник „Кванта"



нее; формально говоря, он полностью не разрядится никогда. Нас же интересует не абсолютно полный его разряд, а такой, при котором просто $U \ll U_з$; для этого достаточно потребовать, чтобы $T_{разр} \gg \tau$. В нашем случае $T_{разр} = \tau_2 = 20 \cdot 10^{-3}$ с $\gg \tau = 1 \cdot 10^{-3}$ с.

Рассчитаем заряд, протекший через амперметр при замыкании ключа:

$$q_1 = \frac{U_0}{2R}\tau_1 - C\frac{U_0}{2}$$

(напряжение на резисторах равно $\frac{U_0}{2}$, ток резисторов протекает через амперметр).

При размыкании оба конденсатора разряжаются через амперметр:

$$q_2 = 2\frac{CU_0}{2}.$$

Средний ток

$$I_{ср} = \frac{q_1+q_2}{\tau_1+\tau_2} = \frac{-C\frac{U_0}{2} + \frac{U_0}{2R}\tau_1 + CU_0}{\tau_1+\tau_2} =$$

$$= \frac{U_0}{2R}\,\frac{\tau_1+RC}{\tau_1+\tau_2} \approx 4{,}8 \cdot 10^{-3}\text{ А}.$$

А. Р. Зильберман

■

Ф1022. *«Черный ящик» содержит катушку, резистор и конденсатор и имеет три вывода. При его исследовании были получены следующие результаты.*

В схеме, показанной на рисунке 1, амперметр показал $I_1 = 0{,}1$ А при частоте генератора $\nu_1 = 1000$ Гц; ток через амперметр отставал по фазе от входного напряжения на $\Delta\varphi_1 = \pi/6$. Когда частоту генератора уменьшили в 100 раз, ток возрос менее чем в 2 раза. Частоту генератора вернули к прежнему значению и вместо амперметра в цепь включили вольтметр (рис. 2). Вольтметр

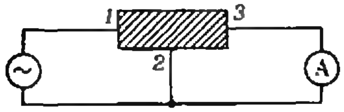


Рис. 1.

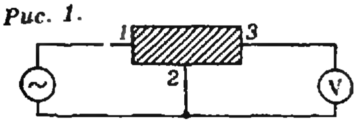


Рис. 2.

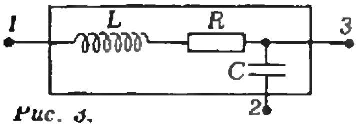


Рис. 3.

Возможных схем (из упомянутых в условии задачи трех элементов) довольно много — 24. Поэтому нужно вначале их нарисовать и решить — какие из них в принципе могут удовлетворять поставленным условиям. Чтобы не пропустить какой-либо схемы, нужно их разумно классифицировать — например: нарисуем вначале все схемы, в которых к точке 2 («общей») присоединен только резистор, потом — только конденсатор, потом — только катушка. Таких схем всего 12. Затем нарисуем схемы, где к этому выводу подключены ровно два элемента — этих схем 6. Остались еще схемы: ни один из элементов не подключен к общему проводу — их 5, и все три элемента подключены к общему проводу — такая схема одна. (Мы тут не рассматриваем схем, в которых точки *1* или *3* оказываются не подключенными,— понятно почему.)

Довольно простой анализ показывает, что условиям задачи может удовлетворять только схема, приведенная на рисунке 3. В схеме с амперметром, включенным параллельно конденсатору (см. рис. 1), можно «выбросить» конденсатор — амперметр идеальный, значит, ток через конденсатор вообще не идет. На рисунке 4 приведена такая «упрощенная» схема (рис. 4, *а*) и векторная диаграмма напряжений (рис. 4, *б*). Из диаграммы имеем:

$$\frac{X_L}{R} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$X_L = \frac{1}{\sqrt{3}}R \text{ и}$$

$$I_1\sqrt{R^2+X_L^2} = I_1\frac{2R}{\sqrt{3}} = U_0 \Rightarrow I_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{U_0}{R}.$$

На рисунке 5 приведена схема «черного ящика» с подключенным вольтметром (рис. 5, *а*) и диаграмма напряжений (рис. 5, *б*):

показал $U_1=20$ В, а сдвиг фаз между напряжением на вольтметре ($U_в$) и входным напряжением ($U_{вх}$) опять составил $\Delta\varphi_1=\pi/6$. Найдите по этим данным параметры элементов «черного ящика». Во сколько раз нужно изменить частоту генератора, чтобы в схеме с вольтметром (см. рис. 2) сдвиг фаз между $U_в$ и $U_{вх}$ составил $\Delta\varphi_2=\pi/2$? Измерительные приборы считать идеальными. Внутреннее сопротивление генератора пренебрежимо мало.

$$\frac{X_C-X_L}{R}=\sqrt{3}\ \Rightarrow\ X_C=R\sqrt{3}+X_L=\frac{4}{\sqrt{3}}R,\ \frac{X_L}{X_C}=\frac{1}{4};$$

$$U_C-U_L=\frac{3}{4}U_в=U_{вх}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}U_{вх},$$

откуда

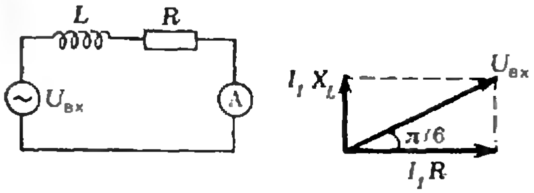
$$\frac{U_в}{I_1}=\frac{2U_{вх}}{\sqrt{3}}\ \frac{2R}{U_{вх}\sqrt{3}}=\frac{4}{3}R\ \Rightarrow\ R=\frac{3}{4}\ \frac{U_в}{I_1}=150\ \text{Ом}.$$

Следовательно,

$$L=\frac{X_L}{2\pi\nu_1}=\frac{R}{2\pi\nu_1\sqrt{3}}\approx 14\cdot 10^{-3}\ \text{Гн},$$

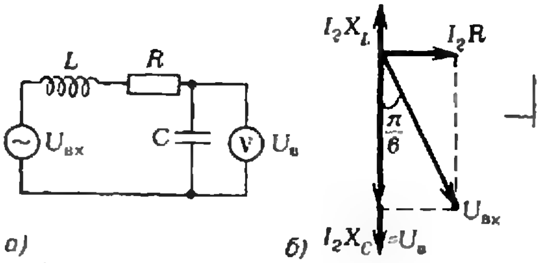
$$C=\frac{1}{2\pi\nu_1 X_C}=\frac{\sqrt{3}}{2\pi\nu_1\cdot 4R}\approx 0{,}46\ \text{мкФ}.$$

Сдвиг фаз между $U_в$ и $U_{вх}$ будет равен $\Delta\varphi_2=\pi/2$ при частоте генератора



а) б)

Рис. 4.



а) б)

Рис. 5.

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi\nu_1\sqrt{3}}{R}\ \frac{2\pi\nu_1\cdot 4R}{\sqrt{3}}}=2\nu_1,$$

так что $\nu_1:\nu=0{,}5$.

А. Р. Зильберман

Трехзначные числа и орграфы

Эта заметка посвящена решению задачи М1002 из Задачника «Кванта». Напомним ее условие:

М1002. *а)* Рассеянный математик, забыв трехзначный код своего подъезда, нажимает кнопки (с цифрами 0, 1, ..., 9) по одной в секунду. Дверь откроется, если три цифры кода в нужном порядке будут набраны подряд (то, что до этого были набраны лишние цифры, не мешает). Математик уверен, что даже в случае «крайнего невезения» (если нужная комбинация встретится последней) он сможет войти в подъезд не позже, чем через 16 мин 42 с (1002 с). Прав ли он? Как он должен действовать, чтобы попасть домой за наименьшее время?*

Ответьте на последний вопрос, если

б) исправны только кнопки с цифрами 1, 2, 3 (другие цифры в код не входят),

в) исправны все кнопки, но математик помнит, что все три цифры кода различны.*

Комментарий к условию задачи

В каждой из трех задач (а, б и в) нужно ответить на два вопроса:

1) за какое наименьшее время $t_{\min}$ можно заведомо — даже в случае «крайнего невезения» — отыскать забытый код?

2) как нужно действовать, чтобы попасть домой за наименьшее время?

В этой заметке мы полностью разберемся с первым вопросом. Второй же вопрос, как мы увидим, нуждается в уточнении; мы приведем некоторый рецепт действий для рассеянного математика и поясним, что в нем надо улучшить.

Идея решения

Различных трехзначных кодов — тысяча; если набирать их один за другим: 001, 002, 003, ..., 998, 999, 000, то, конечно, рано или поздно наткнешься на забытый код. Но на это может уйти 3000 с (50 мин) — почти втрое больше, чем запланированные 1002 с!

Как же уложиться в 1002 с? Да и возможно ли это?

Посмотрите: если нажать подряд кнопки с цифрами от 1 до 9, то за 9 с будут проверены не три кода (123, 456, 789), а семь: 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789. Выписанные коды образуют цепочку: *первые две цифры каждого следующего совпадают с последними двумя цифрами предыдущего.*

Чтобы уложиться в 1002 с, нужно вытянуть в такую же цепочку *все трехзначные коды* — тогда мы начнем набирать первый код в 1-ю секунду, второй — во 2-ю, тысячный — в 1000-ю.

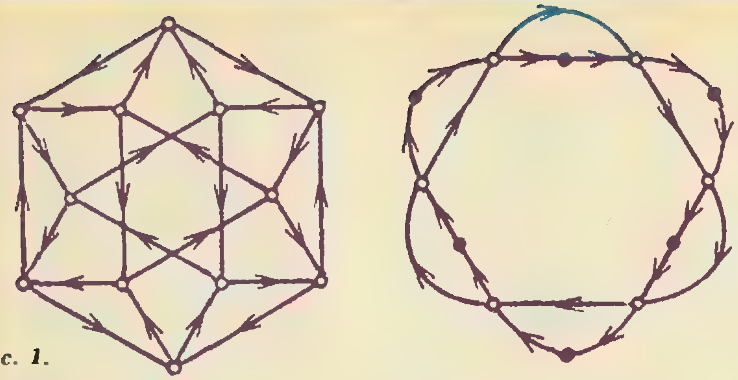


Рис. 1.

Отсюда, кстати, следует, что в случае «крайнего невезения» *меньше, чем в 1002 с,* не уложиться: если нужная комбинация из трех цифр встретится последней, то кнопки с этими тремя цифрами будут нажаты в 1000-ю, 1001-ю и 1002-ю секунды.

Цель ясна: упорядочить все трехзначные коды так, чтобы каждый следующий начинался с двух последних цифр предыдущего, но достижима ли она?

Вот близкая ситуация, где достичь ее *не удается.*

Пусть известно, что цифры трехзначного кода различны и что это — цифры 1, 2 и 3. Иными словами, нужно проверить всего 6 кодов: 123, 132, 213, 231, 312 и 321. Если удастся *вытянуть их в цепочку,* то подбор кода займет 8с. Но вытянуть их в одну цепочку нельзя! Они образуют две цепочки (какие?), так что на подбор кода уйдет не 8, а 10с (проверьте!).

Разобраться с возникшим вопросом и организовать последовательную проверку кодов нам поможет специально подобранный *ориентированный граф* (сокращенно — *орграф*). Так называется конечное *множество точек* (именуемых *вершинами* орграфа), если некоторые из них соединены стрелками (*дугами,* на которых указано направление); в частности, не исключаются стрелки-*петли,* соединяющие вершину саму с собой.

Орграф T_{10}

Построим орграф, с помощью которого решается задача а). Возьмем 100 точек. Занумеруем их парами цифр: 00, 01, 02, ..., 98, 99. От точки ab к точке dc проведем стрелку, если $b=d$. Например 13→38, 45→55; в частности, любую точку с номером из двух одинаковых цифр соединим саму с собой.

Обозначим построенный орграф T_{10}.

На стрелке от ab к bc напишем трехзначный код abc: $13 \xrightarrow{138} 38$, $33 \overset{333}{\circlearrowleft}$. Любой трехзначный код будет написан ровно 1 раз: скажем, 455 будет написано на стрелке от 45 к 55. Тем самым T_{10} содержит 100 вершин и 1000 стрелок со всевозможными трехзначными номерами. При этом из каждой вершины выходит 10 стрелок и в каждую вершину входит 10 стрелок: из ab выходят стрелки $ab0$, $ab1$, ..., $ab9$, в ab входят стрелки $0ab$, $1ab$, ..., $9ab$.

Идя по стрелкам, можно попасть из любой вершины ab в любую вершину cd:

$$ab \xrightarrow{abc} bc \xrightarrow{bcd} cd.$$

Орграфы, обладающие таким свойством, будем называть *связными.*

Напомним: наша цель — вытянуть все трехзначные коды в цепочку; цель будет достигнута, если мы обойдем T_{10} по стрелкам, пройдя по каждой стрелке ровно 1 раз.

Существование такого обхода обеспечивает

Теорема об эйлеровом цикле

Назовем орграф *правильным,* если для каждой его вершины A число стрелок, выходящих из A, равно числу стрелок, входящих в A; будем обозначать это число p_A.

Примеры: в T_{10} для каждой вершины ab

$$p_{ab}=10;$$

на рисунке 1 изображены два правильных связных орграфа (*или, если хотите,* один правильный несвязный орграф), в них для некоторых вершин $p_A=2$, для других — $p_A=1$.

Теорема. В любом правильном связном орграфе *существует цикл* (замкнутый путь по стрелкам), *проходящий по каждой стрелке ровно один раз* (рис. 2).

Будем называть такие циклы *эйлеровыми.*

Доказательство теоремы об эйлеровом цикле

Возьмем любую вершину A и пойдем из нее по стрелкам произвольным образом, «сжигая за собой мосты» — стирая стрелки, *по которым* уже прошли. Поскольку стрелок конечное число, на каком-то шагу мы застрянем — придем в тупик, из которого нет выхода. Застрять в вершине $B \neq A$ мы не можем, так как из B выходит столько же стрелок, сколько входит в B. Значит, тупик — это исходная вершина A.

Итак, наш путь — цикл c, начинающийся и кончающийся в A. Так как мы сразу стирали каждую стрелку, по которой прошли, цикл c ни по какой стрелке не проходит дважды.

Если цикл c содержит все стрелки орграфа, то он — эйлеров, и теорема доказана.

Если нет, то среди вершин, через которые проходит c, найдется вершина A_1, из которой торчит нестертая стрелка s_1 (если бы такой вершины не нашлось, наш орграф оказался бы несвязным, рис. 3).

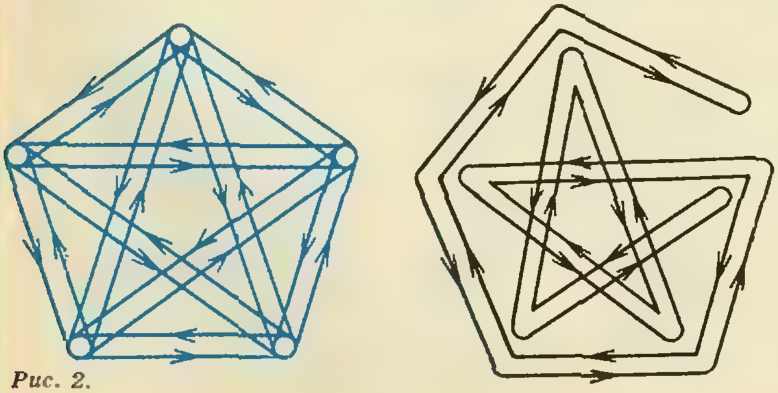


Рис. 2.

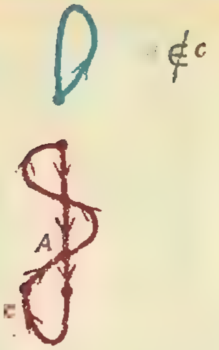


Рис. 3.

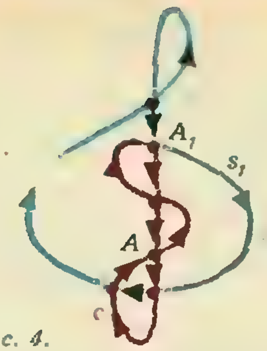


Рис. 4.

Выйдем из A_1 по стрелке s_1 и пойдем по еще не стертым стрелкам, сразу — как и раньше — стирая их за собой. Дойдя до нового тупика (разумеется, это — вершина A_1), получим новый цикл c_1 с началом и концом A_1.

«Срастим» c и c_1 в один цикл C (рис. 4), для этого прежде, чем проходить часть A_1A цикла c, пройдем по циклу c_1, а потом уже пройдем путь A_1A.

Если C содержит все стрелки орграфа, то он эйлеров, и теорема доказана. Если нет, то среди вершин, по которым проходит C, найдется вершина A_2, из которой торчит стрелка s_2, и т. д.

Последовательно наращивая наш цикл, мы на каком-то шагу исчерпаем все стрелки. Теорема доказана.

Знатоки легко обнаружат, что приведенное доказательство можно сделать более точным и коротким, если использовать метод математической индукции. А вот элегантное доказательство, по существу совпадающее с приведенным: среди циклов, не проходящих ни по какой стрелке дважды, возьмем самый длинный.

Мы предпочли приведенное доказательство потому, что оно содержит рецепт построения эйлерова цикла.

Найдем $t_{\min}$

Рассмотрим поочередно задачи а), б) и в).

а) Так как T_{10} — правильный связный орграф, в нем существует эйлеров цикл e. Он проходит ровно 1 раз по каждой из 1000 стрелок. Возьмем любой трехзначный номер и, начиная со стрелки с этим номером, обойдем T_{10} по циклу e. Последовательные номера стрелок, по которым проходит e, дают искомую последовательность кодов: она включает все трехзначные коды, и в ней каждый код, кроме 1-го, начинается с двух последних цифр предыдущего.

Цель, которую мы ставили перед собой в задаче а), достигнута. Тем самым в этой задаче действительно $t_{\min}=1002$ с.

б) Так же, как T_{10}, строится орграф T_3 для решения задачи б); он содержит 9 вершин и 27 стрелок со всевозможными трехзначными номерами из цифр 1, 2, 3 (рис. 5).

Эйлеров цикл в орграфе T_3 существует (рис. 6). Поэтому ответ в задаче б): $t_{\min}=29$ с.

Вообще, если кнопок n и код трехзначный, то соответствующий орграф T_n содержит n^2 вершин и n^3 стрелок, а $t_{\min}=(n^3+2)$ с.

а) Пусть теперь известно, что *все цифры забытого трехзначного кода различны*. Если кнопок n ($n\geqslant 3$), то таких кодов $n(n-1)(n-2)$; при $n=3$ это 6 кодов, о которых мы говорили, обсуждая идею решения; при $n=10$ (задача в)) таких кодов 720.

Возьмем $n(n-1)$ точек и занумеруем их парами *различных* цифр; при $n=3$ получим 6 точек: 12, 13, 21, 23, 31 и 32; при $n=10$ получим 90 точек: 01, 02, ..., 09; 10, 12, ..., 19; ...; 90, 91, ..., 98. От ab к dc проведем стрелку, если $b=d$, $a\neq c$; напишем на ней код abc. Подчеркнем, что по построению a, b и c попарно различны.

Получим правильный орграф D_n: $p_{ab}=n-2$ для каждой его вершины ab (рис. 7).

При $n>3$ орграф D_n — связный (проверьте!), при $n=3$ — несвязный (рис. 8).

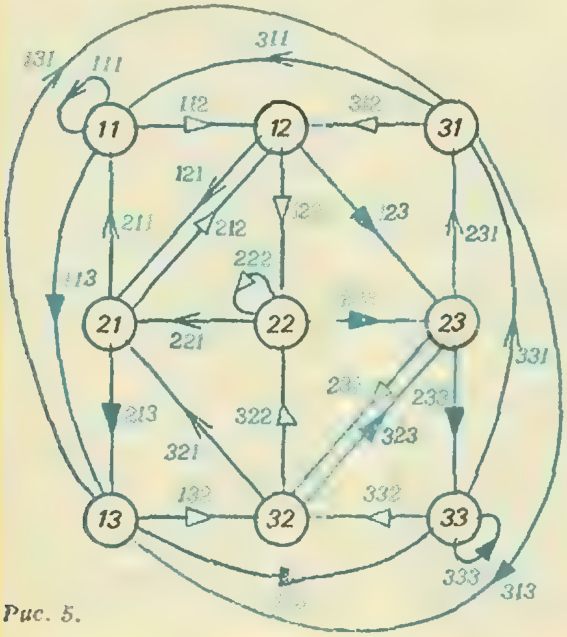


Рис. 5.

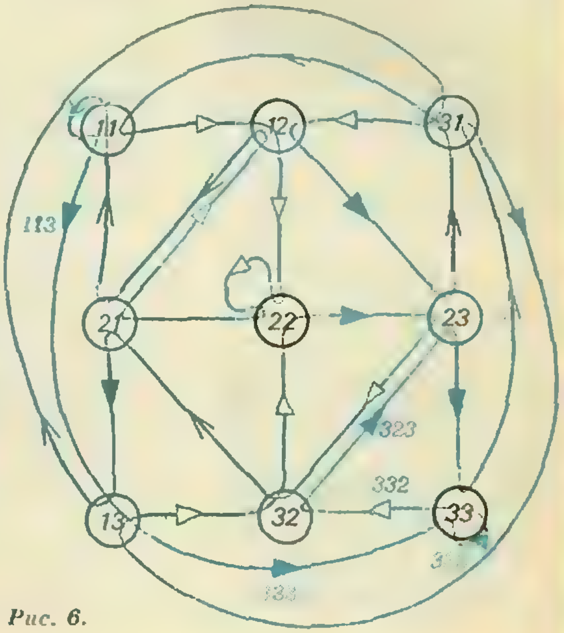


Рис. 6.

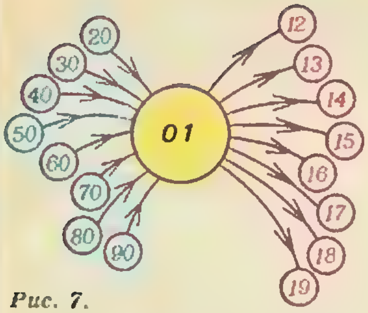


Рис. 7.

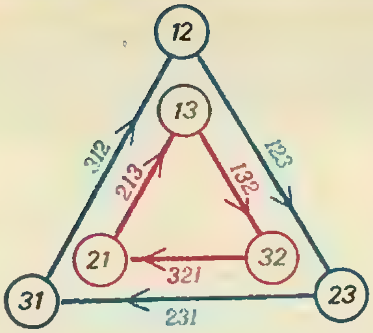


Рис. 8.

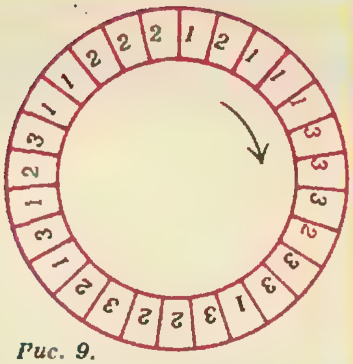


Рис. 9.

Из теоремы об эйлеровом цикле следует:

в задаче в) время $t_{\min}=722$ с (вообще при $n>3$ время $t_{\min}=n(n-1)(n-2)+2$ с); при $n=3$ из-за несвязности D_3 на поиск кода уходят лишние 2 с: $t_{\min}$ — не 8, а 10 с.

Итак, $t_{\min}$ в задачах а), б) и в) найдено. Попробуйте тем же методом найти $t_{\min}$, если

1) кнопок 10 и известно, что по крайней мере одна из цифр трехзначного кода — девятка;

2) кнопок 10 и известно, что ровно две цифры трехзначного кода одинаковы;

3) $2<k<n$, кнопок n, а код — k-значный;

4) кнопок 6, на кнопках цифры 0, 1, ..., 5, все цифры трехзначного кода различны и код содержит цифру 5.

Перейдем к обсуждению второго вопроса:

Как отыскать забытый код за наименьшее время?

Из предыдущего следует, что можно действовать так.

1) Взять подходящий орграф (T_{10}, T_3 или D_{10} в задачах а), б) и в) соответственно).

2) Отыскать в нем эйлеров цикл e.

3) Произвольно фиксировав стрелку S_1, взять стрелки, идущие в цикле e вслед за S_1:

$S_1, S_2, \ldots, S_N$,

$$N=\begin{cases}1000 \text{ в задаче а),}\\ 27 \text{ в задаче б),}\\ 720 \text{ в задаче в).}\end{cases}$$

4) Выписать один за другим трехзначные номера стрелок $S_1, S_2, \ldots, S_N$.

Поскольку номер S_{i+1} добавляет к номеру S_i лишь одну новую цифру, то можно указывать только ее (а не весь номер S_{i+1}); поэтому п. 4) можно заменить таким:

4' Приписать к номеру S_1 третью цифру номера S_2, затем третью цифру номера S_3 и т. д. — вплоть до S_N; получится последовательность *П* из $(N+2)$ цифр. Нажимая на кнопки с этими цифрами по одной в секунду, мы за $(N+2)$с (т. е. за время $t_{\min}$) переберем *все требующие проверки трехзначные коды* и, значит, не более чем за $(N+2)$с отыщем забытый код.

Пример: циклу e в орграфе T_3 с первой стрелкой 113 (рис. 6) соответствует последовательность *П* из 29 цифр: 113 332 331 322 321 312 311 2 221 211 1.

Так как e — цикл, то первая и последняя пара цифр в последовательности *П* совпадают (это номер вершины, из которой выходит стрелка S_1 и в которую входит стрелка S_N). Поэтому вместо того, чтобы писать $N+2$ цифры *П* в строчку, можно написать N цифр по кругу (см. рис. 9, где $N=27$).

На рисунке 9 по ободу колеса (будем именовать его колесом *Б*) идут в особом порядке 9 единиц, 9 двоек и 9 троек. В этой записи заключено полное решение задачи б). Остается нарисовать такие же замечательные колеса *А* и *В* для задач а) и в).

Такие же замечательные? А что это значит?

Диалог о колесах *А*, *Б* и *В*

— Итак, чем же замечательно колесо *Б*?

— Какую бы цифру на нем ни взять, если идти от нее по часовой стрелке, читая по одной цифре в секунду, то за 29 с встретишь все трехзначные числа из цифр 1, 2, 3.

— Да, это замечательно (и аналогичными свойствами должны обладать колеса *А* и *В*), но не это самое замечательное!

— Можно с равным успехом идти против часовой стрелки!

— Можно, но это свойство следует из первого. И оба они выполняются для колеса, построенного по любому эйлерову циклу e в T_n.

— Так, значит, цикл e на рисунке 6 — особенный?

— Да! Он построен не по общему рецепту, пригодному для любого правильного связного орграфа, а по специальному алгоритму, использующему симметрию T_n.

— И что это дает?

— При $n=3$ разница невелика. А в T_{10} уже тысяча стрелок, и поиск e в T_{10} по общему рецепту может оказаться слишком долгим и трудоемким — даже если использовать ЭВМ.

— А специальный алгоритм ищет e быстро?

— Да, я берусь выписать тысячу цифр на колесе *А* за тысячу секунд! Мне не нужна ЭВМ, не нужно запоминать, какие цифры я уже выписал, нужно помнить только последние 3—4 цифры. Моя последовательность почти так же проста, как натуральный ряд.

— Здорово! А последовательность из 720 цифр на колесе *В* тоже простая? Ее можно выписать за 720 с?

— Да! Хотя придумать эту простую последовательность было не просто...

...Здесь мы прервем этот диалог, чтобы не лишать читателей удовольствия самим придумать замечательные последовательности цифр для колес *А* и *В*, или даже в общем случае — для k-значных кодов из n чисел. (В тексте и на рисунках скрыты подсказки, поясняющие секреты построения и быстрого выписывания последовательности *П*; но, может быть, они вам не понадобятся, и вы пойдете своим путем.) А мы надеемся, получив ваши письма, вернуться к этой задаче в одном из следующих номеров журнала.

М. Л. Гервер

Наша обложка

Красивый многогранник, показанный на обложке, обладает *кубической симметрией.* Это значит, что он — как и куб — симметричен относительно девяти плоскостей, одного центра, а также совмещается сам с собой при повороте на углы, кратные $\pi/2$, около трех осей, и на углы, кратные $2\pi/3$, около четырех осей. Произвольную грань многогранника можно поочередно подвергать этим преобразованиям, и она поочередно совместится с 23 другими гранями того же вида.

Создавать подобные многогранники можно с помощью техники, разработанной В. Н. Гамаюновым и связанной с вычерчиванием *эпюров* специального вида (*проектографическими чертежами*, см. «Квант», 1982, № 2, с. 39). Мы не будем пояснять здесь построение таких эпюров, а расскажем, как можно сконструировать *модель* показанного многоугольника по готовому эпюру.

Для этого следует увеличить эпюр (он приведен на второй странице обложки) до нужного размера и каждую выделенную деталь (кроме красной) аккуратно вырезать из тонкого картона или плотной бумаги в 24-х экземплярах. Для удобства склейки, стороны деталей можно расширить «язычками», которые друг к другу и приклеиваются, когда соответствующие детали (грани) имеют общее ребро на многограннике. (Впрочем, можно обойтись без языков и склеивать грани вдоль ребер «липучкой».)

Детали вырезаны. Как понять, с чем склеивать данную деталь? В этом помогают черные дужки, имеющиеся на эпюре. Например, чтобы узнать, к какому ребру приклеивается ребро AB большой зеленой детали, следует найти черную дужку на прямой AB (она расположена в точке O) и повернуть прямую около O на угол, заданный дужкой (здесь — 180°); тогда ребро AB перейдет в ребро $A'B'$ желтой детали: именно к нему следует приклеить ребро AB. Точно так же для ребра EF: ищем дужку на прямой EF, находим ее в точке P и поворачиваем около P на угол 90°, в результате чего EF совмещается с $E'F'$, что и дает необходимую склейку. Аналогично, дужка в 60° в точке Q указывает, что ребро QE приклеивается к ребру QE, но конечно не к той же грани, а к другому ее экземпляру. И так далее.

Имея готовые детали и зная их схему склейки, остается только запастись клеем, липучкой и терпением, и очень тщательно склеить модель, сверяясь иногда с изображением на обложке.

Двадцать четыре идентичных «острия» нашего многогранника, расположенные парами, расходятся лучами в шести направлениях. На фотографии некоторые из них видны «сбоку» и потому выглядят более тонкими, чем те, которые видны в «анфас» (а некоторые вообще не видны). Сечение каждого острия представляет собой самопересекающийся четырехугольник.

Читателю, возможно, интересно узнать, к чему на эпюре красная четырехугольная деталь. Отвечаем: из нее (вернее, из 24 экземпляров этой детали, склеенных в соответствии с дужками в точках S и M) можно склеить еще один (выпуклый) многогранник, представляющий собой часть «выброшенной середины» нашей конструкции. Образовавшаяся на месте красного многогранника и вокруг него пустота и придает нашей модели легкость и определенное изящество.

Н. В. Лавров

Задача для исследования

а) На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играют в «крестики-нолики». Выигрывает тот, кто первым поставит подряд *девять* своих знаков по вертикали, горизонтали или диагонали. Докажите, что при правильной игре никто не может выиграть: найдите беспроигрышную стратегию для второго игрока.

б) Докажите аналогичное утверждение для следующей игры. На бесконечном поле, составленном из шестиугольников, двое играют в «крестики-нолики». Выигрывает тот, кто первым поставит подряд *семь* своих знаков в шестиугольники, примыкающие друг к другу по сторонам (возможны три направления).

в) Верно ли утверждение задачи а) для чисел $m<9$ и задачи б) для чисел $n<7$?

О. А. Степанов

Возвращаясь к напечатанному

В заметке В. И. Стомахина «Геометрические преобразования в планиметрических задачах» («Квант», 1986, № 12, с. 16) решение задачи 6 (см. с. 18) верно только в случае, когда все углы треугольника меньше 120°; если один из углов треугольника больше или равен 120°, то искомой точкой является вершина этого угла.

Замечание к задаче 7 также справедливо лишь для треугольников ABC, все углы которых меньше 120°. Если же один из углов больше 120°, то точка O лежит вне треугольника ABC, и из нее две стороны треугольника видны под углом 60°, а третья — под углом 120°. Если же один угол треугольника равен 120°, то указанные три прямые пересекаются в вершине этого угла.

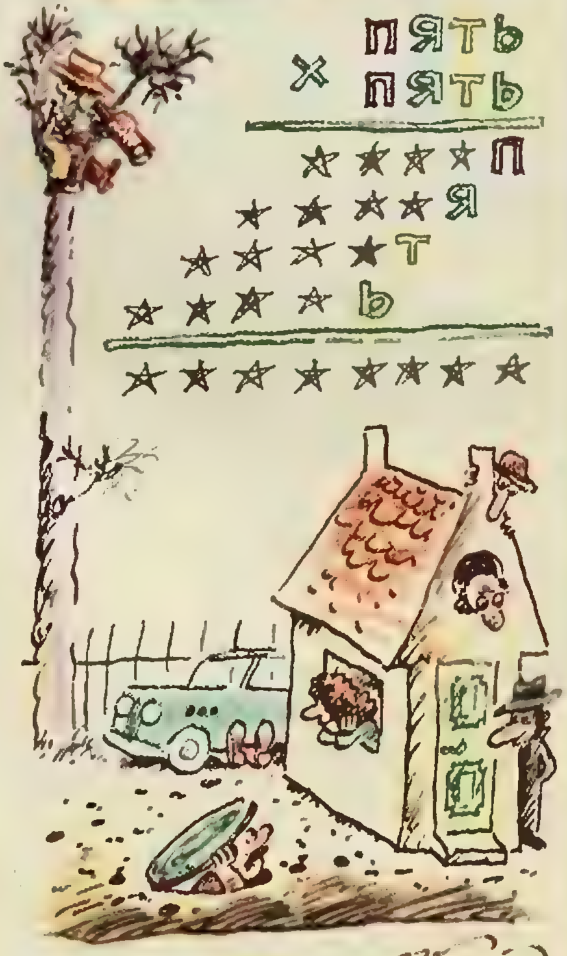
«Квант» для младших школьников

Задачи

1. У меня дома есть три ведра, каждое из которых вмещает целое число литров. Если вылить полное первое ведро воды во второе, то вода займет там ровно 2/3 его объема, а если вылить полное первое ведро в третье, то вода займет 3/4 его объема. Однажды я наполнял водой тридцатилитровую бочку, сначала вылив первое ведро, потом второе, затем третье ведро, но бочка еще не наполнилась. Сколько литров воды можно было еще в нее влить?

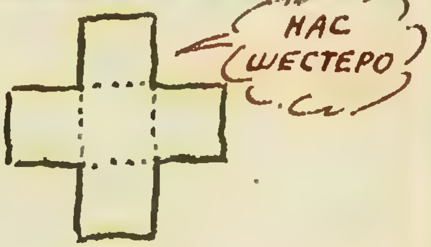
2. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. В нем разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые.

3. В Великобритании и США температуру принято измерять по шкале Фаренгейта, по которой температура плавления льда составляет 32°, а температура кипения воды 212°. Существует ли температура, при которой количество градусов по шкале Цельсия и по шкале Фаренгейта будет совпадать?



4. Шеф секретной службы составил следующую инструкцию взаимной слежки для своих семи главных агентов: агент 001 следит за тем, кто следит за агентом 002, агент 002 — за тем, кто следит за агентом 003, и т. д.; агент 007 следит за тем, кто следит за агентом 001. Но вдруг пришел приказ — взять на службу еще агента 008. Сможет ли шеф составить аналогичную инструкцию для восьми агентов?

5. Имеется кубик и шесть одинаковых крестообразных фигур, вырезанных из бумаги (см. рисунок). Площадь каждой бумажной фигуры равна площади одной грани кубика. Можно ли этими кусками бумаги целиком оклеить поверхность кубика?



Эти задачи предложили *С. Р. Сефибеков*, *Б. А. Мукушев*, *А. П. Савин*, *Г. А. Гальперин*, *В. В. Произволов*.

Справочник

О ЧЕМ МОГУТ РАССКАЗАТЬ ЦИФРЫ

Доктор педагогических наук
Н. А. РОДИНА

Как вы думаете, сколько энергии расходует ученик на выполнение домашнего задания? Наверное, этот вопрос многих читателей поставит в тупик: можно ли сосчитать эту энергию? как? Отвечаем: можно; вот ответ: в среднем около 500 кДж. А получили мы этот ответ так. Открыли на странице 118 книгу с таким, казалось бы, прозаическим названием — «Справочник по физике и технике», и...

Дальнейшие действия, читатель, станут вам ясны, если и вы откроете эту книгу. И мы думаем, что если вы это сделаете, то уже не сможете оторваться от ее страниц, хотя основное содержание книги — таблицы, графики, цифры. «Но цифры тоже имеют свой язык, умеют говорить, рассказывать о различных вещах и явлениях природы...» С этими словами автора книги — Анатолия Сергеевича Еноховича — нельзя не согласиться. Цифры расскажут нам много нового, любопытного...

Вы узнаете, например, что длина инфузории-туфельки — 300 микрометров, а длина реки Нил — самой протяженной реки на Земле — 6700 км, что расстояние между телеграфными столбами составляет 50—60 м (таблица № 19).

А что такое микрометр? В таблице № 13 приведены единицы измерения малых длин. Самая большая из них — микрометр — равна миллионной доле метра, т. е. 10^{-6} м; самая

малая — фемтометр — равна 10^{-15} м и названа «ферми» в честь итальянского физика Энрико Ферми (1901—1954), который в 1942 году осуществил цепную ядерную реакцию в первом ядерном реакторе (и об этом написано в справочнике).

В той же таблице № 19 находим, что диаметр молекулы кислорода составляет 0,3 нанометра (1 нм$=10^{-9}$ м). Вычислим, во сколько раз длина инфузории-туфельки больше диаметра этой молекулы: $(300\times10^{-6}):(0,3\cdot10^{-9})=10^{6}$. Инфузория, которую можно увидеть только в микроскоп, в миллион раз «длиннее» молекулы! А Нил, оказывается, длиннее Волги в 1,9 раза.

Зная расстояние между телеграфными столбами, можно, заметив время движения машины между столбами, определить ее скорость.

При помощи ручного динамометра можно проверить, соответствует ли сила вашей правой руки среднему значению для вашего возраста (таблица № 58).

Хотелось бы рассказать обо всех величинах, которые приведены в таблице № 19, ведь из нее вы узнаете, что эвкалипты (самые высокие деревья в мире) выше пирамиды Хеопса, а наиболее глубокая пробуренная на Земле скважина глубже Марианской впадины — самого глубокого места в мировом океане.

Автор справочника рассказывает нам и о том, что масса самой маленькой птицы — колибри — равна 1,7 г, а масса крылышка мухи — 0,00005 г.

В таблицу № 30 не успели попасть данные о мировом рекорде в беге на коньках для равнинных катков, установленном в 1984 году И. Железовским на дистанции 1000 м, но там указано время пробега такой же дистанции на высокогорном катке — 1 мин 12,58 с. Зная время, показанное И. Железовским (1 мин 14,3 с), можно вычислить и сравнить скорости этих двух рекордных пробегов.

Состязания, в которых побеждает тот, кто затрачивает на движение меньшее время, проводятся в беге по дорожке, в беге на коньках, в плавании. В каком из этих видов движения человек показывает абсолютно бо́льшую скорость? Почему скорость бега на коньках на дистанции 1000 м больше, чем на 500 м? Может ли человек в каких-нибудь видах спорта превысить скорость движения ласточки (17,5 м/с)? гепарда (31 м/с)?

Из таблицы № 43 мы узнаем, что каждая точка Земли на широте Москвы движется вследствие вращения Земли со скоростью 259 м/с. У точек экватора эта скорость достигает 465 м/с. Почему мы не замечаем этого движения? Или все же существуют явления, позволяющие нам заметить его, как замечаем мы движение поезда, находясь в нем?

Есть ли деревья, которые тонут в воде? Такие деревья существуют, это бакаут («железное дерево») и черное дерево — плотность их древесины больше, чем плотность воды. Эти сведения дают таблицы № 49 и № 55. Эти же таблицы сообщают, что из всех пород дерева самую малую плотность имеет древесина бальзы: она «лучше» всех плавает в воде, из нее, как указано в сноске к таблице № 55, был изготовлен плот «Кон-Тики». Вот почему участники плавания на «Кон-Тики» разыскивали бальзовое дерево в Южной Америке, преодолевая громадные трудности: в сезон дождей они через Анды перебрались в район джунглей и вывезли оттуда двенадцать бальзовых деревьев, девять из которых пошли на сооружение плота (описанию этого путешествия посвящена целая глава в известной книге Т. Хейердала).

А если плот такого же объема, как «Кон-Тики», изготовить не из бальзы, а из сосны, то во сколько раз будет меньше его грузоподъемность (т. е. масса груза, который плот может удержать до полного погружения)? Получить ответ на этот вопрос вам поможет таблица № 55.

Как вы думаете, какие расстояния пробегают от одного соударения до другого молекулы воздуха в комнате? Можно ли такое расстояние отложить на бумаге при помощи остро отточенного карандаша? Оказывается, нельзя: в обычных условиях средняя длина свободного пробега молекул воздуха 60 нанометров (а число соударений молекул в секунду составляет 7,5 миллиардов). А вот на высоте 80 км над Землей воздух так разрежен, что расстояние между молекулами в среднем равно 4,4 мм (таблица № 105); такой отрезочек можно отложить карандашом на бумаге.

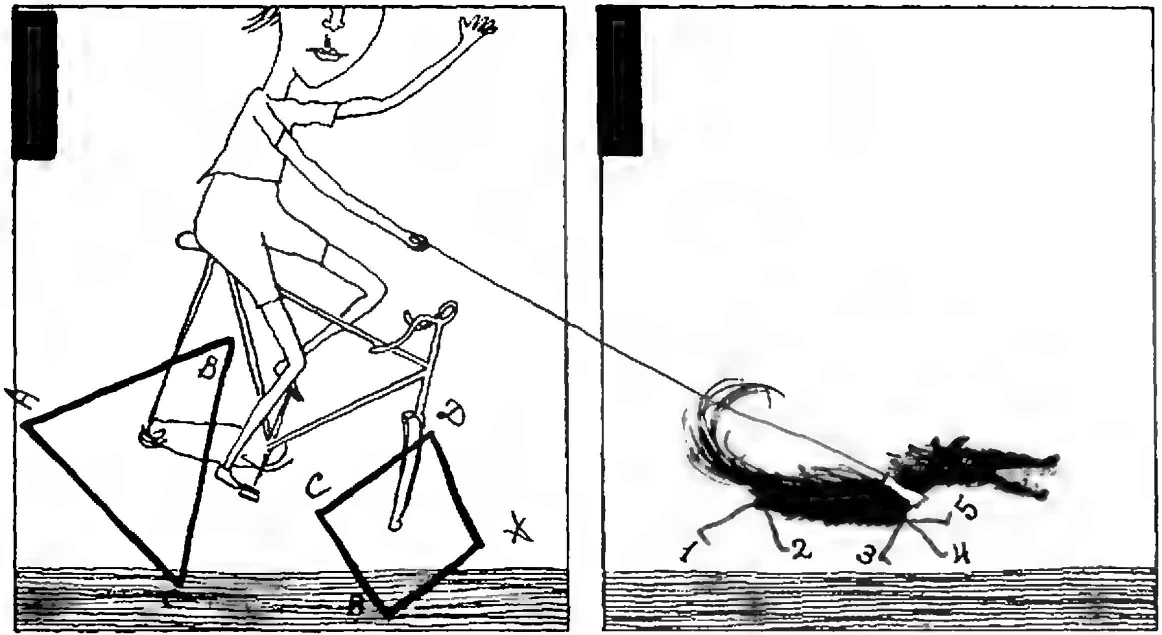
За один киловатт-час электроэнергии мы платим 4 копейки. Но о настоящей «цене» сэкономленного киловатт-часа мы узнаем из таблицы № 203. Такая энергия расходуется на производство 1,5 кг писчей бумаги или 39 кг сахарного песка, на добычу 30 кг нефти или выплавку 0,5 кг стали. На выработку 1 кВт·ч расходуется около 600 г каменного угля.

Справочник будет вам помощником при решении различных практических задач, которые могут возникнуть и на уроке, и дома, и при работе в школьных мастерских или на производстве, и при конструировании и изготовлении различных приборов, моделей...

Есть ли еще подобные книги? В любом справочнике можно найти интересные сведения и необходимые для решения задач таблицы физических величин, таких как плотность, удельная теплоемкость, температура кипения и т. п. Но книга «Справочник по физике и технике. Учебное пособие для учащихся» А. С. Еноховича (М., Просвещение, 1983) — это особый справочник, особая книга. Она учит, заинтересовывает, воспитывает. Ее значение так же велико, как значение книг Я. И. Перельмана, М. И. Блудова.

Создание справочника потребовало от его автора огромного труда. Тысячи данных нужно было разыскать в множестве книг, каждое число проверить, а если нужно, то обновить — ведь развивается техника, растут скорости и мощности машин и электростанций, дальность и длительность космических полетов, коэффициенты полезного действия механизмов... Впервые в справочное пособие по физике включены такие интересные таблицы, как «Скорости движения в живой природе», «Физика человека», данные об автомобилях, тракторах, зерноуборочных комбайнах, и знаменательных событиях в истории физики...

Спасибо автору книги за все это.



Школа в „Кванте"

Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Выручает описанная окружность» предназначена восьмиклассникам, «Лишние условия в конкурсных задачах» — девятиклассникам и десятиклассникам.

Выручает описанная окружность

Хорошо известно, что величина центрального угла равна величине дуги, заключенной между его сторонами, а величина вписанного угла — половине величины дуги, заключенной между его сторонами. При решении планиметрических задач нередко полезно провести окружность, описанную около треугольника или четырехугольника. При этом отмеченные выше свойства можно сформулировать так.

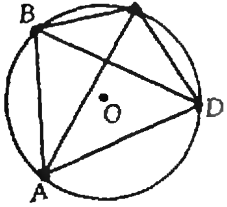


Рис. 1.

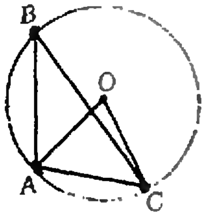


Рис. 2.

I. *Если четырехугольник ABCD вписанный (рис. 1), то* $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ *(а также* $\angle DBC = \angle DAC$, $\angle ADB = \angle ACB$, $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$*).*

II. *Если точки B и C лежат по одну сторону от прямой AD и при этом* $\angle ABD = \angle ACD$ *или* $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$*, то четырехугольник ABCD — вписанный (см. рис. 1).*

III. *Если треугольники ABC и AOC лежат по одну сторону от прямой AC и точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, то* $\angle AOC = 2\angle ABC$ *(рис. 2).*

IV. *Если треугольники ABC и AOC лежат по одну сторону от прямой AC,* $OA = OC$ *и* $\angle AOC = 2\angle ABC$*, то O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (см. рис. 2).*

Покажем на примерах, как этими свойствами можно воспользоваться при решении задач.

Пример 1. *В треугольнике* ABC: $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$. *Точка M лежит внутри треугольника, причем* $\angle MAC = \angle MCA = 40^\circ$. *Найдите* $\angle BMC$.

Решение. Так как $\angle AMC = 100^\circ = 2\angle B$, $MA = MC$, по свойству IV точка M — центр окружности, описанной около треугольника ABC

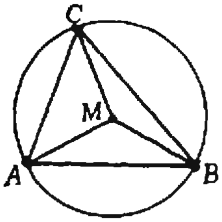


Рис. 3.

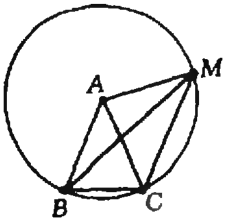


Рис. 4.

(рис. 3). Следовательно, по свойству III $\angle BMC = 2\angle A = 140°$.

Пример 2. *В треугольнике ABC: $AB = AC$, $\angle BAC = 40°$. Вне треугольника ABC, но внутри угла ABC взята точка M, такая что $\angle AMB = 30°$, $\angle BMC = 20°$ (рис. 4). Найдите $\angle ABM$.*

Решение. По свойству IV точка A — центр окружности, описанной около треугольника BCM. Поэтому $AB = AM$ и $\angle ABM = \angle AMB = 30°$.

Пример 2 можно обобщить на любой треугольник ABC, в котором $AB = AC$, $\angle BAC = 2\angle BMC$, $\angle AMB = \alpha$. Тогда $\angle ABM = \alpha$.

Задача 3. *В треугольнике ABC: $AB = BC$, $\angle ABC = 80°$. Точка M лежит внутри треугольника, причем $\angle MAC = 10°$, $\angle MCA = 30°$. Найдите $\angle BMC$ (рис. 5).*

Решение. Углы BAC и BCA равны 50°. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника AMC. Тогда по свойству III $\angle AOM = 60°$, поэтому треугольник AOM — правильный. Далее, BO — серединный перпендикуляр к отрезку AC (так как $AB = BC$ и $AO = OC$). Прямоугольные треугольники ABK и AOK равны, поскольку $\angle OAK = 60° - 10° = 50° = \angle BAK$. Следовательно, $AB = AO$, но $AO = AM$, поэтому $AB = AM$. В равнобедренном треугольнике ABM углы ABM и AMB равны $(180° - 40°):2 = 70°$. Наконец, $\angle BMC = 360° - 140° - 70° = 150°$ (см. рис. 5).

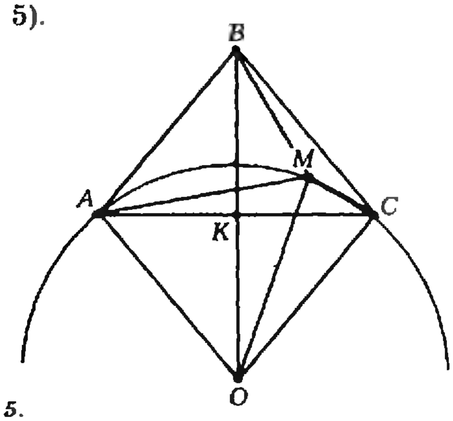


Рис. 5.

В заключение предлагаем пять задач для самостоятельного решения.

Задачи

1. В треугольнике ABC: $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$. Точки D и E выбраны на сторонах AB и BC так, что $\angle DCA = \angle EAC = 30°$. Найдите $\angle CDE$.
2. В треугольнике ABC: $\angle A = 30°$, $\angle B = 80°$. Точка M лежит внутри треугольника, при этом $\angle MAC = 10°$, $\angle MCA = 30°$. Найдите $\angle BMC$.
3. В треугольнике ABC: $\angle A = 20°$, $\angle C = 30°$. Точка K лежит внутри треугольника, при этом $\angle KAC = \angle KCA = 10°$. Найдите $\angle BKC$.
4. В треугольнике ABC: $AB = BC$, $\angle C = 40°$. Вне треугольника ABC, но внутри угла BAC взята точка M, такая что $\angle AMC = 50°$, $\angle ABM = \angle ACM$. Найдите $\angle BCM$.
5. В треугольнике ABC: $\angle A = 84°$, $\angle C = 78°$. Точки D и E выбраны на сторонах AB и BC так, что $\angle ACD = 48°$, $\angle CAE = 63°$. Найдите $\angle CDE$.

Д. Ф. Изаак

Лишние условия в конкурсных задачах

В этой заметке речь идет о двух малоудачных задачах по математике, предлагавшихся в свое время (в 1971 году) поступающим в МИФИ и МФТИ и опубликованных вместе с решениями в 1972 году в «Кванте». Вот эти задачи:

Задача 1 (МИФИ, 1971; «Квант», 1972, № 6, с. 52, 75—76). *Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найдите это число.*

Задача 2 (МФТИ, 1971; «Квант», 1972, № 5, с. 43). *Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найдите это число.*

На самом же деле для решения задачи 1 достаточно знать лишь второе условие, а для решения задачи 2 — первое условие.

Действительно, записав искомое число в виде $10x + y$ $(1 \leqslant x \leqslant 9,$ $1 \leqslant y \leqslant 9)$, в задаче 1 из второго условия получим

$$10x + y = 3xy + 5 \quad (xy \neq 0).$$

Выразим x через y:

$$x = \frac{5 - y}{10 - 3y}. \qquad (*)$$

(Окончание см на с 47)

Матвей Петрович Бронштейн (1906—1938) был физиком-теоретиком очень широких интересов. Он занимался астрофизикой и физикой полупроводников, космологией и ядерной физикой. Важнейшая его работа относится к квантовой теории гравитации. Прожил Матвей Петрович всего тридцать с небольшим лет, но успел сделать очень многое. Иначе в наше время его не вспоминали бы выдающиеся советские физики, его имя не появлялось бы в физических статьях, написанные им книги не переиздавались бы спустя многие десятилетия и о нем не было бы написано в Большой Советской Энциклопедии.

Кроме научных работ, профессор М. П. Бронштейн оставил нам книги, написанные для любознательных юных читателей. О сложной физике он умел говорить просто, понятно и правильно (а это все не одно и то же). Он рассказывал о науке как о необычайно увлекательном и важном деле, чем она и была для него самого. Однако интересна ему была не только наука. Много сил он отдал научно-популярной литературе. И, наверное, не случайно. Его отрочество пришлось на трудные годы революции и гражданской войны, и учиться в школе ему не довелось. Главными его учителями были книги и журналы. Учиться он любил и сделался — сделал себя! — необычайно образованным человеком, читал на нескольких языках, тремя владел свободно. А кроме всего, он был очень хорошим человеком, и ему хотелось делиться своими знаниями, радостью познания с другими.

Первым выпуском «Библиотечки «Квант» стало переиздание его книги «Атомы и электроны». В библиотеках можно найти также его книги «Солнечное вещество» — о том, как и где (на Солнце!) был обнаружен гелий, и «Лучи Икс» — об удивительном открытии Рентгена. Книга, отрывок из которой здесь приводится, не успела выйти отдельным изданием, она была напечатана только в журнале «Костер» в 1936 году. В этой книге рассказывается, как изучение малоприметной искорки привело к изобретению радио и к другим чудесам, к которым мы довольно быстро привыкаем, но которые от этого не становятся менее замечательными.

Публикацию подготовил Г. Е. Горелик.

Лаборатория „Кванта"

Изобретатели радиотелеграфа

(Главы из книги)

М. П. БРОНШТЕЙН

Кто и когда?

Кто и когда изобрел радио?

Одни на этот вопрос отвечают: изобрел его Александр Степанович Попов, и было это сорок лет тому назад. Другие говорят: радио изобрел итальянец Гульельмо Маркони.

И в самом деле: сорок лет назад и Попов, и Маркони одновременно построили первые в мире радиостанции и начали посылать первые в мире радиотелеграммы.

Но история радио началась значительно раньше, чем была послана первая радиотелеграмма. Ученые, которые своими открытиями и опытами начали историю радио, не посылали и не принимали никаких радиотелеграмм. Они и не стремились к тому, чтобы передавать на расстояние какие-либо сигналы или музыку, или звуки человеческой речи. Как удивились бы эти первые изобретатели радиотелеграфа, если бы им сказал кто-нибудь, что они изобретают радиотелеграф!

Передача звуков, сигналов, изображений их нисколько не занимала. Их интересовало другое.

Видели ли вы когда-нибудь электрические искры, которые вылетают из наэлектризованных предметов? Блестящие электрические искорки, вспыхивающие на одно мгновение и сейчас же угасающие снова?

Вот с этих-то искорок и началась история радио.

Много десятилетий физики наблюдали электрическую искру, делали с ней опыты, изучали ее свойства. Наконец, они захотели узнать: какой срок проходит от рождения искры до ее смерти? Сколько времени живет электрическая искра?

Вопрос был трудный. Обыкновенно на него отвечали так: она вспыхивает и сейчас же угасает, она живет всего только одно мгновение. Но что такое мгновение? Сотая доля секунды или тысячная доля, или миллионная? Как узнать это, как измерить?

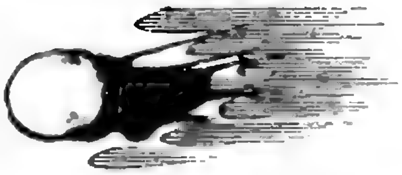
Течение времени ощущает всякий человек. Все мы отличаем минуту от двух минут, секунду от двух секунд и даже десятую часть секунды от целой секунды. Но все, что меньше одной десятой, одной пятнадцатой доли секунды,— все это для нас уже неразличимо, все это — и сотая, и тысячная, и миллионная доля секунды — кажется нам совершенно одинаковым. Органы чувств у нас не такие уж быстрые, точные, изощренные. Во всяком промежутке времени, который меньше одной пятнадцатой части секунды, мы не улавливаем никакой длительности. Поэтому-то в нашем ощущении сотая доля секунды сливается с тысячной, тысячная с миллионной. Миг — и все тут.

Ну, а часы? Ведь они для того и сделаны, чтобы измерять время. Не могут ли часы измерить длительность одного мгновения?

Зайдем на фабрику, изготовляющую точные приборы. Мы увидим там и стенные часы, и башенные, и карманные. Мы найдем там и хронометры, которые берут с собой моряки, отправляясь в далекое плавание, и сверхточные часы для астрономических наблюдений, и электрические хронографы, и секундомеры. Но часов, измеряющих миллионные доли секунды, на фабрике мы не найдем.

И все же такие часы существуют. Семьдесят пять лет тому назад их изобрел и построил немецкий физик Вильгельм Феддерсен. Он изобрел их специально для того, чтобы измерить, сколько времени живет электрическая искра.

Он и не подозревал, что, создавая эти часы, он начинает историю радио.



Часы Феддерсена

Часы, построенные Феддерсеном, дожили и до нашего времени. Они хранятся в музее, в немецком городе Мюнхене.

На обыкновенные наши часы они ничуть не похожи. Ни часовой, ни минутной, ни даже секундной стрелки у них нет. О каких стрелках может идти речь, когда нужно мерить миллионные доли секунды? Где найти стрелку, которая успевала бы сделать в секунду миллион заметных глазу шажков? А шажки эти должны быть заметны — ведь к этому и сводилась задача Феддерсена.

И вот Феддерсен после долгих раздумий сообразил, какая стрелка нужна его часам. Он смастерил ее не из бронзы, не из стали, а из материала, которого до него не употреблял ни один часовщик.

Он построил ее из лучей света.

Возьмем маленькое карманное зеркальце и вынесем его на улицу, на солнечный свет. Лучи солнца отразятся от зеркальца, отскочат от него блестящим ярким зайчиком.

Начнем поворачивать зеркальце. Как быстро забегает зайчик, как затанцует он и запрыгает, отражаясь от зеркальца, которое дрожит у меня в руке! Только что он был совсем близко, но вот зеркальце чуть-чуть повернулось, и зайчик уже перебежал на другую сторону улицы и прыгает по стенам, по карнизам, по балконам домов.

Быстро движется зайчик — в сто, в тысячу раз быстрее секундной стрелки часов. А нельзя ли как-нибудь заставить его кружиться не в сто, а в миллион раз быстрее?

Можно. Сто́ит только сильнее завертеть зеркальце. Лучше вертеть не руками, а машиной — ведь машина проворнее человеческих рук, и к тому же точнее: какую скорость закажешь ей, с такой она и будет работать.

В машине, устроенной Феддерсеном, тяжелая многопудовая гиря, опускаясь, тянула за собой канат. Канат поворачивал вал, на который было насажено зубчатое колесо. Это колесо, вращаясь, цеплялось зубцами за другое зубчатое колесо, другое — за третье, а третье — за нарезку большого стального винта. Постепенно переходя от колеса к колесу, движение все усиливалось, все убыстрялось: первое колесо поворачивалось не очень быстро — делало всего только несколько оборотов в секунду, второе вращалось быстрее, третье еще быстрее. А быстроходнее всех был стальной винт: каждую секунду он успевал совершить целых сто оборотов вокруг своей оси.

Для того чтобы весь этот прибор, набирая скорость, не дрожал и не тряся, Феддерсен решил укрепить его на прочной подставке. В капитальную стену комнаты он вделал две чугунные балки, а к ним привинтил массивную чугунную коробку, открытую спереди и с боков. Вращающийся винт своего прибора он пропустил сквозь дно и крышку коробки.

Оставалось теперь приделать к винту зеркало, от которого отскакивали бы зайчики. Феддерсен купил два вогнутых стекла для очков — обыкновенных очков, какие носят близорукие люди. Эти стекла Феддерсен посеребрил — каждое с одной только стороны. Получились два блестящих вогнутых зеркальца. Феддерсен укрепил их на своем винте так, чтобы одно смотрело в одну сторону, другое — в другую. Когда гиря падала и винт приходил в движение, оба зеркальца, прикрепленные к винту, равномерно и быстро кружились вместе с ним.

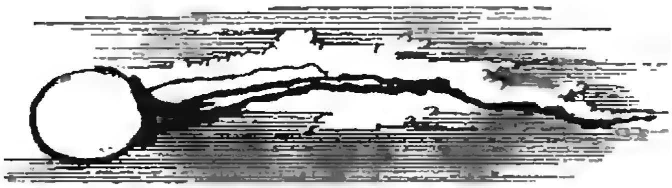
Механизм новоизобретенных часов был готов. Но это еще не все. Ведь для часов нужен не только часовой механизм, заставляющий вращаться стрелку, нужен еще и циферблат, чтобы измерять пройденный стрелкой путь.

Если стрелка сделана из света, из чего же должен быть сделан циферблат?

Долго думал Феддерсен, долго искал он подходящий для этого дела материал. Наконец, нашел: фотопластинка, чувствительная к свету фотопластинка, будет циферблатом необыкновенных часов. На этом циферблате электрическая искра сама, своими собственными лучами, отметит начало и конец своей короткой жизни. Лучи искры упадут на вращающееся зеркало, стремительный зайчик скользнет по фотографической пластинке и оставит на ней свой след. Чем дольше будет гореть искра, тем длиннее окажется след зайчика. А по длине следа, зная скорость зайчика, уже нетрудно будет сосчитать, сколько времени бежал он по пластинке,— сколько времени горела электрическая искра.

Прибор Феддерсена был закончен. Стальной винт был установлен в чугунной раме, вращающееся зеркало работало исправно, фотографическая пластинка лежала наготове. Наготове была и лейденская банка — источник электрических искр. Банка эта состоит из трех стаканчиков, вставленных друг в друга: наружный — металлический, средний — стеклянный, а внутренний — опять металлический.

Феддерсен зарядил банку: наружный металлический стаканчик положительным электричеством, а внутренний металлический — отрицательным. Затем проводами он соединил банку с двумя металлическими шариками, поставленными друг против друга. Эти шарики называются разрядником. Внутренний стаканчик банки Феддерсен соединил с одним шариком разрядника, наружный с другим. Теперь оставалось только нажать на кнопку, замыкающую и размыкающую электрическую цепь, чтобы заряд электричества устремился из банки по проводам. Положительный заряд побежит навстречу отрицательному, и между шариками разрядника вспыхнет блестящая тонкая искра.



История искорки

Феддерсен приступил к опытам со своими необыкновенными часами. Он отпустил гирю, приводившую в движение зубчатые колеса и винт. Сейчас же винт и зеркальце начали поворачиваться так быстро, что у Феддерсена замелькало в глазах. С тонким свистом вращалось насаженное на винт маховое колесо. Прислушиваясь к этому свисту, Феддерсен убедился в том, что прибор его действует исправно: звук был все время одной и той же высоты,— значит, ось вращается равномерно, не замедляя и не убыстряя своего движения.

Тогда Феддерсен погасил свет и приоткрыл кассету, в которой была приготовлена фотографическая пластинка, а затем нажал кнопку, замыкавшую электрическую цепь. И сейчас же в темноте между шариками разрядника проскочила искра: это электрический заряд устремился из одного металлического стаканчика лейденской банки в другой. В мгновение ока пробежал он по проводам и яркой электрической искрой пробил себе дорогу от одного шарика к другому.

Искра горела всего только миг, но в течение этого неуловимого мига быстрый отблеск от зеркальца успел упасть на фотографическую пластинку. Он пробежал по пластинке со скоростью артиллерийского снаряда и вычертил на ней свой путь.

Тут же на месте, не отходя от прибора, Феддерсен проявил пластинку и отпечатал фотографический снимок. На снимке была явственно видна узкая полоска — след, оставленный зайчиком.

Феддерсен измерил длину полоски — полтора сантиметра. Скорость зайчика была ему известна — 60 000 сантиметров в секунду. Сколько же времени бежал зайчик по пластинке? Длину полоски — 1,5 нужно разделить на скорость движения зайчика — 60 000, получается 0,000025. Итак, значит, двадцать пять миллионных долей секунды — вот сколько времени бежал зайчик по пластинке и столько же времени жила электрическая искра.

Часы Феддерсена с честью выполнили возложенное на них дело. Продолжительность искры была измерена. Задача, которую поставил себе Феддерсен, была решена.

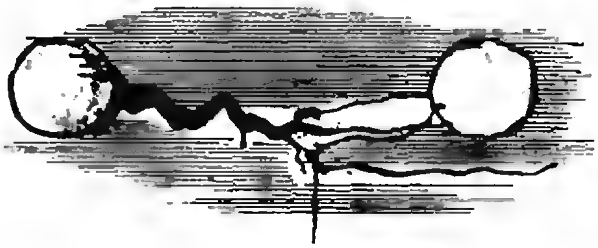
Но, вглядевшись в свой снимок повнимательнее, Феддерсен убедился, что часы его совершили еще одно открытие. Они не только измерили длину жизни искры, но еще и узнали, чем наполнена эта короткая жизнь, составили подробную биографию искры.

След, вычерченный зайчиком на снимке, оказался не сплошным, а прерывистым. Он состоял из нескольких светлых пятен, отделенных друг от друга темными промежутками.

Значит, электрическая искра, проскочившая между шариками разрядника, вовсе не горела равномерным блеском. В течение всей свой жизни, продолжавшейся всего только 25 миллионных долей секунды, она вспыхивала и угасала несколько раз. Короткие вспышки шли одна за другой так быстро, что человеческий глаз не мог уследить за ними,— несколько вспышек казались глазу одной. И только чудесные часы Феддерсена сумели расчленить мгновение, разложить искру на несколько отдельных вспышек.

Феддерсен сосчитал число вспышек на своем снимке. Их оказалось восемь, и каждая последующая была чуть-чуть слабее предыдущей. Восемь вспышек за двадцать пять миллионных долей секунды! Значит, искра состояла из отдельных искр, загоравшихся и угасавших через каждые три миллионные доли секунды.

Так по записи, сделанной зайчиком, Феддерсен прочитал историю электрической искры, историю, которая от начала до конца продолжалась всего только одно мгновение.



Опыты продолжаются

Не один раз повторял Феддерсен свой опыт. Он брал то одну лейденскую банку, то целую батарею из десяти, пятнадцати и даже двадцати лейденских банок. То сдвигал шарики почти вплотную, то раздвигал их на целый сантиметр или на полтора. Менял и самые шарики — брал то железные, то медные, то свинцовые, то золотые. В одних опытах оба шарика были из одного и того же металла, в других — из разных. Провода, которые шли от лейденских банок к шарикам разрядника, Феддерсен брал то короткие и толстые, то длинные и тонкие. И каждый раз он фотографировал отблеск искры во вращающемся зеркальце.

По фотографическим снимкам измерял он, сколько времени длится искра, узнавал, как она вспыхивает, горит и гаснет.

Искры получались разной яркости, разной длины, разной продолжительности, но каждая состояла не из одной только вспышки, а из многих. Вспышки следовали одна за другой через несколько миллионных долей секунды и становились все слабее и слабее, пока искра не угасала.

Почему же электрический заряд прокладывает себе путь между шариками разрядника не одним скачком, а несколькими судорожными скачками?

Размышляя об этом, Феддерсен вспомнил одну статью о разряде лейденской банки, которую он когда-то читал. Статья эта была написана в 1853 году английским ученым Уильямом Томсоном. Томсон не делал никаких опытов с лейденской банкой, да он и вообще не занимался опытами. Зато он был очень искусным математиком. Он знал физические законы, которые управляют электрическим током, и умел выводить математические следствия из этих законов. И вот Томсон попробовал с помощью вычислений установить — что же собственно происходит с электрическим зарядом, когда заряжают лейденскую банку.

Вычисления Томсона показали: электрический заряд, добежав по проводам от стаканчика лейденской банки до разрядника, совершает прыжок с шарика на шарик и устремляется по проводу снова в банку, но уже в другой стаканчик. Таким образом оба заряда, положительный и отрицательный, меняются местами.

Отрицательный заряд, который был сперва, скажем, во внутреннем стаканчике банки, с разбега перелетит в наружный, а положительный из наружного во внутренний. Таким образом банка не разрядится, а только зарядится по-новому, и электрический ток снова помчится к разряднику, но уже в обратном направлении. То взад, то вперед станет бегать электрический заряд, перескакивая с одного шарика на другой,— снова со второго на первый и снова с первого на второй.

«Так вот оно в чем дело!» — подумал Феддерсен. Вот почему прибор отметил на снимке не одну искру, а целых восемь. Значит, восемь раз проскакивал электрический ток с шарика на шарик то в одну сторону, то в другую. И каждый раз в разряднике появлялась блестящая вспышка. Кончилась вспышка, и сейчас же появилась другая — это снова прорвался электрический ток, но уже в обратном направлении. Вспышка за вспышкой сверкала в узком пространстве между шариками, пока продолжалась жизнь искры, и с каждой вспышкой менялось направление тока. Пробежал ток в одну сторону — вспышка, пробежал назад — новая вспышка.

Вращающееся зеркало Феддерсена подтвердило догадку Томсона: электрическая искра — это маленький отрезок переменного электрического тока. Через ничтожные промежутки времени, через каждые несколько миллионных долей секунды ток изменяет свое направление.

Так вращающееся зеркало помогло Феддерсену изучить природу электрической искры.

(Начало см. на с. 42)

Выражение $\frac{5-y}{10-3y}$ положительно при $y<\frac{10}{3}$ и $y>5$; поскольку $1\leqslant y\leqslant 9$, нужно проверить целочисленные значения $y=1, 2, 3, 6, 7, 8, 9$. Подставляя последовательно эти значения в выражение $\frac{5-y}{10-3y}$, получим единственное целочисленное значение $x=2$ при $y=3$. Поэтому второму условию задачи 1 удовлетворяет единственное двузначное число 23. Это же число не противоречит и первому условию задачи 1, которое, таким образом, является ненужным.

В задаче же 2 первое условие дает

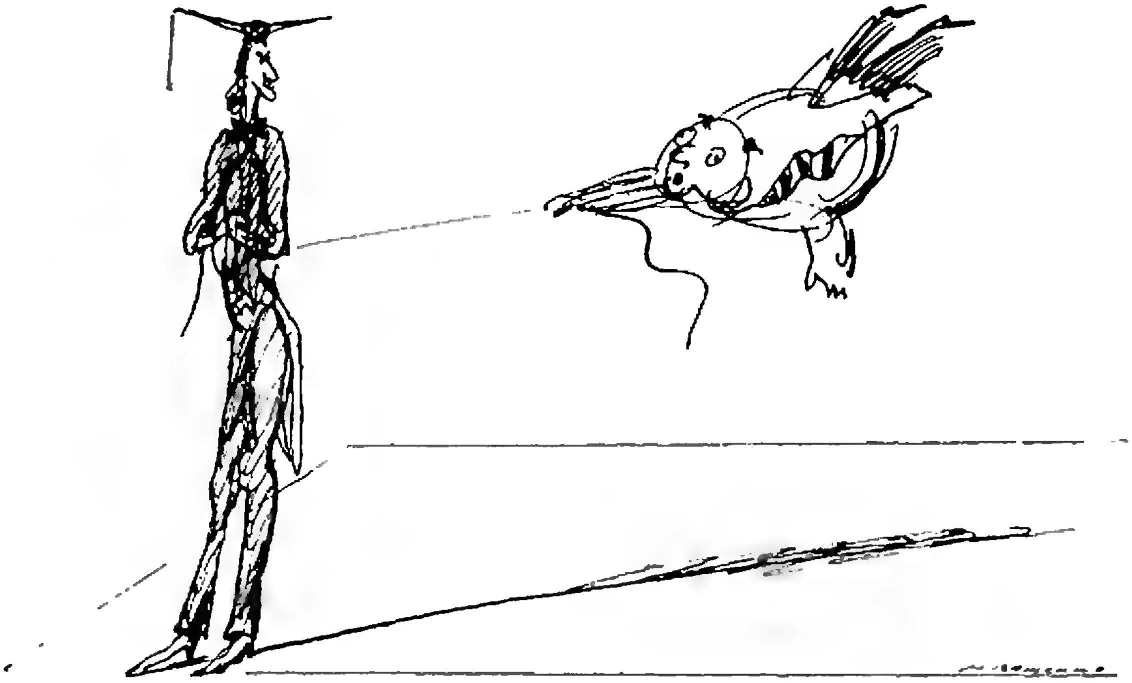
$$10x+y=3xy+9,$$

$1\leqslant x<9$, $1\leqslant y\leqslant 9$. Отсюда

$$x=\frac{9-y}{10-3y},$$

и после очевидного перебора значений $y=1, 2, 3$ находим единственное число 63. Оно не противоречит и второму (лишнему в данном случае) условию задачи.

Р. Ю. Винокур



Практикум абитуриента

Маневрирование в космосе

Кандидат физико-математических наук
В. Е. БЕЛОНУЧКИН

В предыдущей статье этого автора «Законы Кеплера и школьная физика» («Квант», 1986, № 2) были разобраны некоторые задачи на движение различных космических объектов. В данной статье обсуждается еще несколько, теперь уже более сложных, вопросов на ту же тему.

Вероятно, аналогичные задачи могут встретиться скорее на физических олимпиадах, чем на вступительных экзаменах. Однако мы полагаем, что знакомство с ними окажется для абитуриентов небесполезным.

Большие и малые планеты, кометы, естественные спутники планет миллионы и миллионы лет двигаются по одним и тем же траекториям. Не так обстоит дело с искусственными космическими аппаратами. Спутники переходят с орбиты на орбиту, стыкуются и разделяются, с них осуществляется запуск межпланетных станций.

Каждый маневр в космосе — сложная научно-техническая задача. Для ее решения необходимо учесть множество различных факторов, провести массу точнейших расчетов, с ювелирной точностью выполнить те операции, которые предписаны результатами расчетов.

Мы рассмотрим простейшие маневры и проведем лишь самые грубые оценки. Наиболее «изощренным» нашим орудием будет второй закон Кеплера, постулирующий, что радиус-вектор тела, свободно движущегося в окрестностях тяготеющего центра, за равные промежутки времени описывает равные площади.

Начнем с широко известной задачи.

Задача 1. *Каким должно быть изменение скорости спутника, обращающегося по околоземной орбите, чтобы он мог навсегда покинуть Землю?*

Для решения этой задачи нам не потребуется даже второй закон Кеплера. Зато мы постараемся вспомнить несколько полезных для дальнейшего формул и соотношений.

Как известно, для движения по околоземной орбите тело должно иметь скорость, равную первой космической $v_{1\text{к}} = 7{,}9$ км/с, а для того чтобы улететь от Земли, необходима вторая космическая скорость («скорость убегания») $v_{\text{II к}}=11{,}2$ км/с. Изменение скорости, очевидно, должно составить $\Delta v=v_{\text{II к}}-v_{\text{I к}}=3{,}3$ км/с. Но давайте вспомним, откуда взялись эти цифры — 7,9 и 11,2 км/с?

Первая космическая скорость определяется из условия, что центростремительное ускорение телу массой m, движущемуся по круговой орбите радиусом $R_\text{З}$ (радиус Земли $R_\text{З}=6{,}38\cdot10^3$ км), сообщает сила гравитационного притяжения к Земле (телу массой $M_\text{З}$):

$$\frac{mv_{\text{I к}}^2}{R_\text{З}}=G\frac{mM_\text{З}}{R_\text{З}^2}.$$

Заметим, что комбинация $GM_\text{З}/R_\text{З}^2$ (G — гравитационная постоянная) как раз определяет ускорение силы тяжести на поверхности Земли $g_0=9{,}8$ м/с^2. Следовательно, можно записать

$$v_{\text{I к}}=\sqrt{g_0R_\text{З}}=7{,}9\cdot10^3 \text{ м/с}.$$

Сложнее обстоит дело со второй космической скоростью. Для ее вычисления нам потребуется выяснить, как зависит потенциальная энергия тела в поле тяготения от расстояния до тяготеющего центра. В нашем случае это можно сказать более простыми словами: надо найти формулу для потенциальной энергии тела в поле тяжести Земли.

Привычное выражение mgH справедливо только на небольших расстояниях от поверхности Земли (это ясно из его вывода, в котором считается, что ускорение силы тяжести постоянно и на любой высоте $g=g_0$). Мы же собираемся улететь от Земли насовсем, на «бесконечность». Как меняется потенциальная энергия тела на больших расстояниях от Земли (или другого достаточно массивного тела)?

В выяснении этого вопроса нам может помочь аналогия с взаимодействием электрических зарядов. Сила кулоновского взаимодействия точечных зарядов q и Q, находящихся на расстоянии R друг от друга, равна kqQ/R^2, а их взаимная потенциальная энергия равна kqQ/R. Сила тяготения также обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами (материальными точками). Похоже, что потенциальная энергия их взаимодействия будет отличаться от силы только тем, что расстояние в знаменателе должно стоять не во второй, а в первой степени. Однако мы должны вспомнить, что потенциальная энергия — величина относительная. Однозначный смысл имеет только разность потенциальных энергий, а выбор нулевого уровня энергии — в наших руках. И если в формуле mgH нулевая энергия приписывается телу, находящемуся на поверхности Земли, то величина GmM/R обращается в нуль на бесконечности. На любом конечном расстоянии энергия притяжения меньше, значит, она есть величина отрицательная (еще раз подчеркнем, что это связано только с выбором нулевого уровня).

Итак, окончательно потенциальную энергию тела массы m в поле тяготения тела массы M в зависимости от расстояния R между ними можно записать следующим образом:

$$E_p=-\frac{GmM}{R}.$$

Для того чтобы хотя бы с нулевой скоростью «доползти» до бесконечности, нам надо иметь как минимум нулевую полную энергию. Другими словами, должно быть выполнено неравенство

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{GmM}{R}\geqslant0.$$

Значит, телу для ухода на бесконечность нужна скорость

$$v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{2gR},$$

где g — ускорение силы тяжести на расстоянии R от центра «планеты». Подставляя в эту формулу $g=g_0$ и $R=R_\text{З}$, получаем знакомое значение $v_{\text{II к}}=11{,}2$ км/с.

Напомним, что при этом значении начальной скорости тело, «брошенное» с поверхности Земли, движется по параболе (отсюда еще одно название второй космической скорости — «параболическая»), если скорость еще больше — по гиперболе. Отметим также, что направление скорости почти не имеет значения, надо лишь чтобы тело не врезалось в Землю. В нашем случае это означает, что скорость может быть направлена перпендикулярно радиусу Земли, проведенному в точку, где находится спутник, может иметь составляющую, направленную по радиусу от центра, но не к Земле. Достаточно ясно, впрочем, что значение Δv будет минимальным тогда, когда векторы $\vec{v}_{\text{I к}}$, $\vec{\Delta v}$, а следовательно, и $\vec{v}_{\text{II к}}$ направлены одинаково.

Теперь, разобравшись с расчетной стороной задачи о переводе спутника в ранг межпланетной станции, перейдем к «инженерной». В качестве примера обсудим такой вопрос: Какой надо иметь запас топлива, чтобы космонавты, которые находятся на космической станции, обращающейся вокруг Луны, не потеряли надежду на возвращение на Землю?

Рассмотрим конкретную задачу.

Задача 2. *Какую часть массы станции, летающей вокруг Луны по круговой орбите радиусом $2R_л$ ($R_л = 1{,}74\cdot 10^3$ км — радиус Луны), должно составлять топливо, чтобы в результате кратковременной работы двигателя можно было выйти из поля тяготения Луны? Скорость истечения продуктов сгорания топлива из реактивного двигателя $u = 4$ км/с. Ускорение силы тяжести на поверхности Луны $g_л = 1{,}64$ м/с^2.*

Сначала надо узнать первую (круговую) и вторую (параболическую) космические скорости для тела, находящегося в поле тяготения Луны на расстоянии $2R_л$ от ее центра. Круговая скорость $v_к = \sqrt{gR} = \sqrt{g_л R_л/2} = 1{,}19$ км/с. Параболическая скорость в $\sqrt{2}$ раз больше: $v_п = 1{,}69$ км/с. Следовательно, скорость станции надо изменить на величину $\Delta v = 0{,}5$ км/с.

Пересядем в систему координат, которая имеет скорость станции перед моментом включения двигателя. В этой системе продукты сгорания топлива, очевидно, будут иметь скорость u, а станция должна получить скорость Δv, направленную в противоположную сторону. Запишем закон сохранения импульса:

$$xmu = (1 - x)\, m\Delta v$$

(x — искомая доля массы m, которую составляет топливо), откуда получаем

$$x = \Delta v/(u + \Delta v) = 0{,}11 \text{ (то есть 11 \%)}.$$

Правомерность нашего решения, однако, требует некоторых пояснений. Во-первых, станция (и газы) находится в поле тяжести Луны, и ее импульс за время работы двигателя может измениться под действием этого поля. Поэтому вправе ли мы пользоваться законом сохранения импульса? Наше оправдание заключается в том, что двигатель работает непродолжительное время, реально — минуту-другую. Период же обращения станции вокруг Луны, как нетрудно сосчитать (он равен $2\pi\cdot 2R_л/v_к$), более 5 часов. Сила тяжести за такое время создает изменение скорости станции всего в несколько метров в секунду (расчет рекомендуем провести самостоятельно), а этим можно пренебречь.

Во-вторых, продукты сгорания выбрасываются двигателем постепенно, по мере сгорания топлива, и скорость станции в течение этого промежутка времени меняется. Действительно, скорость газов относительно исходной системы отсчета непостоянна, ведь u — скорость относительно ракеты. Но мы не зря «перебрались» с Земли на Луну. На нашей орбите необходимое изменение скорости станции заметно меньше скорости газов, и мы не делаем существенной ошибки, считая, что все продукты сгорания имеют одну и ту же скорость. Вот если бы мы обсуждали старт с околоземной круговой орбиты, где Δv почти равно u, такой расчет был бы слишком грубым.

Наконец, третье обстоятельство, наименее очевидное. Нужна ли в данном случае параболическая скорость? Казалось бы, космонавтам достаточно добраться до той точки, где притяжение к Земле сильнее притяжения к Луне, а на бесконечность уходить не обязательно. Какую скорость для этого должен иметь корабль? Луна уступает Земле по массе в 81 раз, значит, точка «пересадки» из сферы притяжения к Луне во владения Земли в 9 раз ближе к Луне, чем к Земле, то есть она находится на расстоянии около 38 000 км от Луны (расстояние от Земли до Луны 384 000 км), а это в 22 раза больше радиуса Луны. Из закона сохранения энергии

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{g_л}{4}\cdot 2R_л = -m\frac{g_л}{(22)^2}\cdot 22R_л$$

найдем

$$v = v_п\sqrt{10/11} = 1{,}61 \text{ км/с}$$

— полученная скорость несколько меньше параболической. Как видим, разница невелика, однако и этот выигрыш оказывается призрачным. Действительно, мы исходили из того, что в точке пересадки скорость может быть равной нулю. Очевидно, что касательная составляющая скорости (так называемая секториальная скорость) в этой точке также обратится в нуль. Следовательно, эта последняя должна быть нулевой и сразу же по окончании работы двигателя, то есть скорость $\vec{v}$ должна быть направлена по радиусу от центра Луны. А тогда дополнительная скорость Δv равна совсем не $v-v_к$, а $\sqrt{v^2+v_к^2}=2$ км/с! Вот вам и выигрыш!

И все-таки выиграть можно. Оказывается, «выгодна» та орбита, у которой точка старта с круговой орбиты является периселением, а точка «пересадки» — апоселением (для Земли — Геи — это перигей и апогей, а для Луны — Селены — периселений и апоселений).

Попробуем рассчитать эту орбиту.

Задача 3. *Какую скорость должен иметь корабль на минимальном удалении от Луны $R_1=2R_л$, если максимальное его удаление от Луны $R_2=22R_л$? (Влиянием тяготения Земли можно пренебречь.)*

Запишем для корабля в точках, соответствующих расстояниям R_1 и R_2, закон сохранения энергии и второй закон Кеплера:

$$\frac{mv_1^2}{2}-G\frac{mM_л}{R_1}=\frac{mv_2^2}{2}-G\frac{mM_л}{R_2},$$

$$v_1R_1=v_2R_2.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$v_1=\sqrt{\frac{2GM_л(1/R_1-1/R_2)}{1-R_1^2/R_2^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2g_лR_л(R_л/R_1-R_л/R_2)}{1-R_1^2/R_2^2}}=1{,}62\text{ км/с.}$$

Итак, вместо $v_п-v_к=0{,}5$ км/с оказывается достаточным изменение скорости на величину $v_1-v_п=0{,}43$ км/с. В переводе на вопрос о запасе топлива это означает, что вместо 11 % надо иметь 9,7 %. Как видим, разница есть, хотя и небольшая.

Впрочем, вас ждет еще одно разочарование. Предположим, что космонавты достигли рассчитанной «точки пересадки». Скорость корабля в этот момент можно определить, используя все тот же второй закон Кеплера:

$$v_2=v_1R_1/R_2=0{,}15\text{ км/с.}$$

Но ведь это скорость относительно Луны! А Луна сама движется относительно Земли. В сферу притяжения Земли корабль попал — он оторвался от Луны. Но насколько близко ему удастся подойти к Земле? Сколько еще потребуется топлива, чтобы все-таки до нее добраться? Эти вопросы вынесены в упражнения для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Найдите скорость корабля (см. задачу 3 в статье) относительно Земли при переходе из сферы притяжения Луны в сферу притяжения Земли.

2. Точка «перехода» является апогеем орбиты корабля. Насколько близко к Земле он подходит в перигее? Влиянием тяготения Луны можно пренебречь.

3. Какой дополнительный запас топлива надо иметь на корабле, чтобы достигнуть Земли, то есть перейти на орбиту, перигей которой находится на земной поверхности? (Предполагается, что переход на новую орбиту происходит путем кратковременного включения двигателя в апогее старой, то есть сразу после входа в сферу притяжения Земли.)

„Квант" улыбается

Ни малейшей работы!

В конце 90-х годов прошлого века Р. Вуд работал помощником профессора Висконсинского университета Б. Сноу, который был большим энтузиастом лекционных демонстраций. Вуд рассказывает: «Иллюстрируя разницу между силой и работой, которая определяется как произведение силы на путь, Сноу обычно упирался в край лекционного стола и толкал его изо всей силы. «Я нажимаю, жму, жму, жму! — лицо его становилось красным, на лбу выступал пот... — Никакого движения нет — я жму и жму, и не совершаю ни малейшей работы!» — и он чуть не падал от усталости.».

Материал представил
Б Е Явелов

Варианты вступительных экзаменов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика
Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\sin\left(\sqrt{x}+\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{3}=0.$$

2. Окружность радиуса 2 касается окружности радиуса 4 в точке B. Прямая, проходящая через точку B, пересекает окружность меньшего радиуса в точке A, а большего радиуса — в точке C. Найдите длину отрезка BC, если длина отрезка AC равна $3\sqrt{2}$.

3. Решите неравенство

$$3^{\frac{1}{4}\log_3^2 x} \leqslant \frac{1}{3}\,x^{\frac{1}{3}\log_3 x}.$$

4. Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 9 часов утра выехал автомобилист и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Автомобилист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге в $1^1/_2$ раза, а мотоциклист — в $1^2/_3$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 12 часов, автомобилист приехал в город в 14 часов 20 минут, а мотоциклист приехал в село в 16 часов. Определите, сможет ли автомобилист приехать в город до 14 часов 40 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} x-by+az^2=0,\\ 2bx+(b-6)\,y-8z=8 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z).

6. В основании пирамиды $PQRST$ лежит четырехугольник $QRST$, у которого стороны QR и ST параллельны, длина стороны QR равна 6, длина стороны QT равна 4, а величина угла RQT равна 120°. Длина ребра PQ равна $2\sqrt{14}$. Найдите объем пирамиды, если известно, что через прямые QR и ST можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.

Вариант 2
(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_5\left((x+1)(x+3)\right)\leqslant 1.$$

2. Найдите координаты точки, лежащей на прямой $-4x-3y=25$ и наименее удаленной от начала координат.

3. Число двухкомнатных квартир в доме в четыре раза больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных квартир увеличить в пять раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если известно, что их не меньше 100?

4. В окружности радиуса $R=\sqrt{6}$ проведены хорда MN и диаметр MP. В точке N проведена касательная к окружности, которая пересекает продолжение диаметра MP в точке Q под углом в 60°. Найдите длину медианы QD треугольника MQN.

5. Решите уравнение

$$2\sqrt{3}\sin 5x-\sqrt{3}\sin x=$$
$$=\cos 24x\cdot\cos x+2\cos 5x-6.$$

6. Найдите значения a и b, при которых наибольшее значение функции

$$y(x)=\left|\frac{9}{4}\,\frac{5^x+5^{-x}-2}{5^x+5^{-x}+2}+\right.$$
$$\left.+(a-b)\,\frac{3}{2}\,\frac{5^x-1}{5^x+1}+2a+b\right|$$

на отрезке $[-1; 1]$ является наименьшим.

Вариант 3
(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}}=8^x.$$

2. Решите неравенство

$$x-1>\frac{4x}{3-x}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y=x,\\ 2\sin x+\sin 2x=2\cos^2\dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$x\log_2(x^2)+1=2x+2\log_4 x.$$

5. В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M, делящая отрезок SB в отношении 3:5, считая от точки S. Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

6. В треугольнике ABC проведена высота AH длины h, медиана AM длины l и биссектриса AN. Точка N — середина отрезка MH. Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC.

Вариант 4
(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_3(x-8)=2-\log_3 x.$$

2. Три одинаковых комбайна, работая вместе, убрали первое поле, а затем два из них убрали второе поле (другой площади). Вся работа заняла 12 часов. Если бы три комбайна выполнили половину всей работы, а затем оставшуюся часть сделал один из них, то работа заняла бы 20 часов. За какое время два комбайна могут убрать первое поле?

3. Найдите все значения x из интервала $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, при которых производная функции

$$f(x)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos x\right)\cos x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

равна нулю.

4. На стороне AB треугольника ABC взята точка D, а на стороне AC — точка E так, что длина отрезка AE равна длине отрезка BD и равна 2. Прямые BE и CD пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника BOC, если длина каждой из сторон AB и BC равна 5, а длина стороны AC равна 6.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{|y+3|} = 1 - \sqrt{5|x|}, \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Вариант 5
(биологический факультет)

1. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

2. Решите неравенство

$$2^x - 1 < 6 \cdot 2^{-x}.$$

3. Два лыжника вышли с линии старта одновременно с постоянными скоростями по одному и тому же маршруту, причем скорость первого лыжника составила 7/6 скорости второго. Вслед за ними через 20 минут отправился третий лыжник, который, двигаясь со скоростью 18 км/час, догнал второго лыжника на 30 минут раньше, чем первого. Какова скорость первого лыжника?

4. В треугольнике ABC длина стороны AC равна $3\sqrt{3}$, длина стороны BC равна $\sqrt{13}$. Точка M лежит на стороне AC, точка N лежит на стороне BC, причем прямые MN и AB параллельны. Отрезок MC в 2 раза длиннее отрезка AM. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке R, лежащей между точками M и N, причем радиус окружности, описанной около треугольника AMR, равен $\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}$. Найдите длину стороны AB.

5. Найдите все значения b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 10y^2 = b^4 - 6b^3 + 9b^2 - 19 + \sqrt{85}, \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 6
(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$\sin x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

2. Решите неравенство

$$\log_5(1 - x) < \log_5(x + 3).$$

3. При одновременной работе двух насосов разной мощности бассейн наполняется водой за 8 часов. После ремонта насосов производительность первого из них увеличилась в 1,2 раза, а второго — в 1,6 раза, и при одновременной работе обоих насосов бассейн стал наполняться за 6 часов. За какое время будет наполняться бассейн одним первым насосом после ремонта?

4. Найдите площадь треугольника, образованного осью абсцисс и двумя касательными, проведенными из точки $A(0; 3)$ к графику функции $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 5$.

5. В треугольнике ABC точка M делит сторону BC пополам, а точка K лежит на стороне AC, причем длина отрезка AK в 4 раза меньше длины стороны AC. Отрезки AM и BK пересекаются в точке O. Длина отрезка AM равна 5, длина отрезка BK равна 10. Найдите длину отрезка MK, если величина угла AOB равна 135°.

Вариант 7
(географический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x-1}{x^2+6x-4} > \frac{1}{6}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{x^2}\sqrt{5} + \log_x \frac{1}{125} = \frac{11}{8}.$$

3. Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем в первую цистерну поступает 120 литров воды в минуту, а во вторую — 40. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, а объем воды в третьей цистерне в два раза меньше, чем во второй, и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Сколько литров воды поступает за одну минуту в третью цистерну?

4. В выпуклом четырехугольнике $ABKC$ длина стороны AB равна $\sqrt{3}$, длина диагонали BC равна 1, а величины углов ABC, BKA и BKC равны 120°, 30° и 60° соответственно. Найдите длину стороны BK.

5. Для каждого значения a, удовлетворяющего неравенствам $0 < a < 1$, найдите наименьшее значение выражения $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - a(x - y)$ при условии $\sin(\pi xy) = 0$.

Вариант 8
(геологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x.$$

2. Длины сторон AB, BC и AC треугольника ABC образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите отношение высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A, к радиусу вписанной окружности.

3. Решите уравнение

$$\frac{2 \cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3.$$

4. Студенческий строительный отряд оборудовал прямоугольную спортплощадку площадью 0,1 га, установив с противоположных более длинных сторон — трибуны, а с двух других сторон — проволочную сетку. Стоимость установки одного погонного метра трибун и сетки равны соответственно 7 руб. и 3 руб. На установку трибун и сетки израсходовано 820 рублей. Найдите длины сторон спортплощадки.

5. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}} > \frac{1}{x} - \frac{1}{b}.$$

6. При всех значениях параметра $p \leqslant 9$ найдите решения уравнения

$$3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{15}\sin x - \frac{3\pi}{5}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{7}\sin^2 x + \frac{3\pi}{14}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{14} - \frac{\pi}{7}\cos(2x)\right) = 6\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{15}\sin x + \frac{2\pi}{5}\right) - p$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

Вариант 9

(отделение политической экономики экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$5^{x+1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}.$$

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x+4\sin y=-11, \\ -2x+5\sin y=\dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

3. Найдите все действительные решения уравнения

$$\sqrt{3x+4}\,(9x^2+21x+10)=0.$$

4. В прямоугольнике $ABCD$, где $|AB|=6$, $|AD|=3\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, расположены две окружности. Окружность радиуса 2 с центром в точке K касается сторон AB и AD. Окружность радиуса 1 с центром в точке L касается стороны CD и первой окружности. Найдите площадь треугольника CLM, если M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L.

5. Линию, связывающую города А и Б, обслуживают самолеты трех типов. Каждый самолет первого, второго и третьего типа может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найдите число действующих на линии самолетов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 8.

6. В пирамиде $SABC$ ребра SC, BC и AC равны соответственно $\frac{1}{6}\sqrt{93}$, 3 и 4. Известно, что угол ABC тупой, ребро SC перпендикулярно к плоскости основания ABC, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\frac{8}{\sqrt{15}}$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S, точку пересечения медиан треугольника ABC и центр окружности, вписанной в этот треугольник.

Вариант 10

(отделения экономической кибернетики и планирования народного хозяйства экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$2^{|x+1|}=(\sqrt{2})^{-2x+3}.$$

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 6\sin x+7\log_y 3=-10, \\ -5\sin x+2\log_y 3=0{,}5. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{-25x^2+15x-2}\,(8x^2-6x+1)\geqslant 0.$$

4. В окружность радиуса $2\sqrt{7}$ вписана трапеция $ABCD$, причем ее основание AD является диаметром, а угол BAD равен $\frac{\pi}{3}$. Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P такой, что $AP:PD=1:3$. Найдите площадь треугольника BPE.

5. В течение нескольких дней двое рабочих изготовляли специальные детали, причем ежедневная выработка деталей у каждого рабочего была постоянной. В итоге за все эти дни второй рабочий изготовил на k деталей больше, чем первый, где число k удовлетворяет неравенствам $127\leqslant k\leqslant 132$. Если бы первый рабочий увеличил ежедневную выработку в 2 раза, то за то же количество дней он изготовил на 77 деталей больше, чем второй. Сколько дней рабочие изготовляли детали? Какова была ежедневная выработка у каждого из них?

6. В наклонной треугольной призме $PQRP_1Q_1R_1$ площадь боковой грани PP_1R_1R равна 64, а косинусы двугранных углов при ребрах PP_1 и QQ_1 равны соответственно $\frac{\sqrt{10}}{4}$ и $\frac{1}{4}$. В эту призму помещена треугольная призма $DEFD_1E_1F_1$ так, что вершины D, E, F лежат на отрезках PQ, QR, RP, а вершины D_1, E_1, F_1 — на отрезках P_1Q_1, Q_1R_1, R_1P_1 соответственно. Известно, что призма $DEFD_1E_1F_1$ имеет наименьшую площадь боковой поверхности среди всех так расположенных призм. Найдите площадь боковой поверхности призмы $DEFD_1E_1F_1$.

Вариант 11

(отделение прикладной социологии философского факультета)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+7y=5, \\ 2x+3y=-6. \end{cases}$$

2. Найдите площадь ромба $ABCD$, если тангенс угла ABC равен $\sqrt{8}$, а длина диагонали BD равна 3 см.

3. Решите уравнение

$$2\sin^2 x-5\cos x=4.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_3 x-2}>\frac{1}{\log_3 x}.$$

5. Найдите все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+24x-28y+167<0, \\ x+2y<\dfrac{15}{2}. \end{cases}$$

Вариант 12

(факультет психологии)

1. Найдите $\operatorname{tg}^2 2\beta$, если $\cos\beta=-\frac{\sqrt{7}}{6}$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{3x-3}=5-2x.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\lg x^2-2}{4-3\lg x^4}>-\frac{1}{2}.$$

4. Имеются три слитка сплавов, содержащих золото. Вес каждого слитка — 1 кг. Если сплавить 500 г первого сплава и 200 г второго сплава, то в получившимся слитке будет содержаться столько же золота, сколько его содержится в 300 г третьего сплава. Количества золота в данных слитках, взятые в порядке номеров сплавов, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго сплава нужно взять, чтобы в них содержалось столько же золота, сколько его содержится в 300 г третьего сплава?

5. В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Продолжения боковых сторон трапеции AD и BC за точки D и C пересекаются в точке E. Периметр треугольника DCE и длина основания трапеции AB равны соответственно 60 и 20, величина угла ADC равна β. Найдите радиус окружности.

6. Найдите наименьшее из значений, которые принимает выражение $x+5y$, если x, y положительны и удовлетворяют неравенству

$$x^2-6xy+y^2+21\leqslant 0.$$

Вариант 13

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Решите неравенство

$$x+3+\frac{4}{x-1}<0.$$

2. Решите уравнение

$$\cos^2 x-\cos 2x=\sin x.$$

3. Из заготовки, имеющей форму шара с диаметром 12, вытачивается прямой цилиндр с высотой h. При каком значении h объем вытачиваемого цилиндра максимален?

4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 8, а величина угла ACB равна 60°. Прямая, параллельная стороне AB, пересекает сторону AC в точке D, а сторону BC в точке E. Длины отрезков BC и DC равны, а длина отрезка DE равна 3. Найдите длину стороны BC.

5. В ящике находятся 13 красных шаров и 17 белых шаров. Разрешается производить в любом порядке и в любом количестве следующие операции:

а) увеличить на 2 число красных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых шаров;

б) увеличить на 1 число красных шаров и одновременно увеличить на 2 число белых шаров;

в) уменьшить на 2 число красных шаров и одновременно увеличить на 1 число белых;

г) уменьшить на 1 число красных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых.

Можно ли, совершая такие действия, добиться того, чтобы в ящике оказалось 37 красных и 43 белых шаров? Ответ обоснуйте.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Тело массой M свободно падает без начальной скорости с высоты H (рис. 1). На высоте h в него попадает другое тело массой m, которое в момент соударения имеет лишь горизонтальную составляющую скорости. Оба тела слипаются. Через какое время после этого соударения тела упадут на землю? Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения равно g.

2. У трех невесомых одинаковых пружин одни концы соединены вместе, а противоположные закреплены на потолке в точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника со стороной $a=0,2$ м (рис. 2). В нерастянутом состоянии пружины располагаются горизонтально, а при подвешивании к точке соединения пружин груза массой $M=0,6$ кг эта точка опускается на $H=0,2$ м. Найдите жесткость одной пружины. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

3. Прибор для измерения плотности серной кислоты (ареометр) представляет собой стеклянный баллончик объемом V_0 с припаянной к нему длинной цилиндрической трубочкой сечением $S=10$ мм², в которую помещена шкала (рис. 3). На дне баллончика находится свинцовый груз. Общая масса ареометра $m=3$ г. Деления шкалы ареометра нанесены через $\Delta\rho=0,01$ г/см³. Каково расстояние между штрихами Δh (в мм) вблизи деления, соответствующего плотности $\rho=1,23$ г/см³?

4. Два одинаковых баллона заполнены газами при температуре $T=300$ К. В одном баллоне находится кислород под давлением $p_1=7\cdot 10^4$ Па, в другом — гелий под давлением $p_2=2,5\cdot 10^5$ Па. В некоторый момент весь гелий из второго баллона перекачивают в первый. Какую плотность будет иметь смесь газов при той же температуре? Для кислорода $M_1=32$ кг/кмоль, для гелия $M_2=4$ кг/кмоль; $R=8,31\cdot 10^3$ Дж/(кмоль·К).

5. В цилиндре с поршнем содержится идеальный газ массой m с молярной массой M. Этот газ в исходном состоянии *1* имел температуру T_1 (рис. 4). Его нагревают до температуры T_2 так, что давление газа растет линейно с ростом объема. Затем газ охлаждают при постоянном объеме до температуры T_3. При этом давление газа уменьшается до исходного давления (то есть давления в состоянии *1*). На заключительном этапе цикла газ сжимают при постоянном давлении до исходного состояния. Чему равна работа, совершенная газом за цикл?

6. В теплоизолированный сосуд (калориметр), содержащий $m_1=0,4$ кг воды при температуре $T_1=290$ К, брошено $m_2=0,05$ кг мокрого снега (снег с водой). В результате температура воды в сосуде установилась на $\Delta T=5$ К ниже исходной. Сколько воды было в мокром снеге? Теплоемкость сосуда $C=0,16$ кДж/К, удельная теплоемкость воды $c_1=4,2$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления снега $\lambda=334$ кДж/кг.

7. Два конденсатора емкостью $C_1=1$ мкФ и $C_2=2$ мкФ подключены к источнику постоянного напряжения, как показано на рисунке 5. Сопротивления резисторов $R_1=300$ Ом, $R_2=100$ Ом, $R_3=100$ Ом. При разомкнутом клю-

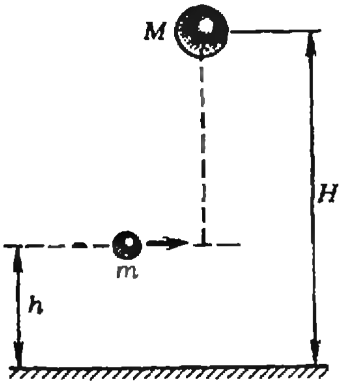


Рис. 1.

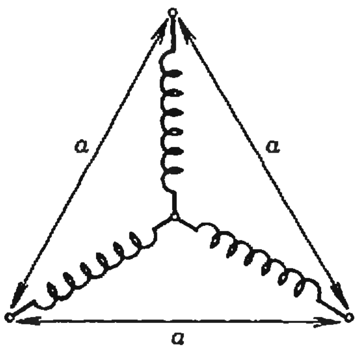


Рис. 2.

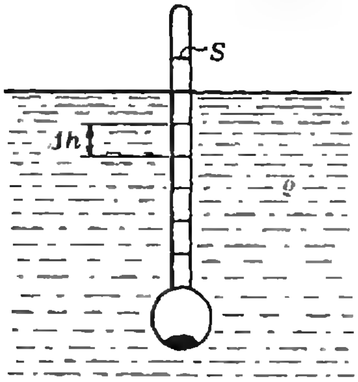


Рис. 3.

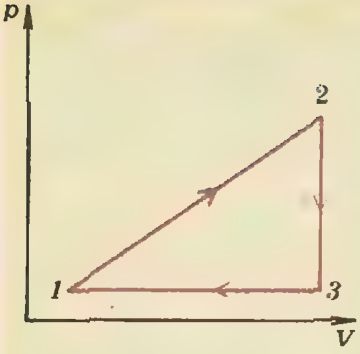


Рис. 4.

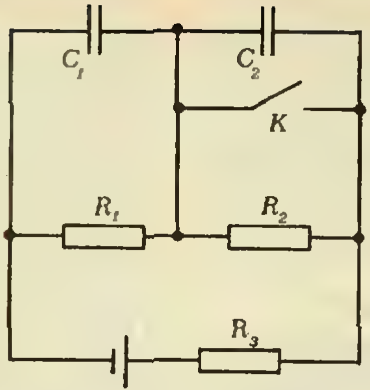


Рис. 5.

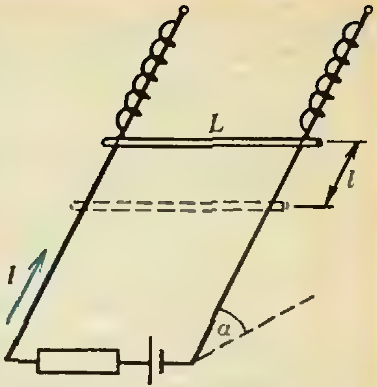


Рис. 6.

че конденсатор емкостью C_2 имеет заряд $Q_2=4\cdot10^{-6}$ Кл. Какой заряд установится на конденсаторе емкостью C_1, если ключ K замкнуть? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

8. На два гладких проводящих рельса, составляющих угол $\alpha=60°$ с горизонтом, положена проводящая перемычка длиной $L=10$ см, к которой прикреплены две одинаковые невесомые пружины жесткостью $k=0{,}5$ Н/м каждая, надетые на рельсы (рис. 6). Верхние концы пружин закреплены на рельсах на одинаковой высоте. К нижним концам рельсов присоединен через резистор источник питания, так что по цепи течет ток $I=5$ А. В определенный момент включается однородное магнитное поле, направленное вертикально вверх, медленно возрастающее по модулю от нуля до некоторого максимального значения B и далее остающееся постоянным. При этом положение равновесия перемычки смещается вдоль рельсов на расстояние $l=1$ см. Определите величину B. Сопротивлением рельсов пренебречь.

9. Стеклянная равнобедренная трехгранная призма с прямым углом ABC гранью AC опущена неглубоко в жидкость (рис. 7). При каких значениях показателя преломления стекла горизонтальный луч света, падающий на боковую грань AB и попадающий на горизонтальную грань AC, полностью отражается от границы стекло — жидкость? Жидкость прозрачна, ее показатель преломления $n_ж=1{,}515$.

10. Оптическая система состоит из тонкой линзы с фокусным расстоянием F и плоского зеркала, расположенного за линзой параллельно ее оптической оси OO' (рис. 8). На прямой AB, перпендикулярной плоскости зеркала и проходящей через ось линзы, находится точечный источник света S. Расстояние от источника до линзы равно d ($d>F$), а до оси линзы — H ($H\ll d$). На каком расстоянии должно находиться зеркало от оси линзы, чтобы изображение, получаемое с помощью линзы и зеркала, было на оптической оси линзы?

Геологический факультет

1. Ракета запущена вертикально вверх с поверхности Земли и на участке разгона имела постоянное ускорение $a=19{,}6$ м/с^2. Какое время падала ракета с ускорением $g=9{,}8$ м/с^2 после достижения наибольшей в полете высоты, если на участке разгона движение продолжалось в течение времени $\tau=1$ мин?

2. Однородный шар массой $m=7$ кг привязан за веревку к гвоздю, вбитому в стену. Какую горизонтальную силу нужно приложить к середине веревки, чтобы натяжения нижней и верхней ее половин относились как 1:2, а шар не касался стенки?

3. Однородный стержень длиной $l=1$ м и массой $m=0{,}8$ кг несет на концах два маленьких шарика, массы которых $m_1=0{,}2$ кг и $m_2=0{,}25$ кг. Стержень может поворачиваться вокруг горизонтальной оси, находящейся на расстоянии $l_1=0{,}3$ м от шарика меньшей массы. Чтобы стержень был расположен горизонтально, под шарик большей массы подставлена опора. Найдите силу, действующую на опору.

4. Два одинаковых сосуда соединены трубкой пренебрежимо малого объема, в которую помещена теплоизолирующая перегородка. В одном из сосудов находится газ при температуре $t_1=27$ °C и некотором давлении, в другом — тот же газ при температуре $t_2=227$ °C и том же давлении. Во сколько раз изменится давление газа в сосудах, если довести температуру газа в каждом из них до одного и того же значения $t_3=127$ °C, а перегородку удалить?

5. Газ, взятый в количестве $\nu=5$ моль, сначала нагревают при постоянном объеме так, что абсолютная температура газа возрастает в $n=3$ раза, а затем сжимают при постоянном давлении, доводя температуру до первоначального значения $T=100$ К. Какая работа совершена при сжатии? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

6. В двух вершинах равностороннего треугольника помещены одинаковые заряды $q_1=q_2=q=+4$ мкКл. Какой точечный заряд

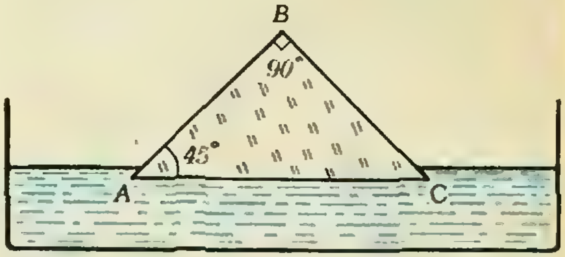


Рис. 7.

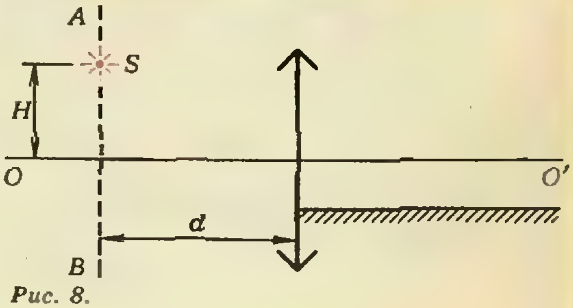


Рис. 8.

необходимо поместить в середину стороны, соединяющей заряды q_1 и q_2, чтобы напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника оказалась равной нулю?

7. Источник с ЭДС $\mathscr{E}=50$ В и с внутренним сопротивлением $r=1{,}2$ Ом должен питать дуговую лампу с сопротивлением $R=6{,}0$ Ом, требующую для нормального горения напряжения $U=30$ В. Определите сопротивление резистора, введенного последовательно в цепь лампы для ее нормального горения.

8. Точечный источник света расположен на дне водоема глубиной $h=0{,}6$ м. В некоторой точке поверхности воды вышедший в воздух преломленный луч оказался перпендикулярным лучу, отраженному от поверхности воды обратно в воду. На каком расстоянии от источника на дне водоема достигнет дна отраженный луч? Показатель преломления воды $n=4/3$.

9. Точечный источник света описывает окружность в плоскости, перпендикулярной оптической оси тонкой собирающей линзы, фокусное расстояние которой $F=7$ см. Изображение источника на экране расположено на расстоянии $f=0{,}35$ м от линзы. Каково отношение ускорений изображения и источника?

10. Мнимое изображение предмета в рассеивающей линзе находится от нее на расстоянии в два раза меньшем, чем предмет. Найдите расстояние от линзы до изображения, если фокусное расстояние линзы F известно.

Публикацию подготовили *А. Н. Боголюбов, Б. Б. Буховцев, В. Я. Галкин, Л. А. Муравей, И. Н. Сергеев, С. С. Чесноков*

Ответы, указания, решения

Выручает описанная окружность
(см. с. 41)

1. 40°. Указание. См. рисунок 1: $AK=KB$, поэтому $\angle ABK=20°$; $\angle KDE=\angle KBE=60°-20°=40°$.

2. 110°. Указание. См. рисунок 2: треугольник BOC — правильный, BM — серединный перпендикуляр к отрезку OC; $\angle BMC=180°-30°-40°$.

3. 60°. Указание. См. рисунок 3: треугольник AOB — правильный, OK — серединный перпендикуляр к отрезку AC, BK — серединный перпендикуляр к отрезку AO.

4. 80°. Указание. По свойству IV точка B — центр окружности, описанной около треугольника AMC (сделайте рисунок). Обозначив $\angle BCM$ через x, из равнобедренного треугольника BCM находим, что $\angle MBC=180°-2x$; $\angle ABM=280°-2x$; $\angle ACM=x+40°$. Из условия $\angle ABM=\angle ACM$ находим $x=80°$.

5. 81°. Указание. См. рисунок 4: треугольник DOE — правильный, где O — центр окружности, описанной около треугольника CDE, OA — серединный перпендикуляр к отрезку CD, треугольники AOE и ADE равны, $\angle CDO=\angle EAO=21°$, так что $\angle CDE=60°+21°=81°$.

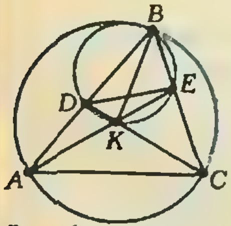


Рис. 1.

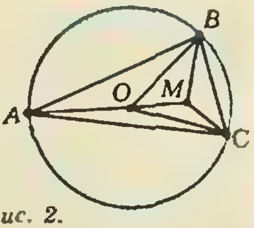


Рис. 2.

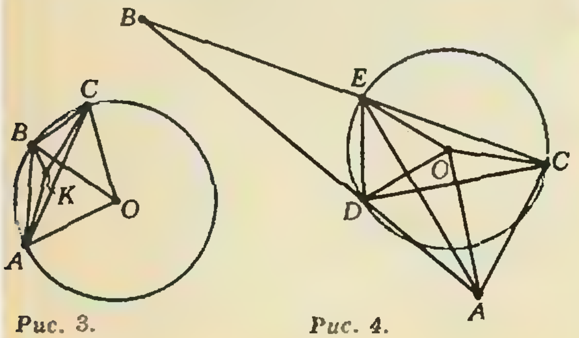


Рис. 3.

Рис. 4.

Маневрирование в космосе

1. Расстояние от Земли до Луны $R=3{,}84\times10^5$ км$=60\ R_З$. Круговая скорость на таком расстоянии равна скорости Луны $v_Л=v_{Iк}/\sqrt{60}=1{,}02$ км/с. Скорость корабля на расстоянии от Луны $R_2=22R_Л$ найдем из второго закона Кеплера: $v_2=v_1R_1/R_2=0{,}15$ км/с (здесь $v_1=1{,}62$ км/с и $R_1=2R_Л$ — см. задачу 3 в статье). Скорость корабля относительно Земли $v=v_Л\pm v_2$, т. е. в лучшем случае $v=v_Л-v_2=0{,}87$ км/с.

2. Найденная в предыдущей задаче скорость v — это скорость $v_а$ в апогее той орбиты, которую корабль опишет вокруг Земли. Расстояние в апогее $R_а=3{,}456\cdot10^5$ км$=54{,}17\ R_З$. Из этих данных (как в задаче 3 в статье) находим расстояние в перигее: $R_п=26{,}5\ R_З$. Таким образом, запаса топлива в количестве 9,7 % от массы корабля хватает лишь на то, чтобы, оторвавшись от Луны, попасть в дальние окрестности Земли.

3. Зная расстояние в апогее $R_а=54{,}17\ R_З$, с помощью закона сохранения энергии и второго закона Кеплера найдем скорость в апогее $v'_а$, при которой перигей орбиты лежит на расстоянии $R_З$ от центра Земли: $v'_а=v_{IIк}/\sqrt{R_а/R_З(1+R_а/R_З)}=0{,}2$ км/с. Скорость надо изменить на величину $\Delta v'=v_а-v'_а=0{,}67$ км/с. Для этого надо израсходовать $\Delta v'/(u+\Delta v')=0{,}143$, т. е. 14,3 % массы, которую имеет корабль в апогее, а это 12,9 % исходной массы корабля. Окончательно получаем, что в этом варианте перелета на Землю топливо должно составлять 22,6 % массы корабля на окололунной орбите.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $x=\frac{\pi^2}{36}(1+12n)^2\ (n\in Z)$.

2. $2\sqrt{2}$. Указание. Рассмотрите случаи внешнего и внутреннего касания и заметьте, что последний случай невозможен.

3. $]0;\ 3^{-2\sqrt{3}}]\cup[3^{2\sqrt{3}};\ \infty[$.

4. Нет. Решение. Пусть O — точка, где грунтовая дорога переходит в шоссе, x, y и z — расстояние от нее до села, до города и до места встречи соответственно, а u и v — ско-

рости автомобилиста и мотоциклиста на грунтовой дороге. Тогда время, за которое автомобилист проедет весь путь с первоначальной скоростью, равно $t=\frac{x+y}{u}$. Если встреча произошла на шоссе или в точке O, то из условия задачи имеем

$$t=\frac{x+z}{u}+\frac{y-z}{u}>\frac{x+z}{u}+\frac{3}{2}\,\frac{y-z}{1{,}5u}>$$
$$>3+\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{3}>5\frac{2}{3}.$$

Значит, в этом случае ответ на вопрос задачи отрицателен. Если же встреча произошла на грунтовой дороге, то

$$\begin{cases}\dfrac{x-z}{u}=3,\\[4pt] \dfrac{x-z}{v}=4,\\[4pt] \dfrac{x}{u}+\dfrac{y}{\frac{3}{2}u}=\dfrac{16}{3},\\[4pt] \dfrac{x}{v}+\dfrac{y}{\frac{5}{3}v}=7,\end{cases}$$

откуда, в частности, следует, что $v=\frac{3}{4}u$. Если $\alpha=\frac{x}{u}$, $\beta=\frac{y}{u}$, то $\alpha+\frac{2}{3}\beta=\frac{16}{3}$, $\alpha+\frac{3}{5}\beta=\frac{21}{4}$, поэтому $\alpha=\frac{9}{2}$, $\beta=\frac{5}{4}$ и $t=\alpha+\beta=\frac{23}{4}>5\frac{2}{3}$, то есть ответ и в этом случае отрицательный.

5. $-\frac{1}{2}<a<\frac{2}{3}$. **Решение.** Выражая x из первого уравнения исходной системы и подставляя его во второе, получим равносильную систему

$$x=by-az^2,$$
$$(b+2)(2b-3)y=2abz^2+8z+8.$$

Если в $b\notin\left\{-2;\ \frac{3}{2}\right\}$, то система совместна при любом значении a (достаточно взять $z=0$). Если $b=-2$, то система имеет решение тогда и только тогда, когда имеет корни уравнение $-4az^2+8z+8=0$, то есть при $a>-\frac{1}{2}$. Аналогично, при $b=\frac{3}{2}$, получим, что $a<\frac{2}{3}$.

6. $28\sqrt{3}$. **Решение.** Пусть две указанные в задаче плоскости пересекают пирамиду по равным четырехугольникам $QRS'T'$ и $Q'R'ST$

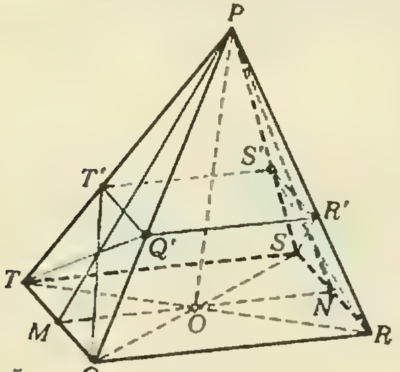


Рис. 5.

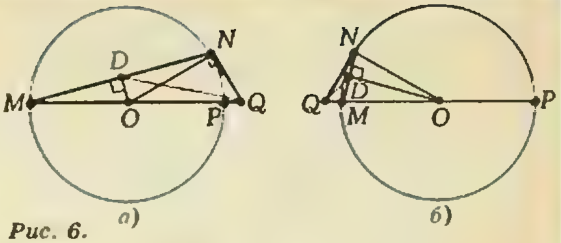


Рис. 6. а) б)

(рис. 5). Так как $QR\parallel ST$, то плоскость $QRS'T'$ параллельна прямой ST и $S'T'\parallel ST$. Аналогично получаем, что $Q'R'\parallel QR$. Равные четырехугольники $QRS'T'$ и $Q'R'ST$ являются трапециями, поскольку $Q'R'\parallel QR\parallel ST\parallel S'T'$ (если, например, еще и $QT'\parallel RS'$, то $Q'T\parallel R'S$ и плоскости PQT и PRS параллельны, что невозможно). Поэтому $QR=ST$ (ибо $QR>Q'R'$), следовательно, $Q'R'=S'T'$ и $QRST$, $Q'R'S'T'$ — параллелограммы. Так как $QT\parallel RS$ и $Q'T'\parallel R'S'$, от $QT\parallel Q'T'$ и $RS\parallel R'S'$ (иначе плоскости PQT и PRS были бы параллельны). Заметим, что $QT'\neq Q'T$, поскольку в противном случае трапеция $QTT'Q'$ была бы равнобедренной, и в силу равенства трапеций $QRS'T'$ и $Q'R'ST$, аналогично, равнобедренной была бы трапеция $RSS'R'$, следовательно, медианы SM, SN равнобедренных треугольников PRT, PRS были бы перпендикулярны прямым $QT\parallel RS$ и прямая QT была бы перпендикулярна плоскости PMN, а значит, и прямым $MN\parallel QR$ (т. е. $\widehat{RQT}=90^\circ\neq120^\circ$). Таким образом, $QT'=R'S$, $Q'T=RS'$ и так как $QT=RS$, $Q'T'=R'S'$, то трапеции $QTT'Q'$, $RSS'R'$ равны, следовательно, равны и треугольники PQT, PRS, откуда $PQ=PS$, $PT=PR$. Если O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $QRST$, то PO — медиана каждого из равнобедренных треугольников PQS, PRT, откуда PO — высота пирамиды $PQRST$.

Из данных задачи получаем

$$QS^2=RS^2+RQ^2-2RS\cdot RQ\cdot\cos60^\circ=28,$$
$$PO^2=PQ^2-\left(\frac{QS}{2}\right)^2=49.$$

Итак, искомый объем пирамиды равен

$$\frac{1}{3}\,PO\cdot QT\cdot QR\cdot\sin120^\circ=28\sqrt{3}.$$

Вариант 2

1. $[-2-\sqrt{6};\ -3[\cup]-1;\ \sqrt{6}-2]$.

2. $(-4;\ -3)$. **Указание.** Задача сводится к отысканию точки минимума функции

$$\rho^2=x^2+y^2=\frac{25}{9}(x^2+8x+25).$$

3. 132. **Указание.** Если n_1, n_2, n_3 — количество одно-, двух-, трехкомнатных квартир, то $n_2=4n_1$, $n_3=kn_1$, $5n_3-n_2=22$, $n_1+n_2+n_3\geqslant100$, где k — некоторое натуральное число. Отсюда $n_1(5k-4)=2\cdot11$, $n_1(5+k)\geqslant100$.

4. $\sqrt{\frac{5}{2}(2\pm\sqrt{3})}$. **Указание.** Пусть O — центр окружности. Возможны 2 случая (см. рис. 6 а), б)). В обоих из них $NQ=\sqrt{2}$. В первом случае $\widehat{QND}=105^\circ$, а $ND=\sqrt{6}\cos15^\circ$, во втором $\widehat{QND}=15^\circ$, $ND=\sqrt{6}\sin15^\circ$. Осталось применить теорему косинусов.

5. $x=\pi/3+2\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$. **Указание.** Перепишите уравнение в виде

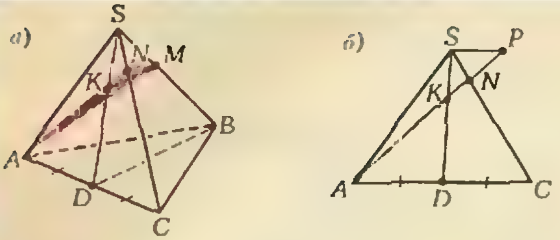


Рис. 7.

$$\sqrt{3+\cos^2 24x}\left(\frac{\sqrt{3}\sin x}{\sqrt{3+\cos^2 24x}}+\frac{\cos 24x\cos x}{\sqrt{3+\cos^2 24x}}\right)-$$
$$-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x-\frac{1}{2}\cos 5x\right)=6,$$

или

$$\sqrt{3+\cos^2 24x}\sin(x+\varphi)-4\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)=6, \qquad (*)$$

где $\varphi=\varphi(x)\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ и находится из условий $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+\cos^2 24x}}$, $\sin\varphi=\frac{\cos 24x}{\sqrt{3+\cos^2 24x}}$.

Левая часть (*) не больше 6, поэтому (*) равносильно системе

$$\begin{cases}\cos^2 24x=1,\\ \sin(x+\varphi)=1,\\ \sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)=-1,\end{cases}$$

которая в свою очередь, равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases}\cos 24x=1,\\ \sin(x+\varphi)=1,\\ \sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)=-1,\\ \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin\varphi=\frac{1}{2},\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos 24x=-1,\\ \sin(x+\varphi)=1,\\ \sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)=-1,\\ \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin\varphi=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

6. $a=-\frac{1}{6}$, $b=-\frac{1}{6}$. Указание. Пусть $t=\frac{3}{2}\left(\frac{5^x-1}{5^x+1}\right)$ (при $x\in[-1;\ 1]$ область значений t — тоже промежуток $[-1;\ 1]$). $p=a-b$, $q=2a+b$. Задача свелась к отысканию таких p и q, для которых наибольшее значение функции $g(t)=|t^2+pt+q|$ на отрезке $[-1;\ 1]$ является наименьшим.

Рассмотрим функцию $f(t)=t^2+pt+q$ и ее значения $f(0)=q$, $f(-1)=1-p+q$, $f(1)=p+q+1$. Пусть $\alpha=f(-1)-f(0)=1-p$, $\beta=f(1)-f(0)=1+p$. В зависимости от знака p, либо $\alpha\geqslant 1$, либо $\beta\geqslant 1$. Отсюда следует (докажите это!), что наибольшее значение функции $|f(t)|$ не меньше, чем 1/2, причем может быть равно 1/2 лишь при $p=0$. Итак, $f(t)=t^2+q$. Для функции $t^2-1/2$ максимум модуля в точности равен 1/2, если же $q>-1/2$ или $q<-1/2$, то он больше 1/2. Итак, $p=0$, $q=-1/2$.

Вариант 3

1. $\{-1;\ 4\}$. **2.** $]3;\ +\infty[$.

3. $\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\quad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\quad x=\pi+2\pi n,\\ n\in\mathbb{Z},\ n\geqslant 0,\\ y=\log_3 x.\end{cases}$

4. $\{1/2,\ 2\}$.

5. 9/95. Указание. Секущая плоскость пересекает пирамиду по треугольнику ANM (см. рис. 7, а)) так, что $MK\parallel BD$.

В плоскости ASC через точку S проведем прямую, параллельную AC (см. рис. 7, б)). Поскольку $\triangle AKD\sim\triangle KSP$, $\frac{SP}{AD}=\frac{SK}{KD}=\frac{SM}{MB}=\frac{3}{5}$. Поэтому ($\triangle ANC\sim\triangle NSP$) $\frac{SN}{NC}=\frac{SP}{AC}=\frac{SB}{2AD}=\frac{3}{10}$ и, следовательно, $\frac{SN}{SC}=\frac{3}{13}$.

Отношение объемов пирамид $ASNM$ и $ASBC$ равно отношению площадей их оснований, то есть равно $\frac{SN}{SC}\cdot\frac{SM}{SB}=\frac{3}{13}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{104}$, откуда окончательно $\frac{V_{ASMN}}{V_{ACBMN}}=\frac{9}{95}$.

6. $\frac{l^2-h^2}{2h}$. Решение. Пусть S — точка пересечения высот треугольника ABC, O — центр описанной окружности (см. рис. 8), сразу же введем обозначения $AS=x$, $MN=NH=y$, $BC=a$, $AN=d$, $OA=R$. Поскольку AA' делит пополам дугу BC, постольку $OA'\perp BC$ и точка M лежит на OA'. Отсюда следует, что четырехугольник $MAHA'$ — параллелограмм ($MN=NH$, $A'M\parallel AH$). Поэтому $MA'=HA=h$, $NA'=NA=d$. Проведем отрезки ON и OA: $ON\perp A'A$, так как $A'N=NA$ и $A'O=OA=R$.

Из прямоугольных треугольников MAH и NAH соответственно получаем: $l^2=h^2+4y^2$ и $d^2=h^2+y^2$, откуда $d^2=\frac{3h^2}{4}+\frac{l^2}{4}$.

Из подобия треугольников $\triangle NMA'$ и $\triangle ONA'$ следует: $\frac{h}{d}=\frac{d}{R}$, или $Rh=d^2$.

Поэтому

$$Rh=\frac{3h^2+l^2}{4}. \qquad (*)$$

Далее из прямоугольного треугольника COM получаем

$$\frac{a^2}{4}=R^2-(R-h)^2=2Rh-h^2$$

или, используя (*),

$$\frac{a^2}{4}=\frac{h^2+l^2}{2}. \qquad (**)$$

Но $\triangle SCH\sim\triangle AHB$, поэтому $\frac{SH}{CH}=\frac{HB}{AH}$ или

$\frac{h-x}{\frac{a}{2}+2y}=\frac{\frac{a}{2}-2y}{h}$, откуда с учетом (*) и

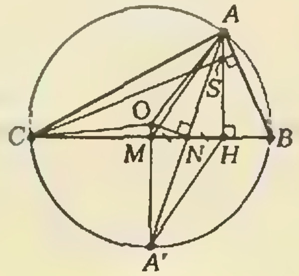


Рис. 8.

(**) окончательно получим $x=\frac{l^2-h^2}{2h}$.

Вариант 4

1. 9. 2. 9ч. 3. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}$, $\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$.

4. 4. **Указание:** $S_{ABC}=12$, поэтому $S_{BCE}=\frac{2}{3}S_{ABC}=8$. Пусть K — точка на AD такая, что $AK \parallel AB$. Тогда $\frac{EK}{BD}=\frac{OE}{OB}$, но $\frac{EK}{AD}=\frac{EC}{AC}=\frac{2}{3}$, то есть $EK=BD=2$. Поэтому $BO=OE$ и $S_{BOC}=\frac{1}{2}S_{BCE}$.

5. $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{128}$. **Решение.** С помощью замены $u=\sqrt{5|x|}$, $v=\sqrt{|y+3|}$, приведем систему к виду

$$\begin{cases} u+v=1,\\ u^4+v^4=16a,\\ u\geqslant 0,\\ v\geqslant 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Каждой паре положительных значений u, v соответствуют 4 различных пары значений $x=\pm\frac{u^2}{5}$, $y=-3\pm v^2$. Если при некотором значении a исходная система имеет ровно 4 решения, то системе (*) при этом не может удовлетворять ни одна пара (u, v), для которой $u>0$, $v>0$, $a\neq v$ (в противном случае паре (v, u) соответствовало бы еще 4 решения (x, y) исходной системы, а всего решений было бы не меньше 8). Поэтому искомые значения a должны обеспечивать такие решения (u, v) системы (*), для которых либо $u=0$, либо $v=0$, либо $u=v$. В первых двух случаях необходимо, чтобы величина a принимала значение $\frac{1}{16}$, а в последнем — значение $\frac{1}{128}$. С другой стороны, при $a=\frac{1}{16}$ система (*) имеет только 2 решения (1; 0), (0; 1) (если $u, v\in\,]0;\,1[$, то и $u^4+v^4<u+v$, и равенства $u^4+v^4=16a=1=u+v$ невозможны), которым соответствует ровно 4 решения исходной системы. Наконец, при $a=\frac{1}{128}$ система (*) тоже имеет только 1 решение $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (поскольку для любого решения (u, v) этой системы величина $w=u-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-v$ должна удовлетворять условию $\frac{1}{8}=\left(w+\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}-w\right)^4=\frac{1}{8}+3w^2+w^4$, т. е. $w=0$), которому также соответствует ровно 4 решения исходной системы.

Вариант 5

1. -2π. 2. $]-\infty;\,\log_2 3[$. 3. 14 км/ч. 4. 7. **Указание.** По теореме синусов для равнобедренного треугольника AMR получим $\sin\widehat{MAR}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, откуда $\cos\widehat{BAC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, и, пользуясь теоремой косинусов для треугольника ABC, найдем $AB=\frac{1}{2}(9\pm 5)$; значение $AB=2$ следует отбросить, так как $\frac{2}{3}AB=MN>MP=AM=\sqrt{3}$.

5. $b\leqslant -1$ или $b\geqslant 4$. **Решение.** Пусть $a=b^4+6b^3+9b^2-19+\sqrt{85}$. Найдем сначала все значения a, при которых совместна система

$$\begin{cases} 2x^2-2xy+10y^2=a,\\ x^2+2xy-3y^2=4. \end{cases}$$

Если $a\leqslant 0$, то $x^2+9y^2+(x-y)^2=a\leqslant 0$, поэтому $a=0$, $x=y=0$ и система решений не имеет. Пусть $a>0$. Умножив первое уравнение на -4, а второе на a и сложив их, получим равносильную систему

$$\begin{cases} 2x^2-2xy+10y^2=a,\\ (a-8)x^2+2(a+4)xy-(3a+40)y^2=0. \end{cases}$$

Переходя к переменным x и $t=\frac{y}{x}$ ($x\neq 0$, так как иначе $y=0$ и $a=0$), получаем систему

$$\begin{cases} (2-2t+10t^2)x^2=a,\\ (3a+40)t^2-2(a+4)t-(a-8)=0. \end{cases}$$

Последнее уравнение имеет решение t тогда и только тогда, когда $(a+4)^2+(3a+40)(a-8)\geqslant 0$, т. е. при $a\geqslant -3+\sqrt{85}$. При этом первое уравнение разрешимо относительно x, так как $2-2t+10t^2>0$ при любом t. Итак, искомые значения b удовлетворяют неравенству $b^4+6b^3+9b^2-19+\sqrt{85}\geqslant -3+\sqrt{85}$, или $(b^2-3b)^2-16\geqslant 0$, откуда $(b^2-3b+4)(b+1)\times(b-4)\geqslant 0$.

Вариант 6

1. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. 2. $]-1;\,1[$. 3. 10 ч. 4. 6. **Указание.** В уравнение касательной $y=(x_0-1)(x-x_0)+\frac{x_0^2}{2}-x_0+5$ к графику в точке с абсциссой x_0 подставьте $x=0$, $y=3$ и найдите x_0.

5. $\sqrt{13+6\sqrt{2}}$. **Указание.** Проведите через точку M прямую, параллельную прямой BK, и воспользуйтесь подобием треугольников для нахождения длин отрезков OM и OK; примените теорему косинусов для треугольника OMK.

Вариант 7

1. $]-3-\sqrt{13};\,-3+\sqrt{13}[$. 2. $\frac{1}{25}$. 3. 80. 4. $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

Указание. Докажите, что $\widehat{BCK}=90^\circ+\widehat{BAK}$, и, пользуясь теоремой синусов для треугольников ABK, BCK, получите соотношения $\operatorname{tg}\widehat{BAK}=\frac{1}{3}$, $BK=\frac{\cos\widehat{BAK}}{\sin 60^\circ}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\widehat{BAK}}\cdot\sin 60^\circ}$.

5. $-\frac{a^2}{2}$, если $a\in\,]0;\,2-\sqrt{2}]$; $1-2a$, если $a\in\,]2-\sqrt{2};\,1[$.

Решение. Равенство $\sin\pi xy=0$ равносильно условию $xy=n$, $n\in\mathbf{Z}$. Если $n\geqslant 0$, то наименьшее значение выражения $A=\frac{1}{2}(x-y)^2-a(x-y)+xy\sqrt{\frac{1}{2}}((x-y)-a)^2-\frac{a^2}{2}+n$ достигается при $x-y=a$, $xy=0$ (т. е. $n=0$) и равно $-\frac{a^2}{2}$. Пусть $n<0$. Тогда при $x-y>0$ имеем $\frac{x-y}{2}\geqslant\sqrt{-xy}=\sqrt{-n}>a$ и $A\geqslant -2n-$

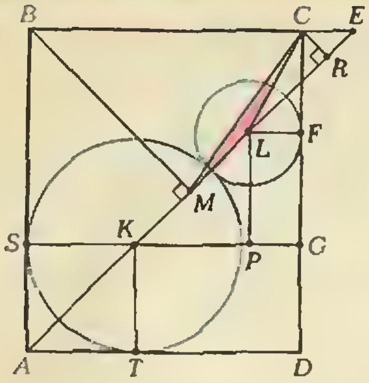


Рис. 9.

$-2a\sqrt{-n}+n=-n-2a\sqrt{-n}=(\sqrt{-n}-a)^2-$ $-a^2\geqslant(1-a)^2-a^2=1-2a$, причем равенство $A=1-2a$ достигается при $x=-y$, $xy=1$ (т. е. при $n=1$). Таким образом, наименьшее значение A совпадает с меньшим из двух чисел $1-2a$ или $-\frac{a^2}{2}$. Так как неравенство $1-2a<-\frac{a^2}{2}$ справедливо лишь при $2-\sqrt{2}<$ $<a<2+\sqrt{2}$, то в случае $0<a<2-\sqrt{2}$ меньшим будет число $-\frac{a^2}{2}$, а в случае $2-\sqrt{2}<$ $<a<1$ — число $1-2a$.

Вариант 8

1. $x=\frac{5\pi}{12}+\pi n$ $(n\in Z)$. 2. 3. **Указание.** Пусть $BC=a$. Тогда периметр P треугольника ABC равен $3a$, а его площадь

$$S=\frac{1}{2}Pr=\frac{3}{2}ar=\frac{1}{2}ah.$$

3. $\left\{\log_{3/2}\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right\}$.

4. 50 м. 20 м.

5. $[-a;\ 0[\cup]0;\ \frac{2a^2b}{a^2+b^2}[$ при $a\leqslant b$. $[-a;\ 0[\cup]0;\ a]$ при $a>b$. **Указание.** Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{b}<0,\\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}\geqslant0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\geqslant0,\\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}>\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\right)^2.\end{cases}$$

6. $\frac{3\pi}{2}$ при $p=9$; при $p<9$ корней нет. **Указание.** Положив $\alpha=\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{15}\sin x$, $\beta=$ $=\frac{5\pi}{14}-\frac{\pi}{7}\cos 2x$, приведите уравнение к виду $\sin^2\beta-3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha\sin\beta+6\operatorname{tg}^2\alpha=p+1$ или

$$(\sin\beta-2\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha)(\sin\beta-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha)=p+1. \qquad (1)$$

Затем убедитесь, пользуясь ограничениями на α и β, что $2\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha-\sin\beta\geqslant2$, а $2\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha-$ $-\sin\beta\geqslant5$. Поэтому левая часть уравнения (1) не меньше 10.

Вариант 9

1. $\{1/2\}$. 2. $\left\{\left(-3;\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n\right)\right\}$ $(n\in Z)$.

3. $\{-4/3;\ -2/3\}$.

4. $\frac{3}{4}(4\sqrt{2}-5)$. **Указание.** Поскольку (см. рис. 9) $KP=SG-SK-PG=\frac{3}{2}\sqrt{2}$, то $\cos\widehat{LKP}=\sqrt{2}/2$, т. е. $\widehat{LKP}=\pi/4=\widehat{KAT}$. Следовательно, точки A, K и L лежат на одной прямой. Опустим перпендикуляр CR и AE. Тогда $S_{CLM}=\frac{1}{2}ML\cdot CR$. Осталось найти ML и CR.

5. По 2 самолета каждого типа. **Указание.** Количества x, y, z самолетов 1, 2 и 3 типа соответственно удовлетворяют системе

$$\begin{cases}230x+110y+40z=760,\\ 27x+12y+5z=88,\\ x+y+z\leqslant8,\end{cases}$$

из которой следует, что $x+y=4$, $z\leqslant4$. Случаи $z=4$, $z=3$ и $z=1$ невозможны.

6. $\sqrt{3}$. **Указание.** Пользуясь формулами $\sin B=\frac{AC}{2R}=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin A=BC/2R=\frac{3\sqrt{15}}{16}$, найдем $AB=\frac{AC}{\sin B}\cdot\sin C=\frac{AC}{\sin B}\cdot\sin(A+B)=$ $=2$ (см. рис. 10). Далее, $r=\frac{S}{p}=\sqrt{15}/6$. Высота h, опущенная из вершины A на BC, равна $\frac{2S}{BC}=\frac{\sqrt{15}}{2}=3r$. Поэтому точка M пересечения медиан удалена от BC на то же расстояние, что и O — центр вписанной окружности, т. е. на $\sqrt{15}/6$. Это значит, что секущая плоскость пересекает плоскость основания по прямой, параллельной BC (см. рис. 11). Для вычисления площади треугольника SPQ найдите его высоту SH из треугольника SCH.

Вариант 10

1. $\{1/4\}$. 2. $\{((-1)^{n+1}\pi/6+\pi n;\ 1/3)\}$, $(n\in Z)$.

3. $[1/5;\ 1/4]\cup\{2/5\}$.

4. $3\sqrt{3}$. **Указание.** Пусть O — центр окружности, описанной около трапеции $ABCD$ (см. рис. 12). Треугольник ABO — равносторонний и потому $AP=\frac{1}{4}AD=\frac{1}{2}AO$. Это значит, что треугольник ABP — прямоугольный и $BP=\frac{\sqrt{3}}{2}R$. Треугольник PBC тоже прямоугольный, а $BC=\frac{1}{2}AD=R$, $PC=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot R$.

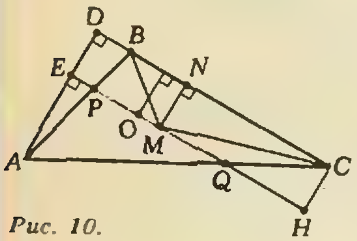


Рис. 10.

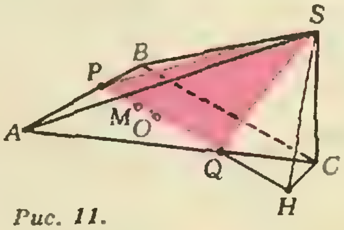


Рис. 11.

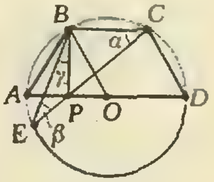


Рис. 12.

Пусть $\widehat{BCP}=\alpha$, $\widehat{BEC}=\beta$, $\widehat{EBP}=\gamma$. Имеем $\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{7}}$, $\beta=\dfrac{\pi}{6}$. Поэтому $\sin\gamma=\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{3}/2\sqrt{7}$. Для вычисления BE воспользуйтесь теоремой синусов, а для нахождения площади — формулой

$$S_{BPE}=\frac{1}{2}\,BE\cdot BP\sin\gamma=\frac{3\sqrt{3}}{28}R^2=3\sqrt{3}.$$

5. 11 дней; выработка первого 19 деталей, второго — 31. Указание. Пусть n, d_1, d_2 — соответственно число дней работы и ежедневные выработки первого и второго рабочих. Эти числа удовлетворяют системе

$$\begin{cases} n(d_1-d_2)=k, \\ 127\leqslant k\leqslant 132, \\ n(2d_1-d_2)=7\cdot 11; \end{cases}$$

из третьего условия видно, что либо $n=7$, либо $n=11$, причем $n=7$ не удовлетворяет условию.
6. 72. Решение. Проведем плоскость, перпендикулярную к боковым ребрам призм $PQRP_1Q_1R_1$ и $DEFD_1E_1F_1$. Получившиеся в сечении треугольники обозначим через ABC и KLM (см. рис. 13). Положим $\widehat{CAB}=\alpha$, $\widehat{CBA}=\beta$ и $\widehat{ACB}=\gamma$. Из условий задачи $\sin\alpha=\sqrt{6}/4$, $\sin\beta=\sqrt{15}/4$, а, значит, $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)=3\sqrt{6}/8$. Пусть S — площадь боковой поверхности призмы $DEFD_1E_1F_1$. Имеем $S=PP_1\cdot P_{KLM}$, где P_{KLM} — периметр треугольника KLM. Следовательно, условие минимальности S равносильно условию минимальности P_{KLM} среди периметров всех треугольников, вписанных в треугольник ABC; легко видеть, что он остроугольный ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma>0$). Ниже будет доказано, что при выполнении условия минимальности

$$P_{KLM}=2AC\sin\alpha\sin\gamma, \qquad (*)$$

откуда $S=2PP_1\cdot AC\sin\alpha\sin\gamma = 2\cdot 64\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{4}\times$ $\times\dfrac{3\sqrt{6}}{8}=72.$

Докажем формулу (*). Решим сначала вспомогательную задачу. Пусть M — произвольная точка на основании AC треугольника ABC, а M' и M'' — точки, симметричные ей относительно сторон AB и BC (см. рис. 14). Тогда $BM'=BM=BM''$, следовательно, треугольник $M'BM''$ — *равнобедренный. Кроме того,* $\widehat{M'BA}=\widehat{ABM}$ и $\widehat{MBC}=\widehat{CBM''}$. Отсюда $\widehat{M'BM''}=2\beta$. Обозначим через K и L — точки пересечения отрезка $M'M''$ со сторонами AB и BC. Пусть K' и L' — две произвольные точки на AB и BC. Очевидно, что периметр треугольника KLM, равный длине отрезка $M'M''$, меньше периметра треугольника $K'ML'$, равного длине ломаной $M'K'L'M''$. При этом

$$P_{KLM}=M'M''=2BM\sin\beta. \qquad (**)$$

Остается минимизировать выражение (**) выбором точки M на стороне AC. Ясно, что минимум достигается в случае, когда M — основание высоты, опущенной из вершины B на AC. Тогда формула (**) принимает требуемый вид (*).

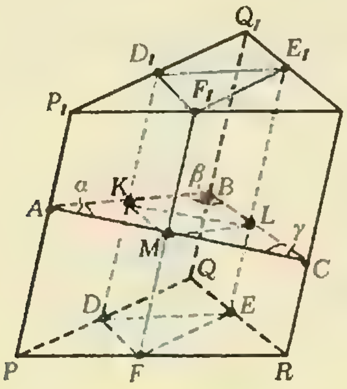


Рис. 13.

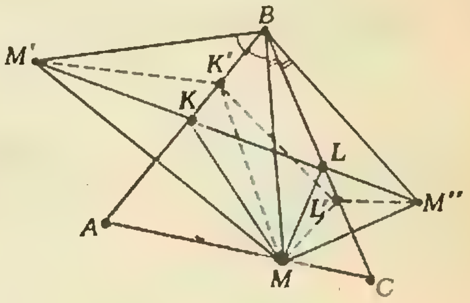


Рис. 14.

Вариант 11

1. $\left(-11\dfrac{2}{5};\ 5\dfrac{3}{5}\right)$. **2.** $\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$. **3.** $x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $(n\in\mathbf{Z})$.
4. $]0,1[\cup]9;\infty[$.
5. $(-7;7)$, $(-6;6)$. Указание. Первое неравенство системы преобразуется к виду

$$(x+6)^2+(y-7)^2<\frac{3}{2},$$

поэтому пара целых чисел $|x+6|$ и $|y-7|$ совпадает либо с парой $(1;0)$, либо с парой $(0;1)$.

Вариант 12

1. $\dfrac{203}{121}$.

2. $\dfrac{7}{4}$.

3. $]-\infty;-10^{\frac{1}{3}}[\cup]1;0[\cup]0;1[\cup]10^{\frac{1}{3}};\infty[$.
4. 500.

5. $\dfrac{60\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{5+3\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}}$. Указание. Используя свойства касательной к окружности, получите равенства $EK=EM=\dfrac{1}{2}P_{DCE}$, $AK=AN=r\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$ (r — радиус окружности), $BM=BN=AB-AN$, а затем примените теорему косинусов для треугольников ABE.
6. $7\sqrt{3}$. Указание. Пусть $t=x+5y$. Подставляя в исходное неравенство $x=t-5y$, получим неравенство $56y^2-16ty+t^2+21\leqslant 0$, которое имеет решения тогда и только тогда, когда $D/4=8(t^2-147)\geqslant 0$. Наименьшее положительное t, удовлетворяющее этому условию, *равно* $7\sqrt{3}$. *При этом* $x=2\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$.

Вариант 13

1. $]-\infty;-1[\cup]-1;1[$.

2. πn, $n\in\mathbf{Z}$; $\dfrac{\pi}{2}+2\pi m$ $(n, m\in\mathbf{Z})$.

3. $4\sqrt{3}$.

4. $\frac{24}{7}$. Указание. Воспользуйтесь теоремой косинусов для треугольника CDE, подобного треугольнику ABC.

5. Нет. Указание. Количества k, l, m, n операций а), б), в), г) соответственно удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 13+2k+l-2m-n=37, \\ 17-k+2l+m-2n=43, \end{cases}$$

из которой, умножая второе уравнение на 2 и складывая с первым, получим $5(l-n)=76$, что невозможно.

Физика

Физический факультет

1. $t=\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{\left(\frac{M}{M+m}\right)^2(H-h)+h}-\frac{M}{M+m}\sqrt{H-h}\right)$.

2. $k=\frac{Mg}{3H\left(1-1/\sqrt{1+3(H/a)^2}\right)}=20$ Н/м.

3. $\Delta h=\frac{m\Delta\rho}{\rho(\rho-\Delta\rho)S}\approx\frac{m\Delta\rho}{\rho^2 S}=2$ мм.

4. $\varrho=(p_1\mathrm{M}_1+p_2\mathrm{M}_2)/(RT)=1{,}3$ кг/м^3.

5. $A=\frac{1}{2}\frac{mR}{\mathrm{M}}\left(T_2-\frac{T_1T_2}{T_3}-T_3+T_1\right)$.

6. $m_в=m_2-(c_1m_1\Delta T+c_1m_2(T_0-T_1+\Delta T)+C\Delta T)/\lambda=0{,}03$ кг.

7. $Q_1=Q_2\frac{C_1R_1(R_1+R_2+R_3)}{C_2R_2(R_1+R_3)}=2{,}5\cdot10^{-6}$ Кл.

8. $B=2kl/(IL\cos\alpha)=0{,}04$ Тл.

9. $n_с>\sqrt{2(n_ж-0{,}5)^2+0{,}5}=1{,}6$.

10. $h=HF/(2(d-F))$.

Геологический факультет

1. $t=\tau\sqrt{a^2+ag/g}=2{,}45$ мин.

2. $F=mg\sqrt{3}=118{,}8$ Н.

3. $F=\left(m_2+\frac{ml/2-(m+m_1)l_1}{l-l_1}\right)g=3{,}85$ Н.

4. $\frac{p'}{p}=\frac{T_3(T_1+T_2)}{2T_1T_2}=\frac{16}{15}=1{,}07$.

5. $A=(n-1)\nu RT=8310$ Дж.

6. $q_3=-(3\sqrt{3}/4)q=-5{,}2$ мкКл.

7. $R'=(\mathscr{E}-U)R/U-r=2{,}8$ Ом.

8. $l=2h/n=0{,}9$ м.

9. $\alpha=(f-F)/F=4$.

10. $f=F/2$.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 1)

1. Заметим, что сумма площадей левого сектора и полукруга равняется площади щита, поэтому непокрытая ими площадь равняется площади, покрытой дважды.

2. ШЕПНУЛ = 628750 или 682750.

3. Можно разжечь костер рядом с трубой и проследить, с какой стороны труба будет сильнее нагреваться. В ту сторону и течет вода.

4. Из сравнения первой и третьей полок следует, что объем средней банки равен 3 литрам. Сравнив вторую и третью полки, замечаем, что на третьей полке стоит половина того, что стоит на второй полке, и еще три средних банки. Таким образом, половина объема варенья на полке умещается в трех средних банках, что составляет 9 литров. Значит, на одной полке стоит 18 литров, а на всех трех полках — 54 литра варенья.

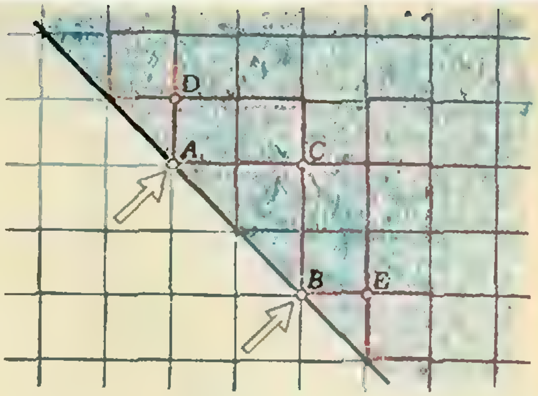


Рис. 15.

5. Будем считать, что сторону квадрата каждый джентльмен проходит за одну минуту. Заметим, что если первый джентльмен входит в парк по дорожке AD (см. рис. 15), то выходит из парка по дорожке CA, и наоборот; аналогично, если второй джентльмен входит в парк по дорожке BE, то выходит по дорожке CB, и наоборот. Если первый джентльмен пошел по AC, а второй по BC, то через 2 минуты они встретятся в точке C. Если первый джентльмен пошел по AD, а второй по BC, то он обязан идти к точке D, поскольку в противном случае он не сможет туда попасть, не проходя дважды по одной дорожке, и тогда джентльмены встречаются в точке D через 5 минут после входа в парк. Маршруты, начинающиеся с AD и BE, обратны маршрутам первого случая, и джентльмены встречаются в точке C за 2 минуты до выхода из парка, а маршруты, начинающиеся с AC и BE, обратны маршрутам второго случая, и встреча произойдет за 5 минут до выхода джентльменов из парка.

На круги своя
(см. «Квант» № 1)

1. Конечность количества принимаемых значений в последовательности, каждый следующий член которой равен сумме кубов цифр предыдущего числа, вытекает из следующих двух утверждений:

1. *Если число меньше 3000, то и сумма кубов его цифр меньше 3000.*

2. *Если число больше или равно 2000, сумма кубов цифр этого числа меньше самого числа.*

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для задачи с суммой квадратов цифр. Возможны следующие периодические последовательности: пять последовательностей с периодом 1 — неподвижные точки 1, 153, 370, 371 и 407; две с периодом 2 — 919-1459 и 136-244; две с периодом 3 — 133-55-250 и 217-352-160.

2. Здесь будет один период из 150 чисел, включающий все натуральные числа от 1 до 100 и все четные числа от 102 до 200, а также один период длины 1 с неподвижной точкой 101.

Вычисление расстояний и углов
(см. «Квант» № 1)

1. 4 см.

2. $\arccos\frac{5\sqrt{3}}{18}$.

3. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$, $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Решение. Выберем в качестве базиса векторы $\vec{AB}=\vec{m}$, $\vec{AC}=\vec{n}$, $\vec{BC'}=\vec{p}$ и обозначим через t неизвестный нам косинус угла между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$. В таблице приведены скалярные произведения векторов этого базиса.

	$\vec{m}$	$\vec{n}$	$\vec{p}$
$\vec{m}$	a^2	0	$a^2t\sqrt{6}$
$\vec{n}$	0	a^2	0
$\vec{p}$	$a^2t\sqrt{6}$	0	$6a^2$

Пусть $B'H$ — высота призмы. Тогда $\vec{B'H}=\vec{BH}-\vec{BB'}=x\vec{m}+y\vec{n}-(\vec{m}-\vec{n}+\vec{p})=(x-1)\vec{m}+(y+1)\vec{n}-\vec{p}$. Неизвестные x, y, t находятся из системы уравнений, получающейся из условий: $B'H=\sqrt{3}\cdot BH$, $\vec{BH}\cdot\vec{m}=0$, $\vec{B'H}\cdot\vec{n}=0$. Эта система имеет два решения: $x=1$, $y=-1$, $t=0$ и $x=-\frac{1}{2}$, $y=-1$, $t=-\frac{\sqrt{6}}{4}$, откуда находятся два возможных значения объема призмы.

4. $\frac{3\sqrt{3}}{256}a^3$.

5. а) $\frac{a\sqrt{15}}{3}$; б) $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. Решение. Пусть O — центр основания пирамиды. Образуем базис из векторов $\vec{OS}=\vec{m}$, $\vec{OB}=\vec{n}$, $\vec{OC}=\vec{p}$. Эти векторы попарно взаимно перпендикулярны, а длины их легко находятся: $|\vec{m}|=\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$, $|\vec{n}|=|\vec{p}|=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Зададим положение точек M и N на отрезках BD и SC равенствами $\vec{OM}=x\vec{n}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ и $\vec{SN}=y\cdot\vec{SC}=y(\vec{p}-\vec{m})$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$. Тогда $\vec{MN}=(1-y)\vec{m}-x\vec{n}+y\vec{p}$. Так как прямая MN параллельна плоскости SAD, $\vec{MN}=z\cdot\vec{SA}+t\cdot\vec{SD}=-(z+t)\vec{m}-t\vec{n}-z\vec{p}$. Сравнивая два разложения вектора $\vec{MN}$ в базисе $(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p})$, приходим к системе уравнений $1-y=-z-t$, $x=t$, $y=-z$. Выразим y, z и t через x: $y=\frac{x+1}{2}$, $z=-\frac{x+1}{2}$, $t=x$. Следовательно, $\vec{MN}=\frac{1}{2}((1-x)\vec{m}-2x\vec{n}+(x+1)\vec{p})$, откуда $MN=\frac{a}{2}\sqrt{6x^2-6x+4}$. Если $DM:DB=1:3$, то $x=-\frac{1}{3}$, $MN=\frac{a\sqrt{15}}{3}$. Наименьшее значение MN принимает при $x=\frac{1}{2}$. Это значение равно $\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев,
Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко,
Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев,
Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов,
В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин,
А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов,
Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов,
Т. Н. Кольченко, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров,
И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. И. Чернуский,
В. Б. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор Н. Б. Румянцева

Сдано в набор 17.12.86. Подписано к печати 29.1.87
Т-05233. Бумага 70×108/16. Печать офсетная
Усл. кр.-от. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,50
Тираж 204 933 экз.
Цена 40 коп. Заказ 3499

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

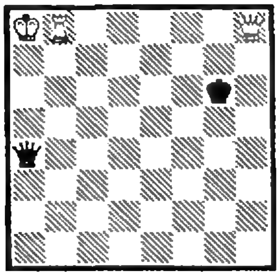
103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ПАРАДОКСАЛЬНЫЕ НАХОДКИ ЭВМ

В «Кванте» № 1 за этот год мы рассказали об анализе ЭВМ окончания «два слона против коня», которое является объективно сложным. Следующий пример весьма необычен.

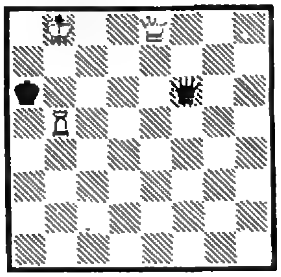


Оценка эндшпиля «ферзь и ладья против ферзя» не вызывает сомнений, однако в данном случае белые, как это ни удивительно, матуют только на 67-м ходу, причем при наилучшей игре обеих сторон уйти королем от преследования и разменять ферзей удается лишь на 55-м ходу. Этот рекорд установила специальная программа, созданная К. Томпсоном, автором программы «Белл», третьей «чемпионки» мира по шахматам среди ЭВМ. Посмотрите, как белый король после долгих мытарств скрывается от преследования черного ферзя.

1. Крb7 Фb5+ 2. Крc7 Фc5+ 3. Крd7 Фd5+ 4. Крe7 Фc5+ 5. Крe6 Фc6+ 6. Крe5 Фc5+ 7. Крe4 Фc2+ 8. Крd4 Фd1+ 9. Крc4 Фe2+ 10. Крb4 Фd2+ 11. Крa3 Фd3+ 12. Крa4 Фa6+ 13. Крb4 Фd6+ 14. Крc3 Фg3+ 15. Крb2 Фf2+ 16. Крb3 Фf7+ 17. Крc3 Фf3+ 18. Крb4 Фf4+ 19. Крa5 Фd2+ 20. Лb4 Фd5+ 21. Лb5 Фa2+ 22. Крb6 Фe6+ 23. Крa7 Фe7+ 24. Лb7 Фa3+ 25. Крb8 Фd6+ 26. Лc7 Фb6+ 27. Крc8 Фa6+ 28. Крd7 Фd3+ 29. Крc6 Фc4+ 30. Крd6 Фd3+ 31. Крc5 Фa3+ 32. Крc4 Фa6+ 33. Крd5 Фb5+ 34. Крd4 Фb6+ 35. Лc5 Фd6+ 36. Лd5 Фb4+ 37. Крe5 Фe7+ 38. Крf4 Фf7+ 39. Крe4 Фf5+! 40. Крd4 (40. Л:f5 пат!) 40...Фf4+ 41. Крc3 Фc7+ 42. Крd3 Фg3+ 43. Крc4 Фc7+ 44. Лc5 Фf7+ 45. Крb4 Фb7+ 46. Лb5 Фe7+ 47. Крa4 Фa7+ 48. Крb3 Фf7+ 49. Крc3 Фf3+ 50. Крb4 Фf4+ 51. Крa5 Фd2+ 52. Крa6 Фa2+ 53. Крb7 Фf7+ 54. Крb8 Фf4+ 55. Фe5 Ф:e5+.

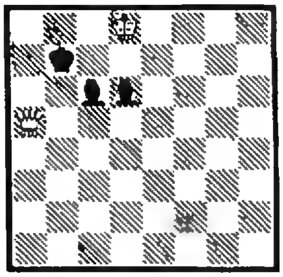
Черные могли оттянуть размен ферзей (55...Фf8+ 56. Крc7 Фf7+ 57. Крd8 Фf8+ 58. Фe8+), но тогда мат дается быстрее 67 ходов. 56. Л:e5. Ладья матует одинокого короля не позднее 16-го хода, а в данном случае достаточно десяти. 56...Крf6 57. Лc5 Крe7 58. Лc6 Крd7 59. Крb7 Крe7 60. Крc8 Крf8 61. Крd7 Крf7 62. Лb6 Крf8 63. Крe6 Крg7 64. Крe7 Крh8 65. Лg6 Крh7 66. Крf7 Крh8 67. Лh6×.

Итак, нанесен еще один удар по правилу 50 ходов, причем рекорд вновь установлен компьютером. Вот другая занятная позиция с тем же соотношением сил.



На сей раз белые при своем ходе вообще не могут выиграть! При движении ладьи черные сооружают патовое гнездо (1. Лe5 (b7) Фd8+!, 1. Лd5 Фb6+ 2. Крc8 Фb7+ и 3...Ф:d5), у ферзя нет удачных отступлений, а королю не уйти от шахов. Другое дело, если ход черных, тогда им не избежать поражения. Таким образом, перед нами редчайшая картина взаимного цугцванга при решающем материальном превосходстве одной из сторон. Удивительнее всего, что данную позицию (как и две следующие) обнаружил компьютер. При этом программа установила, что это — единственная конструкция взаимного цугцванга в борьбе ферзя и ладьи против ферзя. Разумеется, симметрия не в счет: точно так же фигуры могут разместиться и в трех других углах доски.

Окончание «ферзь против двух легких фигур — двух слонов или слона и коня» выиграно для сильнейшей стороны (и быстрее чем за 50 ходов), но теории известны и исключения — противнику удается соорудить неприступную крепость. Исследуя эти окончания, машина и здесь в первую очередь интересовалась необычными позициями взаимного цугцванга. Вновь оказалось, что такие конфигурации единственны (опять с точностью до симметрии). Рассмотрим следующую позицию



Примечательно, что при своем ходе белым не справиться с черным королем (на отступление ферзя следует Сc7+), а черные, делая ход, быстро проигрывают из-за шаха ферзем с c7 или по линии «b».

А вот другая парадоксальная позиция.

Белые: Крa8, Фf8; черные: Крd5, Сa6, Кc6.

Вновь, начиная, белые не могут освободить своего короля (1. Фa3 Сc8!), а если ход черных, клубок их фигур мгновенно рассыпается.

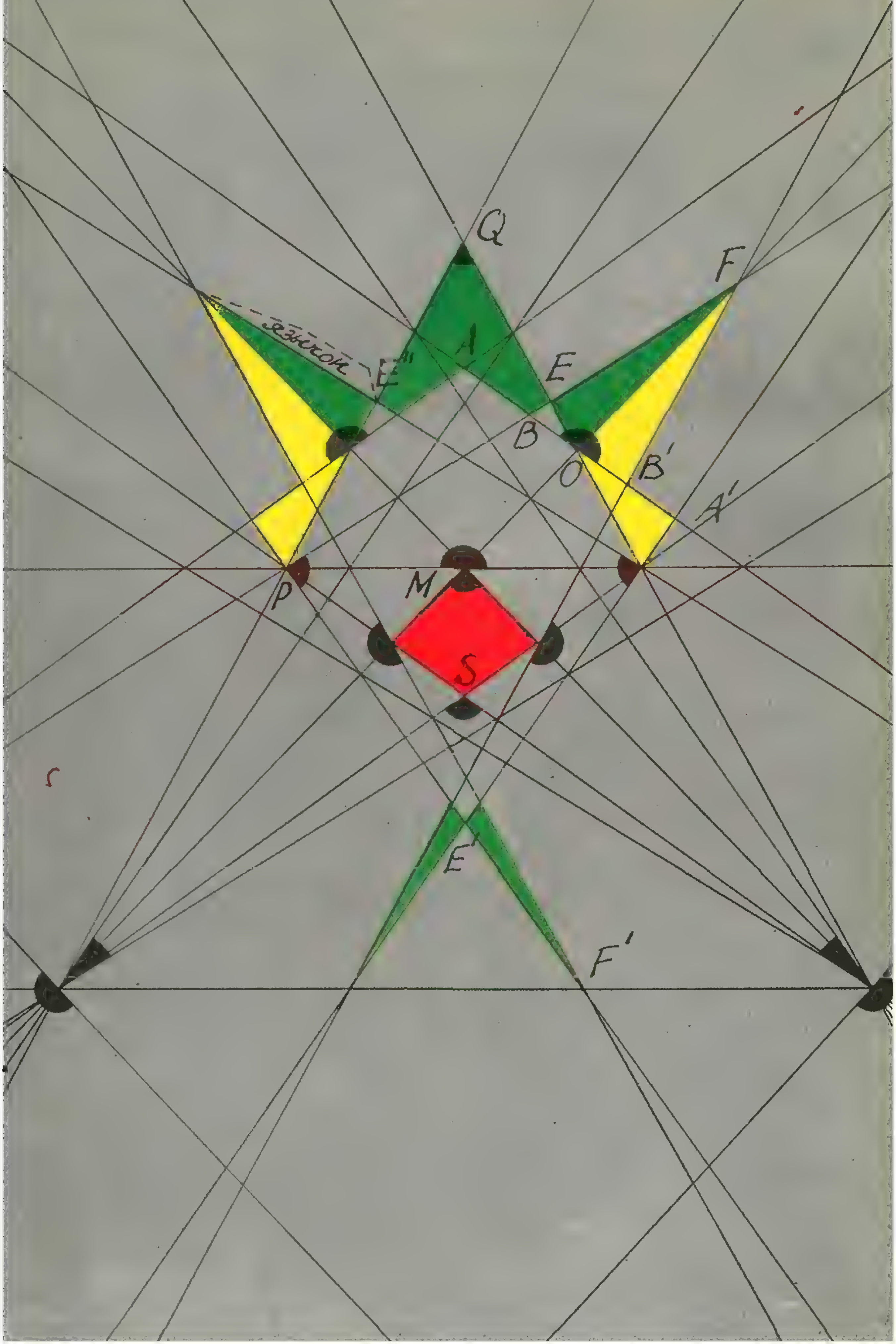
Какую еще пользу от компьютеров можно ожидать в исследовании пятифигурных окончаний? Из окончаний, которые могут представить проблему для человека (особенно для этюдистов), осталось, пожалуй, лишь «ферзь и легкая фигура против ферзя».

Конкурсные задания

3. Белые: Крa8, Фf6, Кc4; черные: Крd7, Фh5. Белые начинают и выигрывают.

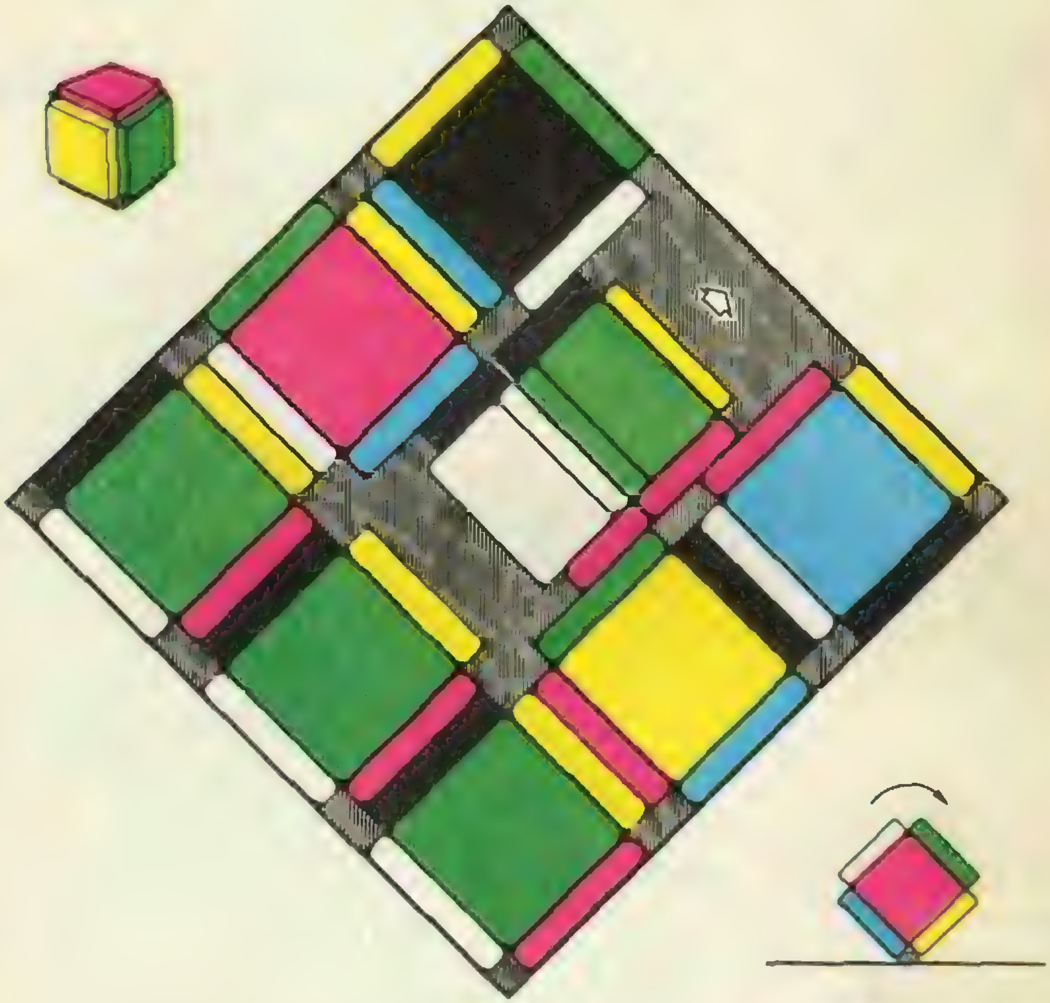
4. Белые: Крh1, Фa3, Сe4; черные: Крh8, Фg7. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 20 апреля 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 3, 4».


Q
F
язычок
E''
A
E
B
O
B'
A'
P
M
S
E'
F'

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Вроде незамысловатое это занятие — катать кубик по плоскости. Но если вы соедините его с известной игрой «15», получится качественно новая интересная игра-головоломка. Для этого квадратные фишки в игре «15» надо заменить на равные кубики, по-прежнему оставив одно место свободным; «ход» состоит в том, что один из кубиков перекатывается через ребро на свободное место. Конечно, кубики надо тем или иным способом разметить; теперь можно решать задачу, типичную для всех головоломок этого сорта (той же игры «15», кубика Рубика, «вавилонской башни»,... — в последние годы их появилось великое множество): отыскивать цепочку ходов, которая переводит одно данное расположение кубиков в другое. Меняя разметку кубиков, размеры и форму поля, можно получить разные виды «перевертышей» — так назвали свой вариант этой игры А. Дремов и Г. Шевцова. Их «перевертыши» и показаны на рисунке. Каждый кубик здесь раскрашен в 6 цветов наподобие кубика Рубика; на гранях сделаны квадратные выступы, которые вместе с порожками, наклеенными на дно коробки, облегчают перекатывание и к тому же позволяют видеть цвет не только верхней, но и боковых граней каждого кубика. Будем считать «правильным» такое расположение кубиков, при котором на всех кубиках грани одного цвета обращены в одну и ту же сторону, а нижний угол пустой; имеется 24 таких расположения (почему?). Сколько ходов вам понадобится, чтобы перейти от одного правильного расположения к другому? (Нам известно решение в 100 ходов.)



НОМЕР
3

Квант

1987

3

Основан в 1970 году

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *В. Г. Болтянский.* Огибающая
8 *Л. М. Бреховских, В. М. Куртепов.* Акустика в Океане
14 *Д. Г. Крутогин.* МК: проблемы общения

Задачник «Кванта»
18 Победители конкурса «Задачник «Кванта»
19 Задачи М1031—М1035; Ф1043—Ф1047
21 Решения задач М1011—М1014; Ф1023—Ф1027
29 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников
31 Задачи
34 *Ю. П. Соловьев.* Старый алгоритм

32 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»
32 Физика 8, 9, 10

Математический кружок
44 *М. Б. Балк, Г. М. Ландман.* В поисках оптимального раскроя

Практикум абитуриента
49 *А. С. Ярский.* Неравенства с параметром

53 **Варианты вступительных экзаменов**
59 **Ответы, указания, решения**
Шахматная страничка
Рекорды компьютера (*3-я с. обложки*)

Наша обложка

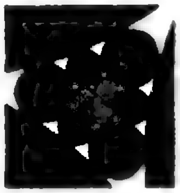


Рисунок на первой странице обложки — это ответ к задаче М1012. Он получается «стереографической проекцией» окружностей, вписанных в грани правильного додекаэдра (см. вторую страницу обложки, а также решение задачи М1012).

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1987

ОГИБАЮЩАЯ

Член-корреспондент АПН СССР
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

На рисунке 1 изображена замкнутая *выпуклая линия* L. Эта линия является *гладкой*, т. е. в каждой точке этой линии можно провести к ней касательную. Множество (или, как еще говорят, «семейство») всех касательных к линии L обозначим через T. На рисунке 2 изображены несколько прямых, принадлежащих семейству T (т. е. являющихся касательными к линии L). Эти прямые как бы «огибают» линию L; поэтому говорят, что линия L является *огибающей* семейства прямых T.

Можно поставить и обратный вопрос: дано некоторое семейство прямых T и требуется найти огибающую этого семейства, т. е. линию, которая касается всех прямых семейства T. Задача о нахождении огибающей часто встречается в математике и ее приложениях. О решении этой задачи и будет здесь рассказано.

Огибающая семейства прямых

Вернемся к рисунку 2. Линия L разбивает плоскость на две области, внутреннюю и внешнюю. Через каждую точку M_0, лежащую во внешней области E, проходят две линии семейства T (т. е. касательных к линии L), а через точку M_1, лежащую во внутренней области J, не проходит ни одной касательной. Через каждую же точку M самой линии L проходит одна прямая семейства T (касательная).

Это обстоятельство и поможет нам найти аналитический прием отыскания огибающей. Для этого каждой прямой из семейства T мы сопоставим в качестве ее «номера» (точнее, параметра) некоторое действительное число α. Именно, зафиксировав на линии L начальную точку A, мы сопоставим прямой $l \in T$, касающейся кривой в точке M (рис. 3), число (параметр) α, равный длине дуги AM линии L. Возможны и другие способы сопоставить каждой прямой l семейства T некоторое значение параметра.

Прямую (из семейства T), которой сопоставлено значение параметра α, обозначим через $l(\alpha)$; пусть уравнение этой прямой имеет вид

$$A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)=0. \qquad (1)$$

Вспомним теперь (см. рис. 2), что через разные точки может проходить разное число прямых семейства T. Как же узнать, сколько прямых семейства T проходит через данную точку $M_0(x_0; y_0)$? Ясно, что это можно сделать так: надо подставить координаты точки M_0 в (1) и узнать, сколько есть значений параметра α, для которых получающееся равенство справедливо. Иначе говоря, надо решить относительно α уравнение

$$A(\alpha)x_0+B(\alpha)y_0+C(\alpha)=0. \qquad (2)$$

Например, если бы оказалось, что уравнение (2) является квадратным относительно α, то было бы понятно, почему через некоторые точки проходят две линии семейства T (уравнение имеет два различных действительных корня α_1, α_2), через некоторые точки не проходит ни одной

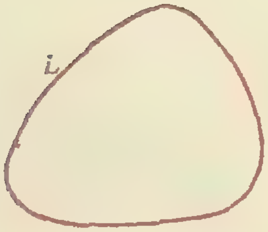


Рис. 1.

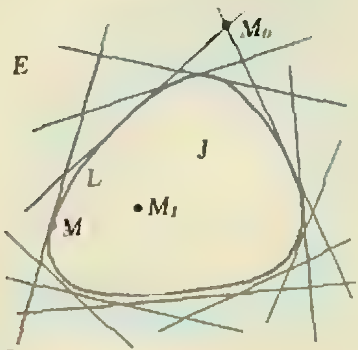


Рис. 2.

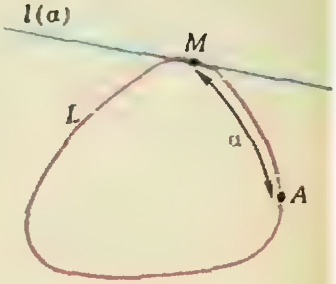


Рис. 3.

прямой семейства T (уравнение не имеет действительных корней), а через некоторые точки — только одна прямая (уравнение имеет два совпадающих действительных корня $\alpha_1=\alpha_2$). Отсюда ясно, что (в случае, когда уравнение (2) — квадратное относительно α) для нахождения огибающей семейства T надо найти множество всех тех точек $M_0(x_0;\ y_0)$, для которых уравнение (2) имеет два совпадающих корня. Таким образом, нужно приравнять нулю дискриминант квадратного (относительно α) уравнения (2) (или, что равносильно, уравнения (1)) — это и будет уравнение огибающей.

Пример 1. *Семейство T состоит из всех прямых, отсекающих от первого координатного угла треугольник данной площади s. Найти огибающую этого семейства.*

Решение. Пусть α — произвольное положительное число. Обозначим через $l(\alpha)$ прямую семейства, которая пересекает ось абсцисс в точке α. Так как площадь отсекаемого треугольника должна быть равна s, то ось ординат эта прямая должна пересекать в точке $2s/\alpha$. Уравнение этой прямой можно записать в виде

$$\alpha^2\cdot\frac{y}{2s}-\alpha+x=0. \qquad (3)$$

Действительно, это уравнение — первой степени, т. е. описывает прямую, и эта прямая проходит через обе точки $(\alpha;\ 0)$, $(0;\ 2s/\alpha)$. Приравняв нулю дискриминант, получаем уравнение огибающей:

$$(-1)^2-(4y/2s)\,x=0,$$

т. е. $y=s/2x\ (x>0)$.

Это — одна ветвь гиперболы (рис. 4).

Пример 2. *В плоскости даны прямая a и не принадлежащая ей точка F. Через каждую точку $M\in a$ проводится прямая, перпендикулярная FM. Найти огибающую этого семейства прямых.*

Решение. Примем a за ось абсцисс и будем считать, что ось ординат проходит через точку F (рис. 5); ординату точки F обозначим через $p/2$. Далее, возьмем на прямой a (т. е. на оси абсцисс) точку M с абсциссой α. Тогда прямая $l(\alpha)$, проходящая через M и перпендикулярная (FM), задается уравнением

$$y=\frac{2\alpha}{p}(x-\alpha),$$

т. е.

$$\alpha^2-\alpha x+\frac{py}{2}=0.$$

Приравнивая нулю дискриминант стоящего в левой части квадратного трехчлена, получаем уравнение огибающей:

$$x^2=2py.$$

В данном случае огибающей является парабола (рис. 6).

В обоих рассмотренных примерах в качестве огибающих получились хорошо известные линии (в частности, при $s=2$ и $p=1/2$ получаем $y=1/x$ и $y=x^2$). Это позволяет получить интересные свойства касательных к этим линиям. Пример 1 показывает, что *любая касательная к гиперболе $y=k/x$ определяет вместе с осями координат треугольник постоянной площади $s=2k$.* Пример 2 дает интересное свойство параболы $x^2=2py$; точка $F\,(0;\ p/2)$ называется *фокусом* этой параболы, точка $(0;\ 0)$ — ее *вершиной*, а прямая $y=0$ (ось абсцисс) является касательной, проведенной через вершину. Таким образом, *если на произвольную касательную к параболе опустить перпендикуляр из фокуса, то основание этого перпендикуляра принадлежит касательной, проведенной через вершину* (рис. 6).

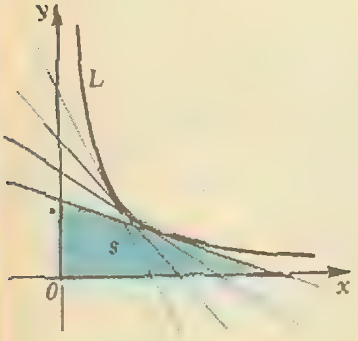


Рис. 4.

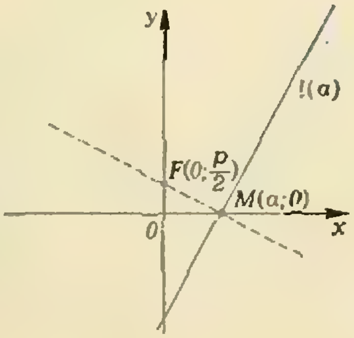


Рис. 5.

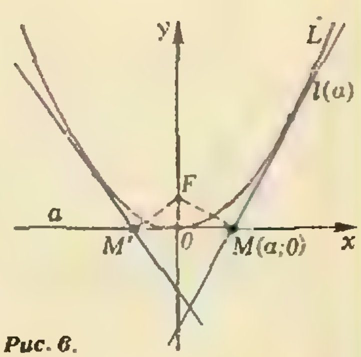


Рис. 6.

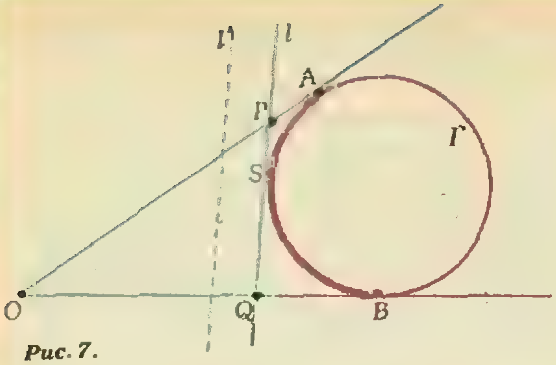


Рис. 7.

В иных случаях, напротив, легче геометрически увидеть, какая линия является огибающей, чем написать уравнение прямой, принадлежащей семейству, и приравнивать нулю дискриминант.

Пример 3. *Дан угол (меньший развернутого). Семейство T состоит из всех прямых, отсекающих от этого угла треугольник постоянного периметра $2p$. Найти огибающую этого семейства.*

Решение. Отложим на сторонах данного угла O отрезки OA и OB, имеющие длину p (рис. 7), и рассмотрим окружность Γ, касающуюся сторон угла в точках A и B. Любая касательная l к окружности Γ (проведенная так, что точка O и окружность Γ находятся по разные стороны от нее) обладает требуемым свойством, т. е. $l \in T$, поскольку

$$OP+OQ+PQ=OP+OQ+PS+SQ=$$
$$=OP+OQ+PA+QB=OA+OB=2p.$$

Если же прямая l' не касается дуги AB окружности Γ, то отсекаемый ею треугольник имеет либо меньший, либо больший периметр. т. е. эта прямая не принадлежит семейству T. Итак, семейство T состоит из всех прямых, касающихся дуги AB окружности Γ, а огибающей этого семейства является дуга AB.

Огибающая семейства кривых

Заметим теперь, что в проведенных рассмотрениях вовсе не использовался тот факт, что семейство T состоит из прямых линий. Важно было лишь то, что линии семейства T зависят от параметра α, относительно которого левая часть уравнения является квадратным трехчленом. Следующий пример подтверждает сказанное.

Пример 4. *В точке O расположено зенитное орудие, из которого можно выпускать снаряды (с заданной по величине начальной скоростью v_0) под любым углом к горизонту. Определить зону обстрела (сопротивлением воздуха пренебречь).*

Решение. Достаточно рассмотреть точки, находящиеся в одной вертикальной плоскости. Если u — горизонтальная составляющая начальной скорости снаряда, вылетевшего из орудия в момент $t=0$, то вертикальная составляющая равна $\sqrt{v_0^2-u^2}$. Горизонтальная проекция снаряда S (точка P на рисунке 8) движется равномерно со скоростью u, т. е. в момент t абсцисса снаряда равна $x=ut$. Вертикальная проекция движется по закону $y=\sqrt{v_0^2-u^2}\cdot t-gt^2/2$, откуда (учитывая, что $t=x/u$) находим траекторию снаряда:

$$y=\sqrt{v_0^2-u^2}\cdot\frac{x}{u}-\frac{gx^2}{2u^2}.$$

Выделяя слагаемое, содержащее радикал, и возводя в квадрат, получаем (после умножения на u^4):

$$u^4(x^2+y^2)-u^2x^2(v_0^2-gy)+g^2x^4/4=0.$$

Левая часть зависит от параметра $\alpha=u^2$ и представляет собой квадратный трехчлен относительно α. Приравнивая нулю дискриминант этого трехчлена, получаем уравнение огиба-

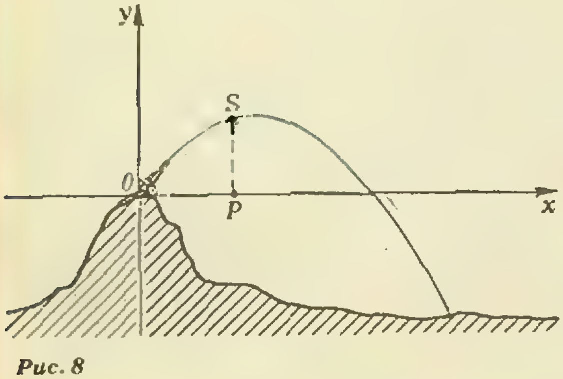


Рис. 8

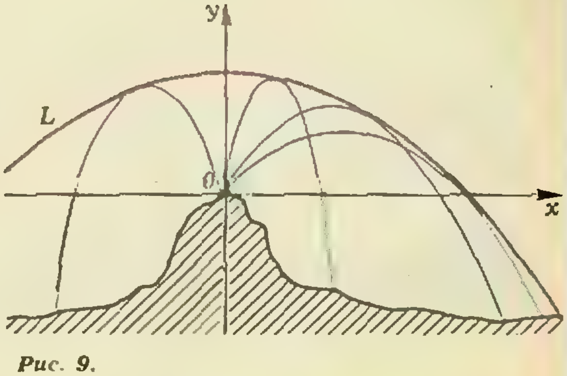


Рис. 9.

ющей семейства T всех траекторий снарядов:

$$x^4(v_0^2-gy)^2-(x^2+y^2)\cdot g^2x^4=0,$$

или, после деления на x^4 и упрощения,

$$y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

Эта огибающая называется *параболой безопасности* (выше нее полет безопасен); вершина этой параболы находится в точке $(0;\ v_0^2/2g)$, а ветви направлены вниз, поскольку коэффициент при x^2 отрицателен (рис. 9).

Важный класс задач, связанный с построением огибающих к семейству **окружностей**, возникает из *принципа Гюйгенса* («Физика-10», п. 37, с. 96). Мы здесь не касаемся этих задач (см. «Квант», 1982, № 6, с. 30).

Задачи

1. Рассматриваются всевозможные прямые $ax+by=1$, где коэффициенты a, b удовлетворяют условию $a^2+b^2=1$. Найдите огибающую этого семейства прямых.

2. *Найдите* огибающую семейства прямых $y=2\alpha x-\alpha^2$.

3. В плоскости даны прямая d и не принадлежащая ей точка A. Для каждой точки $M\in d$ рассматривается прямая l_M, являющаяся осью симметрии точек A и M. Найдите огибающую семейства всех прямых l_M.

4. Найдите (алгебраически) *огибающую* семейства линий $(x-\alpha)^2+y^2-1=0$ и дайте геометрическое пояснение результата.

5. Рассматривается семейство окружностей (рис. 10)

$$(x-\alpha)^2+y^2=b^2\left(1-\frac{\alpha^2}{c^2}\right),$$

где b, c — данные положительные числа, а α — параметр ($|\alpha|)\leqslant c$). Докажите, что огибающей этого семейства окружностей является эллипс, описываемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (где } a^2=b^2+c^2).$$

6. Рассматривается прямая $l(\alpha)$, определяемая уравнением

$$y-\alpha x+\frac{a}{2\sqrt2}(\alpha^2-1)=0,$$

где a — *заданное положительное* число, а α — параметр ($|\alpha|<1$).

а) Найдите точки P, Q пересечения этой прямой с биссектрисами первого и второго координатного углов и докажите, что $OP+OQ=a$.

б) Найдите огибающую семейства прямых $l(\alpha)$ и убедитесь, что эта огибающая представляет собой дугу параболы.

в) Дан прямой угол; рассматриваются всевозможные прямые, отсекающие от этого угла треугольники, у которых сумма длин катетов равна a. Докажите, что огибающая этого семейства прямых представляет собой дугу параболы.

7. Рассматривается прямая $l(\alpha)$, определяемая уравнением

$$bx(1+\alpha^2)+ay(1-\alpha^2)-2\alpha ab=0,$$

где a, b — заданные положительные числа, а α — параметр.

а) Найдите точки P, Q пересечения этой прямой с прямыми $y=bx/a$, $y=-bx/a$ и докажите, что $OP\cdot OQ=a^2+b^2$, $S_{\triangle OPQ}=ab$.

б) *Докажите, что огибающей семейства прямых $l(\alpha)$ является гипербола*, описываемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

в) Прямые $y=bx/a$, $y=-bx/a$ называются *асимптотами* указанной гиперболы; докажите, что произвольная касательная к гиперболе определяет вместе с асимптотами треугольник постоянной площади $S=ab$.

8. Рассматривается прямая $l(\alpha)$, определяемая уравнением

$$bx(\alpha^2-1)+2\alpha ay+ab(\alpha^2+1)=0,$$

где a, b — заданные положительные числа; а α — параметр. Докажите, что огибающей семейства прямых $l(\alpha)$ является эллипс, рассмотренный в задаче 5.

9. Найдите огибающую семейства парабол $y=\alpha^2x^2-2\alpha$ (где α — параметр). Сделайте чертеж.

10. Найдите огибающую семейства окружностей $x^2+(y-\alpha)^2=\alpha$ (где α — параметр). Сделайте чертеж.

11. Найдите огибающую семейства окружностей $(x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2/5$ (где α — параметр). *Сделайте чертеж.*

12. Найдите огибающую семейства парабол $y=2\alpha x^2-\alpha^2$ (где α — параметр). Сделайте чертеж.

13. Найдите огибающую семейства парабол $y=\alpha x^2+(1/\alpha-\alpha)$ (где α — параметр); сделайте чертеж.

14. Найдите огибающую семейства парабол $y=-\alpha x^2/4+(\alpha+1/\alpha)$ (где α — параметр); сделайте чертеж.

Воспользуемся производной

Теперь мы рассмотрим другой, более общий способ нахождения огибающей, применимый и в том случае, когда левая часть уравнения не является квадратным трехчленом относительно параметра α. Этот способ основан на использовании понятия производной.

Пусть семейство линий задано уравнением

$$f(\alpha,x,y)=0, \tag{4}$$

где f — некоторое выражение (напри-

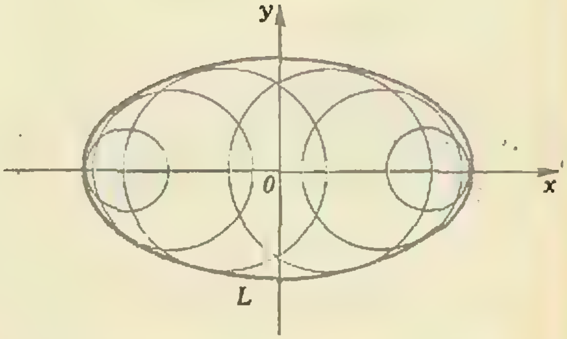


Рис. 10.

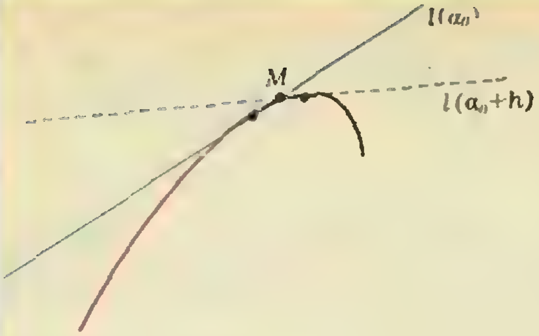


Рис. 11.

мер, многочлен), содержащее буквы α, x и y: α — параметр, а x, y — координаты. При каждом конкретном значении параметра α получается соотношение между x и y, чем определяется некоторая линия $l(\alpha)$. При разных α будут получаться разные линии $l(\alpha)$, т. е. мы получаем семейство линий. Например, уравнение (1) как раз имело вид (4) (но там левая часть линейна относительно x и y, а в общем случае уравнение (4), определяющее семейство линий, может быть произвольным).

Пусть L — огибающая семейства линий $l(\alpha)$ (рис. 11). Выберем из этого семейства одну линию $l(\alpha_0)$ и пусть $l(\alpha_0+h)$ — «близкая» к ней линия семейства, а M — точка пересечения этих линий. Так как M принадлежит обеим рассмотренным линиям, ее координаты x, y удовлетворяют уравнениям

$$f(\alpha_0, x, y)=0, \quad f(\alpha_0+h, x, y)=0.$$

Следовательно, для координат точки M выполнено соотношение

$$\frac{f(\alpha_0+h, x, y)-f(\alpha_0, x, y)}{h}=0. \qquad (5)$$

При $h\to 0$ точка M будет приближаться к той точке M_0, в которой линия $l(\alpha_0)$ касается огибающей. Если в выражении (5) перейти к пределу при $h\to 0$, получим

$$f'_\alpha(\alpha_0, x_0, y_0)=0 \qquad (6)$$

(где в левой части стоит производная по α от выражения f, рассматриваемого как функция от α). Итак, в точке $M_0\in L$ выполнено, во-первых, соотношение

$$f(\alpha_0, x_0, y_0)=0 \qquad (7)$$

(поскольку M_0 — общая точка линий L и $l(\alpha_0)$) и, во-вторых, соотношение (6). Иначе говоря, огибающей принадлежат те точки $M_0(x_0; y_0)$, которые одновременно удовлетворяют (при некотором α_0) обоим уравнениям (6), (7). Это означает, что для нахождения огибающей можно поступить следующим образом: надо написать два соотношения

$$f(\alpha, x, y)=0, \quad f'_\alpha(\alpha, x, y)=0 \qquad (8)$$

и исключить из них параметр α (т. е. найти α из одного соотношения и подставить его во второе соотношение). Получится одно уравнение, связывающее x и y; это и будет уравнение огибающей.

Пример 5. *На высоте h по прямой, параллельной поверхности земли, летит со сверхзвуковой скоростью v самолет. Определите в заданный контрольный момент зону слышимости.*

Решение. Пусть в заданный момент самолет находился над точкой O земной поверхности; проекцию траектории самолета на поверхность земли примем за ось абсцисс, а за ось ординат — перпендикулярную ей прямую. За α секунд до интересующего нас контрольного момента самолет был в точке A_α, расположенной над точкой $x=-v\alpha$ оси абсцисс. К контрольному моменту звук из точки A_α распространился внутри шара с центром A_α и радиусом $u\alpha$, где u — скорость распространения звука в воздухе. Этот шар пересекается с поверхностью зем-

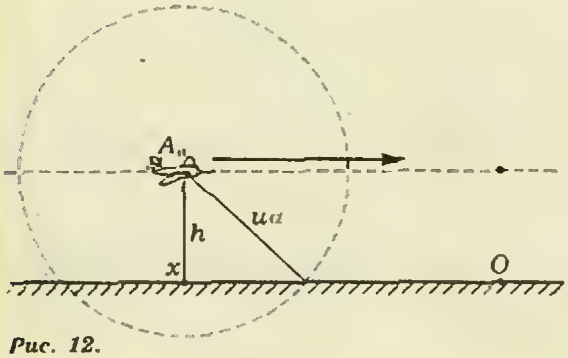


Рис. 12.

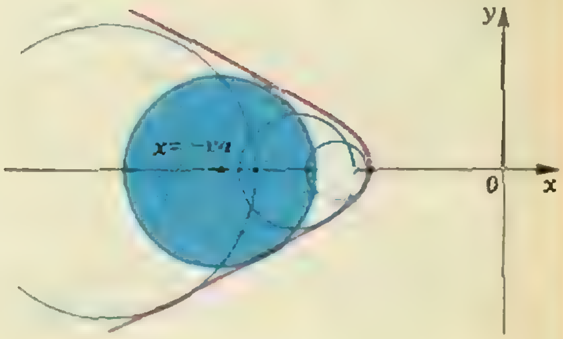


Рис. 13.

ли по кругу, центр которого находится в точке $x=-v\alpha$ оси абсцисс, а радиус равен $\sqrt{(u\alpha)^2-h^2}$ (рис. 12). Окружность этого круга и ограничивает на земле ту зону, в которой (к контрольному моменту) распространился звук, произведенный самолетом при прохождении точки A_2. Уравнение этой окружности имеет вид

$$(x+v\alpha)^2+y^2=(u\alpha)^2-h^2. \qquad (9)$$

Взяв объединение всех указанных кругов, мы и получим образовавшуюся к контрольному моменту зону слышимости. А чтобы найти границу зоны *слышимости, надо найти* огибающую (рис. 13) семейства окружностей (9). Уравнение (9) запишем в виде (4):

$$\alpha^2(v^2-u^2)+2\alpha xv+(x^2+y^2+h^2)=0. \qquad (10)$$

Взяв производную по α, получаем

$$2\alpha(v^2-u^2)+2xv=0.$$

Наконец, определив α из последнего соотношения и подставив в (10), получаем уравнение огибающей:

$$u^2x^2-(v^2-u^2)y^2=h^2(v^2-u^2).$$

Это уравнение описывает *гиперболу*; нам надо взять только левую ее ветвь, поскольку окружности (9) мы должны рассматривать лишь при $\alpha>0$. (Заметим, что то же уравнение огибающей можно получить *и прежним приемом*, взяв дискриминант квадратного трехчлена (10).)

Задачи

15. Найдите огибающую семейства парабол $y=\alpha^3x^2-3\alpha$ (где α — параметр). Сделайте чертеж.

16. Найдите огибающую семейства прямых $y=\alpha^3x-3\alpha^2/2$.

17. Найдите огибающую семейства прямых $y=4\alpha^3x-3\alpha^4$.

18. Найдите такое семейство прямых, огибающей которого служит линия $y=x^5$.

19. Найдите огибающую семейства окружностей $(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2=1/4$. Сделайте чертеж.

20. Решите задачу о зоне слышимости, если самолет летит (со сверхзвуковой скоростью) по прямой, наклоненной к земле под углом φ.

Дискриминантная кривая

Заметим в заключение, что если задано некоторое семейство линий (4), то линия L, получающаяся при исключении параметра α из уравнений (8) (она называется *дискриминантной кривой*), может, кроме точек огибающей, содержать и посторонние точки. Так, в примере 4 дискриминантная кривая, как легко проверить, содержит, кроме параболы безопасности, линию $x=0$ (ось ординат). Часть этой оси, расположенную ниже точки $y=v_0^2/2g$, можно, в каком-то смысле, считать «касательной» к траектории, получающейся при вертикальном выстреле вверх, но верхняя часть оси ординат (выше этой точки) *расположена* вне зоны обстрела и никак не связана с траекториями снарядов.

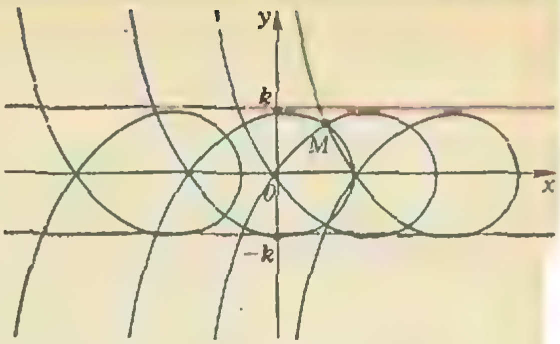
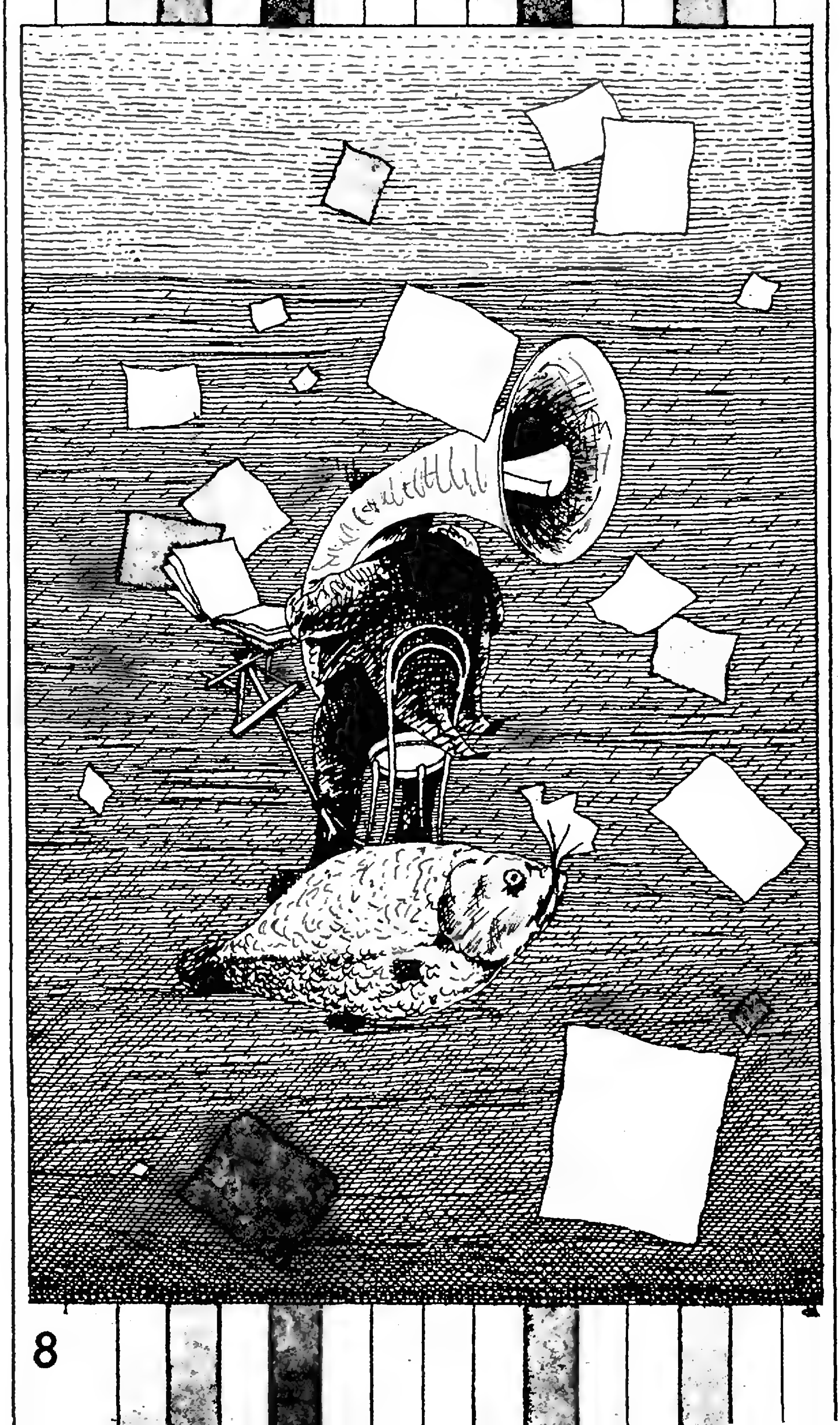


Рис. 14.

Вообще, дискриминантная кривая (если не считать ее «посторонние куски») *отделяет друг от друга области*, через которые проходит разное число линий семейства. Кроме огибающей и «посторонних кусков» дискриминантная кривая может содержать *особые точки линий семейства* (например, точки их самопересечения). На рисунке 14 показано семейство линий

$$(x-\alpha)^3+3(x-\alpha)y^2-$$
$$-3((x-\alpha)^2-y^2)=0.$$

Эти линии (называемые *декартовыми листами*) получаются друг из друга параллельными переносами вдоль оси абсцисс. Каждая линия имеет особую точку (точку самопересечения). Дискриминантная кривая в данном случае состоит из трех параллельных прямых: прямой $y=0$ (множества точек самопересечения всех наших линий) и прямых $y=-k$ и $y=k$, где $k=\sqrt{2\sqrt{3}-3}$ (огибающих). Через каждую точку вне полосы $-k\leqslant y\leqslant k$ проходит одна линия семейства, через каждую точку дискриминантной кривой — две, а через каждую из остальных точек — три.



АКУСТИКА В ОКЕАНЕ

Академик Л. М. БРЕХОВСКИХ,
кандидат физико-математических наук В. М. КУРТЕПОВ

Источник пищевых ресурсов, кладовая полезных ископаемых, «кухня» погоды, главная дорога Земли... Такими словами можно в общем охарактеризовать роль Мирового океана в нашей жизни. И с каждым годом все яснее становится, как велика эта роль, как огромно влияние Океана на все сферы деятельности человека, как важны исследовательская работа в Океане и разработка технических средств освоения его ресурсов.

Человек остро заинтересован в том, чтобы как можно больше знать о состоянии Океана, о движении его вод, о строении океанического дна. Это нужно для надводной и подводной навигации, для определения областей с наибольшей биологической продуктивностью, для учета влияния Океана на погоду и климат нашей планеты и для многих других целей.

Многочисленные исследовательские корабли разных стран находятся все время в Океане и в прилегающих к континентам морях. Они регистрируют состояние водных масс на разных глубинах, состояние атмосферы над Океаном, изучают характеристики дна. Результаты исследований стекаются в Мировые центры данных, главные из которых расположены в Москве и Вашингтоне. Эта информация очень ценна. Однако по своему объему она слишком мала, чтобы сколь-нибудь полно описать текущее состояние всего Мирового океана и прилегающих к нему морей. Для этой цели поток информации должен быть увеличен в тысячи раз. Здесь на помощь приходят средства исследования Океана из космоса. Приборы, установленные на искусственных спутниках Земли и на космических станциях, быстро и сразу с большой площади «собирают» данные о многих характеристиках Океана. Измерения собственного излучения Океана в инфракрасном или сантиметровом диапазоне позволяют регистрировать температуру его поверхности. По рассеянию электромагнитных волн сантиметрового диапазона на поверхности Океана можно определить характеристики поверхностных волн, скорости поверхностного течения и приповерхностного ветра. По времени пробега электромагнитного импульса от космической станции до поверхности Океана и обратно можно определить перепады уровня Океана на больших расстояниях. Именно так впервые была обнаружена «ложбина» на поверхности Океана глубиной около 23 метров над Пуэрториканской впадиной на дне океана.

Однако все эти данные, получаемые из космоса, относятся к поверхности Океана. И понятно почему — электромагнитные волны не могут сколь-нибудь значительно проникать в глубь морской воды. В толще вод свет затухает на расстоянии нескольких десятков метров; даже для мощнейшего луча лазера предел — несколько сотен метров.

Инструмент для «просвечивания» глубин Океана дает акустика. Только звуковые волны могут распространяться в воде на значительное расстояние. Так, звук сравнительно небольшого исследовательского взрыва в морских экспериментах ученые регистрировали на расстоянии 22 000 километров.

Здесь нам надо обратиться к открытию сорокалетней давности. В 1946 году советские ученые обнаружили в Японском море очень интересное явление. Звуки взрывов (подрывались противолодочные бомбы на глубине 100 метров) распространялись без заметного ослабления на очень большие расстояния — многие сотни километров. Детальная обработка и анализ экспериментальных материалов показали, что это происходит из-за своеобразной зависимости скорости звука в Океане от глубины. Скорость звука в морской воде, вообще говоря, меняется с изменением температуры, солености и гидростатического давления. Во время работ в Японском море соленость изменялась с глубиной незначительно, и ее влияние не сказывалось. При удалении от поверхности до глубины примерно 300 метров скорость звука

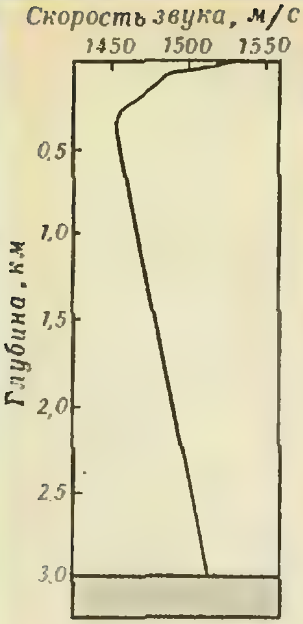


Рис. 1.

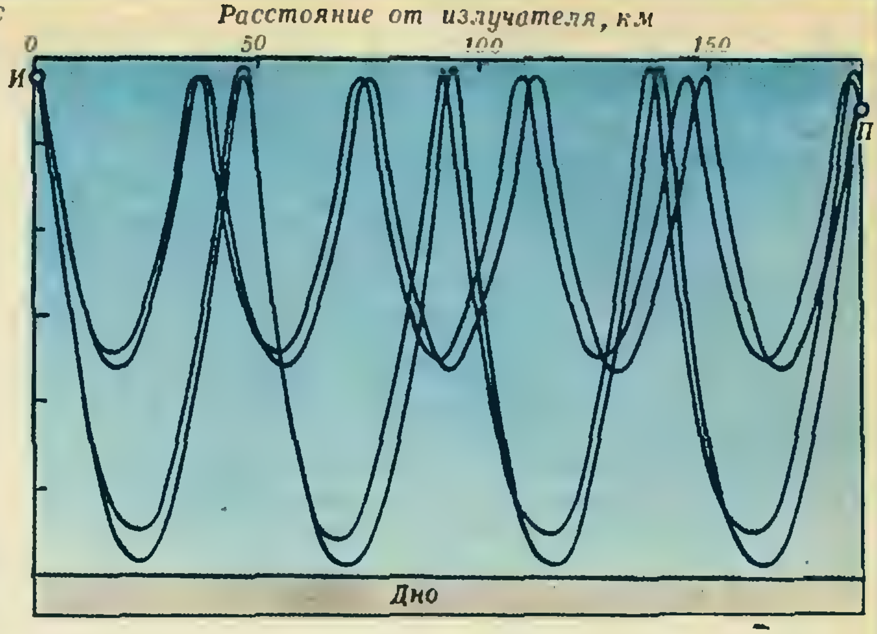


Рис. 2.

уменьшалась из-за падения температуры. При дальнейшем углублении температура изменялась мало и составляла 0,3—0,5 °С. Однако по мере увеличения глубины (максимальная глубина в Японском море 3700 м) существенно росло гидростатическое давление. Это приводило к возрастанию скорости звука. В результате формировалась своеобразная зависимость скорости звука от глубины. Пример такой зависимости (профиль скорости звука) приведен на рисунке 1. Минимум скорости звука расположен на глубине 300 м. Выше и ниже этого уровня скорость возрастает. К чему приводит такой профиль скорости звука?

На рисунке 2 изображены звуковые лучи, выходящие из излучателя (И), помещенного на глубине 100 м, и попадающие в приемник (П), который находится на глубине 300 м на расстоянии 184 км от излучателя. Вследствие «преломления» лучи искривляются, и снова и снова они возвращаются к горизонтальной оси, соответствующей минимуму скорости звука. При этом целое семейство лучей (некоторые из них и показаны на рисунке 2) не достигает дна, где звуковые сигналы могли бы поглотиться, и не выходит на поверхность, на неровностях которой они могли бы рассеяться. В результате звук приходит в приемник по чисто водным лучам, или, как говорят, по подводному звуковому каналу — ПЗК,— почти без затухания. Это позволяет регистрировать звуковые сигналы за многие тысячи километров от их источника.*)

Наличием ПЗК и объясняется явление «сверхдальнего» распространения звука, наблюдавшееся в 1946 году в Японском море. Оказывается, ПЗК имеется в любом море и любом океане при условии достаточной их глубины.

Излученный звуковой сигнал, распространяясь по различным лучам, приходит в точку приема в различные моменты времени. Любые, даже малые изменения профиля скорости звука приводят к смещениям момента прихода звукового сигнала по отдельному лучу. Величины этих смещений, или флуктуаций,— свои для каждого из лучей. Вся последовательность принятых сигналов полностью определяется свойствами среды и является чрезвычайно чувствительным индикатором этих свойств.

В действительности Океан можно считать строго горизонтально-слоистым только в пределах нескольких десятков километров, да и то не всегда. Под воздействием различных процессов, протекающих в Океане, скорость звука изменяется не только по глубине, но и по горизонтали. И особенно велика в этом роль океанических вихрей, открытых советскими учеными. Это открытие было основным результатом проводившегося в 1970 году полугодичного эксперимента, названного «Полигон». Изучая мощное пассатное течение в Атлантике, считавшееся исключительно постоянным, ученые обнаружили, что в зоне течения существуют гигантские водяные вихри размерами в сотни километров, аналогичные атмосферным циклонам и антициклонам (дальнейшие исследования показали, что подобные вихревые движения охватывают практически весь Океан). Центр вихря перемещается со скоростью до 300 м/ч, но частички воды, участвуя во вращательном движении вихря, движутся раз в 10 быстрее.

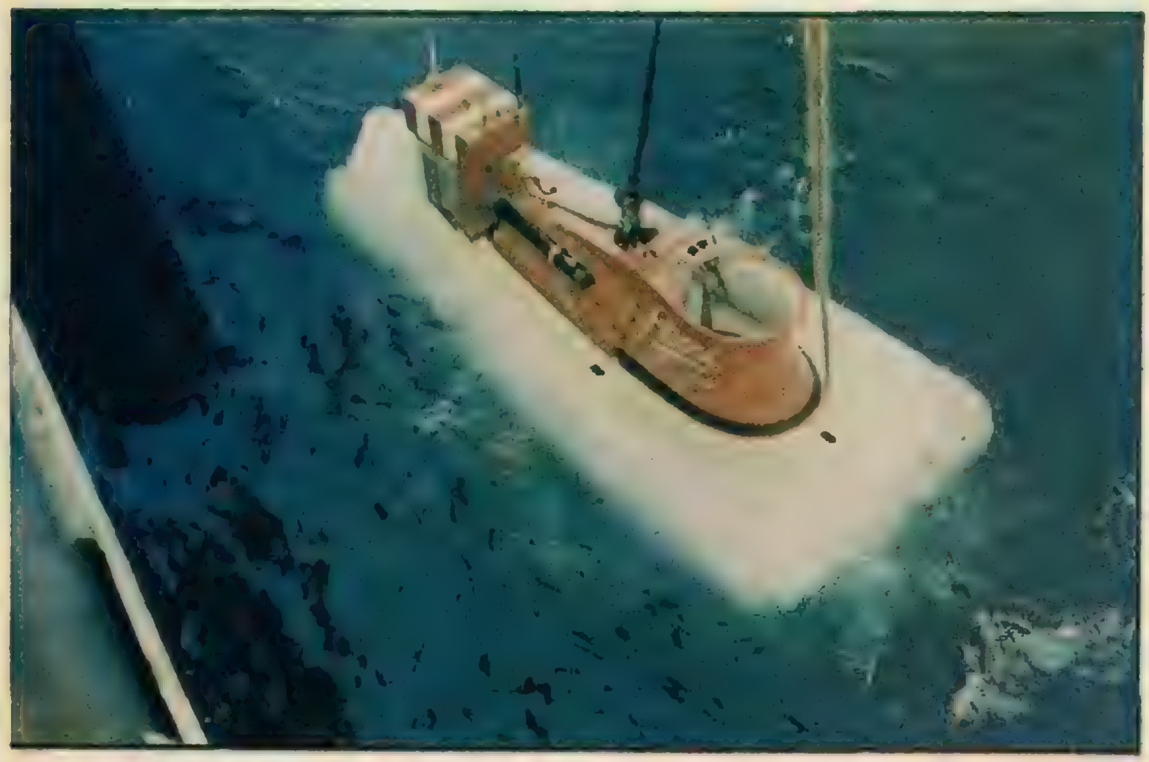
---

*) Об образовании подводных звуковых каналов, об особенностях распространения звука в ПЗК подробно рассказано в «Кванте» № 2 за 1985 год в статье А. А. Варламова и А. И. Маляровского «Переговорная трубка длиной в экватор?».

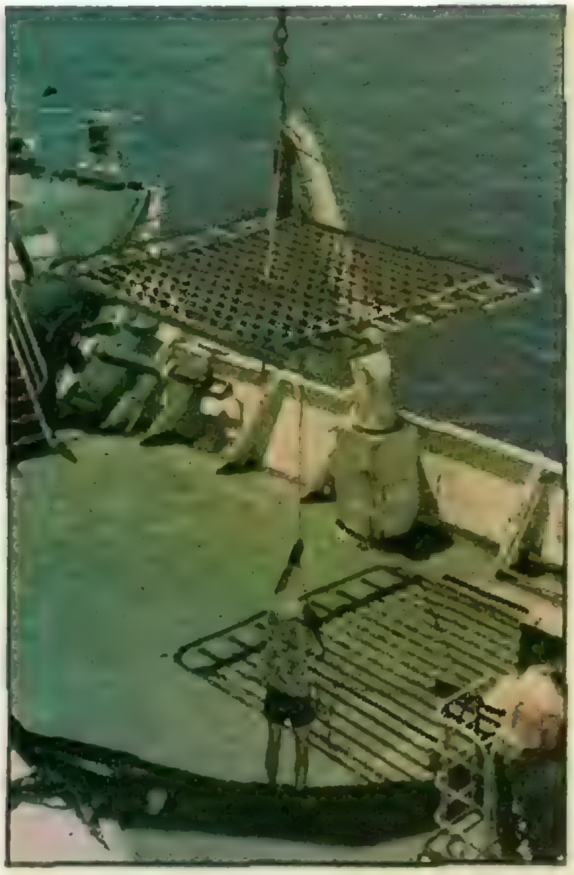
Прохождение интенсивного вихря приводит иногда к таким изменениям среды, которые могут полностью нарушить акустическую связь и, напротив, могут, подобно миражам в пустыне, сделать ранее неслышимое — слышимым.

Несколько лет назад возникла идея воспользоваться высокой чувствительностью звуковых сигналов к изменениям водной среды для организации длительных, порядка года, наблюдений за крупномасштабной изменчивостью Океана на акватории площадью до 10^6 км^2. Для этого нужно разместить по периметру акватории на разных глубинах систему заякоренных акустических излучателей и приемников и измерить флуктуации времен прихода сигналов по всевозможным «чисто водным» лучам. Эти сигналы, как мы уже говорили, несут информацию обо всех неоднородностях, встретившихся на пути. Таким образом можно осуществить «просвечивание» всей толщи Океана, сделать как бы «послойный снимок» акватории. Никакие флотилии научных судов не в состоянии практически мгновенно произвести измерения в столь большом объеме. Впрочем, за такую оперативность приходится расплачиваться сложностью обработки экспериментальных данных. По временнóй последовательности принятых сигналов нужно восстановить поле скорости звука — найти значения скорости звука в различных местах акватории; анализ этих результатов дает информацию о вихрях. Описанный метод и называют акустической томографией Океана (от греческого τομοσ — слой, ломоть).

Принципиальная схема восстановления поля скорости звука такова. Исследуемый район условно разбивается на N объемных ячеек, размеры которых — десятки километров по



Обитаемый аппарат «Пайсис» — незаменимый помощник в изучении океанических глубин.



Спуск антенной решетки в эксперименте по акустической визуализации дна океана.

горизонтали и несколько сотен метров по вертикали — малы по сравнению с пространственными масштабами вихрей. Скорость звука внутри n-ой ячейки в момент времени t на глубине z в точке с горизонтальными координатами x, y может быть записана в виде

$$c_n(x, y, z, t) = c_0(z) + \Delta c_n(x, y, z, t),$$
$$n = 1, 2, \ldots, N.$$

Здесь c_0 (z) — известное значение скорости звука в отсутствие вихрей, а Δc_n — возмущение скорости звука в n-ой ячейке, вызванное вихрями. Его-то, Δc_n, и нужно определить.

Профилю c_0 (z) соответствует совокупность из M чисто водных лучей, соединяющих в отсутствие вихрей все источники со всеми приемниками. Назовем эти лучи «опорными», в отличие от «истинных» лучей в реальной среде с вихрями. Траектории опорных лучей, а также времена t_{0m} $(m = 1, 2, \ldots, M)$ распространения по ним звуковых сигналов рассчитываются на электронных вычислительных машинах. При абсолютных значениях $|\Delta c_n|$ много меньших c_0, что обычно и бывает, истинные лучи будут мало отличаться от опорных. Если обозначить через t_m время распространения сигнала по m-му истинному лучу, то для флуктуаций времени прихода $\Delta t_m = t_m - t_{0m}$ получится приближенное равенство

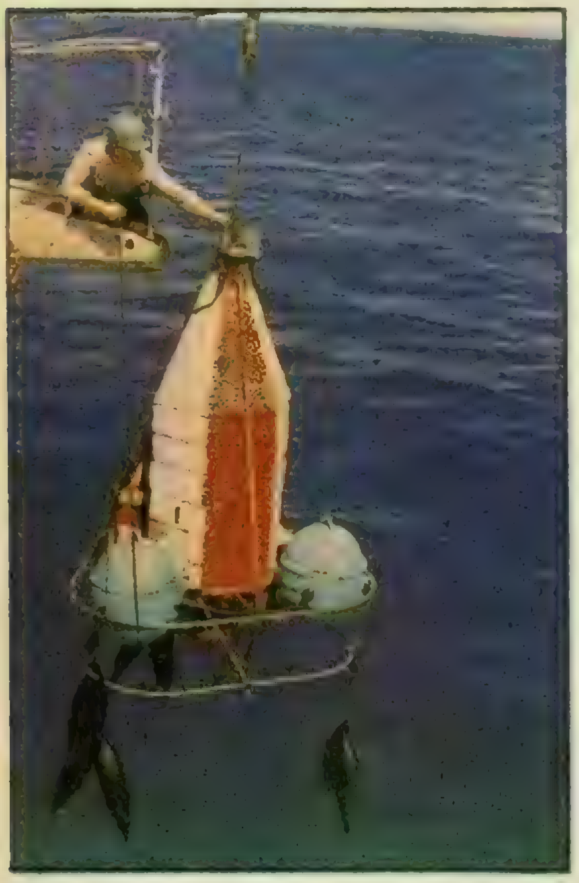
$$\Delta t_m = \sum_{n=1}^{N} E_{mn} \Delta c_n.$$

Перебирая всевозможные лучи, мы получим систему из M уравнений относительно Δc_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$. Величины коэффициентов E_{mn} вычисляются, если известна траектория m-го опорного луча и геометрическая форма n-ой ячейки. В ячейках, не «затронутых» m-ым лучом, $E_{mn} = 0$. Измерив флуктуации времени прихода звуковых сигналов Δt_m и решая описанную выше систему линейных уравнений, получим значения Δc_n в каждой из ячеек. Именно так и делается на практике, хотя попутно приходится преодолевать немало технических и математических трудностей.

Если распределение скорости звука $c_n(x, y, z, t)$ удалось восстановить, то, пользуясь известными в физике морской воды соотношениями, можно приближенно восстановить температуру, соленость и плотность воды. Знание температуры на большой акватории позволяет определить теплосодержание Океана, что важно для прогноза погоды. Но и этим не ограничивается информация, получаемая акустической томографией. По разности времен распространения сигналов туда и обратно между двумя корреспондирующими точками можно оценить среднюю вдоль луча проекцию скорости океанских течений на направление звуковой трассы. С этим связывают надежду на измерение крупномасштабной циркуляции Океана, что недоступно традиционным методам. Существуют проекты охвата томографической сетью огромных акваторий Мирового океана, что позволит по-новому подойти к проблемам взаимодействия Океан — атмосфера и формирования климата Земли.

Другой областью применения акустической томографии является исследование океанского дна. Это не просто, если учесть, что исследователь обычно отделен от предмета изучения столбом воды высотой в несколько километров. Имеющиеся в настоящее время способы сейсмопрофилирования дна Океана в сочетании с глубинным бурением громоздки и очень дороги. Между тем существуют и другие подходы.

В арсенал научной гидроакустической аппаратуры все более уверенно входят так называемые акустические автономные донные станции (АДС). Такая станция, снабженная приемниками звука (гидрофонами), специализированными ЭВМ и магнитофонами, может погружаться на дно Океана и там работать. Если научно-исследовательское судно, установив АДС, будет удаляться от нее, то станция зафиксирует шум судовых двигателей. В соответствии с законами распространения звука в Океане и в толще осадочных пород, сигнал, принимаемый АДС, приходит по водному лучу и донному лучу, преломляющемуся в дне Океана (рисунок 3). Кроме того, наблюдается сравнительно слабый фон из сигналов, рассеянных поверхностью и неоднородностями дна Океана, а также собственные шумы Океана. При движении судна «траектории» водного и донного лучей плавно изменяются. При этом меняется и относительная задержка времен прихода шумового сигнала по этим лучам. Разбив условно осадочные породы Океана, граничащие с водой, на слои с пока неизвестными значениями скорости звука, можно для этих скоростей составить такую же систему уравнений, как это было сделано ранее в задаче томографии океанской толщи. При этом в качестве Δt_m будут выступать измеренные станцией задержки приходов шумового сигнала для различных дистанций между судном и станцией. Решая систему уравнений, мы восстановим профиль скорости звука в осадочных слоях. По окончании измерений донная станция вызывается на поверхность, и эксперимент может быть повторен в любом другом месте.



Одна из представительниц семейства автономных донных станций. Перед погружением.

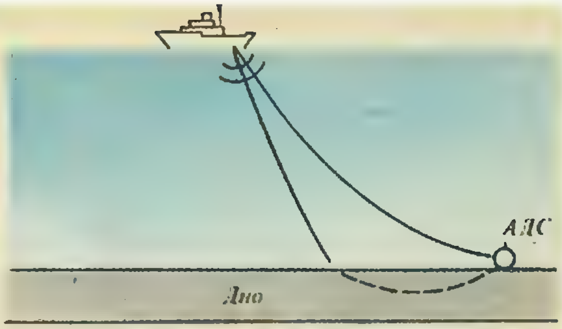


Рис. 3.

Акустические методы широко применяются и для исследования мелкомасштабных неоднородностей и процессов в Океане. Так, искажения звукового сигнала, рассеянного дном, несут информацию о неровностях границы вода — грунт и о различных неоднородностях в осадочных слоях. В будущем на этом пути предполагается осуществить акустическую визуализацию дна.

Для проведения таких исследований и анализа результатов ведутся теоретические расчеты, разрабатывается специальная экспериментальная техника и методы обработки данных, ориентированные на использование самых современных вычислительных средств. Этими и многими другими проблемами занимаются студенты и выпускники кафедры физики гидрокосмоса МФТИ, в том числе — и в морских экспедициях на исследовательских судах.

МК: ПРОБЛЕМЫ ОБЩЕНИЯ

(Путешествие по микрокомпьютеру)

Кандидат технических наук Д. Г. КРУТОГИН

В предыдущем номере мы отправились в прогулку по городу МК, осмотрели панораму города, представили жителей города, временных и постоянных. Сейчас самое время посмотреть на план города, чтобы оценить его структуру. На схематическом плане (рисунок 1) вы видите пять крупных районов, связанных друг с другом. Мы пройдем по ним в следующем порядке: районы устройств ввода (УВв) и вывода (УВы), район оперативной памяти (ОЗУ), постоянные запоминающие устройства

(ПЗУ) и, наконец, район микропроцессора (МП). На фотографии внизу — реальный кристалл микрокомпьютера, увеличенный в 10 раз. Так он выглядит незадолго до окончания процесса изготовления схемы и помещения в корпус. На нем не так просто указать границы районов, тем более, что свободного места на кристалле почти не видно. Поэтому нам удобнее двигаться по плану. А теперь в путь...

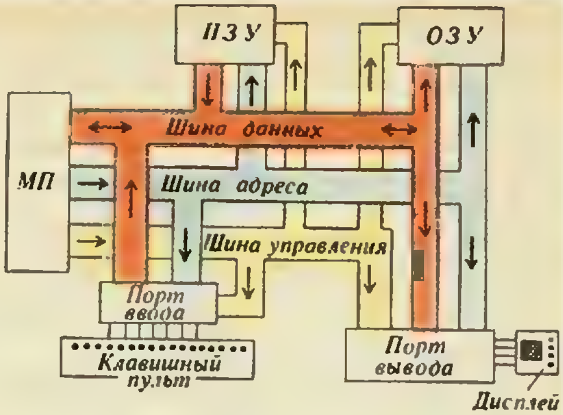


Рис. 1.

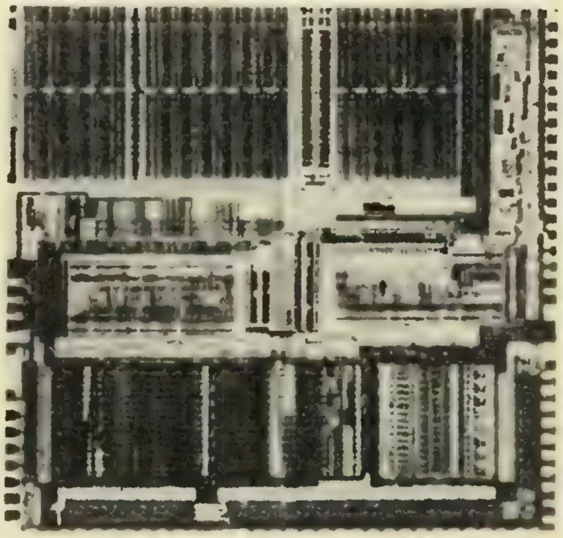
Площадь тридцати вокзалов

На плане (рисунок 1) внизу расположен центр приема туристов, или система устройств ввода (УВв) (напомним, что туристы в МК — машинные слова, объединенные в программы — делегации). Сюда, в район УВв, прибывают делегации из разных стран, к тому же самым разным транспортом. Например, с клавиатуры дисплея, с магнитофонов внешней памяти (ВЗУ) *), с экрана дисплея или от внешних датчиков. Поэтому район УВв представляет совокупность нескольких вокзалов или портов **). Но УВв не только вокзал, но и образцовое туристское бюро нашего города, а также и таможня, отсекающая неправильные или недопустимые слова программы, словосочетания или команды. Устройства ввода встречают туристские делегации, проверяют въездные документы, снабжают их переводчиками и сопровождающими лицами (адресами). Наконец, те же устройства занимаются и расселением туристов в городе на время пребывания.

Итак: первая задача ввода, еще до анализа и перевода,— разгрузить транспорт, доставивший в город программы, то есть линии ввода информации. Для этого нужно записать полученные сигналы (пока просто записать, без всякой обработки) на том языке, на котором они посланы. Первоначальную запись слов исходной программы выполняют входные порты. Они, собственно, и представляют собой небольшие блоки оперативной памяти длиной в одно машинное слово, то есть регистры. Каждый регистр снабжен блоком логических элементов*) — буфером, который обеспечивает подключение пустого регистра к внешним линиям информации, а заполненного регистра — к микропроцессору. Микропроцессор время от времени опрашивает входные порты и перегружает содержащиеся в них слова в ОЗУ, после чего порты готовы записать новое слово.

Кто командует парадом?

Надо заметить, что УВв активно участвуют во всех этих мероприятиях, но главным действующим лицом является микропроцессор. Под управлением программы ввода (хранящейся



---

*) Устройство систем ВЗУ рассматривалось в статье «Магнитная память ЭВМ» в «Кванте» № 11 за 1984 год.

**) Здесь слово «порт» не только литературный образ, но и технический термин. Так называют часть микросхемы в районах УВв или УВы, обеспечивающую связь МК с внешними устройствами.

*) Устройство регистров рассматривалось в рубрике ПЭВТ в «Кванте» № 4 за 1986 год; устройство логических элементов — в «Кванте» № 2 за 1986 год.

в ПЗУ) он сотрудничает с УВв, осуществляя прием туристских групп.

Вообще, давайте отметим, что при рассмотрении работы ЭВМ всегда полезно различать аппаратное обеспечение (скажем, реальные порты ввода или вывода, ячейки памяти и т. п.) и программное, то есть те действия, которые совершают отдельные элементы МК, подчиняясь определенным программам, управляющим машиной на разных стадиях ее работы.

Вот перед вами выключенная ЭВМ. Сейчас вы нажмете кнопку «Вкл», ... что? Какие действия должна предпринять машина, чтобы подготовиться к работе, к вводу программы пользователя? Кто управляет ею до тех пор, пока вы не ввели свою программу? Ответ: собственная, записанная в ПЗУ программа, называемая «монитор». Ей отдается приоритет сразу после «пробуждения» машины. Оживший, но незагруженный МП как бы шлет во все концы вопрос: «что делать? что делать?» И первой отвечает программа-монитор: «приготовься к вводу, очисти ОЗУ, вызови программу ввода, уточни, откуда (с какого порта) последует ввод...» Потом монитор уступит командование программе ввода, а после завершения ввода монитор прикажет МП начинать исполнение программы пользователя. Вот какая это важная программа — монитор! А кроме монитора у МК есть еще несколько служебных программ.

Мы снова говорим на разных языках

Следующая задача, выполняемая при вводе,— перевод текста программы пользователя на машинный язык. Вот тут мы вновь возвращаемся к разговору о переводчиках. Переводчики живут тут же в городе, в районе ПЗУ. Это специальные служебные программы, называемые трансляторами (to translate (англ.) — переводить). Переводчики есть разные: одни больше похожи на переводчиков-синхронистов, другие — на литературных переводчиков.

Синхронисты (или трансляторы-интерпретаторы) переводят одну очередную команду и направляют ее непосредственно на исполнение. В памяти переводчика-синхрониста текст перевода не сохраняется, поэтому при повторной работе с той же программой и той же командой транслятор-интерпретатор снова проделывает ту же самую работу. Но иногда он вдруг отказывается переводить; это значит, что в исходной программе встретилось неточное, неверное выражение. Перевести ошибку интерпретатор не может, ее нет в его «словаре». Поэтому на устройства вывода (УВы) поступает сообщение об ошибке, даже о характере ошибки.

Литературные переводчики (или трансляторы-компиляторы) работают более солидно. Команду за командой они переписывают исходную программу на язык микрокомпьютера и заносят в его оперативную память. В конце этой работы в ОЗУ хранится полный аналог исходной программы, но уже на машинном языке. После окончания работы транслятора программа эта готова к исполнению, в том числе к многократному повторению.

Какой же транслятор нужнее и лучше? Нужны оба. Для тесного общения с машиной, для работы в режиме диалога удобнее интерпретатор, он позволяет поправить, изменить любую команду в любом месте программы. Для МК интерпретатор удобнее и потому, что требует меньшего объема оперативной памяти (для записи) и постоянной памяти (для хранения «словаря»). Зато для длительных, многократных расчетов по большой и сложной программе удобнее компилятор, так как он работает намного быстрее.

Без тесноты и без обиды

Очередная задача приемного района — расселение программ. Для этого служит гостиничный комплекс, называемый ОЗУ — оперативное запоминающее устройство. Мы побываем там несколько позже, а сейчас отметим, что слова-команды и слова-операнды нужно расселить в разных кварталах ОЗУ-района. Как уже говорилось раньше, с «точки зрения» машины они неразличимы, и если при выполнении программы они перепутаются, то исполнение программы нарушится. Чтобы команду или операнд в нужный момент можно было легко найти, устройства ввода снабжают все расселяемые слова адресами, а адреса необходимо запомнить, занести в своего рода «адресную» книгу. После этого машина работает уже не со словами как таковыми, а с адресами. Например: переслать содержимое ячейки № 95 ОЗУ в МП (допустим, ячейки с номерами от 000 до 199 мы отвели под команды). Еще пример: сравнить содержимое ячейки № 286 с нулем и большее число занести в ячейку № 286.

Ну и наконец, туристские бюро приемного района согласовывают порядок пребывания туристов в городе и заказывают соответствующие услуги. Согласитесь, что для расчета двух коротких уравнений, записанных пятью символами,— например,

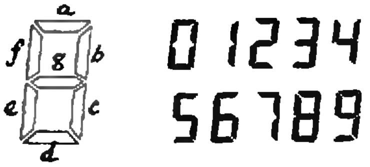
$$c=a+b,$$
$$c=\mathrm{tg}\,a^b$$

— потребуется совсем разная подготовительная работа. В масштабах городской жизни первая задача проста как покупка газеты, вторая больше похожа на организацию фестиваля народных танцев. Тут нужно отыскать (где? в ПЗУ) программу вычисления степенных функций, а затем уж тангенсов произвольного аргумента. Но если туристы хотят побывать на фестивале, то он должен быть организован, таковы условия работы нашего города — туристского центра.

Устройства вывода, расположенные на плане рядом с устройствами ввода, выполняют во многом схожие функции, но, конечно, в обратном порядке. Они преобразуют машинные слова — результаты расчетов — в удобную для потребителя форму (в виде таблиц, графиков, текста, звуковой сигнализации или даже речи) и подают управляющие сигналы на соответствующее выходное устройство: дисплей, печатающее устройство, звуковые генераторы, моделирующие речь.

Даже если выходное устройство представляет собой простой семисегментный цифрознаковый индикатор (рисунок 2), то для управления им на выходе МК должна стоять логическая схема, содержащая около сотни транзисторов. А на табло простого калькулятора обычно не менее 5—8 таких индикаторов, и даже на электронных часах не меньше четырех.

Итак, мы познакомились с задачами двух районов города МК, но по ходу дела упомянули все пять. Мы увидели, что приемный район и район устройств вывода имеют свои определенные функции, но работают они не изолированно, а при активном участии других районов. ПЗУ хранит текстовый словарь и вспомогательные программы, ОЗУ размещает команды и данные в последовательности, необходимой для обработки, наконец, все логические процедуры, связанные с вводом и выводом, выполняет микропроцессор.



десятичная цифра	двоичное число	a	b	c	d	e	f	g
0	0000	1	1	1	1	1	1	0
1	0001	0	1	1	0	0	0	0
2	0010	1	1	0	1	1	0	1
3	0011	1	1	1	1	0	0	1
4	0100	0	1	1	0	0	1	1
5	0101	1	0	1	1	0	1	1
6	0110	1	0	1	1	1	1	1
7	0111	1	1	1	0	0	0	0
8	1000	1	1	1	1	1	1	1
9	1001	1	1	1	1	0	1	1

Рис. 2. Таблица включения сегментов, реализуемая логической схемой формирователя, расположенной между портом вывода и цифровым индикатором.

Как видите, продвигаясь по городу, мы знакомимся не только с его архитектурой, но и, в некоторой степени, с условиями жизни и работы его обитателей, с правилами поведения, языком и прочими этнографическими деталями.

Победители конкурса «Задачник«Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». Ниже публикуются списки победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1986 года.
Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1987 года:

По математике

Н. АЗАМОВ — с. Балыкчи Андижанской обл., с. ш. № 14, 10 кл.
В. АКОПЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 9 кл.
А. БАРАБАНОВ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Д. БЕРЗИН — Калуга, с. ш. № 6, 10 кл.
Р. ВАЛИЕВ — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
Я. ВАРШАВСКИЙ — Харьков, с. ш. № 27, 9 кл.
Т. ГАМИДОВ — п. Борадыгях АзССР, с. ш. № 1, 9 кл.
О. ГЕВОРКОВ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
Р. ГЕНДЛЕР — Ташкент, с. ш. № 110, 10 кл.
А. ГЛУЦЮК — Харьков, с. ш. № 27, 9 кл.
М. ГОЛЬДШЕЙД — Челябинск, с. ш. № 31, 9 кл.
Р. ГРИНИВ — Львов, с. ш. № 62, 9 кл.
С. ЖЕЛЕЗОВСКАЯ — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
Т. КАСУМОВ — Баку, с. ш. № 193, 10 кл.
А. КОРШКОВ — Мозырь, с. ш. № 8, 8 кл.
О. ЛИМЕШКО — Куйбышев, с. ш. № 16, 10 кл.
М. ЛИТВИНОВ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
В. ЛЯНДИН — Белорецк, с. ш. № 14, 10 кл.
Г. МИНАСЯНЦ — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
С. МУШИНСКИЙ — Новосибирск, с. ш. № 130, 10 кл.
А. НАЗАРЯН — Тбилиси, ФМШ № 42, 9 кл.
Ю. НИКОНОРОВ — с. Михайловка Джамбулской обл., с. ш. им. Г. Муратбаева, 9 кл.
А. ПОКРОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
И. ПОРТНОЙ — Одесса, с. ш. № 100, 10 кл.
А. РОЙТЕРШТЕЙН — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
В. СТОЛИН — Вильнюс, с. ш. № 6, XI кл.
Д. ТАМАРКИН — Горький, с. ш. № 17, 10 кл.
И. УСТИЛОВСКИЙ — Москва, с. ш. № 91, 10 кл.
Е. ЧЕРНАЯ — Днепродзержинск, с. ш. № 11, 10 кл.
Т. ЧУДИНОВСКИХ — Целиноград, с. ш. № 15, 10 кл.
Е. ЧУРИКОВА — Целиноград, с. ш. № 15, 10 кл.
Б. ШРАЕР — Ленинград, с. ш. № 30, 10 кл.
Я. ЭФЕНДИЕВ — Баку, с. ш. № 82, 9 кл.

По физике

Х. АКИМОВ — Шават, обл. ФМШ, 10 кл.
А. АНТОНОВ — Москва, с. ш. № 47, 10 кл.
Ф. АСМАНДЬЯРОВА — Целиноград, с. ш. № 15, 10 кл.
Г. АХМЕДОВ — Сумгаит, с. ш. № 26, 9 кл.
Д. БЕРАДЗЕ — Тбилиси, с. ш. № 42, 10 кл.
А. БЕСОЛОВ — Кишинев, с. ш. № 3, 10 кл.
Д. ВИСИКАЛО — Винница, с. ш. № 33, 10 кл.
А. БЫЦКО — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
М. ВАГАНОВ — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
П. ВОЛЬФБЕЙН — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
А. ГАЕК — Днепропетровск, с. ш. № 23, 10 кл.
С. ГЕРАСИМОВ — Харьков, с. ш. № 105, 9 кл.
Г. ГРИДНЕВ — Тбилиси, ФМШ № 42, 10 кл.
В. ГУРАРИЙ — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
Д. ЕВТУШЕНКО — Донецк, с. ш. № 64, 10 кл.
Д. ЕЖИКОВ — Минск, с. ш. № 32, 10 кл.
П. ЗАДОРОЖНЫЙ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. ИЛЬЕНКОВ — Киев, с. ш № 145, 10 кл.
В. КИРЮХИН — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
С. КОНАРЕВ — Баку, с. ш. № 167, 10 кл.
Ю. КРАВЧЕНКО — Москва, с. ш. № 820, 9 кл.
С. КУРДЮКОВ — Москва, с. ш. №205, 10 кл.
А. КУСАИНОВ — Алма-Ата, РОФМШИ, 9 кл.
Д. КУЧУЛОРИЯ — Тбилиси, веч. шк. № 5, XI кл.
А. ЛОБКОВСКИЙ — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
И. ЛУГАЧ — Винница, с. ш. № 17, 10 кл.
А. МУРАВЬЕВ — Рига, с. ш. № 46, 10 кл.
У. РАХМАНОВ — Ташкент, РФМШ при ТашГУ, 9 кл.
М. СЕРГАЗИН — Алма-Ата, РОФМШИ, 9 кл.
А. СТАВИЦКИЙ — Баку, с. ш. № 56, 10 кл.
А. ТКАЧЕНКО — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Г. ФИНКЕЛЬШТЕЙН — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
А. ФУРС — д. Дричин Минской обл., Дричинская с. ш., 10 кл.
О. ЧЕПИКОВ — Могилев, с. ш. № 5, 10 кл.

(Окончание см. на с. 59)

Задачи

М1031—М1035; Ф1043—Ф1047

Задачник „Кванта"

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 мая 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/ 1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1031, М1032» или «Ф1043». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя просим писать печатными буквами.

М1031. На плоскости даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. На прямой l выбраны точка M, сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая, и точка N, для которой расстояния от A и B равны: $AN=BN$. Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.

Л. Д. Курляндчик

М1032. Выписаны n чисел 2, 3, ..., $n+1$, их всевозможные произведения по два, по три, и так далее вплоть до произведения всех n этих чисел. Докажите, что сумма чисел, обратных всем выписанным, равна $n/2$. $\left(\text{Например, при } n=3 \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\right.$ $\left.+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{3}{2}.\right)$

А. А. Анджанс

М1033. Окружность отрезает от квадрата четыре криволинейных треугольника (граница каждого состоит из дуги окружности и двух отрезков). Выкрасим два из них, примыкающих к противоположным углам квадрата, в голубой цвет, два другие — в красный. Докажите, что

а) суммы красных и голубых дуг равны;

б) суммы периметров красных и голубых треугольников равны.

В. В. Произволов

М1034. Прямоугольная шоколадка разбита продольными и поперечными углублениями на 50 квадратных долек. Двое играют в такую игру. Начинающий разламывает шоколадку по некоторому углублению на две прямоугольные части. Затем играющие по очереди ломают одну из получившихся частей по некоторому углублению на две. Тот, кто первым отломит квадратную дольку (без углублений)

а) проигрывает,

б) выигрывает.

Кто из играющих может обеспечить себе выигрыш — начинающий или его партнер?

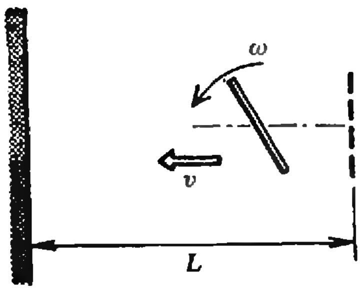
С. В. Фомин

М1035. На отрезке [0; 1] по очереди отмечаются точки x_0, x_1, x_2, ..., x_n. Для каждой точки x_k ($k=1$, ..., n) измеряется расстояние d_k от нее до ближайшей к ней из поставленных ранее точек. Докажите, что $d_1+d_2+\ldots$ $\ldots+d_n\leqslant 1+\frac{\log_2 n}{2}$.

В. С. Гринберг

Ф1043. По гладкой горизонтальной поверхности, вращаясь, скользит со скоростью $v=10$ см/с палочка длиной $l=10$ см. При какой угловой скорости вращения палочка ударится о стену (см. рисунок) плашмя, если на расстоянии $L=50$ см от стены палочка была параллельна стене?

И. Ю. Потеряйко



Ф1044. Парашютист массой $m=80$ кг совершает затяжной прыжок. Перед раскрытием парашюта его скорость $v_0=60$ м/с, после раскрытия парашюта установившаяся скорость $v=6$ м/с. Каково было бы максимальное натяжение строп парашюта, если бы он раскрывался мгновенно? Считать, что сила сопротивления воздуха движущемуся парашюту пропорциональна квадрату скорости. Массу парашюта и строп считать малой по сравнению с массой парашютиста.

И. Ф. Гинзбург

Ф1045. В Арктике встретились два полярника. Они были одеты в одинаковые с виду комбинезоны, но на самом деле один из комбинезонов был теплее. Когда померили температуру на поверхности комбинезонов, на одном она оказалась выше, чем на другом. Какой из комбинезонов теплее? (Комбинезоны обычные, без подогрева.)

И. И. Мазин

Ф1046. Маленький шарик массой m, имеющий заряд q, подвешен на невесомой нерастяжимой нити. Этот математический маятник помещен в сильное однородное магнитное поле, индукция которого равна B_0 и направлена вертикально. За какое время плоскость качаний маятника повернется на угол 2π? Явления, связанные с вращением Земли, не учитывать.

Д. А. Купцов

Ф1047. Наблюдатель пускает «солнечный зайчик» при помощи маленького зеркальца, стоя перед большим зеркалом, в котором он видит свое изображение. Что произойдет, если наблюдатель направит «зайчик» на изображение зеркальца в зеркале?

О. В. Фатьянов

Problems

M1031—M1035; P1043—P1047

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than May 15 th 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the

M1031. A straight line l and two points A and B are given in the plane, the points A and B being situated on the same side of l. Let M be the point of l with the least possible sum of distances from A and B, and N be the point of l whose distances from A and B are equal, $AN=BN$. Prove that the points A, B, M, N are on one circle.

L. D. Kurlyandchik

M1032. We have written out the n numbers 2, 3, ..., $n+1$ and all possible products of couples, triples etc. of these numbers up to the product of all n of them. Prove that the sum of all the numbers inverse to the written numbers is equal to $n/2$. (For example, for $n=3$ one has

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}=\frac{3}{2}.)$$

A. A. Andjans

M1033. A circle cuts off four curvilinear triangles from a square (the boundary of each of them consists of an arc of the circle and two segments). Color in blue two triangles adjacent to opposite angles of the square, and color in red the two remaining triangles. Prove that

a) the sum of the lengths of the blue arcs is equal to that of the red arcs.

b) the sum of the perimeters of the blue triangles is equal to that of the red ones.

V. V. Proizvolov

M1034. A rectangular bar of chocolate is divided by longitudal and transverse hollows into 50 small square portions. Two persons play the following game. The first breaks the bar along some hollow into two rectangular parts. Then the players, taking turns, break one of the resulting parts along a hollow. The player who is first to break off a small portion (without hollows) a) loses, b) wins. Which of the

academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send in to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

players can garantee winning, the one who begins, or the other one?

S. V. Fomin

M1035. The points $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ are successively chosen in the segment $[0; 1]$. For each point x_k $(k=1, \ldots, n)$ the distance d_k from it to the nearest of the previously choosen points is measured. Prove that

$$d_1+d_2+\ldots+d_n \leqslant 1+\frac{\log_2 n}{2}.$$

V. S. Grinberg

P1043. A rod of length $l=10$ cm slides, rotating, with velocity $v=10$ cm/s on a smooth horizontal surface. For what angular velocity of rotation will the rod hit the wall along all its length (see figure on p. 19) if it was parallel to the wall at the distance $L=50$ cm from it?

I. Yu. Poteryaiko

P1044. A parachutist of mass $m=80$ kg performs a delayed jump. Just before the parachute opens his velocity is $v_0=60$ m/s, after it opens the established velocity is $v=6$ m/s. What was the maximal tension in the parachute's ropes if it is assumed that it opens instantly? You may assume that air resistance to the moving parachute is proportional to the square of its speed. The mass of the parachute and its ropes may be considered negligible.

I. F. Ginzburg

P1045. Two polar researchers met in the Arctic. They were both wearing special suits which looked the same, although one was actually warmer than the other. When the temperature on the outer surface of the suits was measured, it turned out that it was higher on one of the suits. Which one? (The suits are ordinary: not heated.)

I. I. Mazin

P1046. A small ball bearing of mass m and electric charge q hangs on a weightless inelastic string. This small pendulum is placed in a strong uniform magnetic field of induction B_0 directed vertically. How long will it take for the pendulum's plane of oscillation to rotate through an angle of 2π? Effects related to the Earth's rotation are to be ignored.

D. A. Kuptzov

P1047. An observer sends reflected flashes by means of a small mirror, standing in front of a big one, in which he sees his own reflection. What will happen if he directs the flash at the reflection of the small mirror in the big one?

O. V. Fatianov

Решения задач

M1011—M1014; Ф1023—Ф1027

M1011. *Докажите, что для n положительных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ выполнены неравенства:*

а) $a_1^2-a_2^2+a_3^2 \geqslant (a_1-a_2+a_3)^2$;

б) $a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2 \geqslant (a_1-a_2+a_3-a_4)^2$;

в) $a_1^2-a_2^2+\ldots-(-1)^n a_n^2 \geqslant (a_1-a_2+\ldots-(-1)^n a_n)^2$.

Приведем два решения задачи.

а) Рассмотрим разность левой и правой части и заменим букву a_3 на x. Полученная фуикция от x (рис. 1)

$$f_3(x)=a_1^2-a_2^2+x^2-(a_1-a_2+x)^2$$

будет линейной (при возведении скобки в квадрат возникает член x^2 и линейные по x члены). Для того чтобы доказать неравенство $f_3(x) \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant a_2$, достаточно проверить, что $f_3(0) \geqslant 0$ и $f_3(a_2) \geqslant 0$. Это сделать легко:

$$f_3(0)=a_1^2-a_2^2-(a_1-a_2)^2=(a_1-a_2)2a_1 \geqslant 0; \qquad (*)$$
$$f_3(a_2)=a_1^2-a_1^2=0.$$

б) Рассуждая аналогично, рассмотрим функцию (рис. 2)

$$f_4(x)=a_1^2-a_2^2+a_3^2-x^2-(a_1-a_2+a_3-x)^2.$$

Это — квадратный трехчлен от x вида $f_4(x)=-2x^2+px+q$. Для того чтобы доказать неравенство $f_4(x) \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant a_3$, достаточно проверить, что $f_4(0) \geqslant 0$ и $f_4(a_3) \geqslant 0$.

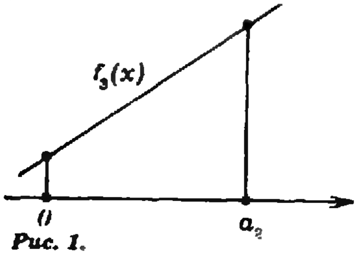


Рис. 1.

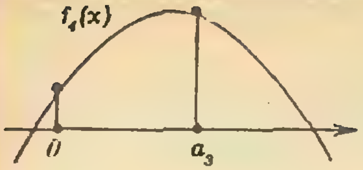


Рис. 2.

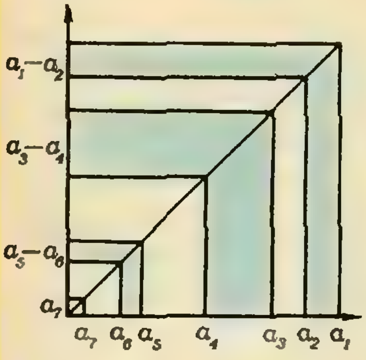


Рис. 3.

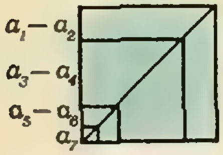


Рис. 4.

Первое из этих неравенств совпадает с неравенством а), а второе — с неравенством (*).

в) Точно так же, рассматривая функцию

$$f_n(x)=a_1^2-a_2^2+\ldots+(-1)^n a_{n-1}^2-(-1)^n x^2-$$
$$-(a_1-a_2+\ldots+(-1)^n a_{n-1}-(-1)^n x)^2,$$

мы увидим, что при нечетном n она линейна, а при четном является квадратным трехчленом с отрицательным коэффициентом (-2) при x^2. Поэтому доказательство неравенства $f_n(x)\geqslant 0$ при $0\leqslant x\leqslant a_{n-1}$ сводится к проверке условий $f_n(0)\geqslant 0$ и $f_n(a_{n-1})\geqslant 0$, а это — в точности утверждение задачи для $n-1$ и $n-2$ первых чисел ряда $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_{n-1}\geqslant a_n$.

Таким образом, общее утверждение вытекает из принципа математической индукции в такой его разновидности: если некоторое утверждение, зависящее от натурального параметра n, справедливо для $n=n_0$ и для $n=n_0+1$ и из его справедливости для значений параметра $n-2$ и $n-1$ вытекает его справедливость для значения параметра n, то оно справедливо при всех n. Мы проверили утверждение задачи для $n=2$, $n=3$ и $n=4$ (это — неравенство (*), пункты а) и б) задачи); и проделали шаг индукции — переход от $n-2$ и $n-1$ к n.

На рисунках 3 и 4 показано другое, очень изящное решение (оно было предложено несколькими участниками олимпиады «Турнир городов», где прошлой весной предлагалась эта задача).

Левая часть доказываемого неравенства $a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\ldots$ — это сумма площадей голубых трапеций на рисунке 3 (в самом деле, из площади квадрата $a_1\times a_1$ надо вычесть площадь квадрата $a_2\times a_2$, добавить площадь квадрата $a_3\times a_3$, вычесть $a_4\times a_4$ и т. д.).

Правая часть $(a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots)^2$ — это площадь квадрата, сторона которого равна сумме высот этих трапеций (a_1-a_2, a_3-a_4, …); его можно разбить на трапеции с такими же высотами, но с меньшими средними линиями (см. рис. 4); поэтому левая часть не меньше правой.

Н. Б. Васильев

М1012. *Докажите, что а) на плоскости можно расположить несколько непересекающихся кругов так, чтобы каждый касался ровно 5 других; б) число 5 в пункте а) нельзя заменить на 6.*

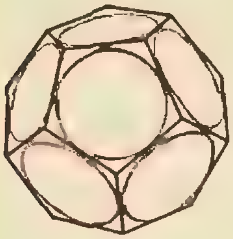


Рис. 1.

а) Искомое расположение кругов показано на 1-й странице обложки этого номера. Но отнюдь не просто доказать строго, что такое расположение действительно существует (т. е. вычислить радиусы кругов или хотя бы доказать, что определяющие их уравнения разрешимы). Самый изящный (и, видимо, самый простой) способ доказательства использует выход в пространство.

Возьмем правильный додекаэдр и впишем в каждую его грань окружность (рис. 1). Мы получим 12 окружностей, каждая из которых касается пяти других, причем все они лежат на одной сфере, а именно, на сфере, касающейся всех ребер додекаэдра. Возьмем на этой сфере любую точку P, не лежащую внутри окружностей, проведем плоскость α, касающуюся сферы в точке Q, диаметрально противоположной P, и спроектируем сферу из центра P на плоскость α (т. е. сопоставим каждой точке $X\neq P$ сферы точку Y пересечения луча PX с плоскостью α; рис. 2). Такое отображение сферы на плоскость называется *стереографической проекцией*. Ниже мы покажем, что при стереографической проекции окружности переходят в окружности. В нашем случае 12 окружностей на сфере спро-

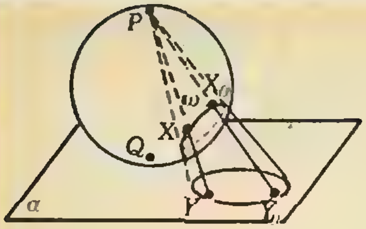


Рис. 2.

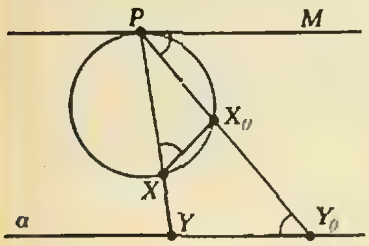


Рис. 3.

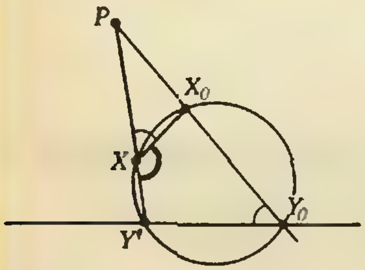


Рис. 4.

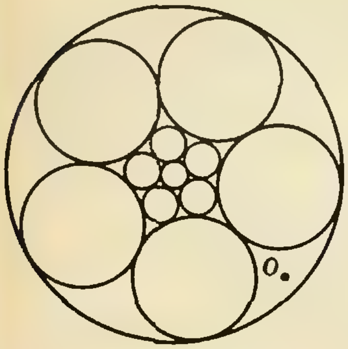


Рис. 5.

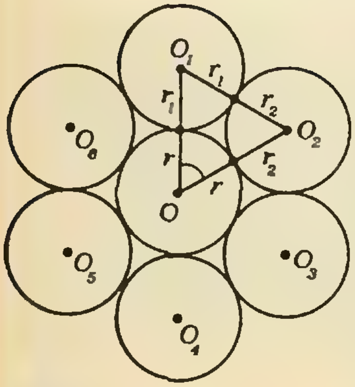


Рис. 6.

ектируются в нужную систему окружностей на плоскости. Если точку P взять на прямой, соединяющей центр додекаэдра с его вершиной, получится конфигурация, изображенная на обложке.

Докажем теперь, что *стереографическая проекция любой окружности* ω *на сфере тоже будет окружностью, если* ω *не содержит центра проекции* P (если ω содержит точку P, то проекцией ω, как легко видеть, будет прямая). Пусть Y_0 и Y — проекции произвольных точек X_0 и X окружности ω. Плоскость PX_0X пересекает сферу по некоторой окружности, а плоскость α — по прямой Y_0Y, которая параллельна касательной MP к этой окружности в точке P (рис. 2, 3). Ясно, что

$$\angle PY_0Y = \angle MPY_0 = \frac{1}{2} \smile PX_0 = \angle PXX_0.$$

Проведем теперь еще одну, вспомогательную сферу, содержащую окружность ω и точку Y_0; пусть прямая PX пересекает ее в точке Y'. Рассматривая сечение этой сферы плоскостью PX_0X (рис. 4), мы убеждаемся, что

$$\angle PY_0Y' = 180^\circ - \angle X_0XY' = \angle PXX_0,$$

т. е. $\angle PY_0Y' = \angle PY_0Y$, следовательно, $Y = Y'$. Таким образом, проекции всех точек окружности ω лежат одновременно в плоскости α и на нашей вспомогательной сфере, т. е. образуют окружность.

Если точку P взять на прямой, соединяющей центр додекаэдра с центром его грани, то стереографическая проекция даст конфигурацию, показанную на рисунке 5. Строгое доказательство существования этой конфигурации легко провести и без выхода в пространство (мы предоставляем это читателю). И хотя сама по себе она нас не устраивает (один ее круг содержит остальные), при инверсии с центром, скажем, в точке O (см. рис. 5) из нее получится то, что нужно. Читатели, не знакомые с преобразованием инверсии и его свойствами, могут обратиться к статье В. М. Уроева «Инверсия» (Квант, 1984, № 5, с. 26); там же рассказано и о стереографической проекции.

б) Допустим, что искомое расположение кругов существует, и не все они равны между собой. Рассмотрим все круги наименьшего радиуса (обозначим его через r) и выберем из них круг, который касается хотя бы одного круга другого радиуса r_1 ($r_1 > r$). Пусть O и O_1 — центры этих кругов, O_2, ..., O_6 — центры остальных пяти кругов, касающихся круга O (центры *занумерованы по часовой стрелке, рис. 6*). В треугольнике OO_1O_2 стороны O_1O_2, O_2O и OO_1 равны $r_1 + r_2$, $r_2 + r$ и $r + r_1$ соответственно, где r_2 — радиус круга O_2 ($r_2 \geqslant r$), т. е. O_1O_2 — наибольшая сторона, а значит, $\angle O\ OO_2$ — наибольший угол этого треугольника. Следовательно, $\angle O_1OO_2 > 60^\circ$ (неравенство строгое, так как $O_1O_2 > OO_1$). Аналогично доказывается, что углы O_2OO_3, O_3OO_4, ..., O_6OO_1 не меньше 60°. Но тогда сумма всех шести углов O_1OO_2, ..., O_6OO_1 оказывается больше 360°, что, конечно, невозможно.

Итак, все круги должны иметь одинаковый радиус r. В этом случае каждый круг должен быть окружен шестью другими, как круг O на рисунке 6, что возможно лишь для бесконечного числа кругов. (Если O_1 и O_2 — центры двух соседних кругов, то и все точки прямой O_1O_2, отстоящие от O_1 на расстояния O_1O_2, $2O_1O_2$, $3O_1O_2$, ..., должны быть центрами кругов нашей конфигурации.)

В. Н. Дубровский, Д. В. Фомин

М1013. *На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты две точки M и N. Три параллельные прямые, проходящие через точки M, B и N, пересекают основание AC в точках K, D и L. Докажите, что площадь трапеции (или параллелограмма) не больше площади одного из треугольников ABD и DBC.*

Положим $\angle ADB=\alpha$, $AD=a$, $BD=b$, $CD=c$, $AK:AD=k$, $CL:CD=l$. Тогда $MK:BD=k$, $NL:BD=l$, т. е. $MK=kb$, $NL=lb$, а $KL=KD+DL=(1-k)a+(1-l)c$, и поскольку расстояние между прямыми MK и NL равно $KL\sin\alpha$, площадь четырехугольника $KMNL$ равна

$$\frac{1}{2}(MK+NL)\,KL\sin\alpha=\frac{1}{2}(kb+lb)((1-k)\,a+\\+(1-l)\,c))\sin\alpha.$$

Пусть для определенности $a\geqslant c$, тогда последнее выражение не превосходит

$$\frac{1}{2}\,b\,(k+l)(2-(k+l))\,a\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}\,ab\sin\alpha$$

(так как $x(2-x)\leqslant 1$ при всех x), т. е. площади треугольника ADB.

В. Н. Дубровский

М1014. *Пусть a_1, a_2, ..., a_n — различные попарно взаимно простые натуральные числа. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных b, что числа $b+a_1$, $b+a_2$, ..., $b+a_n$ также попарно взаимно просты.*

Обозначим через P абсолютную величину произведения всех разностей a_j-a_i, $1\leqslant i<j\leqslant n$. Тогда при каждом $k=1$, 2, ... числа $kP+a_1$, $kP+a_2$, ..., $kP+a_n$ будут попарно взаимно простыми. Действительно, если d — общий делитель числа $kP+a_i$ и $kP+a_j$, то d делит и их разность a_j-a_i, т. е. d делит P, а значит и каждое из чисел a_i и a_j. Но a_i и a_j взаимно просты, следовательно, $d=1$.

Интересно выяснить, для каких наборов $A=(a_1, \ldots, a_n)$ различных натуральных чисел выполняется утверждение задачи, т. е. суммы a_1+b, ..., a_n+b попарно взаимно просты хотя бы для одного целого b (а значит, и для бесконечного множества чисел b). Если, например, набор A содержит два четных и два нечетных числа, то при «сдвиге» на любое b хотя бы два числа будут четными — такой набор нас не устраивает. Вообще, если среди остатков от деления чисел a_i на некоторое простое q каждый из возможных остатков 0,1, ..., $q-1$ встречается по крайней мере дважды, то при любом «сдвиге» хотя бы два числа будут делиться на q. Отсюда следует, что набор A должен удовлетворять такому условию:

среди остатков от деления чисел из набора A на каждое простое p хотя бы один остаток r_p, $0\leqslant r_p<p$, должен встречаться не более одного раза.

(Для $p>n/2$ это выполняется автоматически, так что проверять его нужно только для $p\leqslant n/2$.) Оказывается, что это необходимое условие является и достаточным. Доказательство опирается на так называемую «китайскую теорему об остатках», приведенную на полях.

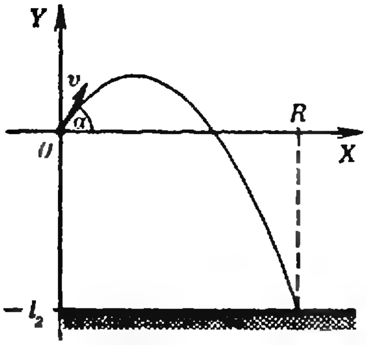
Пусть D — разность между наибольшим и наименьшим числами в наборе A. Для каждого простого $p\leqslant D$ найдем тот остаток $r_p<p$, который при делении чисел из A и p появляется не более одного раза. Подберем теперь число b, дающее при делении на каждое простое $p\leqslant D$ дополнительный к r_p остаток r_p^* ($r_p^*=p-r_p$ при $r_p>0$ и $r_p^*=0$ при $r_p=0$). Тогда числа a_1+b, ..., a_n+b будут попарно взаимно простые, поскольку на каждое простое p может делиться не более чем одно из них: при $p\leqslant D$ это обеспечено выбором b, а при $p>D$ выполняется автоматически, так как все остатки от деления чисел a_1, ..., a_n на p будут различны.

Н. Б. Васильев,
В. Ф. Лев

Китайская теорема об остатках

Если натуральные числа p_1, p_2, ..., p_m взаимно просты, то для любого набора натуральных чисел r_1, ..., r_m, $0\leqslant r_i<p_i$ ($i=1$, ..., m) найдется число b, дающее при делении на p_i остаток r_i при всех i.

Ф1023. *Лампочка висит на расстоянии l_1 от потолка на высоте l_2 от пола. При ее взрыве осколки разлетаются во все стороны с одной и той же по величине скоростью v. Найдите радиус круга на полу, в который попадут осколки. Считать, что удары осколков об потолок абсолютно упругие, а об пол — неупругие; до стен осколки не долетают.*



Предположим сначала, что потолок отсутствует, и найдем в этом случае максимальный радиус пятна на полу, в котором лежат осколки.

Введем систему координат с началом в точке нахождения патрона лампочки (см. рисунок). Условия падения на землю через время t осколка, вылетевшего под углом α к горизонту, состоят в следующем:

$$\begin{cases} -l_2=vt\sin\alpha-\dfrac{gt^2}{2}, \\ R=vt\cos\alpha. \end{cases} \qquad (*)$$

Очевидно, нам необходимо так подобрать угол α, чтобы величина R была максимальной. Преобразуем для этого уравнения (*) к виду

$$\begin{cases} \dfrac{gt}{2}-\dfrac{l_2}{t}=v\sin\alpha, \\ \dfrac{R}{t}=v\cos\alpha. \end{cases} \qquad (**)$$

Отсюда для величины R получим неравенство

$$R^2=(v^2+gl_2)t^2-\frac{g^2t^4}{4}-l_2^2=$$

$$=\left(\frac{v+gl_2}{g}\right)^2-l_2^2-\left(\frac{gt^2}{2}-\frac{v^2+gl_2}{g}\right)^2\leqslant\left(\frac{v^2+gl_2}{g}\right)^2-l_2^2.$$

Таким образом,

$$R_{\max}=\frac{v}{g}\sqrt{v^2+2gl_2},$$

время полета t^* осколка на такое расстояние

$$t^*=\frac{1}{g}\sqrt{2(gl_2+v^2)};$$

угол вылета к горизонту найдем из уравнения

$$\cos\alpha^*=\frac{R_{\max}}{vt^*}=\sqrt{\frac{v^2+2gl_2}{2(v^2+gl_2)}}.$$

Высоту h^* этой траектории над уровнем патрона лампочки найдем по формуле

$$h^*=\frac{(v\sin\alpha^*)^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}(1-\cos^2\alpha^*)=\frac{v^4}{4g(v^2+gl_2)}.$$

Вспомним теперь про потолок. Очевидно, если $l_1\geqslant h^*$, то

$$R_{\max}=\frac{v}{g}\sqrt{v^2+2gl_2}.$$

В случае, когда $l_1<h^*$, т. е. $l_1<\dfrac{v^4}{4g(v^2+gl_2)}$, максимальный радиус пятна на полу получится от осколков, у которых максимальная высота траектории (над уровнем патрона) равна l_1 (их траектория будет касательной к потолку). Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть хотя бы один осколок, отразившийся от потолка в точке A. Уровень патрона после отражения он пересечет под углом вылета. Следовательно, траектория этого осколка будет более крутой по сравнению с «касательной» траекторией, и они никогда не пересекутся. Значит осколок, коснувшийся потолка, пролетит по горизонтали дальше всех остальных, ударившихся о потолок. Осколки, не долетевшие до потолка, при своем движении до земли не могут пересечь «касательной» траектории (докажите это самостоятельно).

Таким образом, если $l_1 > \dfrac{v^4}{4g\sqrt{v^2+gl_2}}$, то

$$R_{\max} = \frac{v}{g}\sqrt{v^2+2gl_2};$$

если $l_1 < \dfrac{v^4}{4g\sqrt{v^2+gl_2}}$, то

$$R_{\max} = \frac{\sqrt{v^2-2gl_1}}{g}\left(\sqrt{2gl_1}+\sqrt{2g(l_1+l_2)}\right)$$

(последний ответ получается из системы уравнений (*) при условии, что $(v^2 \sin \alpha)/2g = l_1$).

С. С. Кротов

Ф1024. *Оцените изменение давления в парной после того как на раскаленные камни плеснули воду из ковша. Предполагается, что вы, хорошо представляя явление, можете сами задать необходимые величины, выбрать достаточно правильно их числовые значения и получить численный ответ.*

После испарения воды, которую плеснули из ковша на раскаленные камни, температура в помещении несколько увеличивается (заметим, что она различна наверху у потолка и внизу у пола). Образовавшийся пар распространяется по всему помещению, частично конденсируясь на холодных участках стен, потолка и окон. Меняется влажность, изменяется процесс теплопередачи; потоки пара и воздуха приводят к различным значениям физических параметров в разных местах парной.

Для оценки изменения давления, создаваемого дополнительной порцией пара, будет использовать грубую, но достаточно разумную физическую модель.

Прежде всего, считаем, что двери и окна плотно закрыты (иначе говорить об изменении давления не имело бы смысла: давление внутри и снаружи оставалось бы постоянным). Будем считать, что параметры установились (стали постоянными) и что температура пара по всему помещению одна и та же и равна $T \approx 350$ К. (Изменением температуры в помещении при этой оценке пренебрежем.) Водяной пар будем считать идеальным газом, состояние которого описывается уравнением Менделеева — Клапейрона.

Положив объем парной $V \sim 100$ м^3, массу воды в ковше и, соответственно, массу образовавшегося водяного пара $m \sim 1$ кг и учитывая, что молярная масса пара (воды) $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, а газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(К·моль), из уравнения Менделеева — Клапейрона находим парциальное давление Δp водяного пара, образовавшегося из ковша воды:

$$\Delta p \cdot V = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow \Delta p \sim \frac{mRT}{\mu V} \approx 1{,}6 \cdot 10^3 \text{ Па} \approx 0{,}02 \text{ атм}.$$

Считая, что давление в парной обычно $p \sim 1$ атм, приходим к выводу, что изменение давления после подачи пара невелико — всего несколько процентов от нормального давления.

Заметим, что учет изменения давления, обусловленного дополнительным нагревом воздуха в парной, согласно закону Шарля привел бы к соотношению $\Delta p/p \sim \Delta T/T$. Чтобы это дополнительное увеличение давления было сравнимо с приведенной выше оценкой ($\Delta p/p \sim 2$ %), при $T \sim 350$ К прирост температуры должен составлять $\Delta T \sim 10$ К.

Г. В. Меледин

Ф1025. *В схеме, приведенной на рисунке 1, сверхпроводящие катушки имеют одинаковые индуктивности L, диод Д идеальный, начальный заряд конденсатора емкостью C равен Q_0. Постройте графики изменения заряда $Q(t)$ конденсатора и токов $I_1(t)$ и $I_2(t)$ через катушки после замыкания ключа.*

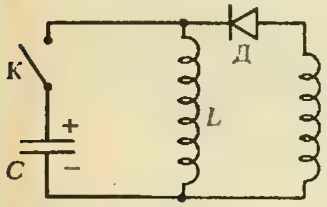


Рис. 1.

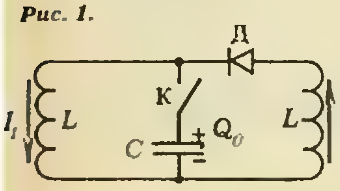


Рис. 2.

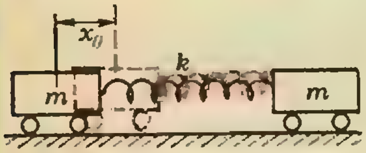


Рис. 3.

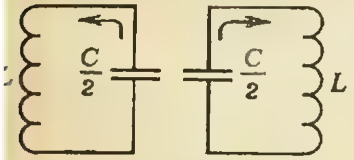


Рис. 4.

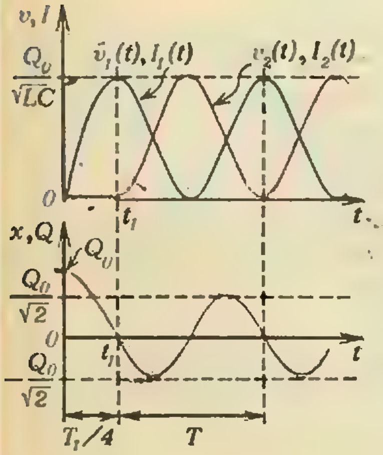


Рис. 5.

Схему данной цепи представим в эквивалентной форме (рис. 2). Будем считать токи в катушках положительными, когда их направления соответствуют обходу внешнего контура против часовой стрелки. Процессы в такой цепи легко проанализировать по аналогии, рассматривая механическую систему, показанную на рисунке 3: одинаковые тележки массой m (аналог катушек) соединены пружиной жесткостью k (аналог конденсатора). Так как ток через правую катушку благодаря диоду Д может протекать только в положительном направлении, колеса второй тележки должны быть снабжены устройством, позволяющим ей свободно двигаться только вправо. В этой системе скорости тележек $v_1(t)$ и $v_2(t)$ будут аналогами токов $I_1(t)$ и $I_2(t)$, а деформация пружины $x(t)$ — аналогом заряда конденсатора $Q(t)$.

Пружина сначала растянута на x_0.

В момент времени $t=0$ левую тележку отпускают без начальной скорости (при замыкании ключа конденсатор начинает разряжаться через левую катушку). До тех пор, пока деформация пружины не обратится в нуль, правая тележка неподвижна ($v_2=0$), ибо пружина тянет ее влево, куда она катиться не может (пока заряд конденсатора не обратится в нуль, ток через правую катушку протекать не может: $I_2=0$). Эта первая фаза движения от $t=0$ до момента t_1 соответствует четверти периода гармонических колебаний тележки массы m на пружине жесткостью k: $t_1=T_1/4=\frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}$ (для цепи $t_1=T_1/4=\frac{2\pi}{4}\sqrt{LC}$). К моменту t_1 левая тележка разгоняется до скорости v_1, которую можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{kx_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}\Rightarrow v_1=x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(аналогично для цепи $I_1=\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$). Деформация пружины $x(t)$ (заряд конденсатора $Q(t)$) уменьшается за это время по косинусоидальному закону от начального максимального значения x_0 (Q_0) до нуля.

Затем пружина начинает сжиматься и толкать вторую тележку вправо, т. е., начиная с момента t_1, колеса правой тележки освобождаются (заряд нижней пластины конденсатора становится положительным, и диод пропускает ток через правую катушку). В дальнейшем центр масс тележек движется вправо со скоростью $v_1/2$, и эта скорость постоянна, так как при $t>t_1$ никакие внешние силы на систему не действуют. На это равномерное движение накладываются колебания тележек относительно центра масс, происходящие в противофазе с частотой $\omega=\sqrt{\frac{2k}{m}}$ (жесткость «половины» пружины составляет $2k$). Так как при $t=t_1$, когда пружина не деформирована, тележки движутся относительно центра масс навстречу друг другу со скоростью $\frac{v_1}{2}=\frac{x_0}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$, то именно такой будет амплитуда колебаний скорости. Амплитуду x_1 колебаний деформации пружины можно найти из закона сохранения энергии, приравнивая кинетическую энергию тележек (в системе центра масс) в момент t_1 потенциальной энергии пружины в момент максимальной ее деформации:

$$\frac{2m(v_1/2)^2}{2}=\frac{kx_0^2}{4}=\frac{kx_1^2}{2}\Rightarrow x_1=\frac{x_0}{\sqrt{2}}.$$

В электрической цепи аналогом равномерного движения системы как целого будет постоянный ток $I_1/2$, циркулирующий по внешнему контуру. На этот ток накладываются происходящие в противофазе колебания тока в контурах (рис. 4), содержащих по одной катушке и по «половине» конденсатора (по конденсатору емкостью $C/2$), период которых $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{LC}{2}}$. Амплитуда колебаний заряда конденсатора $Q_1=Q_0/\sqrt{2}$. Графики рассмотренных процессов приведены на рисунке 5.

Е. И. Бутиков

Ф1026. *Горизонтальная площадка, на которой лежит брусок, вибрирует по гармоническому закону с частотой $f=10$ Гц в направлении, составляющем угол $\alpha=45°$ с вертикалью (рис. 1). Коэффициент трения бруска о площадку $\mu=0,5$. При какой минимальной амплитуде вибраций брусок «поползет» по площадке?*

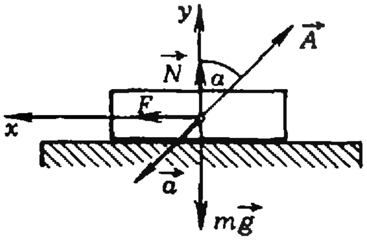


Рис. 1.

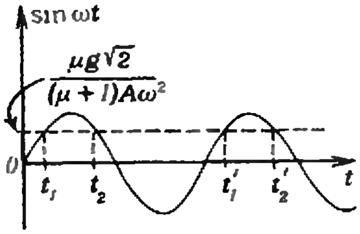


Рис. 2.

Найдем сначала действующие на брусок силы, предполагая, что он движется вместе с площадкой, т. е. по закону $\vec{r}(t)=\vec{A}\sin 2\pi ft$, где вектор $\vec{A}$ направлен под углом $\alpha=45°$ к вертикали. По второму закону Ньютона

$$m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}=m\vec{a}, \tag{1}$$

где $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{N}$ — нормальная сила реакции площадки, $\vec{F}$ — действующая на брусок сила трения покоя, направленная горизонтально (вправо или влево), $\vec{a}=-\vec{A}\omega^2\sin\omega t$ $(\omega=2\pi f)$. Запишем (1) в проекциях на горизонтальную x и вертикальную y оси (см. рис. 1):

$$F_x=ma_x=\frac{mA\omega^2}{\sqrt{2}}\sin\omega t, \tag{2}$$

$$N-mg=ma_y=-\frac{mA\omega^2}{\sqrt{2}}\sin\omega t. \tag{3}$$

Учитывая, что сила трения покоя $|F_x|\leqslant\mu|N|$, из (2) и (3) получаем:

$$\left|\frac{mA\omega^2}{\sqrt{2}}\sin\omega t\right|\leqslant\left|\mu mg-\frac{\mu mA\omega^2}{\sqrt{2}}\sin\omega t\right|. \tag{4}$$

Правая часть неравенства (4) при $\sin\omega t<0$ всегда больше, чем при $\sin\omega t>0$. Поэтому минимальное значение амплитуды вибраций, при которой брусок поползет по площадке, следует искать при $\sin\omega t>0$.

Знак равенства соответствует предельной ситуации, когда трения покоя едва хватает для того, чтобы сообщать бруску такое же горизонтальное ускорение, с каким движется площадка, и в этом случае (4) можно использовать как уравнение для нахождения того момента времени t_1, когда брусок поползет по площадке:

$$\sin\omega t_1=\frac{\mu g\sqrt{2}}{(\mu+1)A\omega^2}. \tag{5}$$

Такой момент t_1 существует, если уравнение (5) имеет решение. Для этого его правая часть должна быть меньше единицы, т. е. $\mu g\sqrt{2}<(\mu+1)A\omega^2$, или

$$A>\frac{\mu g\sqrt{2}}{(\mu+1)\omega^2}. \tag{6}$$

Таким образом, скольжение бруска по площадке возникает тогда, когда амплитуда A ее колебаний удовлетворяет неравенству (6). Графическое решение уравнения (5) приведено на рисунке 2. Начиная с момента t_1, брусок скользит вправо относительно площадки. В момент времени t_2 сила трения становится в состоянии обеспечить бруску такое же, как у площадки, горизонтальное ускорение, но проскальзывание продолжается еще некоторое время и после t_2, так как к моменту t_2 скорость бруска относительно площадки не равна нулю.

Итак, брусок «поползет», когда амплитуда колебаний площадки превысит минимальное значение

$$A_{\min}=\frac{\mu g\sqrt{2}}{(\mu+1)\omega^2}=1{,}2\ \text{мм}.$$

Если же амплитуда превышает значение $A_1=g\sqrt{2}/\omega^2$ ($A_1=3A_{\min}$ при $\mu=0{,}5$), то брусок не только «ползет», но еще и «подскакивает» (отрывается от площадки), так как при этом в течение некоторой части периода колебаний сила N нормальной реакции площадки обращается в нуль (это легко увидеть из уравнения (3)).

Е. И. Бутиков

Ф1027. *Источник света находится на расстоянии $l=1$ м от экрана. В экране напротив источника сделано отверстие диаметром $d=1$ см. Как изменится поток света через отверстие, если между экраном и источником поместить прозрачный цилиндр из материала с показателем преломления $n=1{,}5$ так, как показано на рисунке 1 (длина цилиндра $l=1$ м, диаметр $d=1$ см; источник находится на оси цилиндра)?*

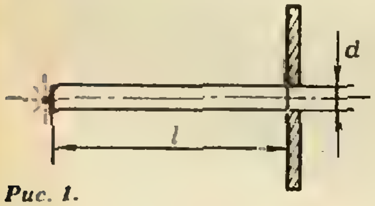


Рис. 1.

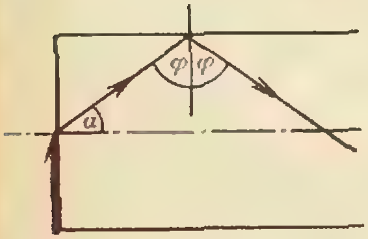


Рис. 2.

Все лучи, идущие от источника в направлении к экрану, после преломления на границе воздух — стекло (материал цилиндра) окажутся «заключенными» внутри цилиндра и после многократного отражения от его боковой поверхности (на границе стекло — воздух) в конце концов пройдут через отверстие в экране.

Действительно, предельный луч, падающий из воздуха на торец цилиндра под углом $\pi/2$, после преломления будет составлять с осью цилиндра угол полного внутреннего отражения α такой, что $\sin\alpha=1/n$; этот луч попадет на боковую поверхность цилиндра под углом $\varphi=\pi/2-\alpha$ (рис. 2). Так как

$$\sin\alpha=\frac{1}{n}=\frac{2}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4},$$

то $\alpha<\frac{\pi}{4}$ и, следовательно, $\varphi>\frac{\pi}{4}>\alpha$. Значит, при падении на боковую поверхность цилиндра этот луч отразится. В дальнейшем луч будет идти внутри цилиндра, отражаясь каждый раз от его поверхности, и в конце концов попадет на его дальний торец.

Любой другой луч от источника, падающий на входной торец цилиндра под углом, меньшим $\pi/2$, преломившись, будет составлять с осью цилиндра угол $\alpha'<\alpha$; на боковую поверхность цилиндра этот луч попадет под углом $\varphi'>\varphi>\alpha$ и заведомо отразится.

Таким образом, прозрачный цилиндр «соберет» в отверстие лучи, испускаемые источником в телесный угол 2π стерадиан. В отсутствие цилиндра в отверстие попадал световой поток, сосредоточенный внутри телесного угла $\pi d^2/4l^2$ стерадиан. Следовательно, при наличии цилиндра световой поток через отверстие увеличится в

$$n=\frac{2\pi}{\pi d^2/4l^2}=\frac{8l^2}{d^2}=8\cdot10^4\ \text{раз}.$$

А. И. Бутов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М986—М1000, Ф998—Ф1012, справились с задачами М986, М987, М992, М994, М996—М1000, Ф1000—Ф1002, Ф1006, Ф1010. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

В. Акопян (Ереван) **91, 93**; *А. Алексейчук* (Одесса) **93**; *М. Алимбетов* (Целиноград) **88, 89**; *И. Аржанцев* (Киев) **93**; *Д.Ароцкер* (Киев) **89, 91, 93, 95**; *С. Аршава* (Северодонецк) **88**; *С. Астахов* (Сокольники Тульской обл.) **93**; *Т. Ахмедов* (п. Борадыгях АзССР) **91**; *В. Базуткин* (Кривой Рог) **91, 93**; *З. Бандик* (СФРЮ) **91, 93**; *А. Барабанов* (Киев) **89, 91, 93, 95**; *Р. Безрукавников* (Калуга) **91, 93, 95**; *А. Бейянку* (СРР) **91**; *И. Белозеров* (Серпухов) **89, 91, 93**; *Д. Берзин* (Калуга) **89, 91, 93**; *А. Бимагайбетов* (Алма-Ата) **91**; *П. Бучин* (Киев) **93, 95**; *Р. Валиев* (Фрунзе) **91, 93**; *Я. Варшавский* (Харьков) **93, 95**; *А. Винцюк* (Киев) **95**; *А. Витяев* (Новосибирск) **93**; *В. Вологодский* (Омск) **88, 91, 93**; *Т. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) **93**; *Р. Гендлер* (Ташкент) **91, 93**; *И. Георгиева* (София, НРБ) **93**; *О. Геупель* (Дрезден, ГДР) **91, 93, 95**; *А. Глуцюк* (Харьков) **91, 93**; *М. Гольдшейд* (Челябинск) **88, 91, 93, 95**; *А. Гороховский* (Киев) **89, 91, 93**; *В. Гравит* (Северодвинск) **88, 89, 93, 95**; *Р. Гринив* (Львов) **89, 91, 93**; *Д. Грнчаров* (София, НРБ) **93**; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) **91, 93**; *Ш. Дадашов* (п. Борадыгях АзССР) **91**; *Д. Добрицын* (Москва) **95**; *А. Донченко* (Киев) **89, 91, 93**; *Ю. Дрозд* (Киев) **89**; *И. Дын-*

ников (Жуковский) 88—91, 95; *С. Железовская* (Саратов) 91, 93, 95; *Д. Зайцев* (Киев) 89; *Б. Зон* (Харьков) 91, 93; *В. Кальницкий* (Калининград) 91, 93; *Т. Касумов* (Баку) 93; *А. Козинский* (Гайворон) 91, 93; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 89, 93; *Ю. Королев* (Казань) 89, 93; *А. Коршков* (Мозырь) 91, 93; *А. Кошеков* (Алма-Ата) 91; *Б. Кругликов* (Харьков) 89, 93; *М. Кукс* (Львов) 93; *Д. Куцемако* (Саратов) 91, 93; *И. Кучугурин* (Новый Уренгой) 91; *О. Лимешко* (Куйбышев) 89, 91, 93; *М. Литвинов* (Киев) 88, 89, 91, 93; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 88, 91; *В. Ляндин* (Белорецк) 88, 93, 95; *М. Макичян* (Ереван) 93; *А. Мельник* (Гайворон) 91, 93; *А. Мельцер* (Ленинград) 93; *А. Мигло* (Ленинград) 91, 95; *Я. Мустафаев* (Баку) 93; *С. Мушинский* (Новосибирск) 88, 89, 93, 95; *А. Назарян* (Тбилиси) 88, 89, 93; *Д. Недулков* (НРБ) 91; *Ю. Никоноров* (с. Михайловка Каз. ССР) 91; *Ю. Ним* (п. Черноголовка Московской обл.) 93; *О. Ниц* (Одесса) 91, 93; *П. Пасманик* (Москва) 93; *Р. Пащенко* (Белгород) 89; *О Пелевин* (Кострома) 91; *Д. Погребинский* (Киев) 93; *А. Покровский* (Киев) 88, 89, 91, 93; *В. Помаз* (Семеновка) 89, 93; *И. Портной* (Одесса) 88, 89, 93; *В. Поярков* (Николаев) 91, 93, 95; *В. Пушня* (Харьков) 93; *В. Рагулин* (Челябинск) 89, 91, 93; *С. Резнов* (Киев) 89; *О. Ринк* (Вольск) 93; *А. Ройтерштейн* (Ленинград) 91, 93; *Т. Руденко* (Киев) 88; *Л. Рябова* (Клин) 91; *И. Самовол* (Гайворон) 91, 93; *Д. Семинихин* (Киев) 91, 93, 95; *С. Сильвестров* (Киев) 88; *В. Слитинский* (Киев) 88, 93; *Л. Смирнов* (Киров) 91, 93; *М. Соколова* (Ленинград) 91, 93; *И. Соловьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 91, 93, 95; *Г. Сралей* (Будапешт, ВНР) 93; *А. Ступин* (Саратов) 88; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 88, 91, 93, 95; *В. Суклиян* (Одесса) 93; *Д. Тамаркин* (Горький) 88, 91, 93, 95; *А. Тарасенко* (Днепропетровск) 91, 93, 95; *Б. Татиевский* (Киев) 87; *Е. Творун* (Павлодар) 91, 93; *Р. Тодев* (НРБ) 91; *Ю. Томилов* (Киев) 89, 93; *С. Тулешов* (Москва) 93; *Д. Туляков* (Жданов) 89, 91, 93, 95; *И. Устиловский* (Москва) 88, 89, 93, 95; *Д. Талькович* (Москва) 91, 93; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 89, 93; *Ф. Фот* (Томск) 93; *В. Фрасинич* (Гайворон) 91, 93; *М. Хованов* (Москва) 93; *Д. Хосид* (Алма-Ата) 89; *О. Христенко* (Караганда) 93, 95; *С. Черенков* (Апрелевка) 91; *Е. Черная* (Днепродзержинск) 88—91, 93, 95; *Т. Чудиновских* (Целиноград) 88, 89, 93; *Е. Чурикова* (Целиноград) 88, 89; *И. Шефтель* (Ленинград) 88, 93; *И. Шехтман* (Киев) 93; *А. Шибаков* (Свердловск) 87; *Б. Шраер* (Ленинград) 91, 93; *Я. Эфендиев* (Баку) 93; *А. Яврян* (Ереван) 93; *А. Ягубьянц* (Ростов-на-Дону) 91.

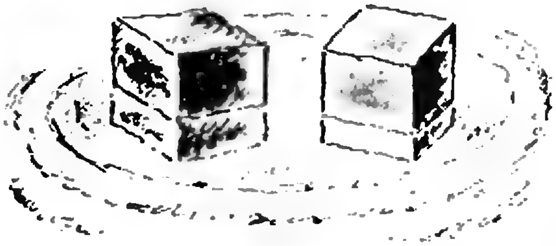
Физики

А. Андрианов (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 99, 08; *А. Анисимов* (Киев) 98, 03; *А. Антонов* (Москва) 98, 08, 09, 11; *Ф. Асмандьярова* (Целиноград) 98, 03, 11, 12; *В. Баргатин* (Лида) 99; *А. Белецкий* (Канев) 09; *И. Белов* (Челябинск) 04; *С. Беловолов* (Новосибирск) 03, 05, 08; *С. Белоусов* (Ленинград) 09, 11, 12; *В. Бензерук* (Брест) 05; *Д. Берзин* (Калуга) 03, 09, 11, 12; *А. Билибин* (Боровичи) 05, 08, 09, 11; *Д. Бисикало* (Винница) 03, 05, 09; *С. Бобылев* (Березники) 03—05, 09, 11; *А. Болотников* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 08; *В. Болотников* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 99; *А. Бринь* (Донецк) 05; *Д. Будько* (Белгород) 99, 04; *А. Бучель* (Луцк) 98; *М. Ваганов (п. Черноголовка Московской обл.)* 09; *П. Вольфбейн* (Киев) 98, 08—12; *А. Гаек* (Днепропетровск) 05, 09, 11; *А. Гамаюнов* (Полтава) 08, 09, 11; *А. Геращенко* (Белорецк) 98, 11; *Ю. Гольдбаум* (Тбилиси) 03; *А. Гольдин* (с. Водяное Львовской обл.) 98, 03, 04, 08, 12; *Ю. Гордиенко* (Винница) 98, 03, 05; *В. Гравит* (Северодвинск) 98; *В. Гурарий* (п. Черноголовка Московской обл.) 07—12; *Б. Гуревич* (Саратов) 98; *Л. Гуревич* (Кемерово) 98, 11; *Д. Гуторов* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 03, 07, 08, 11; *Г. Дятлов* (Новосибирск) 04; *Л. Евсеев* (Димитровград) 03, 08, 11; *Д. Евтушенко* (Донецк) 05, 11; *Д. Ежиков* (Минск) 05, 08, 09, 12; *А. Езерский* (Минск) 03, 05, 09; *О. Есенков* (Новороссийск) 05; *Д. Жильцов* (Краматорск) 98, 99; *Д. Житний* (Киев) 03; *П. Задорожный* (Киев) 05, 07—12; *К. Зарембо* (Москва) 05; *Е. Зельцер* (Киев) 05, 11; *Я. Зубкович* (Алма-Ата) 99; *А. Ильенков* (Киев) 98, 04, 05, 08; *В. Ильин* (Саратов) 05; *Д. Исильманова* (Целиноград) 03; *В. Каменькович* (Харьков) 05; *С. Канатов* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 99, 05, 08, 11; *А. Карлов* (Киев) 09; *В. Кирюхин* (п. Черноголовка Московской обл.) 03, 07—09, 11; *Ш. Кирюхин* (Чимкент) 05; *В. Клименко* (Первомайск Николаевской обл.) 03; *И. Климчук* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 99, 05, 08, 11; *А. Коновалов* (Мытищи) 11; *И. Корсунская* (Киев) 04, 05; *Е. Корсунский* (Харьков) 05; *М. Косолапов* (п. Черноголовка Московской обл.) 07—09, 11; *П. Кохан* (п. Новые Санжары Полтавской обл.) 98, 03, 05; *В. Кочетков* (Винница) 03; *В. Кравцов* (Ставрополь) 05; *Г. Кравченко* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 99, 08, 11; *С. Кравченко* (Ростов-на-Дону) 05, 09, 11; *Ю. Кравченко* (Москва) 03, 07, 09, 11; *С. Курдюков* (Москва) 98, 05, 07—09, 11; *И. Куренной* (Глобино) 08; *А. Кусаинов* (Алма-Ата) 09, 11; *Д. Кучулория* (Тбилиси) 05, 11; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 98, 09; *И. Лугач* (Винница) 03, 05, 09, 11; *А. Мазуренко* (Минск) 03, 09; *О. Миндюк* (Киев) 05; *Л. Митосериу* (СРР) 98; *А. Мищенко* (Киев) 03, 08, 09; *А. Недачин* (Киев) 04, 05, 07—12; *Д. и П. Николаевы* (п. Черноголовка Московской обл.) 03, 07, 09; *А. Никонюк* (Ровно) 09; *Ю. Новиков* (Великие Луки) 98; *Д. Ноготков* (Алма-Ата) 11; *А. Овчинников* (Свердловск) 05; *Д. Орел* (Воркута) 04, 09; *О. Паруш* (Выборг) 04; *Л. Петько* (Минск) 03, 05, 08; *Р. Плюснин* (Великие Луки) 98; *Д. Погребинский* (Киев) 03, 09; *А. Покровский* (Киев) 04; *А. Португалов* (Киев) 11, 12; *В. Родин* (Сасово) 05, 09, 11; *А. Розенберг* (Уфа) 05, 09, 11; *А. Розенвайн* (Киев) 99; *Е. Рознощик* (Киев) 07; *Н. Рябова* (Харьков) 11; *Р. Сагайдак* (с. Матугов Черкасской обл.) 03, 09, 11, 12; *С. Сазонов* (Климовск) 11; *Д. Самборский* (Истра) 98, 99, 03, 08, 09; *В. Сафонов* (Челябинск) 05; *А. Севенюк* (Брест) 09, 11; *М. Сергазин* (Алма-Ата) 08, 09, 11; *В. Служаев* (Димитровград) 08, 09; *В. Смирнов* (Тихвин) 05; *А. Спринцсон* (Ленинград) 99; *А. Ставицкий* (Баку) 08, 09, 11; *А. Стародубов* (Алма-Ата) 09, 11; *А. Степура* (Ивано-Франковск) 04, 05, 08, 09; *Д. Сторожук* (Киев) 09, 11; *И. Стригунов* (Брест) 98, 05; *А. Стронов* (с. Узуново Московской обл.) 98, 99, 09; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 08, 11; *В. Суклиян* (Одесса) 98, 99, 03, 07; *Б. Татиевский* (Киев) 04; *А. Ткаченко* (Киев) 98, 03, 05,

(Окончание см. на с. 37)

„Квант" для младших школьников

Задачи

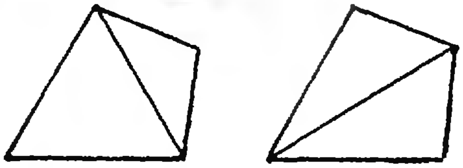


1. Имеются два пластмассовых кубика одинаковой величины. Первый плавает в воде, опускаясь в воду на 2 см, а второй — на 1 см. На сколько опустится в воду нижний кубик, если первый кубик поставить на второй? А если второй на первый?

2. Мадемуазель Дюбуа любит домашних животных. Все ее животные, кроме двух,— собаки, все, кроме двух,— кошки, и все кроме двух,— попугаи, а остальные — тараканы. Сколько каких животных у мадемуазель Дюбуа?

3. Два одинаковых бумажных выпуклых четырехугольника разрезали: первый — по одной из диагоналей, а второй — по другой диагонали. Докажите, что из полученных частей можно сложить параллелограмм.

4. Известно, что «медные» монеты в 1, 2, 3 и 5 коп. весят соответственно 1, 2, 3 и 5 г. Среди четырех «медных» монет (по одной каждого достоинства) одна — бракованная: отличается весом от нормальной. Как с помощью взвешиваний на чашечных весах без гирь определить бракованную монету?



5. Замените в неравенствах на рисунке буквы цифрами так, чтобы все неравенства стали верными. (Одинаковые буквы заменяются на одинаковые цифры, разные — на разные.)

Эти задачи нам предложили *Н. П. Долбилин, А. И. Рудинская, В. В. Произволов*, ученик 8 класса школы № 5 г. Гайворона *Г. Тартаковский, Л. П. Мочалов.*

П>Р>О<Е<К<Т<И<Р>О>В>А>Н<И>Е

Калейдоскоп „Кванта"

Торопливо и обрадованно
мальчик послюнил палец и,
подняв, стал медленно поворачивать.
С той стороны,
откуда неуловимо тянул ветерок,
в пальце почувствовалось
ощущение холода.

А. Серафимович
«Лесная жизнь»

Вопросы и задачи

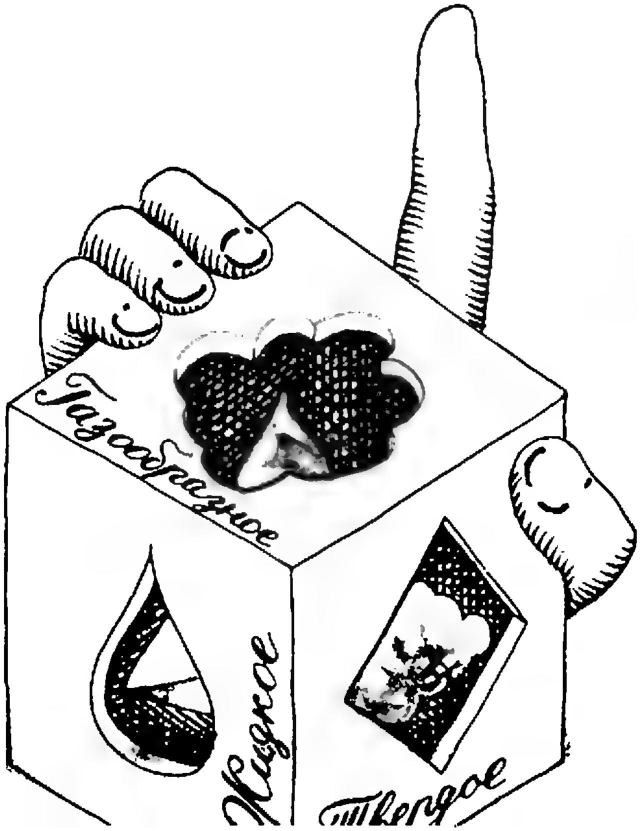
1. В жарких странах напитки помещают в сосуды с пористыми стенками. Зачем?

2. Свежеиспеченный хлеб весит больше, чем тот же хлеб остывший. Почему?

3. Для чего, желая скорее высушить пол, на который пролита вода, ее растирают по полу?

4. Когда, купаясь в жаркий день, вы входите в воду, она кажется холоднее воздуха, а когда выходите, то наоборот. Почему?

5. Пробирка наполнена водой и открытым концом опущена в стакан с водой (см. рисунок). Изменится ли уровень воды в про-



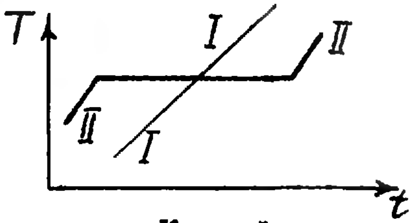
Вопросы и задачи

6. Будет ли кипеть вода в стакане, плавающем в сосуде с кипящей водой?

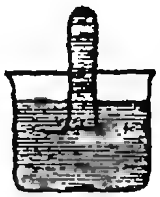
7. Можно ли заставить воду кипеть без нагревания?

8. Люди научились обрабатывать бронзу раньше, чем железо. Чем это можно объяснить?

9. На рисунке показано, как изменяются со временем температуры металла



и стекла. Который из графиков относится к металлу?



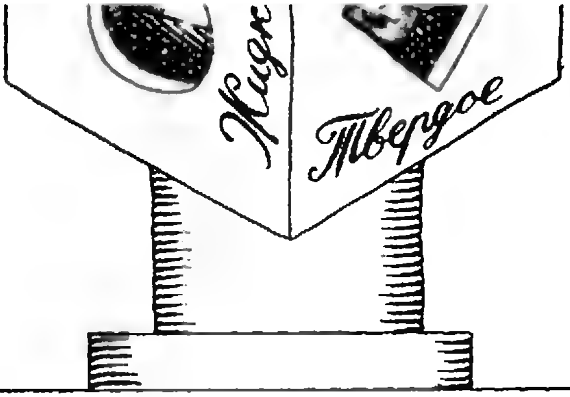
бирке, если установку нагреть до температуры кипения воды?

Любопытно, что ...

... существует лед, который обжег бы нам пальцы, если бы до него можно было дотронуться. Получают его под очень большим давлением, при котором вода переходит в твердое состояние при температуре значительно выше 0 °С.

... испаряться, минуя жидкое состояние, могут и твердые тела. Наиболее известные примеры — испарение нафталина и йода, высыхание замерзшего белья.

... еще в 1754—55 годах шотландский химик Дж. Блэк открыл не только постоянство точки плавления льда, но и то, что термометр показывает одну и ту же температуру, несмотря на приток тепла, до тех пор, пока весь лед не растает. Отсюда Блэк пришел к понятию скрытой теплоты плавления, а позже установил и понятие скрытой теплоты парообразования.



А хорошо ли знакомы вам процессы

ИСПАРЕНИЕ, КИПЕНИЕ, ПЛАВЛЕНИЕ

?

К ним, разумеется, следует добавить и обратные процессы — конденсацию и кристаллизацию. Все вместе они характеризуют определенные изменения состояний вещества. Состояния эти вам хорошо знакомы: твердое, жидкое, газообразное. Однако ими не исчерпывается все многообразие возможных состояний. Со временем вы узнаете о плазме, о нейтронном состоянии вещества и о том, как к этим состояниям можно перейти. Пока же давайте займемся не экзотическими, а обыденными превращениями вещества, и окажется, что обыденные они лишь на первый взгляд.

10. Почему пруды замерзают раньше рек?

11. Можно ли расплавить кусок свинца, лежащий в воде?

12. Кристаллизация вещества сопровождается выделением тепла, хотя температура затвердевающего вещества не понижается. За счет чего выделяется тепло?

Микроопыт

Повесьте на брусок льда два одинаковых груза: один на медной проволоке, другой — на капроновой леске того же диаметра. Что перережет лед быстрее? Почему?

Что читать в «Кванте» (публикации последних лет)

1. *«Об агрегатных состояниях вещества» — 1984, № 9, с. 20;*
2. *«Газ превращается в жидкость» — 1984, № 11, с. 25;*
3. *«Может ли быть невозможное?» — 1985, № 4;*
4. *«Фазовые превращения» — 1985, № 7;*
5. *«Приглашение в парную» — 1985, № 8;*
6. *«Знакомьтесь: металлическое стекло» — 1986, № 11.*

СТАРЫЙ АЛГОРИТМ

Кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ

На днях подошел ко мне мой сын Саша (он семиклассник):

— Купи мне калькулятор, как у Вовки!

— Во-первых, у тебя есть калькулятор, но во что ты его превратил? Теперь он вместо цифр показывает какие-то иероглифы! Во-вторых, школьник должен уметь считать и без калькулятора. В-третьих, так и быть, отнесу на этой неделе калькулятор в починку.

— Можешь не носить калькулятор в мастерскую, — отвечал мне Саша, — складывать, умножать и делить я и сам умею. Мне уравнение квадратное надо решить, а под корнем вон какое число: 16229! В учебнике-то самое большое число в таблице — это 10 000. А у Вовки калькулятор вычисляет квадратные корни.

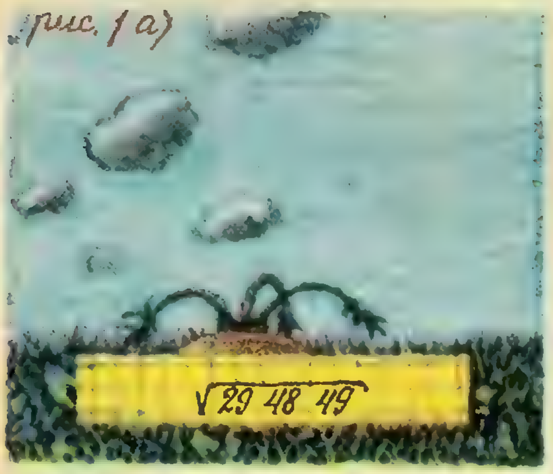
— А хочешь я научу тебя вычислять корни без калькулятора?

— А это трудно?

— Не намного труднее деления. Вот слушай.

Различные способы извлечения квадратных корней «вручную» существуют с древних времен. Я расскажу тебе об одном таком способе, который был создан еще в XV веке и на протяжении долгих лет честно служил и школьникам, и ученым.

Чтобы освоить этот способ, достаточно разобрать несколько примеров.



Сначала рассмотрим случай, когда корень извлекается нацело, т. е. когда число является полным квадратом. Найдем, например, корень из числа 294 849.

Разобьем цифры, входящие в это число, справа налево на группы по две цифры (рис. 1, *а*). Самую левую группу назовем первой, следующую — второй и т. д. Общее число образовавшихся групп определяет число цифр искомого корня.

Первая цифра находится как целочисленное значение корня из первой группы с недостатком. В нашем случае — это цифра 5. Записываем ее в ответ, затем возводим в квадрат, вычитаем из первой группы и сносим к результату вычитания следующую группу. (Если результат вычитания — нуль, то просто сносим следующую группу.) В рассматриваемом примере получится число 448 (рис. 1, *б*).

Переходим к определению второй цифры. Для этого слева от полученного числа 448 проводим вертикальную прямую и записываем за ней на место десятков удвоенную первую цифру: $2\times5=10$ (рис. 1, *в*).

На место единиц ставим самую бо́льшую цифру a, для которой разность $448-\overline{10a}\cdot a$ неотрицательна, т. е. положительна или равна нулю. Ясно, что в нашем случае это цифра 4. Заносим эту цифру в ответ (рис. 1, *г*).

Умножаем 104 на 4 и записываем результат справа от вертикальной черты. Вычисляем разность $448-416=32$ и сносим к ней следующую группу. В результате получаем число 3249 (рис. 1, *д*).

Третья цифра находится так же, как и вторая: умножаем 54 на 2 и полученный результат — число 108 — записываем слева от вертикальной черты на место десятков. На место единиц ставим самую бо́льшую цифру b, для которой разность $3249-\overline{108b}\cdot b$ неотрицательна. Подбором убеждаемся, что для $b=3$ эта разность равна рис. 1 б)

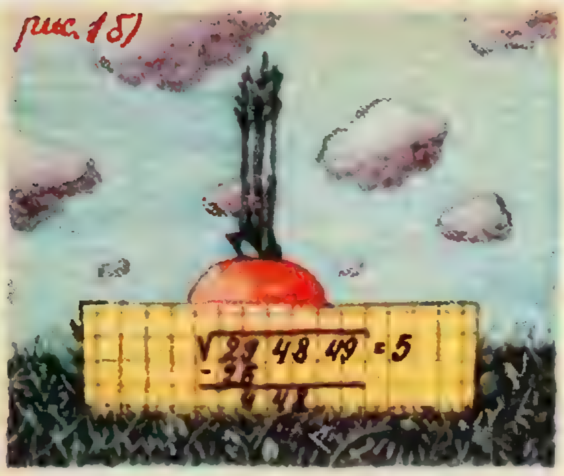

√29 48 49 = 5
-25
4 48

рис. 1 в)

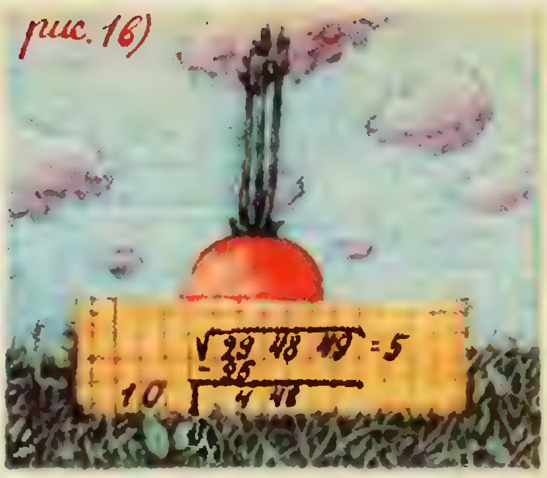

√29 48 49 = 5
-25
10
4 48

рис. 1 г)

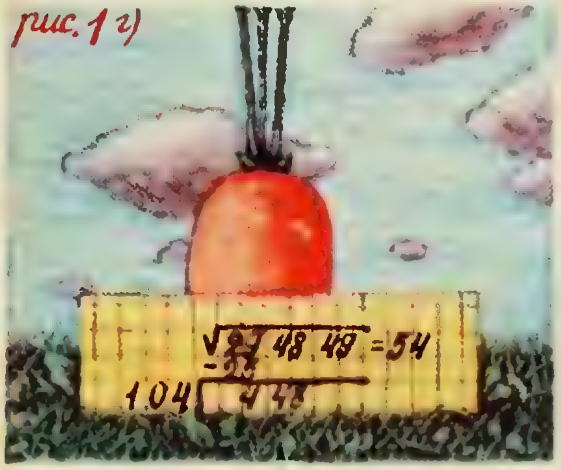

√29 48 49 = 54
-25
104
4 48

рис. 1 д)

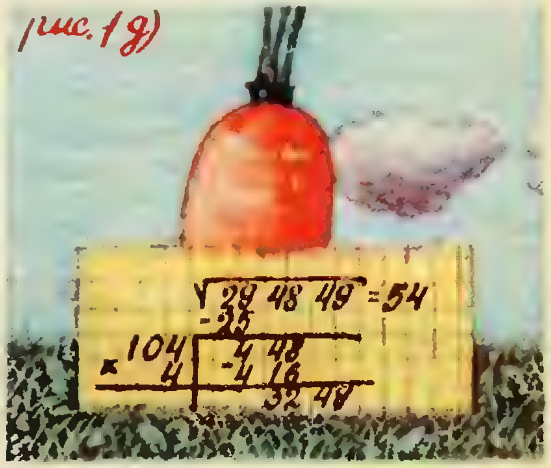

√29 48 49 = 54
-25
×104
4
-4 48
-4 16
32 49

рис. 1 е)

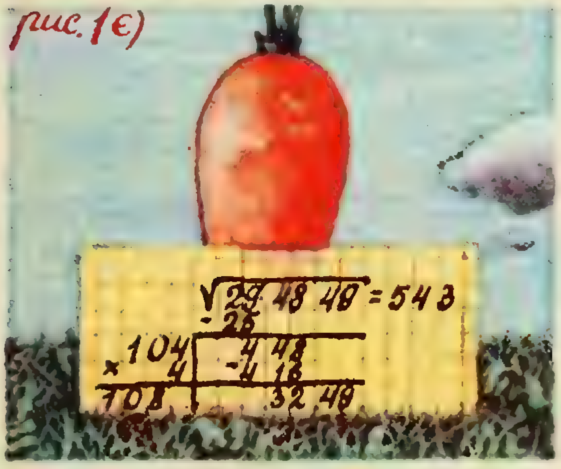
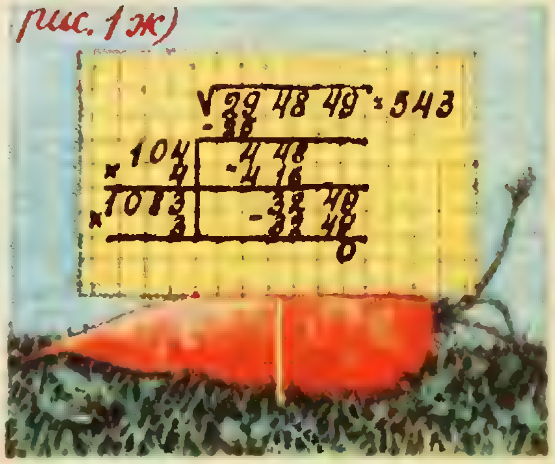

√29 48 49 = 543
-25
×104
4
-4 48
-4 16
1083
32 49

рис. 1 ж)


√29 48 49 = 543
-25
×104
4
-4 48
-4 16
×1083
3
-32 49
-32 49
0

нулю. Заносим $b=3$ в ответ (рис. 1, *е*).

Умножаем 1083 на 3, записываем результат справа от вертикальной черты и вычитаем его из 3249 (рис. 1, *ж*). Так как разность равна нулю, процесс вычисления корня окончен.

А теперь, глядя на рисунки 2 и 3, попробуйте самостоятельно повторить все шаги, необходимые для вычисления квадратных корней $\sqrt{212521}$ и $\sqrt{165649}$.

До сих пор мы рассматривали числа с четным числом цифр. Если же общее число цифр нечетно, то первая группа слева будет состоять только из одной цифры (рис. 4, 5).

Ну а что же делать, если число не является *полным квадратом*? Алгоритм в этом случае не меняется, нужно лишь правильно подготовить число. Итак, пусть N — некоторое число (не обязательно целое), представленное десятичной дробью, и мы хотим вычислить корень из него с точностью

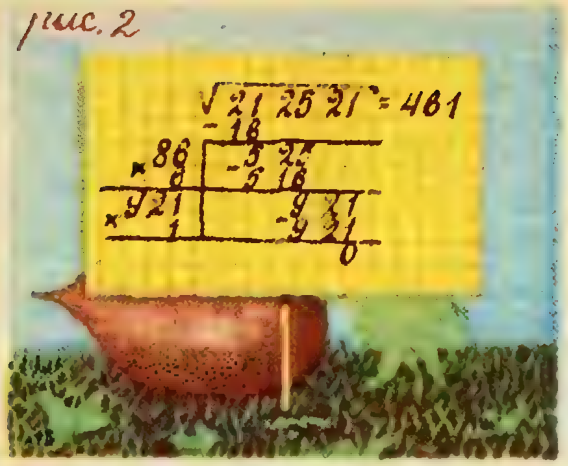


рис. 2

√21 25 21 = 461
-16
86 | -5 25
×6 | 5 16
921 | -9 21
×1 | 9 21
0

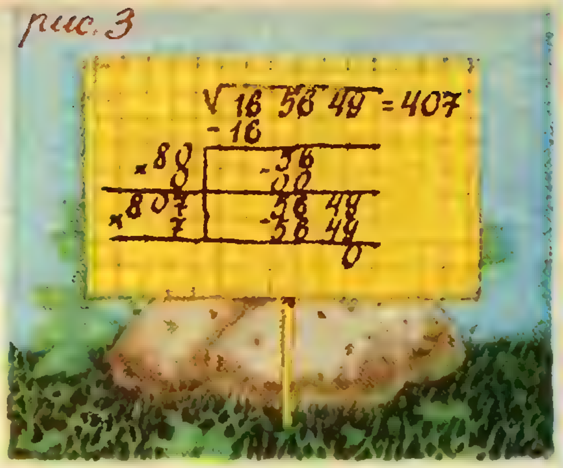


рис. 3

√16 56 49 = 407
-16
80 | -56
×0 | 00
807 | -56 49
×7 | 56 49
0

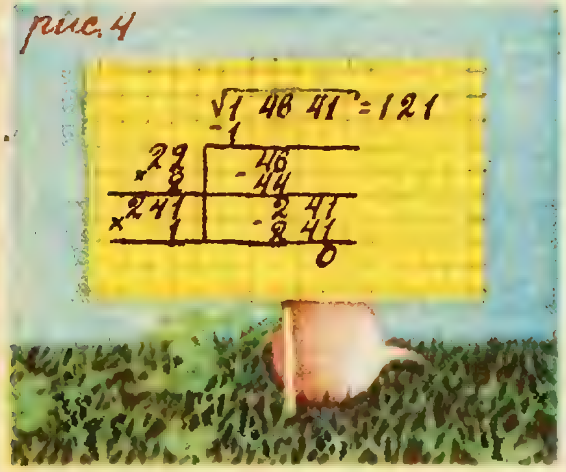


рис. 4

√1 46 41 = 121
-1
22 | -46
×2 | 44
241 | -2 41
×1 | 2 41
0

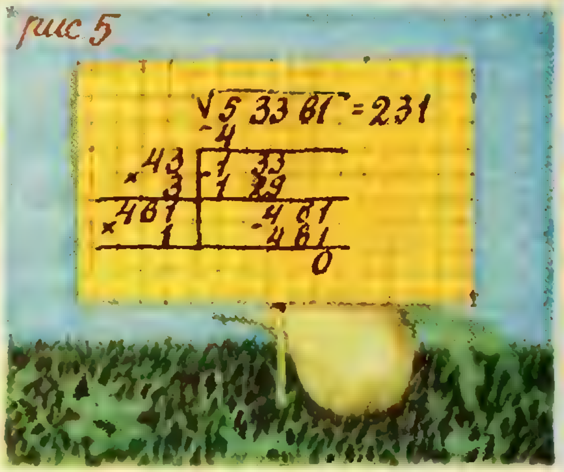


рис. 5

√5 33 61 = 231
-4
43 | -1 33
×3 | 1 29
461 | -4 61
×1 | 4 61
0

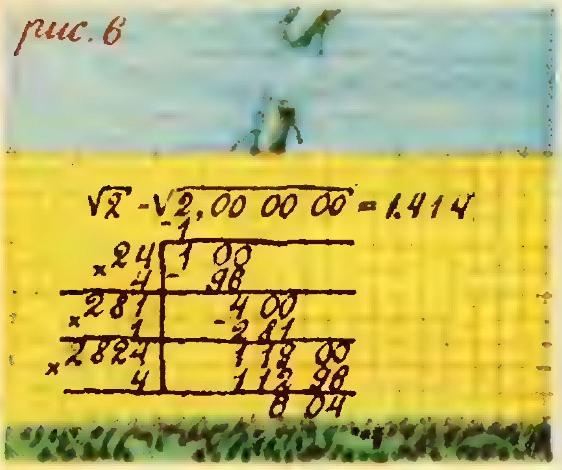


рис. 6

√2 = √2,00 00 00 = 1,414
-1
24 | 1 00
×4 | - 96
281 | 4 00
×1 | -2 81
2824 | 1 19 00
×4 | 1 12 96
6 04

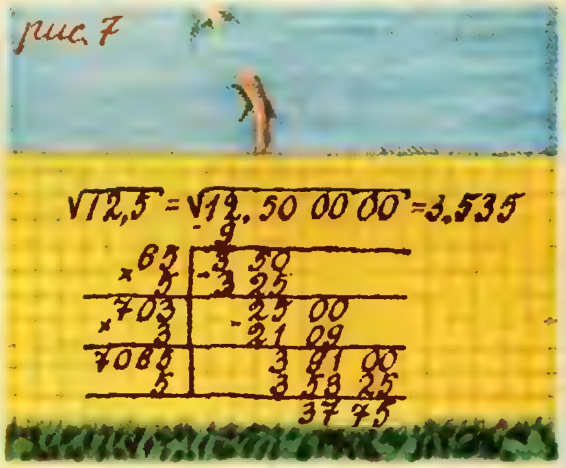


рис. 7

√12,5 = √12,50 00 00 = 3,535
-9
65 | -3 50
×5 | 3 25
703 | -25 00
×3 | 21 09
7065 | 3 91 00
5 | 3 53 25
37 75

до $\frac{1}{10^m}$, т. е. хотим найти цифры в десятичном представлении искомого корня до m-го знака после запятой включительно. Тогда мы поступаем следующим образом. Цифры, входящие в целую часть числа N, разбиваем на группы по две цифры в каждой справа налево, а цифры, образующие дробную часть, разбиваем на такие же группы, но уже слева направо. Если общее число цифр в цёлой части нечетно, то первая группа слева будет состоять из одной цифры, если же нечетно число цифр в дробной части, то к последней цифре слева приписываем нуль. Когда число групп в дробной части больше m, мы отбрасываем лишние группы справа, когда оно меньше m, мы составляем недостающие группы из нулей. Теперь все готово, чтобы использовать наш алгоритм. На рисунках 6 и 7 показано вычисление квадратных корней $\sqrt{2}$ и $\sqrt{12{,}5}$ с точностью до $\frac{1}{1000}$.

Чтобы проверить, освоили ли вы этот алгоритм, проделайте следующее упражнение: *вычислите с точностью до* $\frac{1}{1000}$ *квадратные корни* $\sqrt{18769}$, $\sqrt{24336}$, $\sqrt{35721}$, $\sqrt{232324}$, $\sqrt{243049}$, $\sqrt{104{,}2441}$, $\sqrt{1867{,}1041}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$.

Мы не будем заниматься обоснованием описанного алгоритма. Заметим лишь, что получение каждой новой цифры связано с возрастающим объемом вычислений, поэтому алгоритм разумно применять тогда, когда требуемая точность не превышает трех-четырех значащих цифр (чего, как правило, достаточно для практических расчетов).

Точность вычислений с использованием указанного алгоритма можно повысить, если воспользоваться следующим утверждением:

Если после вычисления n значащих цифр корня остаток от извлечения разделить на удвоенное найденное значение корня, то частное дает $n-1$ следующих цифр корня.

Докажем это утверждение. Предположим вначале, что число a, из которого извлекается корень, имеет целую часть из n групп. Пусть найдено n первых цифр корня, образующих число c. Тогда $\sqrt{a}=c+x$, где x — дробная часть корня, которую нужно найти. Следовательно,

$$a=c^2+2cx+x^2,$$
$$\frac{a-c^2}{2c}=x+\frac{x^2}{2c}.$$

Разность $a-c^2$ — это и есть остаток, который получается после нахождения n цифр корня. Дробь $\frac{a-c^2}{2c}$ представляет собой то самое частное, о котором говорится в утверждении.

Поэтому

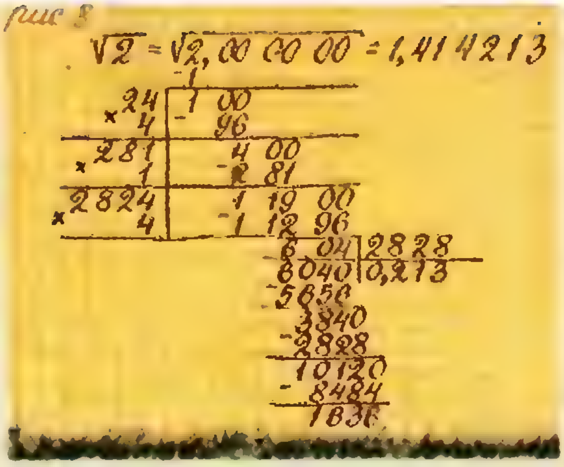
$$x=\frac{a-c^2}{2c}-\frac{x^2}{2c}.$$

Считая $x\approx\frac{a-c^2}{2c}$, мы допускаем погрешность, равную $\frac{x^2}{2c}$. Так как $x<1$, $a\geqslant 10^{n-1}$, имеем

$$\frac{x^2}{2c}<\frac{1}{2\cdot 10^{n-1}},$$

что и требовалось. Если запятая, отделяющая целую и дробную части в числе a, стоит не там, где мы ее предполагали, то ее всегда можно перенести на надлежащее место, производя умножение или деление числа a на некоторую степень 10 с четным показателем, а потом разделив или умножив найденный корень на степень 10 с показателем, вдвое меньшим.

рис 8



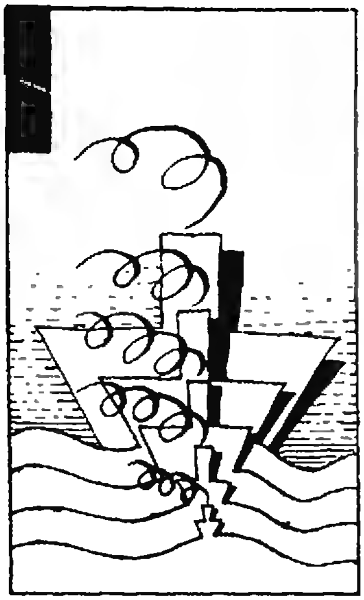
Рассмотрим пример. Вычислим $\sqrt{2}$ с семью значащими цифрами, т. е. с шестью цифрами после запятой. Ранее мы вычислили $\sqrt{2}$ с тремя знаками после запятой (рис. 6). Деление остатка на удвоенное значение корня даст следующие три (рис. 8).

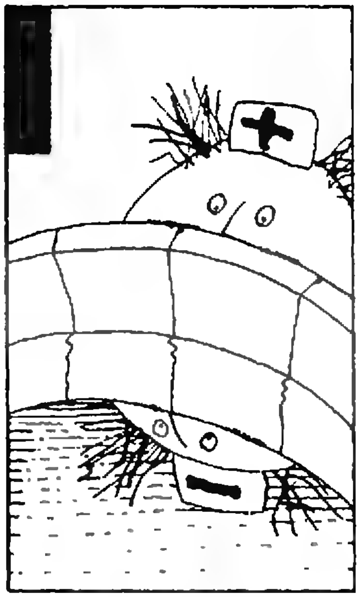
Конечно, в наше время, когда почти каждый первоклассник носит в портфеле микрокалькулятор, нелегко удивить школьника ручным способом извлечения квадратного корня. Но мы все же надеемся. Известный американский математик академик Грехем вспоминал, что сильный интерес к математике он почувствовал впервые в начальной школе, увидев тот самый алгоритм по извлечению квадратных корней, о котором мы сейчас рассказали. Его заинтересовало, возможно ли сделать что-нибудь похожее для кубических корней и корней более высоких степеней. Он нашел аналогичный способ решения, и с тех пор математика навсегда вошла в его жизнь.

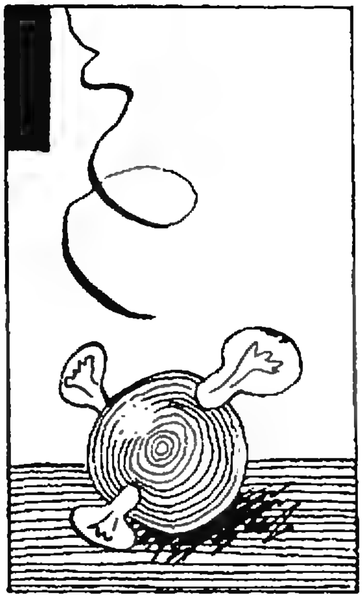
Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 29)

09, 11; *С. Тюрин* (п. Правдинск Горьковской обл.) 09, 11; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 09; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 03, 05; *Д. Филатьев* (Алма-Ата) 99; *Г. Финкельштейн* (п. Черноголовка Московской обл.) 03—05, 07—12; *Ф. Фот* (Томск) 03, 05; *А. Фурс* (п/о Дричин Минской обл.) 09, 11; *М. Хараба* (с. Надречное Тернопольской обл.) 04; *П. Хиль* (п. Овидиополь Одесской обл.) 03; *Д. Ходоровская* (Киев) 04; *И. Чайка* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 99, 05, 07, 08, 11; *О. Чепиков* (Могилев) 03, 09, 11; *И. Шехтман* (Киев) 04, 05, 09; *А. Шишкин* (Новый Уренгой) 09; *А. Шуляк* (с. Молодецкое Черкасской обл.) 11; *Н. Юдина* (п. Майна Ульяновской обл.) 11; *В. Яйлиян* (Шостка) 03; *И. Яковлева* (Киев) 04; *Ю. Яровой* (Канев) 99, 09.







Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Вязкое трение» предназначена восьмиклассникам, «Метод электростатических изображений» — девятиклассникам, «Ядерные спектры» — десятиклассникам.

Вязкое трение

С трением знакомы практически все. Оно сопровождает любые движения тел и накладывает отпечаток на характер этих движений. В «Кванте» уже рассказывалось о трении, возникающем при относительном движении двух сухих поверхностей трущихся тел, об исследованиях Кулона и Амонтона, относящихся к зависимости силы сухого трения от силы нормального давления, от площади контакта и от относительной скорости движущихся тел*).

Но совершенно сухие тела в природе почти не встречаются, и техника больше имеет дело со смазанными поверхностями. Трение между твердым телом и жидкостью или газом называется жидким, или вязким, трением. Оно подчиняется своим закономерностям, существенно отличающимся от законов сухого трения. Каково это отличие и чем оно объясняется?

Отличие, прежде всего,— в отсутствии силы трения покоя. Любая сколь угодно малая сила может привести в движение тело относительно жидкости или газа. И наоборот — бесконечно медленно движущееся тело не испытывает в газе или жидкости никакого сопротивления. Причина состоит в том, что «трутся» друг о друга фактически не шероховатые со впадинами и выступами (конечно, микроскопическими) поверхности твердых тел, сцеплением которых и определяется трение покоя, а слои жидкости или газа. Как это происходит, и что вообще означает появление силы, препятствующей движению (силы сопротивления движению) тела?

В основе любых сил трения движения лежит стремление тела сообщить свое движение другим телам, которые с ним соприкасаются, или, другими словами,— тенденция к выравниванию скоростей движения. Силы трения всегда стремятся замедлить движение более быстрых тел и ускорить движение более медленных.

---

*) См., например, статью И. Ш. Слободецкого «Сухое трение» («Квант», 1986, № 8), статью А. В. Семёнова «Трение: вредное, полезное, интересное ...» («Квант», 1985, № 10), заметку И. К. Белкина «Конус трения» («Квант», 1986, № 1, с. 24). *(Примеч. ред.)*

В случае сопротивления движению твердого тела в жидкости или газе речь идет о передаче импульса (количества движения) молекул слоя, который движется в каком-то направлении с большей скоростью, чем соседний слой, молекулам этого соседнего слоя.*) И наоборот, молекулы этого медленного слоя, обладая кроме своего хаотического движения еще и медленным направленным движением вдоль границы слоев, разбавляют «быстрый» слой, тем самым замедляя его. Обычно считается, что слой, непосредственно прилегающий к телу, имеет ту же скорость, что и тело. Следовательно, он испытывает ту же силу трения и, в свою очередь, замедляет или ускоряет слой, отстоящий чуть дальше. При этом играет роль то, как быстро нарастает (или убывает) скорость по мере перехода от одного слоя к другому, или, как говорят, сколь велик градиент скорости.

Исследования различных ученых показали, что при небольших скоростях сила вязкого трения пропорциональна скорости относительного движения твердого тела и жидкости или газа. Она зависит также от природы жидкости и от формы и размеров тела. Такую силу сопротивления испытывают, например, частицы тумана и дыма, оседающие в воздухе, маленькие твердые шарики, падающие в вязкой жидкости (например, в глицерине) и т. п.

При любом виде трения движения происходит еще одно крайне важное явление. Это превращение энергии механического движения во внутреннюю энергию (тепловое движение молекул) в соответствии с законом сохранения энергии. Еще Кулон исследовал затухание крутильных колебаний цилиндра в жидкости. В этом опыте механическая энергия цилиндра при колебаниях рассеивается, превращаясь в тепло, и жидкость вместе с цилиндром нагреваются. А если бы жидкость была идеальной, т. е. не обладающей вязкостью, то цилиндр мог бы колебаться на упругом подвесе вечно.

Итак, вязкое трение приводит к потере механической энергии, к сопротивлению движению тела в жидкости. Но означает ли это, что вязкость жидкости или газа нужно во всех случаях уменьшать, что самолет, например, в таком случае будет летать быстрее? Отнюдь! Самолет в воздухе, лишенном внутреннего трения (в идеальной «жидкости»), вообще не взлетит, так как подъемная сила его крыла будет равна нулю, как и сила тяги воздушного винта. Дело здесь в особом свойстве лишенного вязкости потока идеальной жидкости. Оказывается, на тело любой формы такой поток может действовать только с силами, сумма которых равна нулю. В этом состоит сущность так называемого парадокса Даламбера — Эйлера. Но обсуждение этого вопроса, к сожалению, выходит за рамки данной заметки.

Б. Б. Буховцев

Метод электростатических изображений

В школьном курсе физики вы познакомились с явлением электростатической индукции. Вспомним, в чем оно заключается.

Поднесем точечный заряд $+q$ к какому-либо проводнику, например к незаряженному металлическому шарику. За очень малое время свободные заряды на шарике перераспределятся так, что напряженность результирующего поля внутри него станет равной нулю. После этого движение зарядов прекратится. Поле внешнего заряда оказывается скомпенсированным полем зарядов, «появившихся» на поверхности шарика. Будем называть их наведенными зарядами.

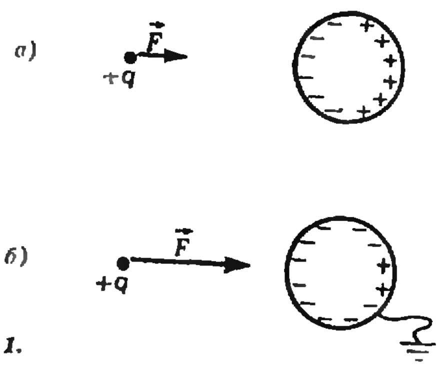


Рис. 1.

---

*) Более подробно о механизме жидкого трения можно прочитать, например, в заметке Е. Е. Городецкого «О явлениях переноса» («Квант», 1986, № 9, с. 27). *(Примеч. ред.)*

Поле наведенных зарядов есть и вне проводника, в частности, оно действует на заряд $+q$ — заряд притягивается к шарику, хотя полный заряд шарика равен нулю (рис. 1, *а*). Если бы шарик был заземлен, притяжение было бы сильнее, поскольку на шарике появился бы избыточный отрицательный заряд (рис. 1, *б*). Этот заряд перетек бы на проводник с земли под действием поля заряда $+q$.*)

Как рассчитать поле наведенных зарядов? Рассмотрим пример. Пусть проводник занимает все правое полупространство (рис. 2). Тогда на его плоской границе OO' соберутся наведенные отрицательные заряды, которые уничтожат поле всюду в проводнике. Вычислить поле вне проводника (слева от OO') нам поможет тот очевидный факт, что поле наведенных зарядов симметрично относительно плоскости OO'. Посмотрите на рисунок 2 — на нем хорошо видно, чему равно поле наведенных зарядов справа от OO' (в проводнике). Раз это поле компенсирует поле заряда $+q$, то, очевидно, оно совпадает с полем воображаемого заряда $-q$, помещенного в ту же точку, что и заряд $+q$. Теперь ясно, какое поле создают наведенные заряды слева от OO' (вне проводника). Оно в точности равно полю воображаемого заряда $-q$, но помещенного по другую сторону от плоскости OO', симметрично по отношению к заряду $+q$. Заряд $-q$ называют изображением заряда $+q$.

Итак, плоская поверхность проводника притягивает точечный заряд $+q$, удаленный от нее на растояние d, с такой же силой, с какой его притягивал бы заряд $-q$, удаленный на расстояние $2d$:

$$F = kq^2/(2d)^2.$$

Мы получили удивительный результат: поле, создаваемое зарядом и проводником (рис. 3, *а*), в пространстве вне проводника совпадает с полем всего двух точечных зарядов (рис. 3, *б*). Почему оказалась возможной такая подмена? Вспомним, что поверхность проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность, причем в нашем примере потенциал проводника равен нулю. Поле же двух зарядов $+q$ и $-q$ обладает следующим свойством: эквипотенциальная поверхность $\varphi = 0$ совпадает с плоскостью симметрии OO', т. е. точно повторяет форму поверхности рассматриваемого проводника. Именно в этом скрыта причина совпадения полей, изображенных на рисунке 3, *а* и *б*. И в других случаях надо стремиться расположить заряды-изображения внутри проводника так, чтобы поверхность проводника совпала с поверхностью постоянного потенциала, равного потенциалу проводника.*)

Возникает резонный вопрос — как это сделать? Как найти заряды-изображения и их положения, если известны форма и потенциал проводника? К сожалению, в общем случае такого

---

*) Поле вне проводника может быть определено, если известен либо полный заряд проводника (как в случае, изображенном на рисунке 1,*а*), либо его потенциал (как на рисунке 1,*б*). Первый случай соответствует изолированному проводнику, второй — проводнику, соединенному с удаленным очень большим проводником известного потенциала (например, с землей). Мы, в основном, будем рассматривать второй тип задач. Потенциал бесконечного проводника будем считать равным потенциалу на бесконечности, т. е. нулю.

*) Тогда поле внешних зарядов и проводника будет совпадать с полем внешних зарядов и зарядов-изображений (т. е. проводник подменяется изображениями). Дело в том, что граница рассматриваемой области (пространство вне проводника) имеет в этих двух случаях одинаковый потенциал, и расположение зарядов внутри области также одно и то же (все изображения находятся в проводнике, т. е. вне этой области). Выполнения этих условий достаточно, чтобы утверждать, что поля совпадают всюду внутри области. Это утверждение часто называют принципом единственности в электростатике.

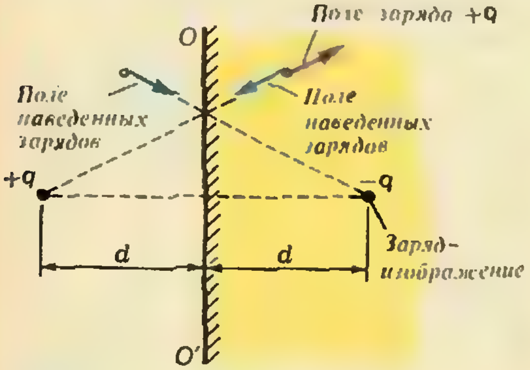


Рис. 2.

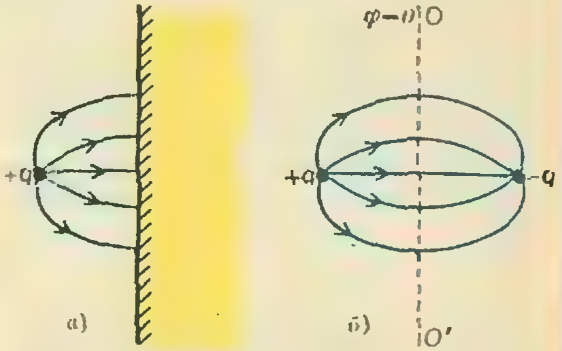


Рис. 3.

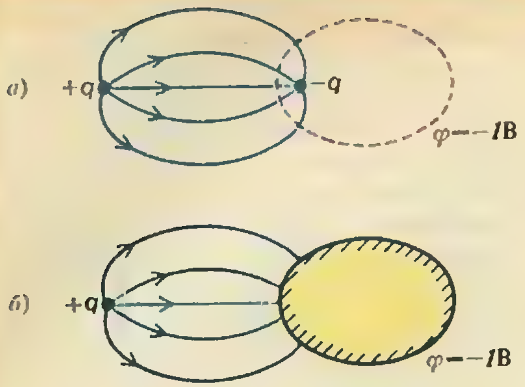


Рис. 4.

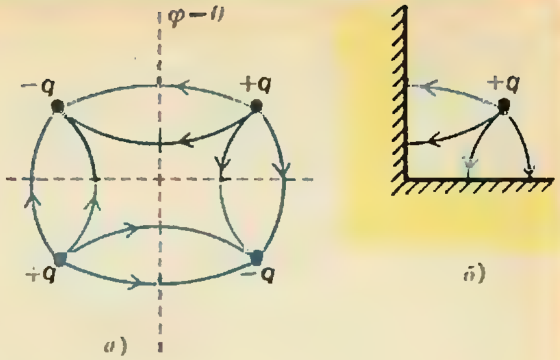


Рис. 5.

рецепта не существует, и обычно приходится действовать, как говорят, «с конца» — от зарядов к проводнику.

Возьмем несколько точечных зарядов, рассчитаем их поле, найдем любую эквипотенциальную поверхность $\varphi=\varphi_0$ и заполним пространство внутри этой поверхности проводником с потенциалом φ_0. Тогда поле, которое мы уже рассчитали, представляет собой готовое решение для получившегося проводника и тех зарядов, что оказались вне его! Заряды же, которые «погибли» внутри проводника, играют роль зарядов-изображений. Таким способом можно построить много «готовых» решений, но нет гарантии, что среди них найдется проводник заранее заданной формы.

Рассмотрим пример. Возьмем какую-нибудь эквипотенциальную поверхность для тех же зарядов $+q$ и $-q$, например с $\varphi=-1$ В (рис. 4, *а*). Поле этих двух зарядов вне этой поверхности совпадает с полем заряда $+q$ и проводника, имеющего фиксированный потенциал $\varphi=-1$ В (рис. 4, *б*).

Еще пример. Поле четырех зарядов $+q$, $+q$, $-q$ и $-q$, размещенных в вершинах прямоугольника (рис. 5, *а*), имеет эквипотенциальную поверхность $\varphi=0$ в виде двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Значит, часть этого поля, заключенная в первом квадранте, совпадает с полем заряда $+q$, помещенного в двухгранный угол (рис. 5, *б*). Три других заряда являются изображениями заряда $+q$. Попробуйте сами найти решение для заряда, помещенного в трехгранный угол, — для этого вам придется использовать семь дополнительных зарядов.

Вернемся теперь к примеру с металлическим шариком, о котором шла речь в начале статьи. Возьмем два заряда $+q_1$ и $-q_2$ ($q_1>q_2$), расположенные на расстоянии l друг от друга. Оказывается, что эквипотенциальная поверхность $\varphi=0$ представляет собой сферу (рис. 6, *а*).*) Чтобы определить радиус этой сферы R и расстояние L от ее центра до заряда $+q_1$, можно приравнять к нулю потенциалы точек A и B (рис. 6, *б*):

$$\left.\begin{aligned} k\frac{q_1}{L-R}-k\frac{q_2}{R-(L-l)}&=0,\\ k\frac{q_1}{L+R}-k\frac{q_2}{R+(L-l)}&=0. \end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

Поле этих двух зарядов в пространстве вне сферы в точности совпадает с полем, которое возникает, если заряд $+q_1$ поместить на расстоянии L от центра заземленного металлического шара радиусом R (рис. 6, б). В этом случае, когда задано положение шара, нам известны R и L, а положение отрицательного заряда-изображения (l) и его величину (q_2) можно найти из той же системы (*):

$$l=L-R^2/L,\quad q_2=q_1R/L.$$

Сила, с которой заряд $+q_1$ притягивается к шару, равна

$$F=k\frac{q_1q_2}{l^2}.$$

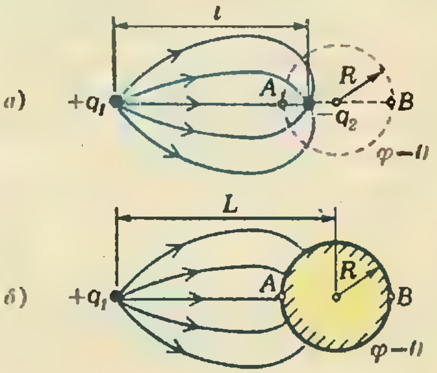


Рис. 6.

---

*) Потенциал точечного заряда q имеет вид: $\varphi=kq/r$. Условие $kq_1/r_1-kq_2/r_2=0$ преобразуется к равенству $r_1/r_2=q_1/q_2$, т. е. описывает геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до заданных двух точек имеет фиксированное значение. Докажите сами, что это сфера.

А как же найти поле и силу притяжения в случае незаряженного шарика? Тогда кроме изображения $-q_2$ надо поместить в центр сферы еще один воображаемый заряд $+q_2$. Поле этих трех зарядов вне сферы будет совпадать с полем заряда $+q_1$ и незаряженного шарика. Почему? Заметим, что поверхность сферы останется эквипотенциальной поверхностью и после добавления третьего заряда. Зато число силовых линий, входящих внутрь сферы, теперь точно равно числу силовых линий, из нее выходящих, — ведь полный заряд внутри сферы равен нулю. Но такому же условию удовлетворяет поле и в случае незаряженного проводника! Значит, мы нашли правильное поле. Сила притяжения заряда $+q_1$ к шару в этом случае будет заметно меньше — ведь он не только притягивается к изображению $-q_2$, но и отталкивается (с меньшей силой) от другого изображения $+q_2$:

$$F=k\frac{q_1q_2}{l^2}-k\frac{q_1q_2}{L^2}.$$

А. И. Черноуцан

Ядерные спектры

Как вы знаете, атомные ядра состоят из нуклонов — протонов и нейтронов, между которыми действуют ядерные силы притяжения и кулоновские силы отталкивания. Что может произойти с ядром при его столкновении с другим ядром, частицей или гамма-квантом? Опыты Э. Резерфорда, выполненные в 1919 году, показали, например, что под воздействием альфа-частицы из ядра может быть выбит протон. В экспериментах, проведенных Д. Чедвиком в 1932 году, было установлено, что альфа-частицы могут выбивать из атомных ядер и нейтроны («Физика 10», § 106). Но всегда ли так заканчивается процесс столкновения? Не может ли атомное ядро поглотить энергию, полученную при столкновении, и перераспределить ее между входящими в его состав нуклонами, изменив тем самым свою внутреннюю энергию? Что будет происходить с таким ядром дальше?

Ответы на эти вопросы дали прямые опыты по изучению взаимодействия протонов с атомными ядрами. Их результаты очень похожи на результаты опытов Франка и Герца по изучению столкновений электронов с атомами («Физика 10», § 96). Оказывается, при постепенном увеличении энергии протонов сначала наблюдаются только упругие столкновения с атомными ядрами, кинетическая энергия не превращается в другие виды энергии, а лишь перераспределяется между протоном и атомным ядром как одной частицей. Однако, начиная с некоторого значения энергии протона, могут происходить и неупругие столкновения, при которых протон поглощается ядром и полностью передает ему свою энергию. Ядро каждого изотопа характеризуется строго определенным набором «порций» энергии, которые оно может принять.

Эти опыты доказывают, что ядра обладают дискретными спектрами возможных энергетических состояний. Таким образом, квантование энергии и ряда других параметров является свойством не только атомов, но и атомных ядер. Состояние атомного ядра с минимальным запасом энергии называется основным, или нормальным, состояния с избыточной энергией (по сравнению с основным состоянием) называются возбужденными.

Атомы обычно находятся в возбужденных состояниях примерно

Превращение ядра азота с захватом альфа-частицы и испусканием протона.

10^{-8} секунды, а возбужденные атомные ядра избавляются от избытка энергии за гораздо более короткое время — порядка 10^{-15}-10^{-16} секунды. Как и атомы, возбужденные ядра освобождаются от избытка энергии, испуская кванты электромагнитного излучения. Эти кванты называются гамма-квантами (или гамма-лучами). Дискретному набору энергетических состояний атомного ядра соответствует дискретный спектр частот излучаемых ими гамма-квантов. Гамма-лучи представляют собой поперечные электромагнитные волны, такие же, как радиоволны, видимый свет или рентгеновские лучи. Они являются самым коротковолновым видом электромагнитного излучения из всех известных, и соответствующие им длины волн лежат в диапазоне примерно от 10^{-11} м до 10^{-13} м.

Энергетические состояния атомных ядер и переходы ядер из одного состояния в другое с поглощением или излучением энергии принято описывать с помощью энергетических диаграмм, аналогичных энергетическим диаграммам атомов («Физика 10», § 94). На рисунке представлена энергетическая диаграмма ядра изотопа железа — $^{58}_{26}$Fe, полученная на основе опытов по бомбардировке протонами. Заметим, что при качественном сходстве энергетических диаграмм атомов и ядер между ними есть существенные количественные различия. Если для перевода атома из основного состояния в возбужденное требуется энергия в несколько электронвольт, то для возбуждения атомного ядра необходима энергия порядка сотен тысяч или миллионов электронвольт. Это различие обусловлено тем, что ядерные силы, действующие между нуклонами в ядре, в значительной степени превосходят силы кулоновского взаимодействия электронов с ядром.

Способность атомных ядер самопроизвольно переходить из состояний с бóльшим запасом энергии в состояние с меньшей энергией объясняет происхождение не только гамма-излучения, но и радиоактивного распада ядер.

Многие закономерности в ядерных спектрах можно объяснить, если воспользоваться так называемой оболочечной моделью строения атомного ядра. Согласно этой модели, нуклоны в ядре не перемешаны в беспорядке, а, подобно электронам в атоме, располагаются связанными группами, заполняя разрешенные ядерные оболочки. При этом протонные и нейтронные оболочки заполняются независимо друг от друга. Максимальные числа нейтронов: 2, 8, 20, 28, 40, 50, 82, 126 и протонов: 2, 8, 20, 28, 50, 82 в заполненных оболочках получили название магических. Ядра с магическими числами протонов и нейтронов обладают многими замечательными свойствами: повышенным значением удельной энергии связи, меньшей вероятностью вступления в ядерное взаимодействие, устойчивостью по отношению к радиоактивному распаду и т. п.

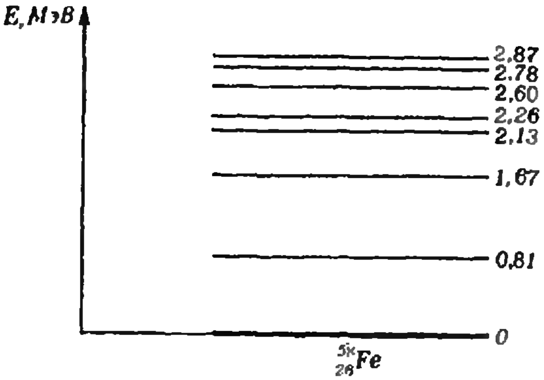


Диаграмма энергетических уровней ядра изотопа железа.

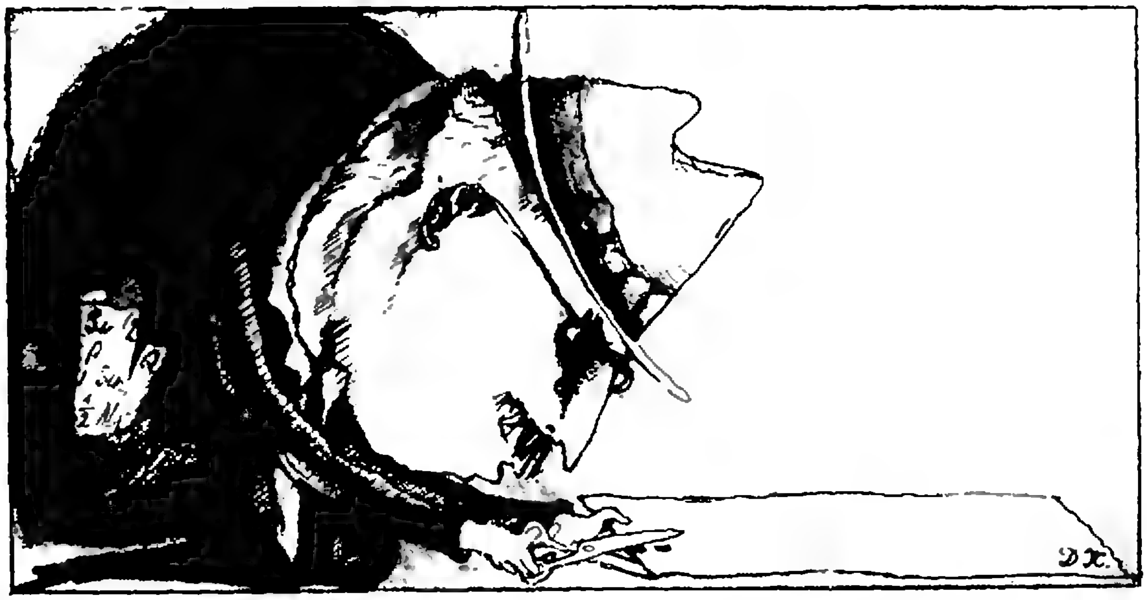
Переход ядра из основного состояния в возбужденное и возвращение его в основное состояние, с точки зрения оболочечной модели, объясняется переходом нуклона с одной оболочки на другую и обратно.

При большом числе достоинств оболочечная модель ядра не способна объяснить свойства всех ядер в различных типах взаимодействий. Во многих случаях более плодотворным оказывается представление о ядре как о капле ядерной жидкости, в которой нуклоны связаны ядерными силами, кулоновскими силами и силами поверхностного натяжения.*) Существуют и другие модели, но ни одна из предложенных до сих пор не может считаться универсальной.

О. Ф. Кабардин

---

*) Более подробно о капельной модели ядра можно прочитать в соответствующей заметке в разделе «Школа в «Кванте», опубликованной в «Кванте» № 5 за 1986 год на странице 23. *(Примеч. ред.)*



Математический кружок

В поисках оптимального раскроя

Кандидат физико-математических наук
М. Б. БАЛК,
Г. М. ЛАНДМАН

Завод детских игрушек приступил к массовому выпуску нового изделия, одна из деталей которого — небольшой многоугольник определенной формы и размеров (рис. 1) из тонкой жести. На заводе имелся станок, на котором легко и быстро можно было нарезать из листа жести прямоугольники любых заданных размеров. Поэтому технологами было принято решение: нарезать сначала одинаковые прямоугольные заготовки надлежащих размеров, а затем уже обрезать каждый такой прямоугольник так, чтобы из него получить требуемую многоугольную деталь. А размеры прямоугольников следует, естественно, выбрать так, чтобы отходы на обрезки были минимальными. Так возникла математическая задача, о решении которой мы расскажем в данной заметке.

Основная задача. *Указать алгоритм, который позволяет среди всех прямоугольников П, вмещающих в себе данный многоугольник М, выбрать тот, который имеет наименьшую площадь.*

Прямоугольник, удовлетворяющий условию этой задачи, мы будем называть *оптимальным.* Если какой-либо прямоугольник вмещает в себе многоугольник *М*, а на контуре прямоугольника нет ни одной вершины многоугольника, то можно прямоугольник *улучшить*, т. е. заменить его другим прямоугольником меньшей площади, также содержащим в себе многоугольник *М*. Для этого достаточно перенести параллельно самой себе каждую из четырех прямых, содержащих стороны прямоугольника *М* так, чтобы они (после переноса) уже проходили через какие-то вершины многоугольника *М*. На рисунке 1 таким «улучшенным» прямоугольником (по сравнению с *П*) является *П′*.

Принято называть *опорной прямой* для данного многоугольника *М* любую прямую, которая содержит хотя бы одну точку контура многоугольника и не содержит ни одной его внутренней точки (например, на рисунке 1 прямые *a* и *b* — опорные для многоугольника *М*, а прямая *c* — не опорная). Прямоугольник, все четыре стороны которого лежат на опорных прямых для многоугольника *М*, будем называть *описанным около М.* Таким является прямоугольник Π' на рисунке 1. Как только мы для заданного многоугольника M (рис. 1) выбрали опорную прямую (a), мы тем самым уже однозначно задали прямоугольник, описанный около M. Описанный около M прямоугольник обладает, очевидно, тем свойством, что на каждой его стороне (быть может, в ее конце) помещается хотя бы одна вершина многоугольника (рис. 1). Из двух прямоугольников, описанных около данного многоугольника M, будем называть *лучшим* тот, который имеет меньшую площадь. Оптимальный прямоугольник, о котором говорится в основной задаче, следует, очевидно, искать среди прямоугольников, описанных около M.

Технологи завода высказали две гипотезы:

Гипотеза I. *Оптимальный прямоугольник для многоугольника M — это тот описанный прямоугольник, у которого одна сторона содержит наибольшую сторону многоугольника.*

Гипотеза II. *Оптимальный прямоугольник — тот описанный прямоугольник, у которого одна сторона параллельна наибольшей диагонали многоугольника.*

На этот этапе задача была предложена математику.

С чего начал математик

Математик начал с совсем, казалось бы, неинтересного и малосодержательного вопроса: «А существует ли вообще оптимальный прямоугольник?»

Выберем на плоскости какую-нибудь точку O и проведем через нее ось l_0 (рис. 2а). Затем проведем через O произвольно луч $l = l_\varphi$ и пусть он образует угол φ с осью l_0. Мы можем построить для многоугольника M опорную прямую, параллельную лучу l, и затем — тот (единственный) описанный прямоугольник Π, две стороны которого параллельны лучу l; его площадь обозначим через $S(\varphi)$. Будем изменять угол φ; пусть этот угол растет от 0 до π; при этом будет меняться и прямоугольник Π, и мы получим все возможные прямоугольники, описанные около M; будет *непрерывно* изменяться и S (т. е. при малом изменении угла φ мало изменится и величина $S(\varphi)$). Но функция, непрерывная на некотором отрезке (в нашем случае — на отрезке $[0; \pi]$), обязана принимать при каком-то (хотя бы при одном) значении φ из этого отрезка свое наименьшее значение («Алгебра и начала анализа 9—10», с. 89). Значит, найдется такой угол φ, что соответствующий описанный около M прямоугольник будет иметь наименьшую возможную площадь (будет оптимальным). Иначе говоря, *среди прямоугольников, описанных около многоугольника M, наверняка имеется (хотя бы один) оптимальный.*

Удостоверившись в существовании решения, математик приступил к его поиску.

Рассмотрим произвольный многоугольник — невыпуклый или выпуклый. Случай невыпуклого многоугольника, однако, легко сводится к случаю выпуклого многоугольника. В самом деле, пусть M — невыпуклый многоугольник. Рассмотрим наименьший выпуклый многоугольник M', содержащий многоугольник M (M' называют выпуклой оболочкой многоугольника M, рис. 2б). Легко понять, что прямоугольник Π содержит в себе многоугольник M в том и только том случае, когда он содержит его выпуклую оболочку M'. Следовательно, задача поиска оптимального прямоугольника для многоугольника M равносильна той же задаче для *выпуклого* многоугольника M'.

Чтобы освоиться с ней, попытаемся сначала решить ее в простейшем частном случае, когда M — треугольник.

Решение задачи для треугольника

Пусть M — треугольник ABC, а Π — какой-либо прямоугольник, описанный около M. На каждой из четырех сторон прямоугольника должна быть хотя бы одна вершина треугольника. Поэтому по крайней мере одна вершина треугольника «обслуживает» две

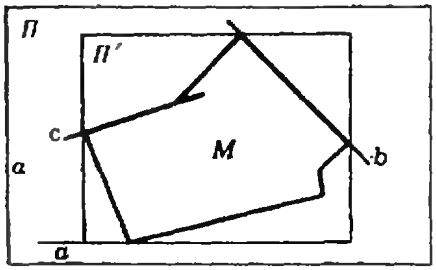


Рис. 1.

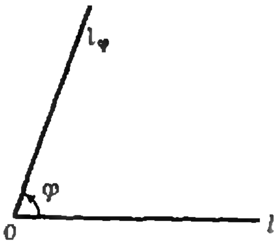


Рис. 2а.

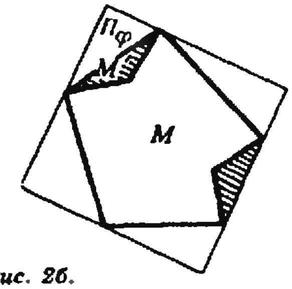


Рис. 2б.

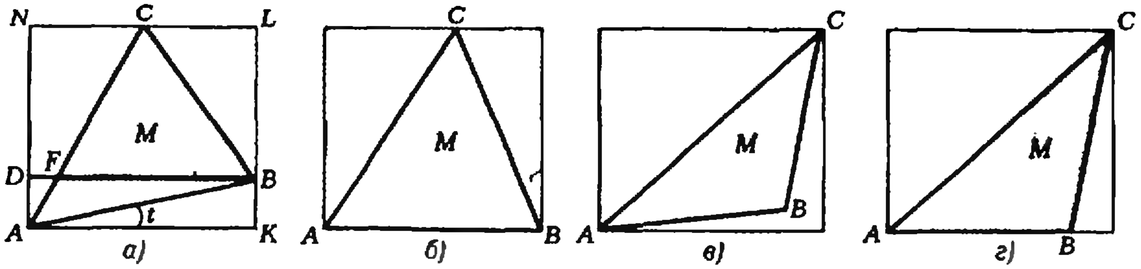


Рис. 3.

стороны прямоугольника $П$, являясь их общим концом. Однако остальные две вершины могут располагаться по-разному на сторонах (или внутри) прямоугольника, и возможны 4 принципиально разных случая (рисунки 3, *а*—*г*) в зависимости от их расположения.

Обозначим площадь треугольника ABC через σ, а через S — площадь прямоугольника $П$.

В случае *б*) имеем, очевидно: $S=2\sigma$.

В случаях *в*) и *г*): $S>2\sigma$.

Как обстоит дело в случае *а*)? Проведем через B параллель к стороне AK прямоугольника и отметим точки F и D ее встречи со стороной треугольника и стороной прямоугольника. Тогда

$$S=S_{AKBD}+S_{BDNL}>2S_{BFA}+2S_{BFC}=2\sigma,$$

т. е. $S>2\sigma$.

Видим, что оптимальный прямоугольник возникает лишь в случае *б*). Таким образом, *среди описанных прямоугольников, вмещающих в себе заданный треугольник М, оптимальным является такой, у которого основание совпадает со стороной треугольника; при этом площадь оптимального прямоугольника ровно вдвое больше площади треугольника.* Понятно, что если треугольник — тупоугольный, то такой оптимальный прямоугольник — единственный. В случае разностороннего остроугольного треугольника оптимальных прямоугольников — три. Возможен и тот случай, когда оптимальных прямоугольников два (например, если треугольник прямоугольный).

Алгоритм получения оптимального прямоугольника очевиден.

А как быть в случае четырехугольника?

Рассмотренный выше способ решения настолько прост, что даже в голову не приходит искать другой способ. А между тем наш способ обладает одним крупным недостатком: он не переносится на случай многоугольника, у которого больше трех сторон. Поэтому прикинем, какой другой, более перспективный, подход мог бы — в случае треугольника — привести нас к решению. В случае *а*) мы могли бы вычислить суммарную площадь отрезаемых треугольников (обозначим ее через T), выразив ее через угол t (угол наклона стороны треугольника AB к опорной прямой AK) и через элементы треугольника; можно показать, что эта сумма имеет вид

$$T=T(t)=A_1\sin 2t+A_2\sin(2t+\theta_2)+$$
$$+A_3\sin(2t+\theta_3),$$

где A_1, A_2, A_3, θ_2, θ_3 — какие-то числа, которые не зависят от t (а зависят только от элементов треугольника ABC). Затем мы могли бы попытаться отбросить те значения t, для которых эта сумма заведомо не принимает минимального значения. Этот способ в случае треугольника может показаться неоправданно громоздким, но в случае четырехугольника и других многоугольников он приводит к решению — и, как оказывается, не так уж сложно.

Сформулируем в виде задач два простых факта, которые нам потребуются в дальнейшем (решения — в одном из следующих номеров).

Задача 1. Каждую сумму вида

$$T(t)=A_1\sin(2t+\theta_1)+A_2\sin(2t+\theta_2)+\ldots+$$
$$+A_m\sin(2t+\theta_m)$$

можно всегда привести к виду

$$T(t)=\rho\sin(2t+\theta), \qquad (1)$$

где $\rho\geqslant 0$ и числа ρ и θ зависят только от чисел $A_1, \ldots, A_m$, $\theta_1, \ldots, \theta_m$ (но не зависят от t).

Задача 2. Если для всех значений t из некоторого интервала вида $(t_0-\varepsilon;\ t_0+\varepsilon)$ (концы не входят) функция $\sin(2t+\theta)$ неотрицательна, то найдется на этом интервале такое значение t_1, что верно строгое неравенство:

$$\sin(2t_1+\theta)<\sin(2t+\theta). \qquad (2)$$

Случай произвольного n-угольника

Пусть M — произвольный *выпуклый* n-угольник ($n\geqslant 4$), а $П_0$ — какой-нибудь описанный около него прямоугольник. *Сначала рассмотрим те случаи, когда ни одна сторона многоугольника M не лежит на стороне прямоугольника $П_0$.* При таком требовании могут на контуре прямоугольника $П_0$ оказаться не более четырех вершин многоугольника M. При этом возможны следующие три варианта:

I. Две вершины многоугольника M служат концами диагонали прямоугольника $П_0$, а остальные вершины M — внутри $П_0$, рис. 4, *а*).

II. Одна вершина многоугольника M служит вершиной прямоугольника $П_0$, две вершины многоугольника M являются внутренними точками двух сторон $П_0$, а остальные вершины M — внутри $П_0$, рис. 4, *б*).

III. Какие-то четыре вершины многоугольника M являются внутренними точками четырех сторон прямоугольника $П_0$, а остальные вершины многоугольника M лежат внутри $П_0$, рис. 4, *в*).

Все три варианта рассматриваются единообразным приемом: вычисляется площадь описанного прямоугольника и выясняется, нельзя ли его путем *«малого шевеления»* улучшить, т. е. получить описанный прямоугольник с меньшей площадью; если окажется, что можно, то рассматриваемый прямоугольник $П_0$ заведомо не оптимальный.*)

Мы рассмотрим здесь вариант I — наиболее простой. Обозначим через A и C те две вершины M, которые служат концами диагонали описанного прямоугольника $П_0\,(F_0K_0L_0N_0)$. Пусть AB — сторона M, лежащая внутри $П_0$ (кроме конца A); можно считать, что AB — в $\triangle F_0K_0L_0$. Обозначим величину угла BAK_0 через t_0, величину угла CAB — через λ. Вычислим площадь $S_{П_0}$:

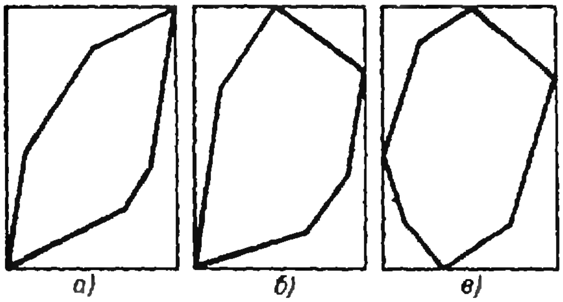


Рис. 4.

$$S_{П_0}=AK_0\cdot K_0L_0=$$
$$=AC\cdot\cos(t_0+\lambda)\cdot AC\sin(t_0+\lambda)=$$
$$=\frac{1}{2}AC^2\sin(2t_0+2\lambda).$$

Теперь, считая все вершины многоугольника M закрепленными на плоскости, пошевелим опорную прямую AK_0: начнем ее вращать вокруг вершины A (по часовой стрелке или против часовой стрелки). При повороте прямая AK_0 займет некоторое новое положение AK (изменяющееся с течением времени). При этом будет изменяться и соответствующий описанный прямоугольник: он будет поворачиваться вокруг точки A и займет новое положение $П$ (рис. 5), изменив, быть может, свои размеры. Но пока угол поворота достаточно мал, картина качественно меняться не будет. Говоря точнее, можно подобрать настолько малый угол $\varepsilon>0$, чтобы при любом выборе угла t из интервала $(t_0-\varepsilon;\ t_0+\varepsilon)$ описанный прямоугольник $П$, для которого $\widehat{BAK}=t$, имел концами своей диагонали вершины A и C многоугольника, а все остальные вершины многоугольника были внутри $П$. Площадь его $S_П$ вычисляется так же, как площадь $S_{П_0}$:

$$S_П=\frac{1}{2}AC^2\sin(2t+2\lambda).$$

В силу задачи 2 существует такой угол t на интервале $(t_0-\varepsilon;\ t_0+\varepsilon)$, что $\sin(2t+2\lambda)<\sin(2t_0+2\lambda)$, а следовательно, $S_П<S_{П_0}$. А это означает, что прямоугольник $П_0$, появляющийся в варианте I, — не оптимальный: его можно «улучшить». Разбор оставшихся двух случаев мы оставляем читателю в качестве задач.

Задача 3. Докажите, что в варианте III — прямоугольник $П_0$ не оптимальный.

Задача 4. Докажите, что и в варианте II — прямоугольник $П_0$ не оптимальный.

Видим, что пока описанный прямоугольник не содержит ни одной стороны многоугольника M (см. вариан-

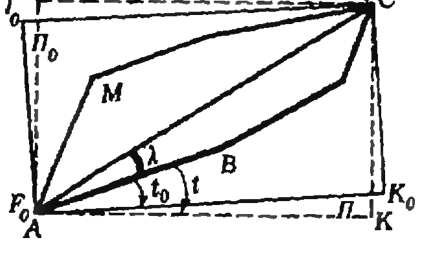


Рис. 5.

---

*) Подробно о приеме «малого шевеления» см. «Квант», 1979, № 4, с. 4 или книгу Балк М. Б., Балк Г. Д. *Поиск решения*, М.: Детская литература, 1983, с. 86.

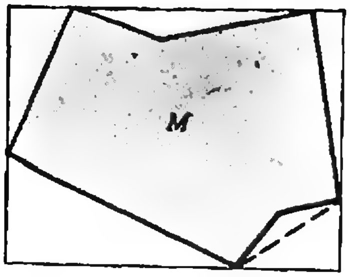


Рис. 6.

ты I, II, III), он не может оказаться оптимальным. Но оптимальный прямоугольник, как мы уже знаем, существует. Таким образом математик получил следующий

Алгоритм решения основной задачи

1) Если данный n-угольник M — выпуклый, то начерти все описанные прямоугольники, содержащие хотя бы одну сторону многоугольника (таких прямоугольников не более n).

2) Вычисли площади этих прямоугольников и выбери среди прямоугольников все такие, чья площадь — наименьшая. Каждый из них является оптимальным прямоугольником для рассматриваемого n-угольника. Других оптимальных прямоугольников не существует.

3) Если многоугольник M невыпуклый, то сначала построй для него выпуклую оболочку M', а затем найди для многоугольника M' оптимальный прямоугольник — он же будет и оптимальным прямоугольником для многоугольника M.

Когда поиск упрощается

Мы видели, что нахождение оптимального прямоугольника для данного выпуклого n-угольника M сводится к перебору не более, чем n прямоугольников. Имеются важные случаи, когда этот перебор упрощается. Мы их сформулируем в виде задач. Здесь следует учесть, что у выпуклого n-угольника, отличного от прямоугольника, не более трех нетупых углов (в противном случае сумма углов не будет равной 180° $(n-2)$).

Задача 5. Пусть в некотором выпуклом многоугольнике M имеется лишь одна сторона, к которой прилегают два нетупых угла. Докажите, что тогда среди прямоугольников, описанных около M, имеется лишь один оптимальный — таковым будет описанный прямоугольник, одна сторона которого содержит указанную выше сторону многоугольника M.

Задача 6. Пусть в некотором выпуклом n-угольнике M, отличном от треугольника и прямоугольника, имеются две стороны, к каждой из которых прилегают по два нетупых угла. Докажите, что тогда каждый описанный около M прямоугольник, построенный на одной из этих двух сторон, является оптимальным; других оптимальных прямоугольников не существует.

Эпилог

Математик передал технологам завода найденный им алгоритм, и еще указал на упрощения, возникающие в случае задач 5 и 6. Это позволило выбрать технологически оптимальное решение задачи для данной конкретной детали: соответствующий прямоугольник показан на рисунке 6. Гипотезы, выдвинутые технологами, оказались ошибочными. В случае, если аналогичные задачи возникнут для других деталей в форме многоугольника, технологи теперь владеют надежным общим алгоритмом и могут к математику больше не обращаться.

По этому вопросу.

Упражнения

1. Начертите какой-нибудь выпуклый четырехугольник, отличный от прямоугольника, у которого два противоположных угла — прямые. Покажите, что для него имеются два оптимальных прямоугольника. Начертите эти прямоугольники.

2. Опровергните гипотезу 1 и гипотезу 2.

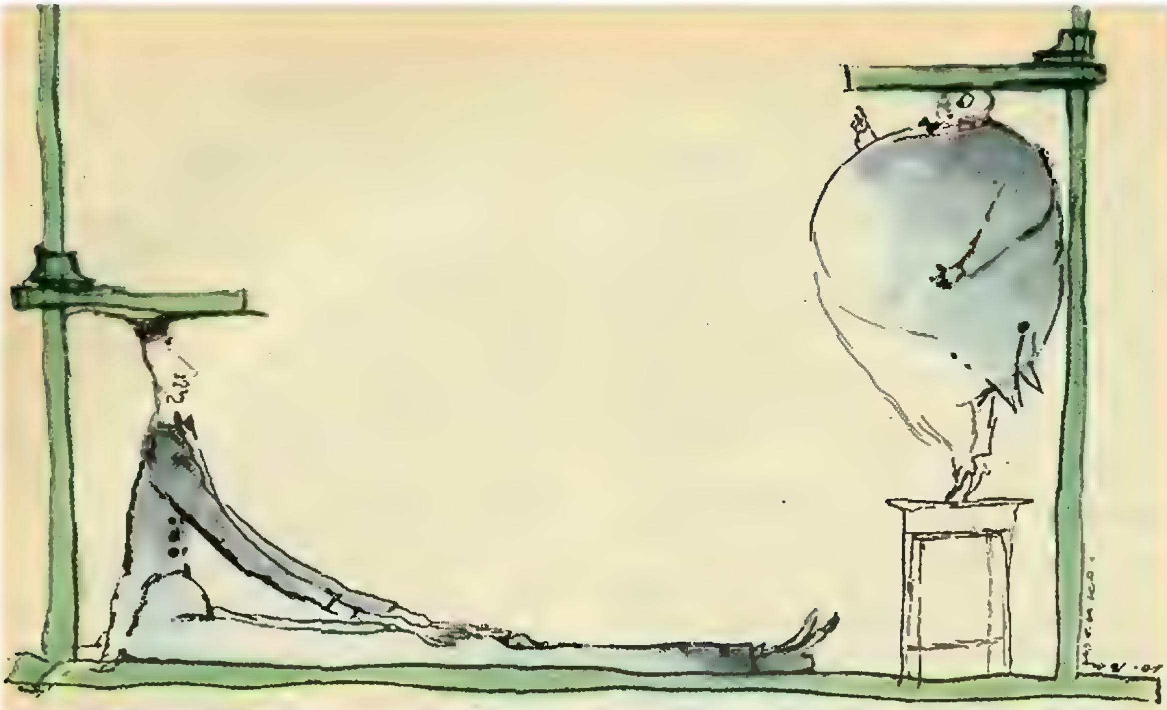
3. Начертите какой-либо выпуклый пятиугольник с тремя последовательными прямыми углами. Постройте для него все оптимальные прямоугольники. Сколько их?

4. Начертите шестиугольник, в котором имеется три пары параллельных сторон и три попарно неравных стороны. Начертите для него оптимальный прямоугольник.

5. Дан правильный треугольник Δ. Рассматриваются всевозможные равнобедренные трапеции, у которых острые углы равны по 60°, описанные около треугольника Δ. Докажите, что среди указанных трапеций нет оптимальной.

6. Дан треугольник Δ. Среди всевозможных выпуклых четырехугольников с заданными углами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ $(\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi)$, описанных около треугольника Δ, выбрать тот, чья площадь — наименьшая. Если такой существует, то как его найти?

7. Пусть M — заданный выпуклый n-угольник. Пусть $\{A_1, A_2 \ldots A_k\}$ — всевозможные выпуклые k-угольники с заданными углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=(k-2)\pi)$, описанные около n-угольника M. Докажите, что если среди этих k-угольников имеется такой, чья площадь минимальна, то хотя бы на одной его стороне содержится сторона n-угольника M (так что оптимальных k-угольников не более, чем n).



Практикум абитуриента

Неравенства с параметром

Кандидат физико-математических наук
А. С. ЯРСКИЙ

В настоящей статье читатель найдет общий метод решения встречающихся на вступительных экзаменах неравенств с параметром.

Пример 1 (*ЛГУ, мат.-мех., 1965*) *Решите неравенство*

$$\log_x (x-a) > 2. \qquad (1)$$

1. Найдем область определения неравенства (1):

$$x > 0,\ x \neq 1,\ x-a > 0.$$

2. Решим соответствующее неравенству (1) уравнение

$$\log_x (x-a) = 2 \Rightarrow x-a = x^2.$$

Изобразим в плоскости Oxa область определения и график последней функции на одном чертеже. Что касается функции, то проще выразить a через x: $a = x - x^2$ — парабола в плоскости Oxa. Нужно выяснить, как расположена эта парабола по отношению к прямой $x = a$ — границе области определения. Оказывается, *эти парабола и прямая имеют ровно одну общую точку* (0; 0) (проверьте). Все сказанное отражено на рисунке 1. Область определения на рисунке 1 закрашена. Красным цветом (на протяжении всей статьи) изображены линии, в точках которых данное неравенство не определено или не выполнено. (Отметим, что следовало изобразить лишь попадающую в область определения часть параболы.)

Итак, область определения разбилась на четыре части $D_1, \ldots, D_4$.

Оказывается, справедливо следующее

Предложение. *Каждая из областей $D_1, \ldots, D_4$ обладает свойством: либо неравенство (1) выполнено во всех точках области, либо не выполнено ни в одной ее точке.*

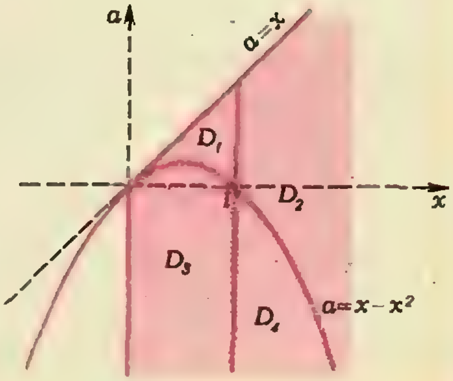


Рис. 1.

Иначе говоря, каждая из областей $D_1, \ldots, D_4$ либо целиком входит, либо целиком не входит в ответ.

Интуитивно это утверждение сомнений не вызывает. Действительно, ясна причина, по которой знак неравенства (1) может измениться в результате перехода из точки области D_1 в точку области D_2 — мы пересечем «красную» линию, т. е. побываем в точке, где входящие в неравенство функции не определены. При переходе из D_1 в D_3 также придется пересечь «красную» линию — побывать в точке, где неравенство (1) обращается в равенство. А при переходе из одной точки области D_1 в другую ее точку — не видно никаких «красных» линий, и значит, нет и причины для изменения знака неравенства!

Все эти верные по существу утверждения нуждаются в доказательстве. К сожалению, такое доказательство требует знаний, выходящих за рамки школьной программы...

Если принять на веру справедливость предложения, то решение неравенства может завершить несложная

3. Проверка. В каждой из областей $D_1, \ldots, D_4$ произвольно выберем по одной точке, например, $A_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{8}\right) \in D_1$, $A_2(2; 0) \in D_2$, $A_3\left(\frac{1}{2}; -1\right) \in D_3$, $A_4(2; -3) \in D_4$ (проверьте, попадают ли эти точки в соответствующие области). Подставляя в неравенство (1) выбранные значения $(x; a)$, получим, что неравенство выполнено только в точках A_1 и A_4. Это означает, согласно *Предложению*, что неравенство выполнено во всех точках областей D_1 и D_4 и только в этих точках.

4. Как записать ответ. По традиции x обозначает неизвестную, a — параметр. Поэтому требуется указать, как меняется x в зависимости от значения параметра a. Выберем сначала произвольное $a < 0$. Множество точек на плоскости Oxa с фиксированным a образует горизонтальную прямую. Нужно выяснить, при каких значениях x точки этой прямой находятся в области D_4. Из рисунка 2 видно, что $x \in]x_1; x_2[$ («красные» границы в ответ не входят), где $x_1 = 1$, а точка $(x_2; a)$ лежит на параболе $a = x - x^2$. Отсюда $x_2^2 - x_2 + a = 0$ и $x_2 = (1 + \sqrt{1 - 4a})/2$ (подумайте, почему при радикале выбран знак «+»). Итак, если $a < 0$, то

$$x \in]1; (1 + \sqrt{1 - 4a})/2[.$$

При $a = 0$, как видно из рисунка 1, неравенство решений не имеет. Передвигая горизонтальную прямую выше, увидим (см. рис. 3), что если $a \in]0; 1/4]$, то $x \in]x_1; x_2[\cup]x_3; 1[$; если $a \in]1/4; 1[$, то $x \in]x_4; 1[$; если же $a \geqslant 1$, то неравенство решений не имеет. Выразим x_1, x_2, x_3, x_4 через a: $x_1 = a$,

$$x_2 = (1 - \sqrt{1 - 4a})/2,$$
$$x_3 = (1 + \sqrt{1 - 4a})/2,$$

$x_4 = a$. И соединив найденные формулы, получим

Ответ: Если $a \in]-\infty; 0[$, то $x \in]1; (1 + \sqrt{1 - 4a})/2[$; если $a = 0$, то $x \in \varnothing$; если $a \in]0; 1/4]$, то $x \in]a; (1 - \sqrt{1 - 4a})/2[\cup](1 + \sqrt{1 - 4a})/2; 1[$; если $a \in]1/4; 1[$, то $x \in]a; 1[$; если $a \in [1; +\infty[$, то $x \in \varnothing$.

Изложенное решение содержит серьезный изъян — ссылку на верное, но не доказанное предложение. По поводу такого решения экзаменатор сделает вывод: «Ответ верен, но не обоснован!» И задача абитуриенту зачтена не будет. Поэтому для полного решения задачи необходимо дополнительное

5. Обоснование. Неравенство (1) равносильно выполнению одной из двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x - a < x^2, \end{cases} \text{либо} \begin{cases} x > 1 \\ x - a > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ a > x - x^2, \end{cases} \text{либо} \begin{cases} x > 1, \\ a < x - x^2. \end{cases}$$

Первая из двух систем описывает множество на плоскости Oxa, лежащее в полосе между прямыми $x = 0$ и $x = 1$

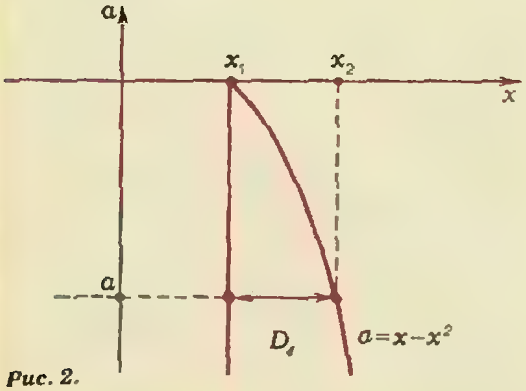


Рис. 2.

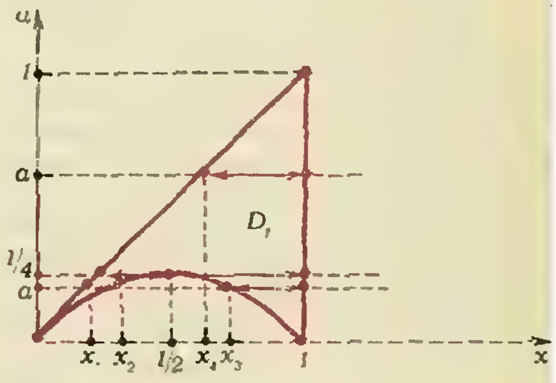


Рис. 3.

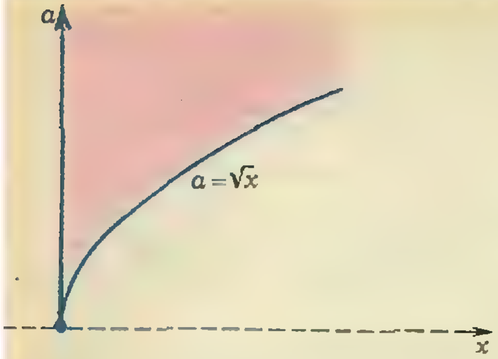


Рис. 4.

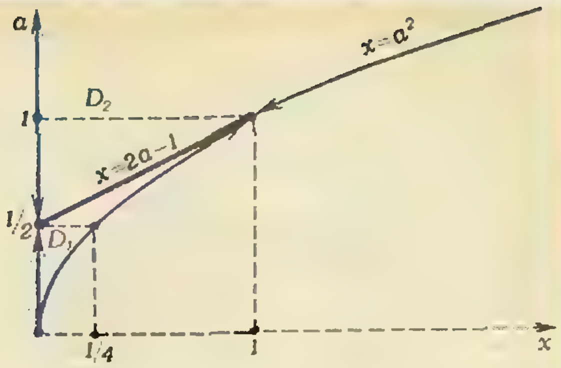


Рис. 5.

и одновременно — выше параболы $a=x-x^2$, т. е. (с учетом области определения) — в точности область D_1 (см. рис. 1). Аналогично вторая система описывает область, лежащую правее прямой $x=1$ и ниже параболы $a=x-x^2$ — область D_4. Найденный ранее ответ полностью обоснован.

Легко заметить, что п. 5 сделал излишней проведенную в п. 3 проверку. Однако отказываться от проверки неразумно: она проста, позволяет быстро получить ответ и, что самое главное, делает метод решения существенно более надежным.

При оформлении решения задачи лучше всего оставить сыгравшую свою роль проверку в черновике — она уже не нужна — и вписать на ее место выкладки из п. 5.

Пример 2 (ЛГУ, мат.-мех., 1966). *Решите неравенство*

$$\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}<\sqrt{2}. \qquad (2)$$

1. Найдем и изобразим на плоскости Oxa область определения:

$$x\geqslant 0,\ a+\sqrt{x}\geqslant 0,\ a-\sqrt{x}\geqslant 0.$$

Получается область, расположенная правее прямой $x=0$ и выше параболы $a=\sqrt{x}$, что и показано на рисунке 4 (входящие в область определения границы изображены синим цветом).

2. Решим соответствующее неравенству (2) уравнение

$$\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}=\sqrt{2}.$$

Так как обе части уравнения неотрицательны, то, возведя в квадрат, получим (с учетом области определения) равносильное уравнение:

$$2a+2\sqrt{a^2-x}=2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-x}=1-a \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2-x=1-2a+a^2, \\ 1-a\geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2a-1, \\ a\leqslant 1. \end{array}\right.$$

Теперь нужно совместить область определения (рис. 4) и найденную прямую $x=2a-1$ на одном чертеже. Несложно проверить, что эта прямая и парабола $a=\sqrt{x}$ имеют только одну общую точку (1; 1) (проверьте). Изобразив ту часть луча $x=2a-1$, $a\leqslant 1$, которая попадает в область определения, получим рисунок 5. Итак, область определения разбилась на две части D_1 и D_2. Точно так же, как в примере 1, каждая из этих областей может лишь целиком войти в ответ.

3. Проверка. Выберем точки $A_1\,(1/25;\ 1/4)\in D_1$, $A_2\,(1;\ 2)\in D_2$. Подставив в неравенство (2) координаты этих точек, получим, что неравенство выполнено только в точке A_1, а значит, — в области D_1 (и на «синей» части ее границы). Рассматривая пересечение области D_1 со всевозможными горизонтальными прямыми, получим

4. Ответ:
если $a\in\,]-\infty;\ 0[\,\cup[1;\ +\infty[$, то $x\in\varnothing$;
если $a\in[0;\ 1/2[$, то $x\in[0;\ a^2]$;
если $a\in[1/2;\ 1[$, то $x\in\,]2a-1;\ a^2]$.

Как и в примере 1, полученный ответ нуждается в обосновании.

5. Обоснование. Преобразуем неравенство (2):

$$\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}<\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a+2\sqrt{a^2-x}<2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2-x}<1-a \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1-a\geqslant 0, \\ a^2-x<1-2a+a^2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\leqslant 1, \\ x>2a-1. \end{array}\right.$$

Последняя система неравенств описывает область, лежащую ниже прямой $a=1$ и правее прямой $x=2a-1$, т. е. (с учетом области определения) область D_1. Ответ обоснован.

Пример 3 (МГУ, хим.-фак., 1984). *Найдите все а, при которых неравенство*

$$\frac{1}{2}|a-2||x+a-4|+$$

$$+\left(\frac{a^2-4a+3}{|a-2|}-|a-2|\right)|x-2|+$$

$$+\frac{1}{2}|a-2||x-a|\leqslant 1 \qquad (3)$$

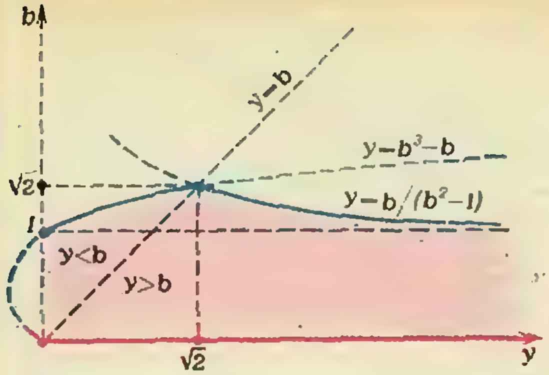


Рис. 6.

выполняется ровно для двух значений x.

Мы сделаем больше, чем требуется в задаче, — решим неравенство. Тогда, конечно, будет получен и ответ на поставленный вопрос.

1. Область определения: $a \neq 2$.

2. Преобразуем неравенство (3). Умножая обе части на $2|a-2|>0$ и учитывая равенство $|a-2|^2=(a-2)^2$, получаем

$$(a-2)^2|x+a-4|+2(a^2-4a+3-(a-2)^2|x-2|+(a-2)^2|x-a|\leqslant 2|a-2| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-2)^2|x-2+a-2|-2|x-2|+(a-2)^2|x-2-(a-2)|\leqslant 2|a-2|.$$

Теперь напрашивается замена

$$x-2=y,\ a-2=b\neq 0\ (a\neq 2),$$

приводящая последнее неравенство к виду

$$b^2(|y+b|+|y-b|)\leqslant 2(|b|+|y|). \qquad (4)$$

Итак, нам предстоит изобразить множество точек плоскости Oyb, координаты которых удовлетворяют неравенству (4). Заметим, что замена $(y;\ b)$ на $(y;\ -b)$ или $(-y;\ b)$ ничего не меняет в неравенстве (4) (проверьте). Это означает, что искомое множество обладает симметрией относительно обеих осей Oy и Ob. Поэтому достаточно нарисовать лишь расположенную в первой четверти часть искомого множества и затем воспользоваться симметрией. В первой четверти $|y|=y$, $|b|=b$, $|y+b|=y+b$, и неравенство (4) примет вид

$$b^2(y+b+|y-b|)\leqslant 2(b+y). \qquad (5)$$

Остается раскрыть $|y-b|$. В области $y\geqslant b$: $|y-b|=y-b$, и соответствующее неравенству (5) уравнение примет вид

$$2b^2y=2(b+y) \Leftrightarrow y=b/(b^2-1).$$

Теперь несложно нарисовать часть графика этой функции, расположенную в области $y\geqslant b$ (рис. 6). В области $y<b$: $|y-b|=b-y$, и соответствующее неравенству (5) уравнение примет вид

$$b^2\cdot 2b=2(b+y) \Leftrightarrow y=b^3-b.$$

Остается нарисовать часть графика последней функции, попадающую в область $y<b$ (см. рис. 6).

3. Проверка показывает, что из двух областей, на которые разбилась первая четверть, неравенству (5) удовлетворяет область, закрашенная на рисунке 6. Воспользовавшись симметрией, получим полную картину (рис. 7). Теперь из рисунка 7 видно, что только при $b=\pm\sqrt{2}$ неравенству (4) удовлетворяют ровно два различных значения y. И вернувшись к исходной переменной a, получим $a=b+2=2\pm\sqrt{2}$.

4. Ответ: $a=2\pm\sqrt{2}$.

5. Обоснование. Преобразуем неравенство (5) (рассматривается первая четверть $y\geqslant 0$, $b>0$):

$$b^2(y+b+|y-b|)\leqslant 2(b+y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b^2|y-b|\leqslant(2-b^2)(b+y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -(2-b^2)(b+y)\leqslant b^2(y-b)\leqslant(2-b^2)(b+y).$$

Эту систему неравенств несложно переписать в виде

$$\begin{cases} y\geqslant b^3-b, \\ y(b^2-1)\leqslant b. \end{cases}$$

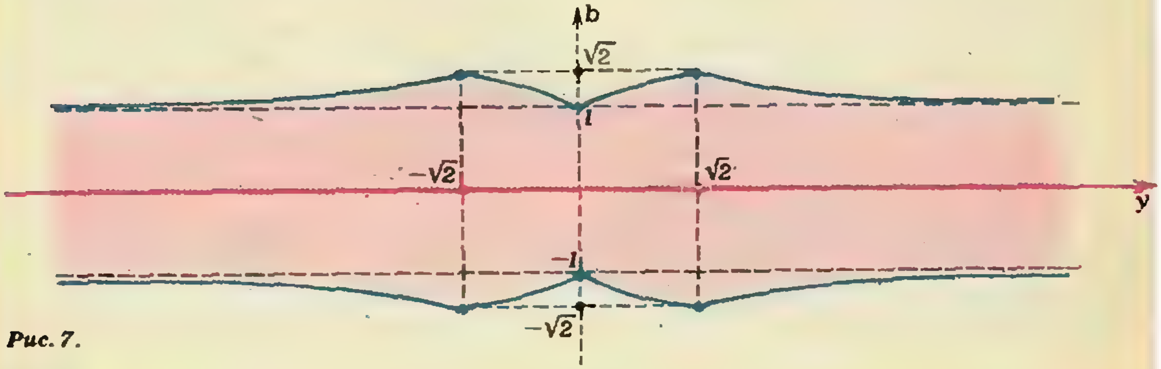


Рис. 7.

Если $0<b\leqslant 1$, то второе неравенство будет выполнено при любом y. Если же $b>1$, то $b^2-1>0$, и то же неравенство можно привести к виду $y\leqslant b/(b^2-1)$. Таким образом, полученная система неравенств распадается на две:

$$\begin{cases} y\geqslant b^3-b, \\ 0<b\leqslant 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y\geqslant b^3-b, \\ y\leqslant b/(b^2-1), \\ b>1. \end{cases}$$

Первая из двух систем описывает часть закрашенной на рисунке 6 области, расположенную ниже прямой $b=1$, а вторая — оставшуюся часть той же области. Ответ обоснован.

Изложенный метод решения позволяет быть уверенным: если удастся решить соответствующее неравенству уравнение, то и решение неравенства не вызовет затруднений.

Упражнения

Решите неравенства 1—4:

1 (ЛГУ, 1965). $x+4a>5\sqrt{ax}$.

2 (МИФИ, 1982). $2\log_4(x-a+1)+\log_{1/2}(x-3-2a)\geqslant 2$.

3 (ЛГУ, мат.-мех., 1980). $b\log_3 x+\log_{3x}3+b\geqslant 0$, $b<0$.

4 (ТашГУ, 1984). $a^{x+2}+8a^{x-1}-4/a>a-2$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

5 (МГУ, фил.-фак., 1984). При каких a система неравенств

$$y\geqslant x^2+2a,\quad x\geqslant y^2+2a$$

имеет единственное решение?

6 (МГУ, эконом. фак., 1977). При каких a неравенство

$$3-|x-a|>x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение?

7 (ЛГУ, хим. фак., 1984). Для каких a в множестве решений неравенства $x+\sqrt{x^2-2ax}>1$ содержится промежуток $[1/4;\ 1]$?

8 (ЛГУ, мат.-мех., 1979). При каких a любое решение неравенства $\dfrac{\log_3(x^2-3x+7)}{\log_3(3b+2)}<1$ будет также решением неравенства $x^2+(5-2a)x\leqslant 10a$?

9 (МГУ, мех.-мат., 1980). Найдите все a, при каждом из которых неравенство

$$\log_{1/a}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geqslant 0$$

имеет ровно одно решение.

Варианты вступительных экзаменов

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(*механико-математический и экономический факультеты*)

1. Решите уравнение

$$3\sin^2 x=\cos 2x+4\sin 2x.$$

2. Числа $\log_2(3^x-1)$, $\log_4(9+9^x-7\cdot 3^x)$ и $\log_2(3-3^x)$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите x.

3. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD и диагоналями BD и AC. Известно, что $AC=3$, $BD=4$, $\angle CAD=2\angle BDA$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax+3y=a^2+1, \\ (3a+14)x+(a+8)y=5a^2+5 \end{cases}$$

не имеет решений.

5. Точки M и N — соответственно середины ребер AC и SB правильного тетраэдра $SABC$. Ребра тетраэдра имеют длину 1. На прямых AS и CN выбраны точки P и Q так, что прямая PQ параллельна прямой BM. Найдите длину отрезка PQ.

Вариант 2

(*геолого-геофизический факультет и факультет естественных наук*)

1. Решите уравнение

$$2\cos 2x+5\cos^2 x=8\sin 2x-6.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2(2x-2)+\log_4(x+1)^2=2+\log_2(x^2+x-3).$$

3. Длина стороны BC треугольника ABC равна a, величина угла A равна α. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, C и O.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2ax+y=a^2-2a, \\ -10x+(a-6)y=10a-5a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

5. В правильном тетраэдре $SABC$ плоскость α проходит через вершины S, C и середину M ребра AB, плоскость β проходит через вершину B и точки K и L — середины ребер SA и SC соответственно. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Найдите величину угла между прямой l и плоскостью грани ABC.

Вариант 3

(*физический факультет*)

1. Решите уравнение

$$2\cos 2x+1=5\sin^2 x+6\cos x.$$

2. Найдите наибольшее значение функции $y=x^3-6x^2+6x+3$ на отрезке $[1;\ 6]$.

3. Окружности O_1 и O_2 радиусов 5 и 3 соответственно пересекаются в точках A и B, причем $AB=4$. Известно, что центр окружности O_2 лежит вне круга O_1. Точка C — середина дуги AB окружности O_2, лежащей в круге O_1. Лучи AC и BC пересекают окружность O_1 в точках M и N. Найдите длину отрезка MN.

4. Решите неравенство

$$\log_{x+1}\frac{3x}{5x-8}>1.$$

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($AB=BC=1$), длина боковых ребер SA, SB и SC равна 3. Точки K и L — середины ребер AC и BC, точки M и N выбраны соответственно на ребрах SA и SB так, что $SM=1$, $NB=1$. Найдите объем пирамиды $KLMN$.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

Ниже после текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

Вариант 1

1. Найдите подъемную силу аэростата, наполненного гелием. Масса гелия равна m. Давления и температуры внутри и вне оболочки аэростата одинаковы. Молярная масса гелия $M_г$, воздуха $M_в$, ускорение свободного падения g. Массой оболочки пренебречь. (80 %)

2. Елочное украшение — тонкостенный шарик — разбивается при падении на каменный пол с минимальной высоты h (рис. 1). С какой минимальной скоростью шарик должен налететь на такой же покоящийся до соударения шарик, чтобы шарики разбились? (49 %)

3. Найдите изображения точечного источника S, создаваемые системой из линзы с фокусным расстоянием F и конического зеркала с углом при вершине, равным 90° (рис. 2). Ось конуса совпадает с осью линзы. Расстояние между вершиной конуса и линзой $2F$, а между источником и линзой $3F/2$. (42 %)

4. Оцените, какую мощность развивает велосипедист на финише. (51 %)

5. Колбу с закипевшей водой снимают с плитки — кипение прекращается. Колбу плотно закрывают резиновой пробкой с продетым сквозь нее массивным медным стержнем — вода закипает. Объясните явление. (65 %)

Вариант 2

1. Два шарика одинакового радиуса R, — но один из алюминия, а другой деревянный, — соединенные длинной нитью, медленно тонут в воде, двигаясь с постоянной скоростью (рис. 3). Найдите силу сопротивления воды, действующую на каждый из шариков. Плотность алюминия ρ_1, дерева ρ_2, воды ρ_0. Ускорение свободного падения g. (61 %)

2. Пробирка длиной l, содержащая воздух и насыщенный водяной пар, касается открытым концом поверхности воды (рис. 4). Пробирку погружают в воду наполовину, при этом поверхность воды в пробирке оказывается на глубине a. Найдите давление насыщенного водяного пара. Температура постоянная, атмосферное давление p, плотность воды ρ, ускорение свободного падения g. (55 %)

3. Три одинаковые плоские металлические пластины A, B и C площадью S каждая расположены параллельно друг другу на расстояниях d_1 и d_2 (рис. 5). Пластины изолированы; на пластинах B и C находятся заряды $+q$ и $-q$, а пластина A не заряжена. Затем пластины A и C соединили через резистор, замкнув ключ K. Найдите количество теплоты, выделившееся в резисторе. (46 %)

4. Оцените, на каком расстоянии железнодорожные рельсы кажутся слившимися. (65 %)

5. Проводящее колесо может свободно вращаться вокруг своей оси, расположенной вертикально. Между центром колеса и его ободом создается постоянная разность потенциалов. Если к колесу поднести магнит, оно начинает вращаться. При смене полюса магнита направление вращения изменяется на противоположное. Объясните явление. (52 %)

Вариант 3

1. Вдоль главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=5$ см движутся навстречу друг другу два светлячка, находящиеся по разные стороны линзы. Скорость светлячков одна и та же и равна $v=2$ см/с. Через какое время первый светлячок встретится с изображением второго, если в начальный момент они находились на расстояниях $l_1=20$ см и $l_2=15$ см от линзы? (70 %)

2. Две стороны правильного треугольника образованы одинаковыми равномерно заряженными палочками. При этом в центре O треугольника потенциал равен φ_0, а напряженность электрического поля равна $\vec{E}_0$. Найдите потенциал, а также модуль и направление вектора напряженности, которые будут в точке O, если одну из палочек убрать. (63 %)

3. Два одинаковых упругих шарика A и B движутся навстречу друг другу со скоростями v и $2v$, причем прямые, проходящие через центры каждого из шариков в направлении их движения, касаются другого шарика (рис. 6). Найдите, под каким углом к первоначальному направлению будет двигаться шарик A после соударения. (38 %)

4. Оцените изменение давления в парной после того, как на раскаленные камни плеснули воду из ковша. (При оценке парную считать герметичной.) (58 %)

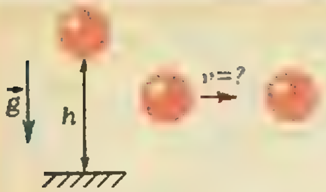


Рис. 1.

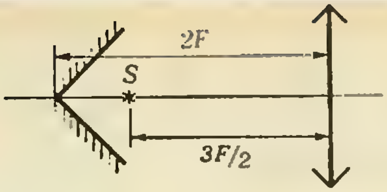


Рис. 2.

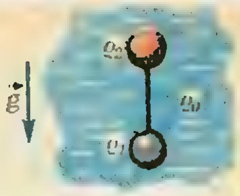


Рис. 3.

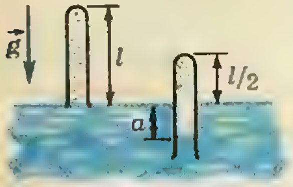


Рис. 4.

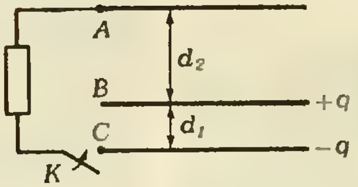


Рис. 5.

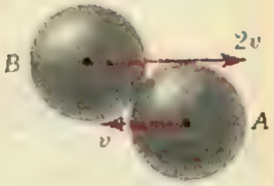


Рис. 6.

5. На наклонной плоскости находится брусок, к которому прикреплена нить, перекинутая через проволочную петлю. На нижнем конце нити закреплен грузик. Свободно висящий грузик не вызывает движения бруска. Если же грузик качнуть, то брусок начинает двигаться. Объясните явление. (71 %)

Публикацию подготовили
Г. В. Меледин, М. В. Фокин

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^3+x^2-2x}>x-1.$$

2. При каких $a\in R$ множества решений уравнений

$$4\cos^2 x=a^2-6 \quad \text{и} \quad 1-\cos 2x=\frac{a}{6}$$

совпадают?

3. Радиус сферы, описанной около прямого кругового конуса с вершиной P, равен R. Прямая, проведенная в плоскости основания конуса, пересекает диаметр AC окружности основания под углом φ $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$, а окружность — в точках B и D. Определите объем пирамиды $PABCD$, если известно, что угол в осевом сечении конуса при вершине P равен α, а треугольники APC и DPB равновелики.

4. Из точек A и B, расстояние между которыми равно 1 м, по прямой AB начинают одновременно двигаться два тела. Первое тело начинает движение с постоянной скоростью из точки A по направлению к точке B, а второе — в том же направлении с начальной скоростью 16 м/с и с некоторым постоянным ускорением. Известно, что через 1 с после начала движения второе тело находилось от точки A на расстоянии, не большем, чем 15 м, а еще через 1 с — не меньшем, чем 25 м. Определите скорость первого тела, если через 3 с после начала движения расстояние между телами составляло 2 м.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{2}{2+\log_2 x}+\frac{1}{\log_2 2x}\left(\frac{1}{2+\log_2 x}-1\right)\geqslant 0.$$

2. Три бригады, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за a дней. Если сначала будет работать в течение 2 дней одна первая бригада, а затем в течение 1 дня вторая и третья бригады, то выполненной окажется 1/3 этой работы. За какое время может выполнить всю работу одна первая бригада?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x-\cos y}=\cos x, \\ \sin x+\cos y=\sin^2 x. \end{cases}$$

4. Боковое ребро SA правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ имеет длину l и составляет с плоскостью основания угол величины α. В эту пирамиду вписана правильная четырехугольная призма так, что все вершины верхнего основания призмы лежат на боковых ребрах пирамиды, а все вершины нижнего — на основании $ABCD$ пирамиды. Найдите площадь основания призмы, если известно, что площадь полной поверхности этой призмы имеет наибольшее возможное значение.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Шарик массой $m=0{,}1$ кг закрепили на полу двумя одинаковыми пружинами жесткостью $k=15$ Н/м каждая (рис. 1). В исходном состоянии пружины не деформированы и имеют длину $l_0=40$ см. Шарик поднимают вертикально на высоту $h=30$ см и отпускают. Какой импульс передает шарик полу при абсолютно упругом ударе?

2. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска длиной $l=1{,}2$ м и массой $M=1{,}6$ кг (рис. 2). На край доски положили небольшое тело массой $m=0{,}4$ кг. Коэффициент трения между телом и доской $\mu=0{,}3$. С какой минимальной скоростью v_0 следует резко толкнуть доску вправо, чтобы тело соскользнуло с нее?

3. Цилиндрический сосуд расположен горизонтально и разделен на две части поршнем площадью $S=10$ см^2, прикрепленным к левому торцу сосуда пружиной жесткостью $k=2\cdot 10^3$ Н/м. Вначале в обеих частях сосуда находится воздух при атмосферном давлении $p_0=10^5$ Па, при этом пружина не деформирована и имеет длину $l_0=20$ см. Затем весь

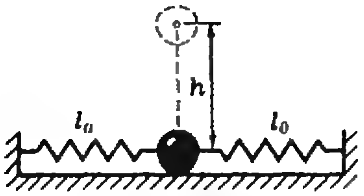


Рис. 1.

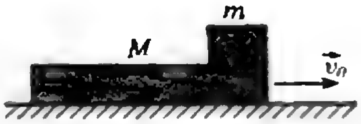


Рис. 2.

воздух из правой части сосуда откачивают. Найдите энергию, запасенную в пружине после откачки, если температура газа в левой части не изменилась.

4. Система из трех шариков, два из которых связаны с третьим изолирующими нитями одинаковой длины $l=3$ см, движется под действием силы $\bar{F}$, приложенной к шарику C (рис. 3). Массы всех трех шариков одинаковы, заряды шариков A и B одинаковы и равны $q=10^{-7}$ Кл, а шарик C не заряжен. Определите силу, при которой нити образуют угол $\alpha=60°$. Действие поля тяжести не учитывать.

5. К проводникам AB и CD одинакового сопротивления $R=2,5$ Ом подключены два источника тока (рис. 4). ЭДС и внутренние сопротивления источников: $\mathscr{E}_1=1,5$ В, $\mathscr{E}_2=2,0$ В, $r_2=1,6$ Ом. Найдите показания высокоомного вольтметра, включенного между средними точками проводников.

6. Тонкая пружинка жесткостью $k=20$ Н/м закреплена в недеформированном состоянии в точках A и C, расстояние между которыми $l_0=20$ см, и помещена во внешнее магнитное поле с индукцией $B=0,80$ Тл (рис. 5). При пропускании по пружинке тока она приобретает форму дуги окружности радиуса $R=30$ см. Найдите силу тока I.

7. Электрическая цепь содержит источник тока, амперметр, резисторы с сопротивлениями $R_1=2,5$ Ом и $R_2=7,5$ Ом, катушку индуктивности с пренебрежимо малым активным сопротивлением (рис. 6). Сразу после замыкания ключа K через амперметр течет ток $I_1=0,20$ А, а после установления постоянного значения тока в катушке амперметр показывает ток $I_2=0,40$ А. Найдите внутреннее сопротивление и ЭДС источника тока.

8. Контур с источником тока, ЭДС которого $\mathscr{E}=0,4$ В и внутреннее сопротивление $r=0,2$ Ом, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B=0,1$ Тл. Вектор $\bar{B}$ перпендикулярен к плоскости контура и направлен так, как показано на рисунке 7. Найдите тепловую мощность, выделяемую в проводнике AC при его движении вправо с постоянной скоростью $v=10$ м/с. Длина проводника $l=10$ см, его сопротивление $R=0,1$ Ом, сопротивление остальных проводников пренебрежимо мало.

9. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C, который представляет собой три металлические пластины, каждая площадью $S=1$ см^2, разделенных диэлектриком ($\varepsilon=4$) толщиной $d=1$ мм. Пластины конденсатора подключены так, как показано на рисунке 8. На сколько нужно изменить индуктивность, чтобы перенастроить контур с длины волны $\lambda_1=25$ м на длину волны $\lambda_2=31$ м?

10. Стальной шарик падает без начальной скорости с высоты $h=0,8$ м на собирающую линзу и разбивает ее. В начальный момент расстояние от шарика до линзы равнялось расстоянию от линзы до действительного изображения шарика. Сколько времени существовало мнимое изображение шарика?

Публикацию подготовили
В. И. Архипов, А. И. Руденко, В. Е. Чижов,
Н. В. Шолохов

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант письменного экзамена

1. Упростите до числового значения

$$\left(\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}-\frac{2}{1-a}\right):\frac{a^2+a+2}{a^3-1}.$$

2. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{8+2x^2-x^4}{x^2+2x+1}}.$$

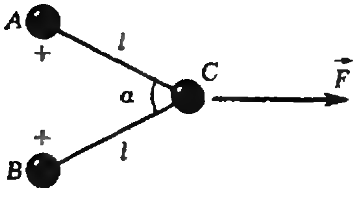


Рис. 3.

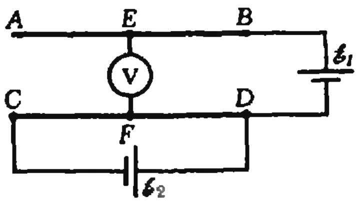


Рис. 4.

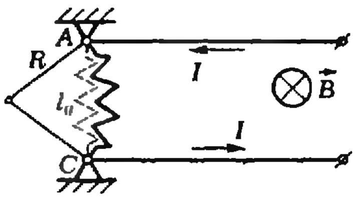


Рис. 5.

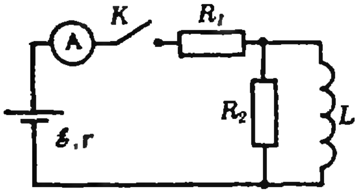


Рис. 6.

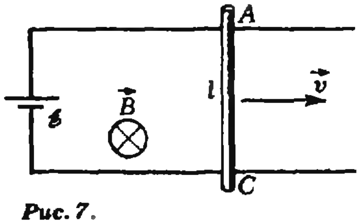


Рис. 7.

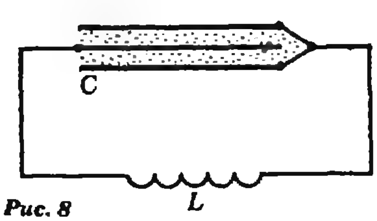


Рис. 8

В ответе запишите количество целых чисел, входящих в область определения.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x}-1=\frac{2x+4}{x-4}.$$

В ответе запишите меньший корень уравнения.

4. Сплав из цинка и меди содержал на 1280 г меди больше, чем цинка. После того, как из сплава удалили 60 % цинка и 30 % меди, его масса стала равной 1512 г. Какова была первоначальная масса сплава (в граммах)?

5. Решите уравнение

$$2\sqrt[x]{256}-\sqrt[x]{3^{2x}\cdot 16}+4=0.$$

В ответе запишите сумму корней этого уравнения.

6. Решите неравенство

$$\log_{1/2}\log_5(x-3)>0.$$

В ответе запишите сумму целых решений этого неравенства.

7. При каком наименьшем значении параметра k график функции

$$y=(k-1)x^2+2kx+3k-2$$

касается оси абсцисс?

8. Исследуйте функцию $y=4x^3+6x^2-24x-20$ на экстремум. В ответе запишите значение функции в точке максимума.

9. Упростите выражение до числового значения

$$\frac{1-\cos 4\alpha}{(\cos 2\alpha)^{-2}-1}+\frac{1+\cos 4\alpha}{(\sin 2\alpha)^{-2}-1}.$$

10. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x-2\cos x=0.$$

В ответе запишите решение (в градусах), удовлетворяющее условию $90°<x<180°$.

11. Около окружности с диаметром, равным 20, описана равнобочная трапеция, длина боковой стороны которой равна 25. Найдите площадь трапеции.

12. Основанием четырехугольной пирамиды является ромб с длиной стороны 6 и острым углом 60°. Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей ромба. Найдите объем пирамиды, если ребро, проведенное к тупому углу ромба, образует с плоскостью основания угол 60°.

Физика

Вариант письменного экзамена

1. Вычислите, во сколько раз сила давления тела на горизонтальную плоскость больше силы его давления на наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha=60°$ с горизонтом.

2. На какую высоту над поверхностью Земли нужно поднять тело, чтобы его сила тяжести уменьшилась в два раза? Радиус Земли принять равным $R_З=6400$ км.

3. В первом сосуде объемом $V_1=7$ л газ находится под давлением $p_1=50$ кПа, а во втором объемом $V_2=15$ л — под давлением $p_2=100$ кПа. Температура газа в сосудах одинаковая. Какое давление (в кПа) установится в сосудах после их соединения? Считать, что процесс протекает изотермически.

4. В неподвижном лифте висит маятник, период колебаний которого $T=2$ с. Лифт начал опускаться вниз с ускорением $a=2$ м/с^2. Чему будет равен период колебаний маятника в ускоренно движущемся лифте?

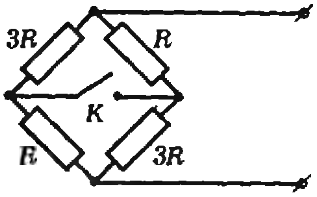


Рис. 1.

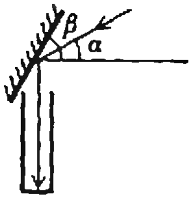


Рис. 2.

5. Стальной лом массой $m=5$ т расплавляется в электропечи. Определите расход электроэнергии (в кВт · ч), если КПД печи $\eta=62$ %. Начальная температура лома $t_1=16$ °С, температура плавления $t_2=1300$ °С, удельная теплоемкость $c=0{,}46$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления стали $\lambda=82$ кДж/кг.

6. Из комнаты в течение суток теряется $Q=8{,}7\cdot 10^7$ Дж тепла. Какой длины надо взять нихромовую проволоку диаметром $d=10^{-3}$ м для намотки электрической печи, поддерживающей постоянную температуру в комнате? Печь включается в сеть с напряжением $U=120$ В. Удельное сопротивление нихрома $\rho=1{,}1\cdot 10^{-6}$ Ом · м.

7. В медном сосуде массой $m_1=2$ кг нагревается $m_2=0{,}8$ кг олова от $t_1=22$ °С до $t_2=232$ °С. Какое количество теплоты потребуется для этого, если считать начальную и конечную температуру сосуда и олова одинаковыми? Удельная теплоемкость меди $c_1=395$ Дж/(кг · К), олова $c_2=230$ Дж/(кг · К).

8. При замкнутом ключе K сопротивление группы резисторов, соединенных, как показано на рисунке 1, равно $R_1=30$ Ом. Вычислите сопротивление этой группы резисторов при разомкнутом ключе K.

9. Под каким углом β к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы осветить дно колодца отраженными от него солнечными лучами, в то время как свет падает под углом $\alpha=30°$ к горизонту (рис. 2)?

10. Батарея гальванических элементов с ЭДС $\mathscr{E}=15$ В и внутренним сопротивлением $r=5$ Ом замкнута проводником, имеющим сопротивление $R=10$ Ом. К полюсам батареи подключен конденсатор емкостью $C=1$ мкФ. Определите величину заряда на обкладках конденсатора.

11. Максимальная кинетическая энергия электронов, вылетающих из металла при освещении его ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda=0{,}225$ мкм равна $E=4{,}54\cdot 10^{-19}$ Дж. Определите работу выхода электронов из металла (в эВ). Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c=3\cdot 10^8$ м/с.

12. Колебательный контур, состоящий из воздушного плоского конденсатора с площадью пластин $S=10^{-2}$ м^2 и катушки с индуктивностью $L=10^{-6}$ Гн, резонирует на электромагнитную волну с длиной $\lambda=10$ м. Определите расстояние между пластинами конденсатора. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\times10^{-12}$ Ф/м, скорость света в вакууме $c=3\cdot 10^8$ м/с.

Публикацию подготовили
В. А. Карасев, В. И. Марченко

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{7x^2+8x+10}-\sqrt{7x^2-8x+10}=2x.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 8x-2\sin 2x\sin(2x-\pi/2)=1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_x 2\leqslant\log_{\sqrt{x+2}}2.$$

4. В треугольнике ABC на стороне взята точка P, через которую провели две прямые, параллельные сторонам треугольника. Радиусы окружностей, описанных около получившихся двух новых треугольников (с общей вершиной P), равны R_1 и R_2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

5. Расстояние между населенными пунктами A и B составляет 36 км. Из A в B идет пешеход со скоростью 6 км/ч. Одновременно из B в сторону A выезжает велосипедист, максимальная скорость движения которого 15 км/ч, а минимальная — 10 км/ч. После встречи с пешеходом велосипедист еще 20 минут ехал в сторону A, затем повернул и возвратился в B. Найдите минимальную разницу во времени прибытия в B пешехода и велосипедиста.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{10x^2+8x+7}+\sqrt{10x^2-8x+7}=8x.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 6x+4\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{3}{2}x\right)\sin\frac{3}{2}x=1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_x 3\leqslant\log_{2x+3}9.$$

4. Через точку P, взятую внутри треугольника ABC, провели три прямые, каждая из которых параллельна стороне треугольника. Площади получившихся трех треугольников (с общей вершиной P) равны S_1, S_2 и S_3. Найдите площадь треугольника ABC.

5. Расстояние между населенными пунктами A и B составляет 220 км. Из B в сторону A выезжает автомобиль, который движется со скоростью 60 км/ч. Одновременно из A в B выезжает автобус, минимальная скорость движения которого 40 км/ч, а максимальная — 50 км/ч. После встречи автомобиль еще 20 минут двигался в сторону A, затем повернул и возвратился в B. Найдите максимальную разницу во времени прибытия в B автобуса и автомобиля.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Под каким углом к горизонту нужно бросить тело, чтобы максимальная высота его подъема была в три раза больше дальности полета?

2. На одном из концов плавающей доски сидит лягушка. С какой минимальной скоростью должна прыгнуть лягушка, чтобы попасть точно на другой конец доски? Масса доски M, масса лягушки m, длина доски l.

3. Тело массой m_1, движущееся со скоростью v, налетает на покоящееся тело и после упругого удара отскакивает от него со скоростью $v/2$, направленной под углом 90° к первоначальному направлению движения. Определите массу покоящегося тела.

4. Легкая пружинка жесткостью k и длиной l стоит вертикально на столе. С высоты h над столом на нее падает небольшой шарик массой m. Какую максимальную скорость будет иметь шарик при своем движении вниз?

5. Ядро распадается на два осколка массами $m_1=3\cdot10^{-25}$ кг и $m_2=10^{-25}$ кг. Определите скорости осколков ядра, если их суммарная кинетическая энергия $W=6\cdot10^{-11}$ Дж. До распада ядро покоилось.

6. В сообщающиеся сосуды с ртутью долили: в один сосуд столб масла высотой $h_м=30$ см, в другой столб воды высотой $h_в=20$ см. Определите разность уровней ртути в сосудах. Плотность ртути $\rho_р=13{,}6\times10^3$ кг/м³, масла $\rho_м=0{,}9\cdot10^3$ кг/м³, воды $\rho_в=10^3$ кг/м³.

7. Мощность, выделяющаяся на резисторах сопротивлением $R_1=10$ Ом и $R_2=3$ Ом, при последовательном и при параллельном соединениях этих резисторов одинакова. Найдите внутреннее сопротивление источника, к которому подключены резисторы.

8. Квадратная рамка с током $I=5$А может свободно вращаться вокруг горизонтально расположенной стороны. При включении вертикального магнитного поля рамка отклонилась на угол $\alpha=30°$. Найдите величину магнитной индукции, если плотность материала, из которого сделана рамка, $\rho=8{,}6\cdot10^3$ кг/м³, а сечение провода $S=2$ мм².

9. Проволочный контур, имеющий форму равностороннего треугольника со стороной $a=20$ см, помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B=1$ Тл так, что плоскость контура составляет угол $\alpha=30°$ с направлением поля. В некоторый момент времени магнитная индукция начинает равномерно уменьшаться и через промежуток времени Δt спадает до нуля. Определите этот промежуток времени, если известно, что в контуре возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}=100$ В.

10. На главной оптической оси собирающей линзы на расстояниях $d_1=20$ см и $d_2=40$ см от нее находятся два точечных источника света. Найдите фокусное расстояние линзы, если изображения этих источников оказываются в одной и той же точке.

Публикацию подготовили

В. В. Варфоломеев, М. Н. Данилычева, И. М. Матусевич

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 18)

Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и книгами серии «Библиотечка «Квант» за активное участие в конкурсе:

По математике

Р. БЕЗРУКАВНИКОВ — Калуга, с. ш. № 24, 7 кл.
И. БЕЛОЗЕРОВ — Серпухов, машиностроительный техникум, III курс.
В. ВОЛОГОДСКИЙ — Омск, с. ш. № 91, 9 кл.
А. ГОРОХОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 79, 9 кл.
И. ДЫННИКОВ — Жуковский, с. ш. № 1, 10 кл.
Д. ЗАЙЦЕВ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Б. КРУГЛИКОВ — Харьков, с. ш. № 149, 10 кл.
А. МЕЛЬЦЕР — ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
О. НИЦ — Одесса, с. ш. № 100, 10 кл.
В. РАГУЛИН — Челябинск, с. ш. № 127, 8 кл.
С. СМИРНОВ — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
К. СТЫРКАС — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
Ю. ШАМРУК — ФМШ № 18 при МГУ, 9 кл.

По физике

С. БЕЛОВОЛОВ — ФМШ № 165 при НГУ, 10 кл.
С. БЕЛОУСОВ — ФМШ № 45 при ЛГУ, 9 кл.
С. БОБЫЛЕВ — Березники, с. ш. № 3, 10 кл.
А. БРЕЖЕСТОВСКИЙ — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
Д. БУДЬКО — Белгород, с. ш. № 3, 10 кл.
А. ГОЛЬДИН — ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
Д. ЖИЛЬЦОВ — Краматорск, с. ш. № 35, 10 кл.
Д. ИГИЛЬМАНОВА — Целиноград, с. ш. № 15, 10 кл.
С. КАНАТОВ — Кузнецовск, с. ш. № 1, 10 кл.
С. КАРДАШ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Д. КОНЦЕВОЙ — Могилев, с. ш. № 5, 10 кл.
А. НЕДАЧИН — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Д. НОГОТКОВ — Алма-Ата, РОФМШИ, 9 кл.
А. РОЗЕНБЕРГ — Уфа, с. ш. № 91, 10 кл.
Е. РОЗНОЩИК — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Р. САГАЙДАК — с. Матусов Черкасской обл., с. ш. № 1, 9 кл.
Т. СОКОЛОВСКАЯ — Целиноград, с. ш. № 15, 10 кл.
В. СУКЛИЯН — Одесса, с. ш. № 100, 9 кл.
В. ТЯГНИРЯДНО — Минск, с. ш. № 23, 10 кл.
М. ЧЕКУШИНА — Алма-Ата, с. ш. № 7, 10 кл.
О. ЮСУХНО — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.

Ответы, указания, решения

Старый алгоритм

137; 156; 189; 482; 493; 10,21; 43,21; 2,647; 3,162.

Неравенства с параметром

1. $a \in]-\infty; 0[$, $x \in \varnothing$; $a=0$, $x \in]0; +\infty[$; $a \in]0; +\infty[$, $x \in]0; a[\cup]16a; +\infty[$.

2. $a \in]-\infty; -4]$, $x \in \varnothing$; $a \in]-4; +\infty[$, $x \in [2a+3; (7a+13)/3[$.

3. $x \in]0; 3^{-1-\sqrt{[illegible]}}[\cup]\frac{1}{3}; 3^{-1+\sqrt{[illegible]}}[$.

4. $a \in]0; 1[$, $x \in]-\infty; -\log_a(a+2)[$; $a \in]1; +\infty[$, $x \in]-\log_a(a+2); +\infty[$.

5. $a=\sqrt{2}$.

6. $a \in]-13/4; 3[$.

7. $a<-1$.

8. $a \in [5/2; +\infty[$.

9. $a=2$.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $x_1=\operatorname{arctg}\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+n\pi$, $x_2=\operatorname{arctg}\left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+m\pi$ $(n, m \in \mathbf{Z})$.

2. $1-\log_3 2$.

3. $\frac{14\sqrt{5}}{9}$. Указание. Пусть $\angle BDA=\alpha$, $\angle CAD=2\alpha$. Возьмем на прямой AD точку K так, чтобы было $CK \parallel BD$. По теореме синусов для треугольника ACK: $\frac{CK}{\sin 2\alpha}=\frac{AC}{\sin \alpha}$, откуда $\cos \alpha=\frac{2}{3}$. Далее остается заметить, что площади трапеции $ABCD$ и треугольника ACK равны, а $\angle ACK=\pi-3\alpha$.

4. $a=-6$. Указание. Каждое из уравнений системы задает прямую на плоскости xOy. Условие параллельности прямых дает уравнение $a^2-a-42=0$ для определения a. Один из его корней, $a=7$, не удовлетворяет условию, так как прямые в этом случае совпадут.

5. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Указание. Рассмотрим плоскость α, проходящую через точки C, P и Q. Поскольку прямые BM и PQ параллельны, линия пересечения плоскостей SMB и α параллельна BM (и проходит через точку N). Отсюда эта линия — прямая NK, где K — середина SM. Используя подобие треугольников PQC и KNC, докажите, что $PQ=\frac{4}{3}KN$.

Вариант 2

1. $x_1=\operatorname{arctg}\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+n\pi$, $x_2=\operatorname{arctg}\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+m\pi$ $(n, m \in \mathbf{Z})$.

2. $\sqrt{6}-1$.

3. $\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Указание. Покажите, что величина угла BOC равна $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)$, и воспользуйтесь теоремой синусов для треугольника BOC.

4. $a=5$.

5. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{5}$. Указание. Прямая l проходит через данную точку L и пересекает плоскость ABC в точке N, лежащей на луче

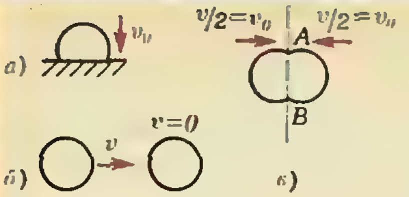


Рис. 1.

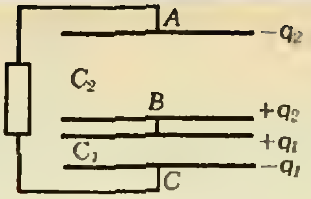


Рис. 2.

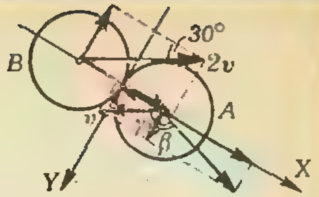


Рис. 3.

CM и такой, что $MN=CM$ (докажите это). Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки L на плоскость ABC (P лежит на отрезке CM). Острый угол N прямоугольного треугольника LNP — искомый.

Вариант 3

1. $x\pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{3}+2k\pi,\ k\in Z.$

2. $y_{\max}=y(6)=39.$

3. $\frac{4}{3}(\sqrt{5}+\sqrt{21})$. **Указание.** Пусть K — точка пересечения хорды AB и прямой O_1O_2, 2γ — величина угла MO_1N, β и α — соответственно углы CAB и BO_1K. Покажите, что $\gamma=\pi-\alpha-2\beta$. Определяя $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ из треугольников O_1BK и ACK, вычислите $MN=2R_1\sin\gamma$.

4. $\left]-\frac{4}{5};\ 0\right[\cup\left]\frac{8}{5};\ 2\right[$. **Указание.** При $x>0$ данное неравенство эквивалентно неравенству $\frac{3x}{5x-8}>x+1$, при $x\in]-1;\ 0[$ — системе неравенств $0<\frac{3x}{5x-8}<x+1$.

5. $\frac{\sqrt{34}}{144}$. **Указание.** Пусть N_1 — точка на ребре SA такая, что $AN_1=1$. Докажите, что объемы пирамид $KLMN$ и $KLMN_1$ равны; сравнивая площади треугольников MN_1K и SAC и соответствующие высоты, докажите, что объем пирамиды $KLMN_1$ составляет $\frac{1}{12}$ объема данной пирамиды $SABC$.

Физика

Вариант 1

1. $F=mg(\mathrm{M}_{\text{в}}/\mathrm{M}_{\text{г}}-1)$.

2. Скорость шарика при ударе о пол $v_0=\sqrt{2gh}$ (рис. 1). Пусть искомая скорость шарика равна v. Перейдем в систему центра масс шариков, где они движутся навстречу друг другу со скоростями $v/2$. Роль непроницаемого каменного пола при их ударе сыграет плоскость симметрии AB. Таким образом, ясно: чтобы шарик разбился, нужно, чтобы $v/2=v_0=\sqrt{2gh}$. Отсюда $v=2\sqrt{2gh}$.

3. Изображение точки в коническом зеркале — кольцо радиусом $R=F/2$, на расстоянии $f_1=2F$ от линзы. Изображение этого кольца в линзе дает точечное изображение в зеркале, находящееся на расстоянии $F/2$ слева от вершины зеркала, и получается на расстоянии $f_2=5F/3$ от линзы. Изображение точки в линзе без участия зеркала — точка на расстоянии $f_3=3F$ от линзы.

4. Пусть скорость велосипедиста на финише равна v, а сила сопротивления воздуха $F\sim\rho v^2S$, где ρ — плотность воздуха, а S — эффективная площадь велосипедиста, которая встречает набегающий поток воздуха. Тогда мощность $N\sim Fv\sim\rho v^3S$. Положив $\rho\sim1$ кг/м^3, $v\approx60$ км/ч≈16 м/с, $S\approx0{,}5$ м^2, получаем $N\sim2$ кВт.

5. При внесении в колбу холодного стержня на нем происходит конденсация пара. Масса и температура пара уменьшаются, что приводит к уменьшению давления в закрытой колбе. При этом температура кипения воды также понижается. В результате уже слегка остывшая вода снова начинает кипеть.

Вариант 2

1. $F=\frac{2}{3}\pi R^3(\rho_1+\rho_2-2\rho_0)g.$

2. Давление $p_{\text{н}}$ насыщенных паров воды при наличии воды остается неизменным:

$$p_{\text{н}}=p-\rho ga\,\frac{l+2a}{l-2a}.$$

3. После замыкания ключа получается эквивалентная схема, изображенная на рисунке 2. Начальная энергия $W_{\text{нач}}=q^2/(2C_1)$, конечная $W_{\text{кон}}=q_1^2/(2C_1)+q_2^2/(2C_2)$, где $C_1=\varepsilon_0S/d_1$, $C_2=\varepsilon_0S/d_2$, $C_2/C_1=d_1/d_2$. Согласно закону сохранения заряда, $q_1+q_2=q$. Из равенства разностей потенциалов между пластинами A и B и C и B следует: $q_1/C_1=q_2/C_2$, откуда $q_1=q/(1+d_1/d_2)$ и $q_2=q/(1+d_2/d_1)$. Из закона сохранения энергии выделившееся количество теплоты

$$Q=W_{\text{нач}}-W_{\text{кон}}=\frac{q^2d_1^2}{2\varepsilon_0(d_1+d_2)S}.$$

4. См. решение задачи Ф1042, которое будет опубликовано позже.

5. Взаимодействие радиального тока и перпендикулярного плоскости колеса магнитного поля создает момент силы Ампера, который и вызывает вращение колеса. При смене полюса магнита направления силы, момента силы и вращения сменяются на противоположные.

Вариант 3

1. $t=(l_1+l_2-2F-\sqrt{(l_1-l_2)^2+4F^2})/(2v)\approx3{,}5$ с.

2. Из соображений симметрии каждая из двух палочек в точке O создает одинаковый потенциал φ и одинаковую по модулю напряженность $\vec{E}$, направленную перпендикулярно палочке. Используя принцип суперпозиции, получаем $\varphi=\varphi_0/2$, $E=E_0$, направление вектора $\vec{E}$ перпендикулярно оставшейся палочке. (Возможно красивое решение с добавлением третьей палочки, создающей полный правильный треугольник с $E=0$ в центре.)

3. Проведем ось X через центры шаров, а ось Y через точку их соприкосновения по касательной (рис. 3). Из-за гладкости шаров y-составляющие скоростей шаров после удара не изменяются, следовательно,

$$v_{Ay}=v_{A0y}=v\sin30^\circ=v/2.$$

Из-за упругости удара и равенства масс шары после удара обменяются x-составляющими скоростей, т. е.

$$v_{Ax}=v_{B0x}=2v\cos 30^\circ=v\sqrt{3}.$$

Отсюда искомый угол

$$\gamma=\pi/3+\operatorname{arctg}(v_{Ax}/v_{Ay})\approx 134^\circ.$$

4. См. решение задачи Ф1024 в этом номере журнала.

5. См. решение задачи Ф1038, которое будет опубликовано позже.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 1

1. $[-2;\,0]\cup\,]1;\,+\infty[$. Указание. Неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^3+x^2-2x\geqslant 0,\\ x<1,\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases} x\geqslant 1,\\ x^3+x^2-2x>(x-1)^2.\end{cases}$$

2. $a\in\,]-\infty;\,-\sqrt{10}[\,\cup\,]-\sqrt{6};\,0[\,\cup\{3\}\cup\,]12;\,+\infty[$. Указание. Данные уравнения приводятся к виду $\cos 2x=\frac{a^2-8}{2}$; $\cos 2x=\frac{6-a}{6}$. Эти уравнения эквивалентны тогда и только тогда, когда либо $\frac{a^2-8}{2}=\frac{6-a}{6}$, либо $\left|\frac{a^2-8}{2}\right|>1$ и $\left|\frac{6-a}{6}\right|>1$.

3. $V=\frac{4}{3}R^3\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$ при $\alpha\in\,]0;\,\frac{\pi}{2}]$; $V_1=\frac{4}{3}R^3\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$ и $V_2=\frac{8}{3}R^3\times$ $\times\sin\alpha\cos^4\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$ при $\alpha\in\,]\frac{\pi}{2};\,\pi[$. Указание. Пусть O_1 — центр сферы, описанной около конуса, O — центр основания, PE — высота треугольника PBD, H — высота PO конуса, r — радиус окружности основания, $BD=x$, $PE=y$. Тогда $r=R\sin\alpha$, $H=R(1+\cos\alpha)=$ $=2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Объем пирамиды $PABCD$ равен $V=\frac{H}{6}\cdot AC\cdot BD\sin\varphi$. Из того, что треугольники APC и DPB равновелики, следует, что $\frac{1}{2}xy=rH$. Кроме того $\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=$ $=r^2+H^2$, откуда $x_1=2r$, $y_1=H$; $x_2=2H$, $y_2=r$. Из того, что $x=BD$ удовлетворяет неравенству $0<x\leqslant 2r$, следует, что при $\alpha\in\,]0;\,\frac{\pi}{2}]$ существует только одна пирамида, удовлетворяющая условию, а при $\alpha\in\,]\frac{\pi}{2};\,\pi[$ — две.

4. 11 м/с; 29/3 м/с. Указание. Пусть $v>0$ — скорость первого тела, a — ускорение второго тела. В момент времени t расстояние между первым и вторым телами равно $S=$ $=\left|tv-1-16t-\frac{at^2}{2}\right|$, а расстояние от второго тела до точки A равно

$$S_2=\left|1+16t+\frac{at^2}{2}\right|.$$

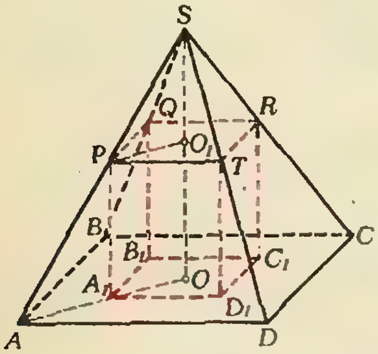


Рис. 4.

Из условия задачи следует, что

$$\begin{cases}\left|17+\frac{a}{2}\right|\leqslant 15,\\ |33+2a|\geqslant 25,\\ \left|3v-49-\frac{9}{2}a\right|=2.\end{cases}$$

Откуда $a\in[-64;\,-29]\cup\{-4\}$. Если $a\in[-64;$ $-29]$, то $v<0$ (противоречие!). Если $a=-4$, то либо $v=11$ м/с, либо $v=29/3$ м/с.

Вариант 2

1. $]1/4;\,1/2[\,\cup\,]1/2;\,+\infty[$. Указание. Выполните замену $y=\log_2 x$ и примените метод интервалов.

2. $3a/(a-3)$ дней при $a\in\,]3;\,6[$. Указание. Если x и y производительности первой бригады и второй и третьей бригад вместе соответственно, а av — работа, то

$$\begin{cases} a(x+y)=v,\\ 2x+y=\frac{1}{3}v,\\ x>0,\ y>0.\end{cases}$$

3. $\{(\pi/6+2\pi k;\ \pm\arccos(-1/4)+2\pi l)\}$, $k,l\in\mathbb{Z}$.

4. $\frac{l^2\sin^2\alpha}{(\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha-1)^2}$ при $\alpha\in\,]\operatorname{arctg}\sqrt{2};\,\pi/2[$. При других α — решений нет.

Пусть квадраты $A_1B_1C_1D_1$ и $PQRT$ — соответственно нижнее и верхнее основания призмы, а O и O_1 — центры этих квадратов. Поскольку по условию вписанная призма $A_1B_1C_1D_1PQRT$ — правильная, точка O является центром квадрата $ABCD$. Пусть $A_1B_1=x$, $A_1P=y$ (рис. 4). Тогда площадь полной поверхности призмы равна $S_п=2x^2+4xy$. Далее, $AO=l\cos\alpha$, $A_1O=$ $=\frac{x\sqrt{2}}{2}$, и $y=l\sin\alpha-\frac{x\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Отсюда

$$S_п=f(x)=2x^2(1-\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha)+4x\cdot l\cdot\sin\alpha,\quad (*)$$

причем $x\in\,]0;\,l\sqrt{2}\cos\alpha[$. Исследуем $f(x)$ на экстремум на отрезке $[0;\,l\sqrt{2}\cos\alpha]$. Если коэффициент при x^2 в выражении $(*)$ неотрицателен, то $f(x)$ возрастает на отрезке $[0;\,l\sqrt{2}\cos\alpha]$ и, следовательно, достигает максимума при $x=$ $=AD=l\sqrt{2}\cos\alpha$, но в этом случае высота призмы обращается в нуль. Таким образом, при $0\leqslant\operatorname{tg}\alpha\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$ призмы, удовлетворяющей условиям задачи, не существует. Если $\operatorname{tg}\alpha>1/\sqrt{2}$, наша функция f достигает максимума при $x_0=\frac{l\sin\alpha}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha-1}$, причем $x_0\in\,]0;\,l\sqrt{2}\cos\alpha[$ только при $\operatorname{tg}\alpha>\sqrt{2}$.

Искомая площадь основания вписанной призмы при этом равна $S_0=x_0^2$.

Физика

1. При абсолютно упругом ударе шарик передает полу импульс $\Delta P=2mv$, где v — скорость шарика перед ударом. Эту скорость найдем, воспользовавшись законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=mgh+2\frac{k(\Delta l)^2}{2}.$$

где $\Delta l=\sqrt{l_0^2+h^2}-l_0$ — удлинение каждой из пружин, когда шарик поднят на высоту h. Подставляя найденную скорость в выражение для переданного импульса, получаем

$$\Delta P=2m\sqrt{2gh+2k\left(\sqrt{l_0^2+h^2}-l_0\right)^2/m}=0{,}6\ \text{кг}\cdot\text{м/с}$$

2. Во время проскальзывания относительно доски на тело действует сила трения $F_{\text{тр }1}=\mu mg$, которая сообщает ему ускорение

$$a_1=F_{\text{тр }1}/m=\mu g.$$

В это время на доску действует сила трения $\vec{F}_{\text{тр }2}$, равная по модулю силе $\vec{F}_{\text{тр }1}$ и направленная в противоположную сторону. Эта сила сообщает доске ускорение

$$a_2=F_{\text{тр }2}/M=\mu mg/M.$$

Таким образом, и тело, и доска движутся с постоянными ускорениями. Поэтому для их скоростей v_1, v_2 и перемещений s_1, s_2 можно записать:

$$v_1=\mu gt,\ s_1=\mu gt^2/2;$$

$$v_2=v_0-\mu mgt/M,\ s_2=v_0t-\mu mgt^2/(2M).$$

В конце проскальзывания скорости тела и доски становятся одинаковыми ($v_1=v_2$), откуда найдем время проскальзывания t_1:

$$t_1=v_0M/(\mu g(M+m)).$$

Тело соскальзнет с доски, если

$$s_2(t_1)-s_1(t_1)\geqslant l.$$

Используя это неравенство, получим

$$v_0\geqslant\sqrt{2\mu gl(1+m/M)}=3{,}0\ \text{м/с}.$$

3. Поскольку температура газа в левой части сосуда не изменилась, можно записать закон Бойля—Мариотта

$$p_0l_0S=p(l_0+x)S,$$

где p — давление в левой части сосуда в конечном состоянии (после того, как был откачан воздух из правой части), x — удлинение пружины. На поршень действуют сила давления газа и сила упругости пружины. Поршень покоится, поэтому имеет место равенство

$$pS=kx.$$

Решая полученную систему уравнений относительно величины x и используя формулу для энергии деформации пружины $W=kx^2/2$, получим

$$W=\frac{k}{2}\left(-\frac{l_0}{2}+\sqrt{\frac{l_0^2}{4}+\frac{p_0l_0S}{k}}\right)^2=1{,}7\ \text{Дж}.$$

4. Запишем уравнение второго закона Ньютона для шариков A и C в проекциях на направление силы $\vec{F}$ (см. рис. 3 в условии):

$$ma=T\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$ma=F-2T\cos\frac{\alpha}{2},$$

и для шарика A в проекции на направление, перпендикулярное $\vec{F}$:

$$0=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(2l\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}-T\sin\frac{\alpha}{2}$$

(здесь m — масса, a — ускорение шариков, T — сила натяжения нитей, связывающих шарики). Решение записанной системы для силы F дает

$$F=\frac{3q^2\cos(\alpha/2)}{16\pi\varepsilon_0l^2(\sin(\alpha/2))^3}=0{,}52\ \text{Н}.$$

5. Поскольку по проводнику AB ток не течет, потенциал точки E равен потенциалу точки B: $\varphi_E=\varphi_B$. По проводнику CD течет ток $I=\mathscr{E}_2/(R+r_2)$, и потенциал точки F связан с потенциалом точки D соотношением

$$\varphi_F=\varphi_D-I\frac{R}{2}=\varphi_D-\frac{R}{2(R+r_2)}\mathscr{E}_2.$$

Потенциалы φ_B и φ_D отличаются на величину $\mathscr{E}_1$:

$$\varphi_B=\varphi_D+\mathscr{E}_1.$$

Записанные соотношения позволяют найти показания вольтметра

$$U=\varphi_E-\varphi_F=\mathscr{E}_1+\frac{R}{2(R+r_2)}\mathscr{E}_2=2{,}1\ \text{В}.$$

6. Рассмотрим отрезок пружины длиной Δl ($\Delta l\ll R$). На него действует сила Ампера $\vec{F}_\text{A}$ и силы натяжения $\vec{T}$ (рис. 5). Запишем для отрезка второй закон Ньютона в проекциях на направление силы $\vec{F}_\text{A}$:

$$0=F_\text{A}-2T\sin\frac{\alpha}{2}\approx F_\text{A}-2T\frac{\alpha}{2}=IB\Delta l-\alpha T,$$

откуда

$$T=IB\frac{\Delta l}{\alpha}=IRB.$$

С другой стороны, силу натяжения пружины можно найти с помощью закона Гука:

$$T=k\Delta l=k(R\beta-l_0),$$

где $\beta=2\arcsin(l_0/(2R))$ — центральный угол, опирающийся на дугу окружности, образованную пружиной (см. рис. 5 в условии). Приравнивая полученные выражения для силы натяжения T, найдем силу тока I:

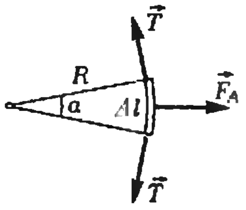


Рис. 5.

$$I=\frac{k}{B}\left(2\arcsin\left(\frac{l_0}{2R}\right)-\left(\frac{l_0}{R}\right)\right)=0{,}32\ \text{А}.$$

7. Ток в катушке индуктивности не может измениться скачком, поэтому сразу после замыкания ключа сила тока в катушке сохраняет нулевое значение. Следовательно, для начального момента времени мы можем записать

$$\mathscr{E}=I_1(r+R_1+R_2).$$

После установления постоянного значения тока в катушке напряжение на ней становится равным нулю, и через резистор с сопротивлением R_2 ток не течет. Поэтому

$$\mathscr{E}=I_2(r+R_1).$$

Решив полученную систему уравнений, найдем величину r и $\mathscr{E}$:

$$r=\frac{I_1(R_1+R_2)-I_2R_1}{I_2-I_1}=5\ \text{Ом},\quad \mathscr{E}=\frac{I_1I_2R_2}{I_2-I_1}=3\ \text{В}.$$

8. При движении проводника AC в нем возникает ЭДС индукции $\mathscr{E}_i=Blv$, «включенная» навстречу по отношению к источнику с ЭДС $\mathscr{E}$. В результате по проводнику течет ток

$$I=\frac{\mathscr{E}-Blv}{R+r},$$

и в проводнике выделяется тепловая мощность

$$P=I^2R=\left(\frac{\mathscr{E}-Blv}{R+r}\right)^2R=0{,}1\ \text{Вт}.$$

9. Прежде всего, заметим, что конденсатор с емкостью C представляет собой параллельное соединение двух конденсаторов с емкостью $\varepsilon\varepsilon_0S/d$ каждый, и, следовательно,

$$C=2\varepsilon\varepsilon_0S/d.$$

Длина волны λ, на которую настроен контур, связана с собственной частотой колебаний контура $\omega=1/\sqrt{LC}$ соотношением

$$\lambda=\frac{2\pi v}{\omega}=2\pi v\sqrt{LC},$$

где $v=3\cdot10^8$ м/с — скорость света в вакууме. Воспользовавшись последней формулой, можно найти величины индуктивности L_1 и L_2, необходимые для настройки контура на длины волн λ_1 и λ_2, а также изменение индуктивности ΔL, необходимое для перенастройки:

$$\Delta L=L_2-L_1=\frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{4\pi^2v^2C}=$$

$$=\frac{d(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}{8\pi^2\varepsilon\varepsilon_0v^2S}=1{,}4\cdot10^{-5}\ \text{Гн}.$$

10. Применяя формулу линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

где d — расстояние от источника до линзы, f — расстояние от линзы до изображения и F — фокусное расстояние линзы, и учитывая, что $d=f-h$, найдем: $F=h/2$. Мнимое изображение шарика будет существовать в то время, когда шарик находится между фокусом и линзой. Это время Δt можно найти как разность времени падения шарика до линзы $t_1=\sqrt{2h/g}$ и до фокуса $t_2=\sqrt{2(h-F)/g}$:

$$\Delta t=t_1-t_2=\sqrt{\frac{h}{g}}(\sqrt{2}-1)=0{,}1\ \text{с}.$$

Московский институт стали и сплавов

Математика

1. 2. 2. 4. 3. 0. 4. 2400. 5. —2. 6. 18. 7. 0,5. 8. 20. 9. 2. 10. 150. 11. 500. 12. 54.

Физика

1. $F_{\text{д}\,1}/F_{\text{д}\,2}=1/\cos\alpha=2$.
2. $h=R_З(\sqrt{2}-1)=2{,}65\cdot10^6$ м.
3. $p=(p_1V_1+p_2V_2)/(V_1+V_2)=84{,}1$ кПа.
4. $T'=T\sqrt{g/(g-a)}=2{,}24$ с.
5. $W=m(c(t_2-t_1)+\lambda)/\eta=1500$ кВт · ч.
6. $l=U^2t\pi d^2/(4\rho Q)=10{,}2$ м (здесь $t=1$ сутки$=24\cdot3600$ с).
7. $Q=(c_1m_1+c_2m_2)(t_2-t_1)=2\cdot10^5$ Дж.
8. $R_2=\frac{4}{3}R_1=40$ Ом.
9. $\beta=\pi/4+\alpha/2=60^\circ$.
10. $q=C\mathscr{E}R/(R+r)=10^{-5}$ Кл.
11. $A=(hc/\lambda)-E=2{,}68$ эВ.
12. $d=4\pi^2c^2\varepsilon_0Sh/\lambda^2=3{,}14\cdot10^{-3}$ м.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Вариант 1

1. $\{-1;\ 0;\ 1\}$. Указание. Воспользовавшись соотношением $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, приводим уравнение к виду $2x(\sqrt{7x^2+8x+10}+\sqrt{7x^2-8x+10})=16x$, откуда либо $x=0$, либо $\sqrt{7x^2+8x+10}+\sqrt{7x^2-8x+10}=8$.

2. $x_1=\pi k/4$, $x_2=(-1)^l\frac{\pi}{24}+\frac{\pi l}{4}$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$.

3. $]0;\ 1[\cup[2;\ +\infty[$. Указание. Неравенство, очевидно, справедливо при $0<x<1$. При $x>1$ оно эквивалентно неравенству $\log_2\sqrt{x+1}\leqslant\leqslant\log_2 x$.

4. R_1+R_2. Решение. Получившиеся треугольники подобны треугольнику ABC. Пусть коэффициенты подобия равны k_1 и k_2. Тогда $k_1+k_2=1$, и если R искомый радиус, то $R_1=k_1R$, $R_2=k_2R$.

5. 40 мин. Решение. Время движения велосипедиста T вычисляется по формуле

$$T=T_0\left(1+\frac{v_2}{v_3}\right)+S\cdot\frac{1}{6+v_1}\left(1+\frac{v_1}{v_3}\right),$$

где T_0 — время движения в сторону A после встречи, S — расстояние между A и B, v_1 — средняя скорость до встречи, v_2 — средняя скорость движения в сторону A после встречи, v_3 — средняя скорость при возвращении в B. Ясно, что T принимает максимальное значение, если v_2 имеет максимальное возможное значение, v_3 — минимальное, а v_1 такова, что выражение $\frac{1}{6+v_1}\left(1+\frac{v_1}{v_3}\right)$ максимально (т. к. $v_3>6$, это значит, что v_1 минимальна). Отсюда находим, что максимальное время движения велосипедиста 5 ч 20 мин. Это меньше, чем время движения пешехода 6 ч. Таким образом, искомая минимальная разница во времени прибытия в B составит 40 минут.

Вариант 2

1. $\{1\}$. 2. $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{2\pi l}{3}$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$.
3. $]0;\ 1[\cup]3;\ +\infty[$.
4. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. 5. 26 мин.

Физика

1. $\alpha=\operatorname{arctg}12=85{,}2^\circ$.
2. $v_{\min}=\sqrt{glM/(m+M)}$, скорость направлена под углом $\alpha=45^\circ$ к доске.
3. $m_2=\frac{5}{8}m_1$.
4. $v_{\max}=\sqrt{2g(h-l)+mg^2/k}$.
5. $v_1=\sqrt{\frac{2Wm_2}{m_1(m_1+m_2)}}=10^7$ м/с;

$$v_2=\sqrt{\frac{2Wm_1}{m_2(m_1+m_2)}}=3\cdot10^7\ \text{м/с}.$$

6. $\Delta h_{\text{р}}=(\rho_{\text{м}}h_{\text{м}}-\rho_{\text{в}}h_{\text{в}})/\rho_{\text{р}}=0{,}51$ см (уровень ртути ниже там, где налито масло).
7. $r=\sqrt{R_1R_2}=5{,}5$ Ом.
8. $B=(2\rho gS\operatorname{tg}\alpha)/I=3{,}9\cdot10^{-2}$ Тл.
9. $\Delta t=(Ba^2\sin2\alpha)/(4\mathscr{E})=8{,}6\cdot10^{-5}$ с.
10. $F=2d_1d_2/(d_1+d_2)=26{,}7$ см.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант», № 2)

1. Обозначим объемы ведер через a, b, c. Из

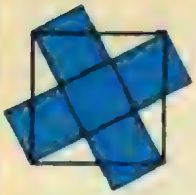


Рис. 6.

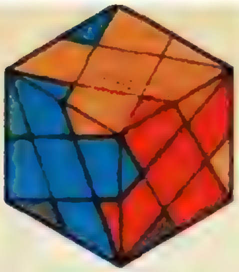


Рис. 7.

условия задачи получаем, что $a=2b/3$, $a=3c/4$. Так как числа a, b, c — целые, то a делится на 2 и на 3, т. е. делится на 6. Если $a=6$, то $b=9$, $c=8$ и $a+b+c=23$, следовательно, в бочку можно долить 30—23=7 литров воды. Если $a>6$, то $a\geqslant 12$, $b\geqslant 18$, $c\geqslant 16$, $a+b+c\geqslant 46$, что противоречит условию задачи.

2. Число ПЯТЬ равно 6284 или 6824.

3. Так как обе шкалы равномерные, мы можем написать связь между температурами по Фаренгейту — $T_ф$ и по Цельсию — $T_ц$ в виде $T_ф=aT_ц+b$. Подставив $T_ц=0$, получаем, что $b=32$, а при $T_ц=100$ получаем $212=100a+32$, откуда $a=1{,}8$. Теперь из уравнения $T_ф=1{,}8T_ц+32$, получаем, что при —40° Цельсия температура по Фаренгейту также будет равна —40°.

4. Для семи агентов схема слежки такова: 1→5→2→6→3→7→4→1. При восьми агентах соответствующую схему устроить нельзя. Пусть можно; тогда расставим агентов по кругу так, чтобы слева от каждого агента стоял агент, за которым он следит. Тогда первые 4 агента стоят через одного, а между ними остальные 4 агента, но в этом случае получается, что за агентом 001 следит тот, за кем следит агент 004, а по условию за ним следит тот, за кем следит агент 008. Противоречие. Значит, такая схема неосуществима.

5. Можно. На каждую грань кубика наклеивается одна из фигур так, как показано на рисунке 6, а затем все уголки загибаются (рис. 7).

Шахматная страничка
(см. «Квант», 1986, № 11)

Задание 21. 1. Фf5—h7! Теперь в распоряжении черных два ответа. а) 1... Крe8—f8 (поля d1, e1, f1 контролирует белый король с e2 — на торе действуют правила горизонтального цилиндра!) 2. Фh7—g6 Крf8—e7 3. Крe2—e1 Крe7—d7 (поля d8 и f8 держит белый король с e1) 4. Фg6—e8×; б) 1... Крe8—d8 2. Фh7—c7+ Крd8—e8 3. Кb5—h6! (конь идет по тору как по вертикальному цилиндру!) 3... Крe8—f8 4. Фc7—e1× (поля f7 и g8 около черного короля держит белый конь, а остальные — ферзь).

Задание 22 (Я. Владимиров, 1966 г.). Задача на так называемый «принцип чередования». В различных вариантах циклически чередуются вторые, третьи и четвертые ходы белых при использовании механизма связки. 1. Крb1! с угрозой 2. Лb4+Крc5 3. Лb5+ Крc4 4. Лc5×. У черных несколько способов защитить матующее поле c5: 1...Кd7 2. Лc3+! dc 3. Кe3+ fe 4. d3×; 1...Лe5 2. Кe3+! fe 3. d3+ed 4. Лc3×; 1...Кe6 2. d3+! ed 3. Лc3+ dc 4. Кe3×.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин,
Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман,
С. М. Козел, С. С. Кротов,
Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович, С. П. Новиков,
М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев,
Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов,
Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева,
П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Фото представили:
Ю. Ю. Житковский, Б. И. Клячин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор Т. С. Вайсборг

Сдано в набор 20.01.87. Подписано к печати 10.03.87.
Т-05298. Бумага 70×108/16. Печать офсетная. Усл. кр.-от.
23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,31. Тираж 206 000 экз.
Цена 40 коп. Заказ 91

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант»
тел. 250-33-54

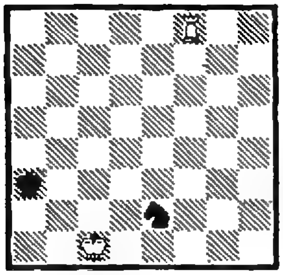
Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

РЕКОРДЫ КОМПЬЮТЕРА

В предыдущих номерах журнала мы рассказывали о достижениях ЭВМ в анализе пятифигурных окончаний. Здесь компьютеру еще предстоит работа: не закончено исследование эндшпиля «ферзь с пешкой против ферзя», впереди анализ сложного эндшпиля «два коня против пешки», интересны машинные этюды на тему «ферзь и легкая фигура против ферзя». Что же касается трех- и четырехфигурных окончаний, то можно сказать, что в них все точки над « i » поставлены. Некоторые из рекордов в свое время уже сообщались в «Кванте». Для полноты картины приведем рекордные (по длительности решения) позиции для наиболее интересных типов окончаний.

Эндшпиль «ладья против коня» считается теоретически ничейным, но вопрос, ловится ли конь, иногда решить совсем не просто. В следующей позиции при наилучшей игре обеих сторон белые забирают коня на 27-м ходу.



1. Крd2 (1. Крс2 упускает выигрыш!) 1... Кd4 2. Крс3. Ошибочно 2. Крd3, впрочем, белые сделают еще немало единственных ходов, и трудно предположить, чтобы их нашел шахматист во время партии, да и в домашнем анализе тоже. А ведь на доске всего четыре фигуры.

2...Кb5+ 3. Крс4 Кd6+ 4. Крс5 Кb7+ 5. Крb6 Кd6 6. Лf4 Крb3 7. Крс5 Кb7+ 8. Крс6 Кd8+ 9. Крb5 Кe6 10. Лf3+ Крс2 11. Крс4 Крd2 12. Лf5 Крс2 13. Лf2+ Крd1 14. Крd3 Кс5+ 15. Крd4 Кb3+ 16. Крс3 Крe1 17. Лb2! Кс5 18. Крd4 Кe6+ 19. Крe3 Крd1 20. Лb6 Кg5 21. Лс6! Кf7 22. Лс7 Кe5 23. Крe4! Кg4 24. Лg7! Кf6+ 25. Крe6 Кh5 26. Лg5. Конь пойман.

Более простым является эндшпиль «ладья против слона». В нем практически нет положений, оценка которых вызывает трудности. Рекорд, установленный ЭВМ,— 18 ходов. Забавно, что все фигуры расположены на одной крайней вертикали.

Белые: Крa4, Лa3; черные: Крa8, Сa6.

Исследуя те или иные позиции, где выигрыш очевиден, машине всегда важно выяснить, как долго может продлить сопротивление обреченная сторона. Доказано, что одинокого короля ферзь матует за 10, а ладья — за 16 ходов. Приведем второй рекорд.

Белые: Крa1, Лh6; черные: Крg5.

1. Лa6 Крf5 2. Лa5+ Крe4 3. Крa2 Крd4 4. Крb3 Крd3 5. Лa4 Крd2 6. Лd4+ Крe2 7. Крс2 Крe3 8. Лa4 Крe2 9. Лa3 Крe1 10. Крd3 Крf2 11. Крd2 Крf1 12. Крe3 Крg2 13. Крe2 Крg1 14. Крf3 Крh1 15. Крg3 Крg1 16. Лa1×.

При наилучшей игре обеих сторон в рекордной позиции ферзь справляется с ладьей за 31 ход.

Белые: Крс8, Фd8; черные: Крс3, Лс4.

1. Крb7 Лb4+ 2. Крс6 Лс4+ 3. Крb6 Лb4+ 4. Крa5 Лe4 5. Фd6 Лd4 6. Фf6 Крd3 7. Крb5 Крe3 8. Крс5 Лf4 9. Фa1 Лf8. Ладья иногда покидает своего короля, но так, чтобы не попасть под двойной удар. Этот метод защиты, найденный ЭВМ, усложняет задачу белых. 10. Фd4+ Крe2 11. Фg4+ Крe3 12. Фe6+ Крf3 13. Крd4 Лd8+ 14. Крс3 Лf8 15. Фс6+ Крg4 16. Фg6+ Крf3 17. Фg5. Ферзь, с одной стороны, стремится ограничить подвижность черных фигур, а с другой, прикрывает тыл, обеспечивая приближение собственного короля. 17... Лf4 18. Крd3 Лa4 19. Фd5+ Крf2 20. Фс5+ Крg3 21. Крe3 Лg4 22. Фh5 Лa4 23. Фe5+ Крh3 24. Фe6+ Крh4 25. Фe7+ Крg3 26. Фd6+ Крh4 27. Крf3 Крh5 28. Фd5+ Крh4 29. Фd8+ Крh5 30. Фe8+ Крg5 31. Ф:a4 и все кончено.

Для многих шахматистов матование слоном и конем одинокого короля вызывает большие трудности. Машина установила, что мат дается не позднее 33-го хода.

Белые: Крa8, Сe8, Кh2; черные: Крс8.

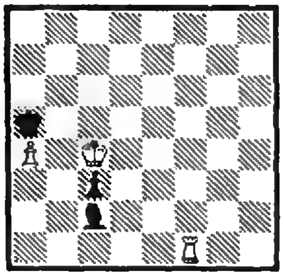
1. Крa7 Крd8 2. Сс6 Крс7 3. Сe4 Крd6 4. Кf3 Крс5 5. Крa6 Крd6 6. Крb5 Крd7 7. Крс5 Крe6 8. Крd4 Крf6 9. Крd5 Крe7 10. Крe5 Крf7 11. Крf5 Крe7 12. Кe5 Крd6 13. Кd3 Крd7 14. Крe5 Крe7 15. Сd5 Крd7 16. Крf6 Крd6 17. Сe6 Крс6 18. Крe5 Крb5 19. Сb3 Крa5 20. Крd5 Крb5 21. Крd6 Крa6 22. Крс6 Крa5 23. Крс5 Крa6 24. Сd5 Крa5 25. Кb2 Крa6 26. Кс4 Крa7 27. Крс6 Крa6 28. Сe6 Крa7 29. Сс8 Крa8 30. Крс7 Крa7 31. Кa3 Крa8 32. Сb7+ Крa7 33. Кb5×.

Матование двумя слонами значительно проще. Здесь достаточно 19 ходов.

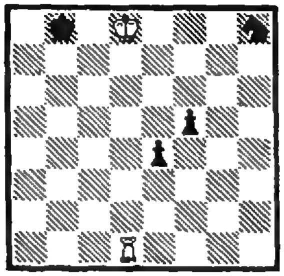
Белые: Крa8, Сd2, Сd7; черные: Крd6.

Конкурсные задания

В одной позиции ладья борется против слона, а в другой — против коня, правда на доске еще есть пешки.

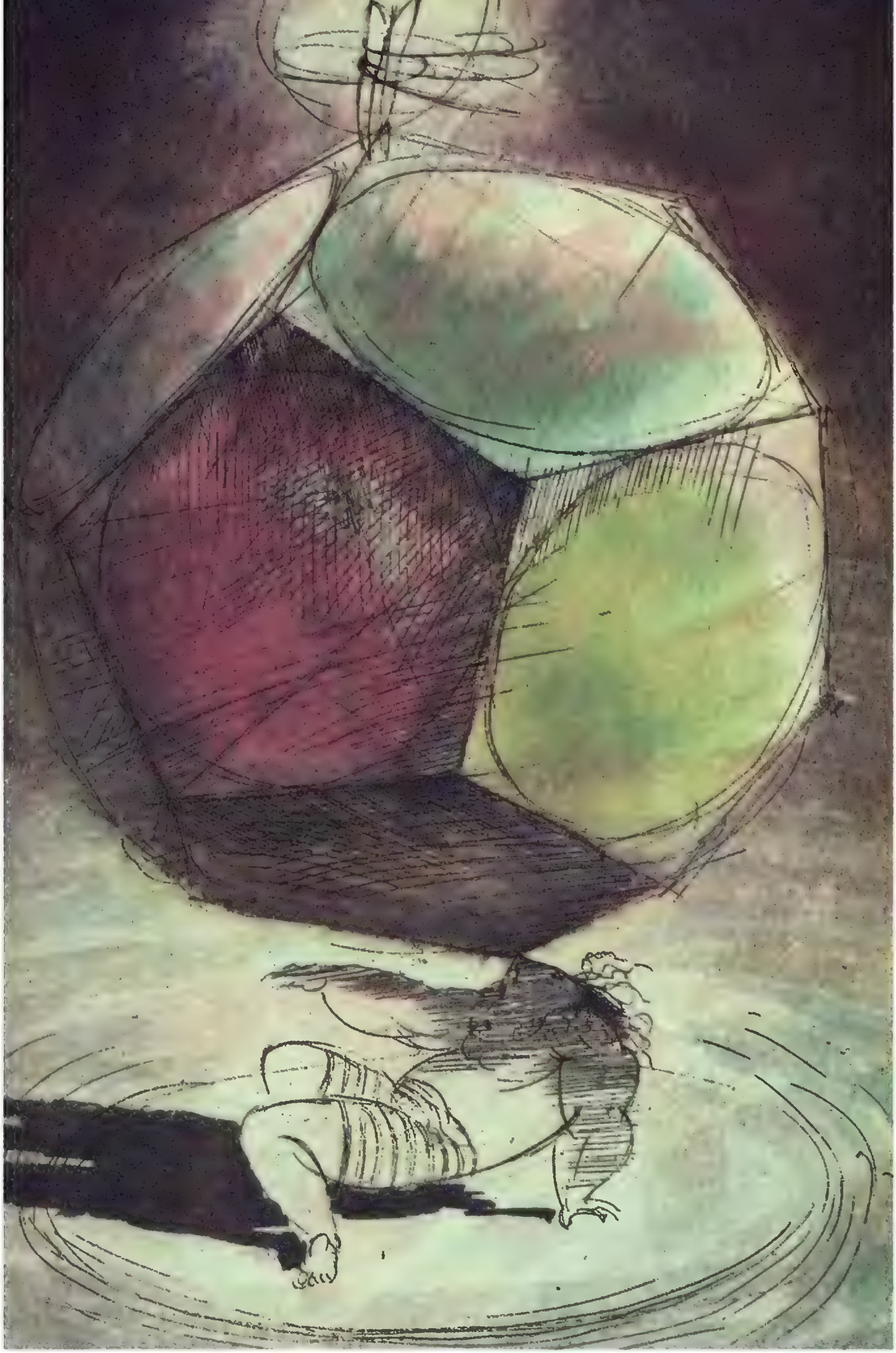


5. Белые начинают и выигрывают.



6. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 20 мая 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 5,6».



Цена 40 коп.
Индекс 70465

Кубик Рубика словно таран пробил некую брешь, через которую на человечество потоком хлынули десятки, если не сотни, более и менее родственных ему головоломок. Многие из них были придуманы давным-давно, но только сейчас сумели завоевать устойчивую популярность. Среди них — «Волшебные кольца». Вы видите их на нашей картинке. Эта головоломка была запатентована в Англии еще в конце прошлого века, а возродилась не так давно в Венгрии. У нас ее выпускают в Ленинграде, Брянске (в несколько ином исполнении) и других городах. Двигая шарики четырех цветов по двум пересекающимся кольцевым желобам, вы должны разместить их как на рисунке 1 (предварительно шарики произвольно перемешиваются). Несложно подобрать шарики на внешней дуге одного из колец, скажем левого (рис. 2), но дальше возникают трудности. Для тех, кто не сможет одолеть их сам,— подсказка. Пусть $Л^{n}$ ($Л^{-n}$) — поворот левого кольца на n шариков против (по) часовой стрелки; $П^{\pm n}$ аналогичные повороты правого кольца. Операция $A=Л^{6}П^{5}Л^{-6}П^{-5}Л^{-1}$ (выполняемая слева направо: $Л^{6}$, $П^{5}$,...) меняет местами шарики a и b, c и d (рис. 2). Вращая правое кольцо, можно любой его шарик поставить на место d, не трогая a, b и c. Если a и b одного цвета, то их перестановка фактически ничего не меняет, так что в этом случае операцией A можно c поменять с любым шариком правого кольца. В «волшебных кольцах» всего 4 сорта шариков, но та же операция A позволяет получить произвольную их перестановку и тогда, когда все они помечены по-разному. Подумайте, как это сделать, а также как решать головоломку для произвольного числа шариков в кольцах.

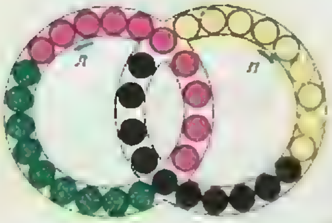
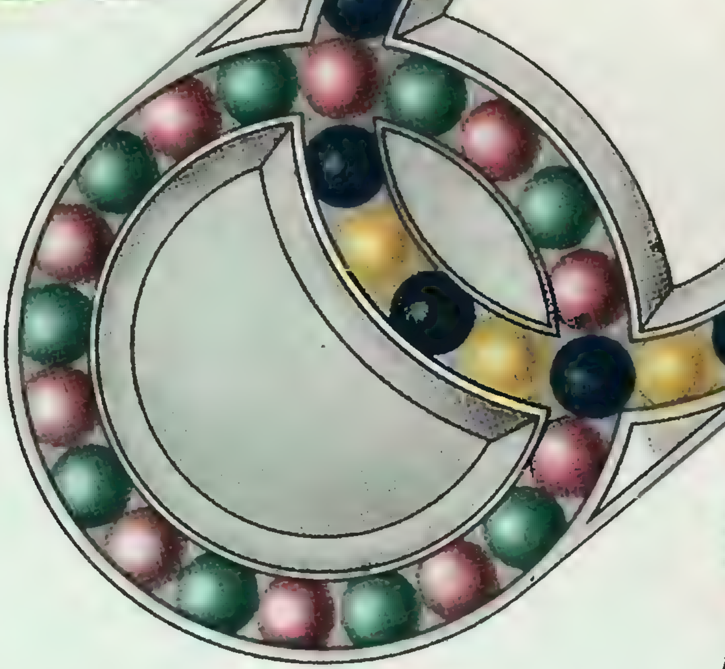


Рис. 1.



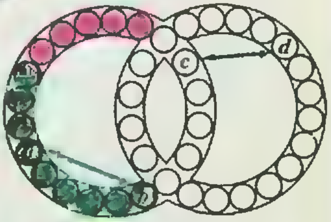


Рис. 2.

НОМЕР
4

Квант

1987
4

Основан в 1970 году

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 12 апреля — День космонавтики
3 *А. В. Бялко.* Тепло твоих рук
8 *Г. А. Гальперин.* Просто о простых числах
15 *Д. Г. Крутогин.* По столбовым дорогам МК
20 *Ф. Н. Склокин.* С рюкзаком по Арктике

Новости науки

19 Прямое измерение расстояния до квазара

Задачник «Кванта»

22 Задачи М1036 — М1040; Ф1048 — Ф1052
24 Решения задач М1015 — М1020; Ф1028 — Ф1031

«Квант» для младших школьников

31 Задачи
34 *А. С. Штейнберг.* Дальтон взвешивает атомы

32 **Калейдоскоп «Кванта»**

Наш календарь

37 Дифракционной решетке — 200 лет

Школа в «Кванте»

39 Математика 8, 9, 10
43 Избранные школьные задачи

Информация

44 Заочная физическая школа при МГУ

Лаборатория «Кванта»

45 *С. Л. Гаврилов.* Постоянный или переменный?

Практикум абитуриента

49 *В. А. Бодик, И. Я. Стрешинский.* О графическом способе решения некоторых физических задач

52 **Варианты вступительных экзаменов**
57 **Ответы, указания, решения**
Шахматная страничка
Обезьяньи рекорды *(3-я с. обложки)*

Наша обложка

Первая и вторая страницы обложки — иллюстрации к статье А. В. Бялко «Тепло твоих рук». Из этой статьи вы узнаете, почему при одной и той же температуре мрамор на ощупь холоднее дерева, почему в мороз руки «прилипают» к металлическим предметам; узнаете, с какой скоростью распространяется в теле тепловая волна и как можно объяснить «чудо» хождения босиком по раскаленным углям...

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1987

12 апреля — День космонавтики

Время неумолимо движется вперед, отдаляя нас от того памятного дня, когда впервые житель Земли поднялся в космос. Полет Ю. Гагарина был не только его личным подвигом. Это был подвиг многих советских людей, которые рассчитывали, проектировали, строили и испытывали космический корабль «Восток-1», готовили космонавта к полету. С тех пор наша страна успешно продолжает работу по исследованию и использованию космического пространства в мирных целях.

20 февраля 1986 года впервые выведена в космос орбитальная научная станция «Мир». Она оснащена шестью стыковочными узлами и представляет собой базовый блок для создания многоцелевого пилотируемого комплекса со специальными орбитальными модулями — настоящего орбитального научно-технического института. Сейчас на станции «Мир» работают космонавты Ю. Романенко и А. Лавейкин.

Выдающимся успехом советской космонавтики явилось исследование кометы Галлея автоматическими станциями «Вега-1» и «Вега-2». Советская космическая орбитальная обсерватория «Астрон», оснащенная рентгеновским телескопом, в конце февраля 1987 года исследовала уникальное небесное явление — вспышку сверхновой звезды в соседней с нами галактике — Большом Магеллановом облаке. А впереди — новые проекты.

Летом 1988 года планируется запуск двух космических аппаратов, предназначенных для исследования Марса и его спутника Фобоса. Ведется подготовка к полету совместных космических экипажей с участием болгарских, сирийских и французских космонавтов.

Советский Союз активно расширяет рамки международного сотрудничества в космосе. На станциях «Вега» использовалась аппаратура, разработанная учеными Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Чехословакии, Австрии, Франции и ФРГ.

Мы — активные противники милитаризации космоса. Поэтому мы настаиваем на ликвидации американской программы «звездных войн», которая ставит под угрозу само существование человечества. И в этой борьбе нас поддерживает большинство жителей Земли.

ТЕПЛО ТВОИХ РУК

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

Что мы делаем, когда хотим оценить температуру какого-либо предмета, заведомо не раскаленного и не очень холодного? — Мы прикасаемся к нему пальцами. Через доли секунды нервные окончания сообщают, теплее или холоднее этот предмет, чем наша кожа (ее обычная температура 34—36 °С).

Однако не только температурой тел определяется наше ощущение. При комнатной температуре деревянные предметы кажутся нам более теплыми, чем стекло или камень, еще более холодными представляются нам металлы, несмотря на то, что температура в комнате у всех материалов одинакова. Так что же именно чувствуют пальцы? Что происходит при контакте с предметом иной температуры? Рассмотрим сначала наиболее простой случай. Известно, что на ощупь можно определить, болен ли человек, повышена ли у него температура. Мамы, как правило, определяют так даже 37 °С; так что чувствительность нервных окончаний равна примерно градусу. Понять, что происходит при этом с точки зрения физики, помогает тот факт, что свойства соприкасающихся тел в данном случае одинаковы, различна только их температура.

При соприкосновении тел с разными температурами распределение температуры вблизи области контакта начинает изменяться: прилежащие слои холодного тела согреваются, теплого — охлаждаются. Очевидно, что температура непосредственно в точках контакта равна средней температуре тел: $t_0 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$. В коже имеется несколько видов нервных окончаний (рецепторов), расположенных на глубине 0,3—0,5 мм. Они передают информацию о тепле и холоде, о давлении на кожу, о боли и т. д. (Разделение рецепторов по «специальности» не очень четкое.) Поскольку нас интересуют ощущения тепла и холода, примем упрощенную модель: терморецепторы чувствуют — «измеряют» — не саму температуру, а именно разность между начальной температурой тела и той, которая установилась после соприкосновения. Для нашего ощущения температуры предметов наиболее важны самые первые мгновения прикосновения, когда температура кожи, а вместе с ней и нервных окончаний только начинает изменяться. Вспомните свои ощущения: после прикосновения проходит небольшое, но заметное время, в течение которого меняется чувство теплоты. Оценим это время, за которое изменение температуры дойдет до терморецепторов.

Предварительно напомним основные понятия физики теплоты и определения теплоемкости и теплопроводности. Удельная теплоемкость вещества c показывает, на сколько возрастает внутренняя энергия единицы массы тела, когда тело нагревается на один градус. При нагревании тела массой m на Δt градусов его энергия увеличивается на

$$\Delta Q = cm \cdot \Delta t.$$

Размерность теплоемкости — Дж $\cdot$ кг$^{-1}$ $\cdot$ град$^{-1}$.

При контакте тел с разными температурами начинается теплообмен. При этом всегда часть внутренней энергии более горячего тела передается более холодному. Физическая величина, показывающая, как интенсивно происходит перенос тепловой энергии, называется тепловым потоком. Тепловой поток q по определению есть тепловая энергия, проходящая в единицу времени через единичное сечение, перпендикулярное направлению теплопередачи. Размерность теплового потока — Дж $\cdot$ м$^{-2}$ $\cdot$ с$^{-1}$. В процессе теплопроводности тепловой поток тем больше, чем больше перепад температур и чем резче он происходит, т. е. чем большим оказывается перепад температур при смещении на единицу длины. Если при смещении на Δx температура возрастает на Δt, то тепловой поток — энергия, проходящая еже-

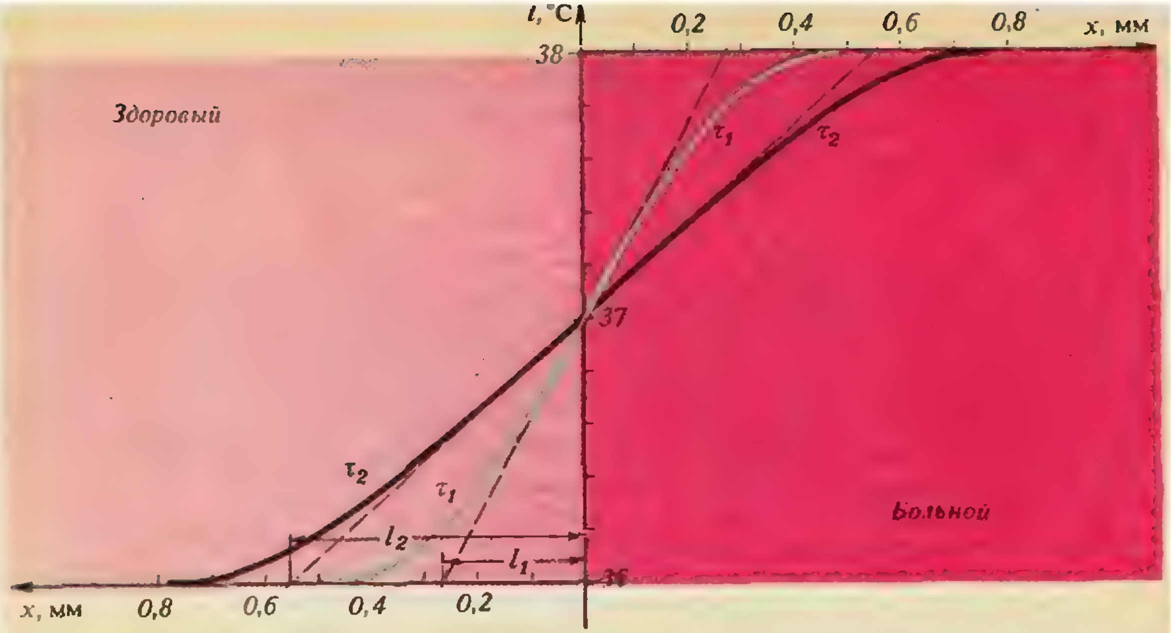


Рис. 1. Распределения температуры в «приграничных» участках тел при контакте здоровый — больной через времена $\tau_1=0{,}5$ с и $\tau_2=2$ с после касания; l_1, l_2 — глубины проникновения тепловых волн за времена τ_1 и τ_2 ($l_1\sim\sqrt{\tau_1}$, $l_2\sim\sqrt{\tau_2}$).

секундно через единичную площадку, перпендикулярную отрезку Δx,— равен

$$q=-\varkappa\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

(знак минус показывает, что поток тепла направлен в сторону уменьшения температуры). Коэффициент пропорциональности $\varkappa$ называется коэффициентом теплопроводности. Размерность $\varkappa$ — Дж$\cdot$м$^{-1}\cdot$с$^{-1}\cdot$град$^{-1}$.

Процесс теплопередачи определяется теплоемкостью и теплопроводностью веществ, а также их плотностями.

Проведем приближенную оценку скорости изменения температуры при соприкосновении одинаковых по свойствам, но по-разному нагретых тел. Посмотрите на рисунок 1. На нем показано распределение температуры (по «глубине») в приконтактных слоях соприкасающихся тел спустя время τ после начала контакта. Как видно из рисунка, за время τ в обоих телах температура успевает существенно измениться в слое толщиной l (понятно, что l зависит от времени). Величина теплового потока q в данный момент составляет примерно $\varkappa\frac{t_2-t_1}{l}$. Это означает, что через сечение контакта S за время $\Delta\tau$ проходит энергия

$$\Delta Q=qS\cdot\Delta\tau\approx\frac{\varkappa(t_2-t_1)S\cdot\Delta\tau}{l}.$$

Эта энергия и уходит на нагревание слоя с массой $m\sim\rho lS$ на разность температур $\Delta t\sim t_2-t_1$, т. е. $\Delta Q\sim c\rho lS\cdot\Delta t$. Итак,

$$\frac{\varkappa S\cdot\Delta\tau\cdot\Delta t}{l}\approx c\rho lS\cdot\Delta t.$$

Сечение контакта и разность температур сокращаются, а приращение времени $\Delta\tau$ с точностью этого рассмотрения можно положить равным времени τ, прошедшему с начала соприкосновения. Из записанного соотношения мы и получаем зависимость $l(\tau)$:

$$l(\tau)=\sqrt{\frac{\varkappa}{c\rho}\tau} \qquad (1)$$

Знак равенства мы поставили не случайно: хотя оценки были приближенными, полученная зависимость $l(\tau)$ точная (как и графики на рисунке 1).

Время, в течение которого температура на глубине l сравняется с температурой контакта, зависит от величин $\varkappa$, c и ρ, определяемых только свойствами материала соприкасающихся тел. Стоящая под корнем в равенстве (1) комбинация этих величин $\chi=\varkappa/c\rho$ называется коэффициентом температуропроводности и является характеристикой материала. Например, у воды $\chi=1{,}5\cdot10^{-7}$ м^2/с. Для дальнейшего нам понадобятся тепловые свойства некоторых материалов — они приведены в таблице на с. 6.

Ткани кожи устроены достаточно сложно: они неоднородны, и их тепловые свойства, строго говоря, зависят от глубины. Примем, однако, во внимание, что живые ткани более чем на 90 % состоят из воды. Поэтому в дальнейших оценках мы будем считать, что тепловые свойства живых тканей близки к свойствам воды.

Теперь мы можем оценить время продвижения температуры контактта, или, как говорят, время распространения тепловой волны, до рецепторов кожи ($l_0=4\cdot10^{-4}$ м). В течение этого времени происходит выравнивание температуры нервных окончаний:

$$\tau_0=\frac{l_0^2}{\chi_0}\approx1\text{ с.}$$

Но почему же все-таки разные материалы при одной и той же температуре так различны на ощупь?

Посмотрите на рисунок 2. На нем изображены распределения температуры при прикосновении к мрамору спустя разные времена с момента контакта. Обратите внимание, что температура самого контакта постоянна, не зависит от времени. Она определяется только тепловыми свойствами того материала, которого вы касаетесь. Попробуем это объяснить и найти, чему равна эта граничная температура для разных веществ.

В каждый момент времени глубины проникновения тепловых волн в теле и в материале равны $l_0=\sqrt{\chi_0\tau}$ и $l_м=\sqrt{\chi_м\tau}$. На бо́льших глубинах, как видно из рисунка, температуры $t_т$ и $t_м$ можно считать неизменными. Непосредственно в области контакта тепловой поток, естественно, одинаков для обеих соприкасающихся сторон. Найдем его из уравнения теплопроводности, считая, что на границе температура равна t_0:

$$q=\varkappa\frac{t_0-t_т}{\sqrt{\chi_0\tau}}=\varkappa_м\frac{t_м-t_0}{\sqrt{\chi_м\tau}}.$$

А вот и ответ на вопрос, почему материалы даже при одной температуре различают на ощупь:

$$t_0=\frac{t_т+\nu t_м}{1+\nu},\qquad(2)$$

где $\nu=\frac{\varkappa_м}{\varkappa_0}\sqrt{\frac{\chi_0}{\chi_м}}=\sqrt{\frac{\varkappa_м c_м \rho_м}{\varkappa_0 c_0 \rho_0}}$.

Заметьте, мы не предполагали при выводе, что температура t_0 на границе не зависит от времени — она оказалась постоянной потому, что время τ сократилось.

Величины ν для разных материалов выписаны в таблице (см. с. 6). Там же приведены и температуры ощущений t_0 для материалов, находящихся изначально при комнатной температуре ($t_м=20$ °С). Температура тела $t_т$ считалась равной 36 °С.

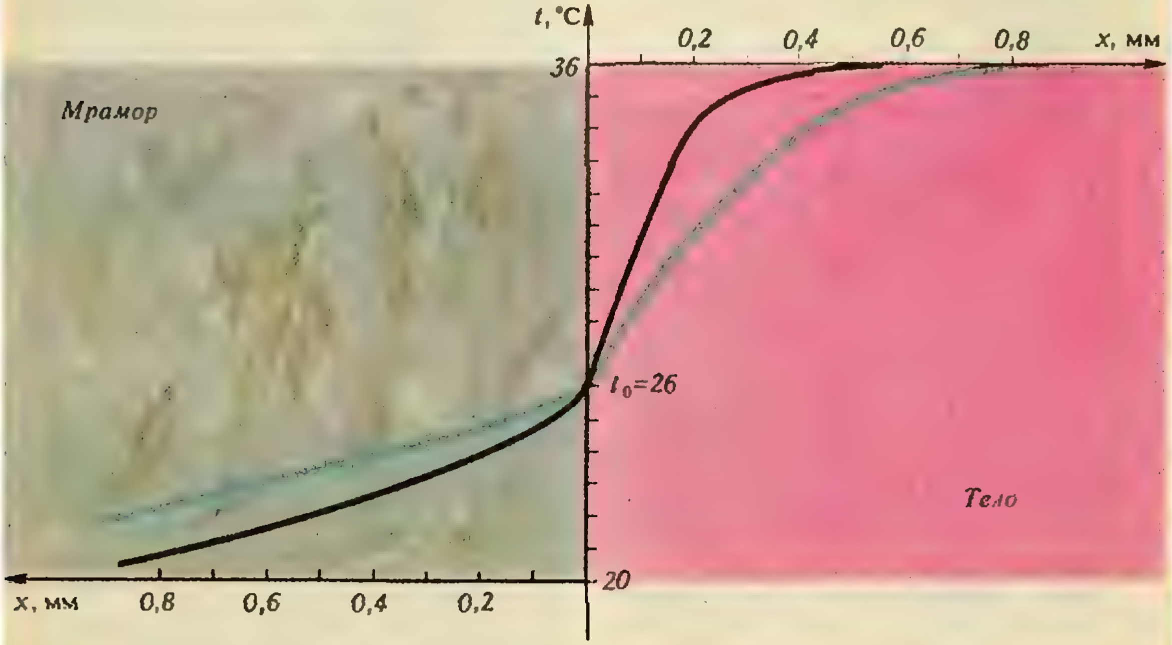


Рис. 2. Распределения температуры при контакте тело — мрамор через 0,5 с (черная кривая) и 2 с (синяя кривая) после касания. Температура t_0 непосредственно в месте контакта не зависит от времени.

Тепловые свойства вещества

Материал	Теплоемкость c, Дж/(кг·К)	Теплопроводность $\varkappa$, Дж/(м·с·К)	Плотность ρ, кг/м^3	Температуропроводность χ, м^2/с	Параметр $\nu=\sqrt{\frac{c\rho\varkappa}{c_0\rho_0\varkappa_0}}$	Температура контакта t_0, °C
Вода	$4{,}18\cdot10^3$	0,63	$1{,}0\cdot10^3$	$1{,}5\cdot10^{-7}$	1,0	28
Воздух	$1{,}01\cdot10^3$	0,026	1,2	$2{,}1\cdot10^{-5}$	0,0035	35,9
Древесина	$9\cdot10^2$	0,13	$5\cdot10^2$	$3\cdot10^{-7}$	0,15	34
Стекло	$8\cdot10^2$	0,65	$2{,}6\cdot10^3$	$3\cdot10^{-7}$	0,72	29
Гранит	$8{,}2\cdot10^2$	1,4	$2{,}7\cdot10^3$	$6{,}3\cdot10^{-7}$	1,1	28
Мрамор	$9{,}0\cdot10^2$	3,0	$2{,}7\cdot10^3$	$1{,}2\cdot10^{-6}$	1,7	26
Алюминий	$3{,}8\cdot10^1$	236	$2{,}7\cdot10^3$	$2{,}3\cdot10^{-3}$	3,0	24
Железо	$4{,}4\cdot10^2$	74	$7{,}9\cdot10^3$	$2{,}1\cdot10^{-5}$	10	21,5
Золото	$1{,}3\cdot10^2$	310	$19{,}3\cdot10^3$	$1{,}2\cdot10^{-4}$	17	20,9

Приведенные в таблице значения t_0 соответствуют нашим ощущениям: неподвижный воздух почти не ощутим, деревянные предметы лишь ненамного холоднее тела, стекло и камень на ощупь прохладны, а металлы — холодны. Золото — рекордсмен по величине ν; при соприкосновении с массивным слитком температура контакта окажется гораздо ближе к температуре золота, чем к температуре тела.

Не касались ли вы случайно металлических предметов морозным зимним днем? При этом кожа пальцев иногда слегка прилипает, как бы приклеивается к металлу. Это замерзает тонкий слой влаги на коже пальцев. Следовательно, температура контакта отрицательна — $t_0 < 0$ °C. Можно вычислить, как низка должна быть температура на улице, чтобы такое примерзание было возможным. Из формулы (2) следует, что опасен мороз с температурой $t < -t_т/\nu$. Конкретно, прилипание кожи пальцев к железу возможно при температурах ниже —3,5 °C, к алюминию — при температурах ниже —12 °C, к золоту — ниже —2 °C.

Кое у кого здесь может возникнуть вопрос. Известно, что до революции в обращении были золотые монеты. При довольно суровом климате России было, наверное, весьма неудобно иметь в обиходе предмет, примерзающий к пальцам даже при небольшом морозце. Но что-то не вспоминается описания таких эпизодов в русской литературе.

Верно. Примерзания монет к рукам и не может быть. Дело в том, что наше рассмотрение относилось только к массивным предметам. Тонкие монеты очень быстро прогреваются теплом рук даже при сильном морозе. Так, золотая монета толщиной l около 2 мм, если брать ее двумя пальцами, прогреется очень быстро, за время $l^2/4\chi_{Au} \approx 10^{-2}$ с. (То же самое, конечно, относится и к современным монетам из менее благородных металлов.)

Законами теплопередачи и простыми численными оценками объясняется и ряд парадоксальных на первый взгляд явлений. Некоторые кузнецы удивляют непосвященных тем, что могут схватить рукой докрасна раскаленные железные детали. В Болгарии, на островах Полинезии и в некоторых других странах есть люди, демонстрирующие хождение босиком по раскаленным углям. И в том, и в другом случае на коже не остается ожогов, она не обугливается. Конечно, кожа рук у кузнецов по-рабочему толстая, а по углям тоже ходят профессионалы, но одной только толщиной кожи эти феномены не объяснить. Еще один парадокс — из области низких температур. Физикам-экспериментаторам хорошо известно, что попадание капель жидкого азота на кожу безболезненно. На короткое время можно даже налить немного жидкого азота в ладонь. Температура кипения азота —196 °C; с жидкостью такой температуры соприкасается кожа в этом эксперименте.

И сверхгорячие, и сверххолодные контакты с благополучным исходом имеют по сути общее объяснение. Оно состоит в том, что в течение первых мгновений контакта на поверхности кожи образуется тонкий слой газа с низкой теплопроводностью. В опытах с жидким азотом этот газ есть испарившийся при контакте с кожей азот. В «эксперименте» кузнеца и при «босохождении» по углям — это пар и газы, образовавшиеся при нагревании верхних слоев кожи. Толщина этого газового промежутка по порядку величины составляет десятые доли миллиметра. Давление газа оказывается настолько большим, что газовый слой может выдержать большие нагрузки — даже вес человеческого тела. *Но основное его достоинство* — высокая тепловая изоляция.

Оценим, какое время может выдержать человек контакт со сверхгорячими (и сверххолодными) предметами, если толщина газового слоя равна $l = 10^{-4}$ м. (Поверхностный слой кожи выдерживает без ожогов и обморожения охлаждение до 0 °C и нагрев почти до 100 °C.)

Ошеломляющее зрелище, «чудо» — человек идет босиком по светящимся раскаленным камням.

Внутри газовой прослойки температура распределена линейно — от температуры раскаленного предмета (или жидкого азота) t_1 до температуры контакта t_0. Поэтому тепловой поток равен $q = \varkappa_{\text{газа}} \frac{t_0 - t_1}{l}$. Распределение температуры в коже зависит от *времени так же, как и при обычных* контактах. Приравняем тепловые потоки:

$$\varkappa_0 \frac{t_{\text{т}} - t_0}{\sqrt{\chi_0 \tau}} = \varkappa_{\text{газа}} \frac{t_0 - t_1}{l}.$$

Вы видите, в данном случае температура контакта t_0 зависит от времени — она растет при касании раскаленных предметов и падает при касании сверххолодных.

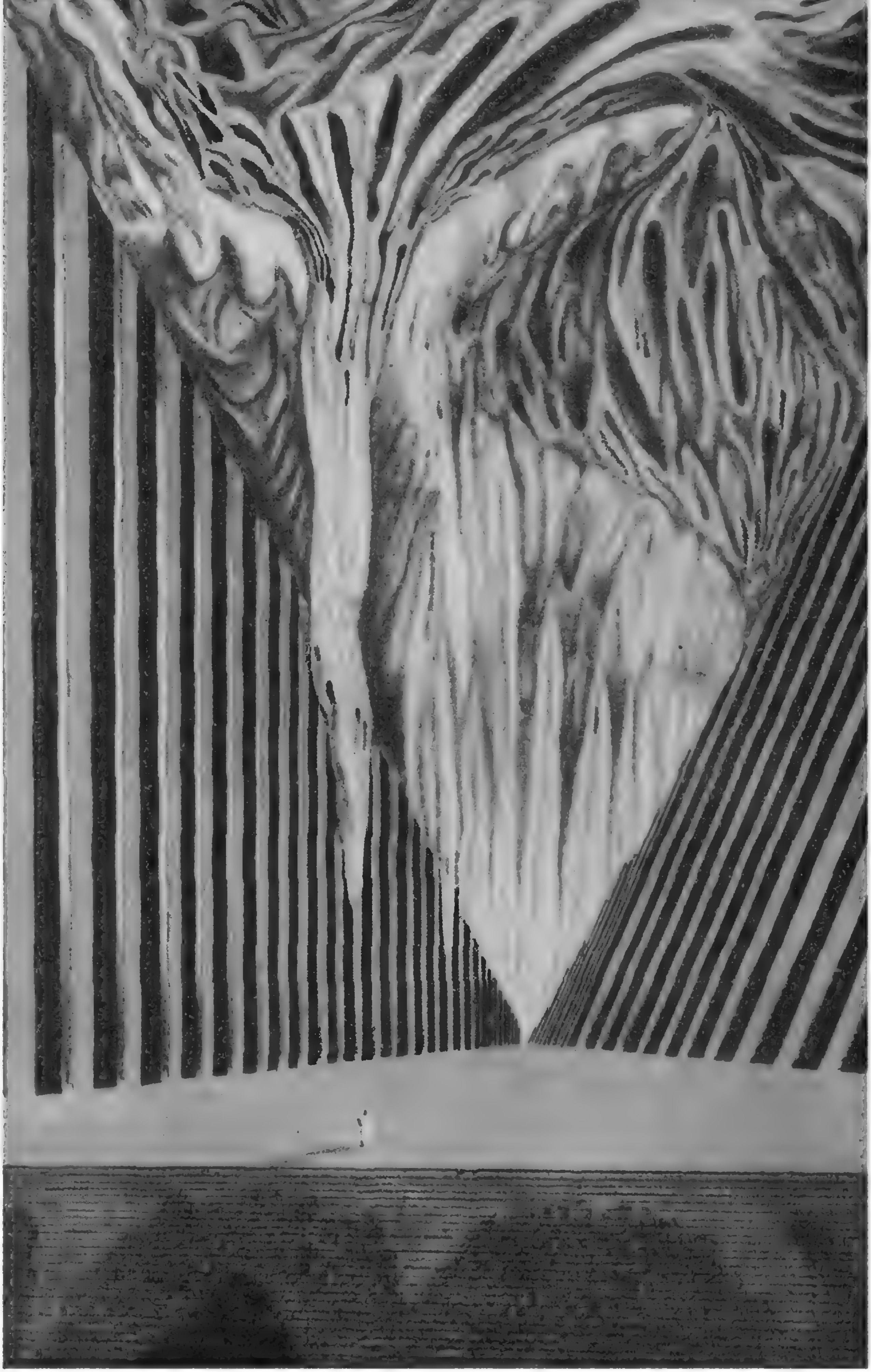
Ткани кожи не разрушаются при $0\,^\circ\text{C} < t < 100\,^\circ\text{C}$, следовательно, в этих пределах может изменяться температура контакта. Подсчитаем теперь, за какое время поверхностная температура кожи достигает этих пределов:

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{1}{\chi} \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_{\text{газа}}} \frac{t_{\text{т}} - t_0}{t_0 - t_1} l \right)^2.$$

Теплопроводности различных газов близки между собой. Поэтому для численной оценки $\tau_{\text{макс}}$ возьмем значение коэффициента теплопроводности воздуха $\varkappa_{\text{возд}} = 0{,}026$ Дж/(м · с × × град). Расчет показывает, что при контакте с раскаленным предметом, температура которого 600 °C, время разогрева кожи через паро-газовый промежуток до 100 °C равно половине секунды — вполне достаточно, чтобы переложить раскаленную болванку или сделать следующий шаг по горящим углям, припорошенным пеплом.

При контакте кожи с жидким азотом ($t_1 = -196\,^\circ\text{C}$, $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$) время охлаждения кожи равно 1,3 секунды. Этого тоже вполне достаточно, чтобы удивить непосвященных или просто сбросить на пол каплю жидкого азота. При наливании сжиженного газа в ладонь кипящую каплю надо движением руки перегонять с места на место.

Человеческие руки — чудный инструмент, данный нам природой. Берегите их от повреждений! Теория — теорией, но хватать раскаленные болванки голыми руками дано отнюдь не каждому.



ПРОСТО О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

Кандидат физико-математических наук
Г. А. ГАЛЬПЕРИН

Бесконечность множества простых чисел

Все знают, что большинство натуральных чисел раскладываются на множители: $10=2\cdot5$, $60=3\cdot4\cdot5$, $111=3\cdot37$, $144=3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$ и так далее. Такие числа называются *составными*. Но среди натуральных чисел есть и такие, которые подобным образом на множители на раскладываются: например, 11 нельзя представить в виде произведения двух меньших натуральных чисел, оба из которых больше 1. Поэтому 11 называется простым числом. Вообще, *простыми* числами (или «первоначальными» — по выражению древних греков) называются такие натуральные числа, которые нельзя разложить на два сомножителя, больших 1 (саму единицу не относят к простым числам). Вот несколько первых простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,... . Среди них ровно одно четное — 2, остальные числа нечетные.

Задача 1. Найдите все пары простых чисел, отличающихся: а) на 1, б) на 17.

С первого же взгляда видно, что ряд простых чисел несколько причудлив; никакого простого закона в его строении не обнаруживается.

Имеет ли этот ряд конец? Этот вопрос поставлен в IX книге «Начал» Евклида и там же дается ответ на него: *за каждым простым числом может быть указано еще одно, большее простое число — ряд простых чисел бесконечен.*

Доказательство этого утверждения, данное Евклидом, необычайно остроумно. Евклид рассуждал так: если простых чисел лишь конечное число и p — наибольшее из них, то число $N=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p+1$, поскольку оно больше p,— не простое, а поэтому делится на какое-то простое число из имеющихся простых от 2 до p (ведь других простых чисел, по предположению, нет!). Однако N не делится ни на одно из этих чисел, так как остаток от деления N на любое из них равен 1. Полученное противоречие доказывает, что простых чисел не конечное количество, а бесконечное.

Это доказательство «методом от противного» говорит о существовании сколь угодно больших простых чисел, но не говорит, как явно найти хотя бы одно простое число, большее p. Впрочем, это сделать не сложно: для этого достаточно проверить на простоту натуральные числа на отрезке от $p+1$ до N — среди них обязательно есть простое. Действительно, если само N не простое, то оно делится на простое число, притом (как мы видели) большее p, но меньшее N, т. е. расположенное на отрезке $[p; N]$.

Отрезки с простыми числами

Разбиение числовой прямой на отрезки, в каждом из которых содержится простое число, можно производить и по-другому. Докажем предварительно следующее утверждение: *наименьший делитель числа $N=n!+1$ (где $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$) является простым числом, большим n.*

Обозначим этот наименьший делитель через p. Так как $n!+1$ не делится ни на одно из чисел 2, 3, 4, ..., n, получаем $p>n$. С другой стороны, если предположить, что p — составное число, т. е. p делится на некоторое число, меньшее p, то p не будет наименьшим делителем $n!+1$, что противоречит предположению. Итак, p — простое число, большее n, что и требовалось доказать.

Из этого доказательства вытекает, что на любом отрезке $[n; n!+1]$ находится хотя бы одно простое число. А тогда числа 2, $2!+1$, $(2!+1)!+1$,

---

Композиция доктора физико-математических наук А. Т. Фоменко, открывающая эту статью, подчеркивает не столько простоту, сколько величие таинственного здания математической науки.

$((2!+1)!+1)!+1$ и т. д. разбивают всю числовую прямую на бесконечное число отрезков, в каждом из которых содержится не менее одного простого числа; мы вновь доказали, что простых чисел бесконечно много.

Оказывается, что уже в каждом из отрезков $[2; 4]$, $[4; 8]$, $[8; 16]$, $[16; 32]$, ... содержится не менее одного простого числа. Но это — трудная теорема, известная под названием «постулат Бертрана»*), которая звучит так: *между числами n и $2n-2$ при $n>7$ всегда расположено простое число.* Постулат Бертрана доказал в 1852 г. известный русский математик Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894 гг.).

Задача 2. Докажите, что если $(p-1)!+1$ делится на p, то p — простое число. Указание. Используйте доказательство утверждения.

Задача 3. Докажите, используя постулат Бертрана, что для любого натурального n существует по крайней мере: а) одно простое n-значное число; б) 3 простых n-значных числа. Указание. Числа 10^{n-1}, $2\cdot10^{n-1}$, $4\cdot10^{n-1}$ и $8\cdot10^{n-1}$ — n-значные.

Заметьте, что доказательство Евклида дает вовсе не ближайшее следующее за p простое число, а лишь некоторое число, лежащее обычно весьма далеко от p. Например, в качестве простого числа, заведомо превышающего 11, доказательство дает не 13, а 2311; за 13 оно дает не 17, а 59 — простой делитель числа 30 031.

Отрезки без простых чисел

Чтобы дать конкретное представление о сложности структуры множества простых чисел покажем, что *в ряду простых чисел встречаются сколь угодно большие пробелы*; так, например, среди миллиона идущих подряд чисел может не оказаться ни одного простого числа. В самом деле, обозначим число *миллион* буквой N и рассмотрим миллион следующих чисел:

$$(N+1)!+2,\ (N+1)!+3,\ ...,\ (N+1)!+(N+1).$$

Первое из этих чисел делится на 2, второе — на 3, третье — на 4 и так далее; произвольное, k-е число $(N+2)!+k$ делится на k, так как оба слагаемых делятся на k. Итак, *все N (миллион) указанных чисел составные.* Конечно, нам пришлось зайти довольно далеко в ряду простых чисел, прежде чем встретить пробел длиной в миллион последовательных чисел; совершенно ясно, что можно точно так же отыскивать пробелы сколь угодно большой величины.

Интересно, что вопрос о сколь угодно больших пробелах в ряду простых чисел, очень близкий к вопросу о бесконечности множества простых чисел как по характеру постановки, так и по методу доказательства, не встречается ни у кого из греческих математиков. Вот еще один вопрос, выдвинутый новой математикой.

Арифметические прогрессии и простые числа

Рассмотрим все натуральные числа, дающие при делении на 3 остаток 2: 2, 5, 8, 11, 14, ...; общий вид таких чисел $3n+2$. Докажем, что и *среди них бесконечно много простых чисел.* Для этого придется несколько видоизменить доказательство Евклида,

---

*) М. И. Башмаков. Постулат Бертрана. «Квант», 1971, № 5, с. 4.

Таблица 1. Фрагмент распределения простых чисел.

В таблице показано, как меняется число простых чисел на интервале от 8 900 000 до 9 000 000, разбитом на 1000 сотен. В каждом столбце таблицы нижнее число указывает количество тех сотен рассматриваемого интервала, в которых число простых чисел равно соответствующему верхнему числу столбца. Например, в одной сотне вообще нет простых чисел, в 117 сотнях встречается по 4 простых числа, в 130 сотнях — по 8 простых чисел.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4	13	53	117	177	196	175	130	72	47	11	4

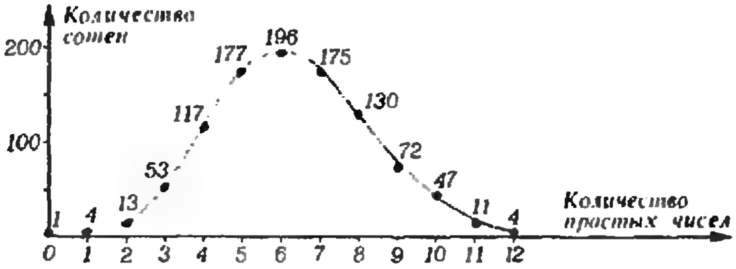


Таблица 2. Частота распределения простых чисел в натуральном ряде.

A_n — количество простых чисел среди первых n натуральных чисел. Отношение A_n/n тем ближе к $1/\ln n$, чем больше n (частное $A_n/n:1/\ln n$ практически не отличается от 1 при $n=10^9$).

n	A_n/n	$1/\ln n$	$A_n/n:1/\ln n$
1000	0,168	0,145	1,159
1 000 000	0,078498	0,072382	1,084
1 000 000 000	0,050847478	0,048254942	1,053

а именно, вместо числа $N=2\cdot3\times\times5\cdot\ldots\cdot p+1$ рассматривать число $M=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p-1$, которое, будучи на 1 меньше кратного 3, принадлежит к последовательности 2, 5, 8, 11, 14, ..., $3n+2$, ...

Задача 4. Приведите полное доказательство того, что M имеет вид $3n+2$.

Число M, так же как и N, не делится ни на одно из простых чисел 2, 3, 5, ..., p. Является ли M простым или же раскладывается на несколько простых множителей — в обоих случаях эти простые числа будут больше p. Но имеется ли среди полученных множителей такой, который имел бы вид $3n+2$, т. е. содержался бы в последовательности 2, 5, 8, 11, ...? Допустим, что нет, т. е. предположим, что все простые множители M имеют вид $3k+1$. Но тогда и их произведение имеет вид $3k+1$ (см. задачу 5, а), а это противоречит тому, что M имеет вид $3n+2$ (см. задачу 4). Следовательно, наше допущение неверно, и хотя бы один простой множитель числа M имеет вид $3k+2$. Поэтому простых чисел вида $3k+2$ бесконечно много.

Задача 5. а) Докажите, что произведение любого количества чисел вида $3k+1$ также имеет вид $3k+1$. б) Докажите аналогичное утверждение для чисел вида $4k+1$, в) для чисел вида $6k+1$.

Приведенное рассуждение (с небольшим видоизменением) дает инструмент для доказательства бесконечности множества простых чисел вида $4k+3$ и $6k+5$. Предварительно предлагаем читателям подумать над следующей задачей.

Задача 6. Докажите, что любое простое число, большее 3, имеет: а) вид $4k+1$ или вид $4k+3$; б) вид $6k+1$ или вид $6k+5$.

Здесь мы докажем только *бесконечность множества простых чисел вида* $6k+5$. Доказательство проведем «от противного» в духе, присущем первоначальному доказательству Евклида. Предположим, что простых чисел этого вида лишь конечное число: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Рассмотрим число $K=6p_1p_2\ldots p_n-1=6(p_1p_2\ldots p_n-1)+5$. Одно из двух: либо число K само простое, либо оно разлагается на конечное число простых множителей, среди которых нет ни одного из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (почему?), и не все из которых имеют вид $6k+1$, поскольку само k не имеет этого вида (см. задачу 5, в). Значит, один из простых множителей числа k, не совпадая с $p_1, p_2, \ldots, p_n$, имеет вид $6k+5$, что противоречит сделанному нами предположению. Это противоречие показывает, что список простых чисел вида $6k+5$ бесконечен.

Задача 7. Проведите доказательство бесконечности множества простых чисел вида $6k+5$, указав явный способ для нахождения этих чисел.

Задача 8. Проведите подробное доказательство бесконечности множества простых чисел вида $4k+3$. Указание. Учетверите произведение чисел этого вида и вычтите из произведения 1.

Задача 9. Докажите, что простых чисел, не оканчивающихся на 1 (т. е. оканчивающихся на 3, на 7 и на 9), бесконечно много. Указание. Рассмотрите все простые числа вида $10k+a$, где $a\neq1$, и проведите рассуждения, аналогичные изложенным выше.

Обобщением рассмотренных вопросов является следующая теорема, сформулированная в 1788 г. французским математиком Лежандром и доказанная немецким математиком Дирихле в 1837 г.

Теорема. *В любой бесконечной арифметической прогрессии* $a_1, a+d, a+2d, a+3d$, *в которой первый член* a *взаимно прост с разностью* d, *содержится бесконечно много простых чисел. Иными словами, функция* $y=dx+a$, *где* d *и* a *— взаимно простые целые числа, принимает бесконечно много простых значений, когда* x *пробегает последовательно ряд натуральных чисел.*

Доказательство Дирихле не элементарно, и в течение долгих лет не было видно никаких элементарных подходов к доказательству этой замечательной теоремы. Элементарное доказательство было впервые получено в 1949 г. (через 161 год после Лежандра!) видным датским математиком А. Сельбергом, доказавшим многие очень трудные теоремы теории чисел элементарно, без использования высшей математики.

Близнецы

Вспомним первую задачу, сформулированную в самом начале статьи. Как вы, наверное, догадались, если два простых числа отличаются на нечетное число p (на 1 или 17, как в задаче 1), то одно из этих простых чисел четно, и стало быть равно 2. Поэтому другое простое число q отличается от p на 2. Если к тому же и p — простое число (как $p=17$ в задаче 1), то простые числа p и q называются *числами-близнецами*; в задаче 1 это числа 17 и 19.

Задача 10. Докажите, используя теорему Дирихле, что существует бесконечно много простых чисел, не принадлежащих ни к одной паре простых чисел близнецов. Указание. Все эти простые числа следует брать, например, из арифметической прогрессии $\{15k+7\}$.

Возникает вопрос: сколько существует пар чисел-близнецов? Например, на отрезке от 0 до 100 000 таких пар 1225, а в интервале от 8 000 000 до 8 100 000 их всего 518. Прекратятся ли когда-нибудь такие пары в бесконечно далеко простирающемся ряде простых чисел? Ни на этот, ни на более общий вопрос, поставленный великим немецким математиком Давидом Гильбертом на 2-м Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 г., — *всегда ли разрешимо в простых числах x и y линейное уравнение $ax+by=c$ с целыми коэффициентами a, b, c, где a и b взаимно просты?* — ответа до сих пор не получено.

Основная теорема арифметики

Любое натуральное число больше единицы допускает одно и только одно (с точностью до порядка множителей) разложение на простые множители.

Доказательство. Если существует хотя бы одно число, допускающее два разложения на различные простые множители, то существует непременно и наименьшее число N, обладающее этим свойством:

$$N=p_1p_2...p_n=q_1q_2...q_m,$$

где через p и q обозначены простые числа. Меняя, если потребуется, порядок этих множителей, мы можем допустить, что $p_1 \leqslant p_2 \leqslant ... \leqslant p_n$, $q_1 \leqslant q_2 \leqslant ... \leqslant q_m$. Заметим, что $p_1 \neq q_1$, так как в случае $p_1=q_1$ натуральное число $N/p_1=N/q_1$, меньшее N, имело бы два разных разложения на простые множители, что противоречит предположению о минимальности N. Предположим, что $p_1<q_1$, и рассмотрим число $N'=N-p_1q_2...q_m$. Легко видеть, что число

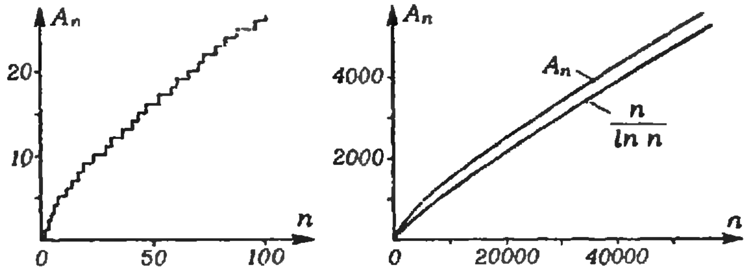
$$N'=p_1(p_2p_3...p_n-q_2q_3...q_m)= \\ =(q_1-p_1)q_2q_3...q_m$$

положительно и меньше N. Значит, по нашему предположению, N' име-

Таблица 3. Простые числа и числа-близнецы в восьми интервалах длины 150 000.

Интервал	Число простых	Число простых близнецов
$10^8 \div 10^8+150\,000$	8154	601
$10^9 \div 10^9+150\,000$	7242	466
$10^{10} \div 10^{10}+150\,000$	6511	389
$10^{11} \div 10^{11}+150\,000$	5974	276
$10^{12} \div 10^{12}+150\,000$	5433	276
$10^{13} \div 10^{13}+150\,000$	5065	208
$10^{14} \div 10^{14}+150\,000$	4643	186
$10^{15} \div 10^{15}+150\,000$	4251	161

На рисунках а) и б) изображены графики функции A_n — количества простых чисел на отрезке $[1; n]$. Из графика рис. а) видно, что A_n растет довольно регулярно, несмотря на локальные колебания. Если же увеличить область изменения n до 50 000, то регулярность A_n рисунка а) на рисунке б) становится настолько очевидной, что захватывает дух. Плавность, с которой поднимается эта кривая, следует отнести к числу удивительнейших фактов математики. Отметим, что A_n при очень больших n примерно равно $\frac{n}{\ln n - 1{,}08366}$.



а) б)

ет единственное разложение на простые множители. Но так как простое число p_1 входит в разложение N', то p_1 входит в q_1-p_1 или в $q_2q_3\ldots q_m$. Из неравенств $p_1<q_1\leqslant \leqslant q_2\leqslant\ldots\leqslant q_m$ следует, что p_1 не входит множителем в $q_2q_3\ldots q_m$. Поэтому p_1 входит множителем в q_1-p_1, т. е. q_1-p_1 делится на p_1. А тогда и q_1 делится на простое число p_1. Этого, однако, быть не может, так как q_1 — число простое. Противоречие, к которому мы пришли, показывает несостоятельность первоначально сделанного допущения, чем и заканчивается доказательство.

Замечание. Из доказательства основной теоремы арифметики становится понятным, почему *единицу* не относят к простым числам. Если ее включить в число простых, то любое натуральное число начинает разлагаться на простые множители многими способами, поскольку в разложение можно добавлять произвольное число единиц.

Вот одно важное следствие основной теоремы арифметики: *если простое число p входит множителем в произведение ab, то оно входит множителем или в a, или в b.* Действительно, если бы p не входило множителем ни в a, ни в b, то, перемножив разложения на простые множители чисел a и b, получили бы разложение на простые множители числа ab, не содержащее множителя p. С другой стороны, справедливо равенство $ab=pt$, где t — некоторое натуральное число. Поэтому, перемножая p и разложение на простые множители числа t, получаем разложение числа ab на простые множители, уже содержащее множитель p. Таким образом, получаются два разложения ab на различные простые множители, что противоречит основной теореме.

Из основной теоремы вытекает, что число N представляется в виде

$$N=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_s^{k_s},$$

где $k_1,\ldots,k_s$ — количества различных простых делителей $p_1,\ldots,p_s$ соответственно в разложении N. Все делители N имеют вид $a=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\ldots p_s^{r_s}$, где $0\leqslant r_1\leqslant k_1$, $0\leqslant r_2\leqslant k_2$, $0\leqslant r_s\leqslant k_s$.

Еще раз о бесконечности простых чисел

Единственность разложения на множители позволяет дать новое доказательство бесконечности множества простых чисел. Это доказательство принадлежит Леонарду Эйлеру.

Предположим, что $2, 3, 5, \ldots, p$ — все существующие простые числа. Тогда из формулы для суммы геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим 1, следует, что для любого натурального n $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$, $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}<\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$, ..., $1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^n}<\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$.

Перемножим эти неравенства почленно:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^n}\right)<$$
$$<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Справа стоит вполне конкретное число; обозначим его A. Произведение слева после раскрытия всех скобок превращается в сумму S чисел, обратных всем делителям числа $N=2^n3^n5^n\ldots p^n$ (в этом месте и используется основная теорема арифметики — убедитесь!). Поэтому левая часть неравенства больше суммы $A_n=1+1/2+1/3+1/4+1/5+\ldots+1/2^n$, в которую входит лишь часть слагаемых суммы S. Итак, для любого n $A_n<A$. Но

$$A_n=1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+1/6+1/7+$$
$$+1/8)+\ldots+(1/(2^{n-1}+1)+\ldots+\ldots+1/2^n)>$$
$$>1+1/2+2\cdot 1/4+4\cdot 1/8+\ldots+2^{n-1}\cdot 1/2^n=$$
$$=1+n/2,$$

что сразу приводит к противоречию: $A>1+ +n/2$ при всех n. Стало быть, простые числа не могут ограничиваться никаким конечным списком, что и требовалось доказать.

Проверка простоты

При разложении N на множители или проверке его на простоту следует проверять делимость N на последовательные простые числа $2, 3, 5, 7, \ldots$. *При проверке числа N на простоту достаточно ограничиться испытанием простых делителей, не превосходящих $\sqrt{N}$.* Действительно, если $N=ab$, то меньшее из чисел a, b не больше $\sqrt{N}$ (если оба были бы больше $\sqrt{N}$, то их произведение было бы больше N), и из делимости N на a автоматически следует, что N делится и на N/a (так что делимость на N/a проверять уже не нужно). Первым математиком, указавшим на это, был Фибоначчи (Леонардо Пизанский).

Примеры. а) Если $N=91$, то $\sqrt{91}<10$; проверив простые числа 2, 3, 5, 7, находим, что $91=7\cdot 13$.

б) Если $N=1987$, то $\sqrt{N}<45$, ..., и так как N не делится ни на одно из простых чисел до 43, то 1987 — простое.

В некоторых случаях при определении простоты числа N можно не производить указанных делений на простые числа. Следующее несложное утверждение, сформулированное Эйлером еще в XVIII веке, позволяет определять простоту числа N совсем другим способом.

Первый критерий Эйлера. *Если нечетное число $N>1$ может быть представлено в виде разности квадратов двух натуральных чисел более чем одним способом, то N — составное; если же такой способ только один, то N — простое.*

Доказательство. Считаем N не точным квадратом, поскольку точный квадрат всегда составное число. Пусть $N=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$. Отсюда следует, что $m-n$ и $m+n$ — делители N. Если N простое, то $m-n=1$, $m+n=N$ и числа $m=(N+1)/2$, $n=(N-1)/2$ определяются числом N однозначно, а поэтому N не может быть представлено еще и другим способом в виде разности двух квадратов.

Если же N составное, т. е. $N=ab$, причем $a>b>1$ — нечетные числа, то, взяв $x=(a+b)/2$ и $y=(a-b)/2$, получаем: $a=x+y$, $b=x-y$, откуда $N=ab=x^2-y^2$: получено еще одно представление N в виде разности квадратов.

Отсюда вытекает, что если N представляется более чем одним способом в виде разности квадратов, то N не может быть простым: для простого N такое представление единственно. Если же N представляется ровно одним способом в виде разности квадратов, то N не может быть составным (по доказанному выше), стало быть, оно простое. Критерий установлен.

Этот критерий дает возможность вместо испытания делителей N пользоваться таблицей квадратов, и, прибавляя последовательно к N квадраты n^2 целых чисел, проверять, получается ли в сумме при $n<(N-1)/2$ точный квадрат или нет.

Разложим, например, 3551 на множители этим способом. Добавляя к 3551 последовательно числа 1^2, 2^2, 3^2, ..., проверяем каждый раз, является ли полученная сумма точным квадратом. Проверка (с помощью таблицы квадратов) показывает, что $3551+7^2=60^2$. Значит, $3551=60^2-7^2=53\cdot 67$.

Задача 11. Разложите указаниым способом на множители числа 6557, 19 019, 209 209.

Несложно также доказывается

Второй критерий Эйлера. *Если натуральное число может быть представлено в виде суммы двух квадратов натуральных чисел более чем одним способом (считается, что перестановка слагаемых не дает нового способа), то N — составное число.*

Из второго критерия Эйлера следует, что если простое число представляется в виде суммы двух квадратов натуральных чисел, то только одним способом. Но какие простые числа представляются в таком виде?

Задача 12. Докажите, что числа вида $4k+3$ не могут быть представлены в виде суммы двух квадратов. Указание. Квадрат четного числа делится на 4, а квадрат нечетного дает в остатке 1.

Претендентами остаются простые числа вида $4k+1$, и, как доказал Пьер Ферма, все такие числа представляются в виде суммы двух квадратов. Поэтому нетрудно ответить, например, на такой вопрос: какие из трех простых чисел 1973, 1979 и 1987 представимы в виде суммы двух квадратов?

Задача 13. а) Докажите, что при всех натуральных n число $N=n^4+4$ — составное (теорема Софи Жермен). б) Докажите, что при всех натуральиых m и n число $N=n^4+4m^4$ составное. Указание. $N=(n^2-2m^2)^2+(2mn)^2$; примените второй критерий Эйлера.

Многочлены, выдающие простые числа

С простыми числами все было бы просто, если бы существовала общая формула для их нахождения. Попытки сконструировать такую формулу велись издавна. Эйлер, например, придумал замечательный трехчлен n^2+n+41, который при $n=0, 1, ..., 39$ принимает только простые значения. Но уже при $n=40$ его значение равно 41^2. Несложно доказать, что *никакой многочлен от одной переменной не может принимать только простые значения.*

Совсем недавно был найден многочлен, все положительные значения

(Окончание см. на с. 38)

ПО СТОЛБОВЫМ ДОРОГАМ МК

(Путешествие по микрокомпьютеру)

Кандидат технических наук Д. Г. КРУТОГИН

От рассмотрения панорамы и изучения плана города МК (см. «Квант» № 2, 3) перейдем к экскурсии по нему. Сегодня наша цель — побывать в «жилых» районах города — ОЗУ и ПЗУ. Мы попадем туда по главной улице города, которая обычно называется «общей шиной» и связывает все районы города. В принятых масштабах*), двигаясь по шине, мы увидим под ногами десятки прямоугольных металлических полосок с размерами 1×2 м (рисунок 1). На вид они неразличимы, но по плану мы знаем, что эти полоски образуют три системы дорог, или три отдельных шины. Наиболее широкая шина — адресная. Она предназначена для распределения машинных слов по ячейкам памяти при записи и вызова их оттуда при считывании. Ячейки памяти организованы в матрицу (рисунок 2); выбор нужной ячейки производится при помощи адресных сигналов. Матричная организация запоминающих устройств наиболее рациональна с точки зрения простоты управления и числа необходимых проводов.

---

*) Напоминаем, что для путешествия мы договорились уменьшиться в миллион раз.

Две другие шины — шина данных и шина управления — обычно содержат меньшее количество проводников. По шине данных, в отличие от других, организовано двухстороннее движение (к процессору или от него).

Скорость движения на городских улицах весьма высокая. Но улиц мало, а желающих пройти по ним довольно много, так что шина данных оказывается надолго занятой. Чтобы избежать встречных потоков и аварий, около выходов на главную улицу во всех районах располагаются своеобразные «посты ГАИ» — буфера, которые согласованно задают режим уличного движения. Буфера же препятствуют движению слов рыхлой неорганизованной толпой, они формируют их в плотные колонны и пересылают в пункт назначения. Наиболее активный обмен происходит между районами Процессор — ОЗУ.

Рис. 1. Фрагмент шины. Фотография сделана с увеличением примерно 2000.

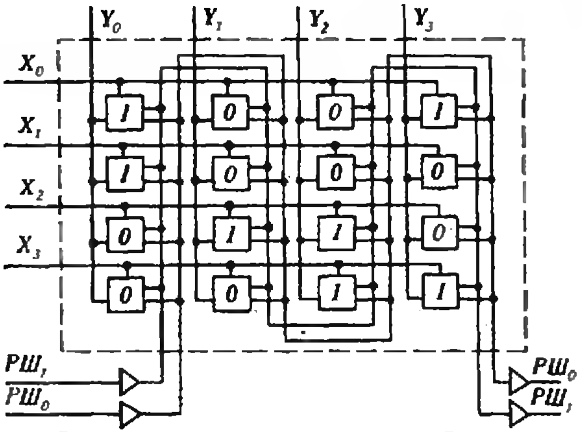


Рис. 2. Схема организации матричного ОЗУ 4×4 бит. Квадратами обозначены ячейки ОЗУ, треугольниками — входные буфера, устанавливающие режим записи или считывания; X и Y — провода адресной шины, $РШ_0$, $РШ_1$ — разрядные провода шины данных.

Допустим, что из Процессора в ОЗУ направлен запрос на некое слово, содержащееся в определенной ячейке памяти. Это значит, что в провода адресной шины посланы импульсы, соответствующие координатам этой ячейки, в то же время по шине управления послана команда считывания. На входе в район ОЗУ эта команда обычно записывается в ячейки памяти буферного регистра*). После этого начинается расшифровка и исполнение команды. Ответные сигналы ячеек памяти (по одной на каждый разряд запрашиваемого слова) поступают, как правило, не сразу в шину данных, а опять-таки в буферный регистр этой шины. Когда он заполняется, т. е. слово-ответ сформировано, переключатель буфера направляет все содержимое этого регистра к Процессору. Одновременно в буферном регистре шины управления стирается ненужная более команда-запрос. Прибывшее к месту назначения (допустим, в процессор) слово — ответ ОЗУ — вновь размещается в «приемной», собственном буферном регистре процессора.

Мы говорили уже, что эффективная работа Процессора обеспечивается быстрой и достаточно большой памятью. Чтобы скорее отыскивать требуемые сведения, проектировщики разбили район ОЗУ на кварталы — страницы. Одна страница — это матрица ячеек размером 16×16, т. е. 256 ячеек, способных хранить двоичную информацию. Если и страниц у нас 256, то полный объем ОЗУ — 256^2.

На входе в каждый квартал-страницу размещаются транзисторные логические элементы. Как бдительные вахтеры или, вернее, как домовые кодовые замки, они пропускают в квартал только команды, снабженные кодовым номером данной страницы. Как вы понимаете, для этого требуется, чтобы в адресе присутствовал код страницы и код ячейки. Поэтому адрес сам по себе является машинным словом.

Город для гостей

Ячейка, хранящая бит информации в ОЗУ, является триггером и содержит, как правило, четыре транзистора. Ранее мы считали один транзистор домом, теперь уместнее будет считать его одним из корпусов

---

*) Здесь и далее термином «регистр» мы будем обозначать небольшое оперативное ЗУ, объемом в одно — два машинных слова.

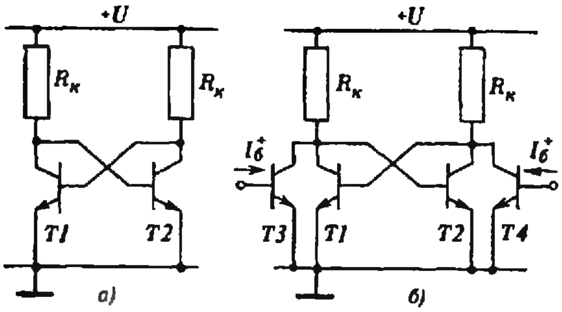


Рис. 3. Ячейка статического ОЗУ емкостью 1 бит: а) — неуправляемая ячейка с двумя равноустойчивыми состояниями, б) — триггер с двумя входами на основе такой ячейки.

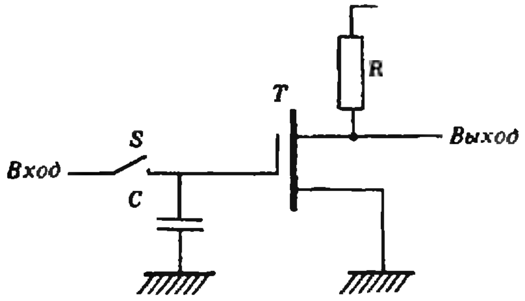


Рис. 4. Принцип действия динамической памяти.

дома-ячейки*). Схема триггера описана русским радиоинженером М. А. Бонч-Бруевичем почти 70 лет назад. Простейший триггер из двух транзисторов показан на рисунке 3, *а*. Из двух транзисторов один всегда закрыт, другой открыт. Подав извне короткий сигнал на закрытый транзистор, положение можно изменить на симметричное и противоположное. Такая конструкция называется бистабильной ячейкой. Для гибкого управления нужно добавить к ней еще два транзистора-выключателя. Та схема, которую вы видите на рисунке 3, *б*, практически и есть триггерная ячейка памяти на 1 бит. Это типовой элемент застройки ОЗУ-района. Такая память на триггерах называется статической. Работает она быстро и надежно, но... Сооружать для каждого бита «домик» из четырех транзисторов становится очень уж обременительно, когда счет идет на сотни тысяч бит (ОЗУ современного микрокомпьютера должно иметь емкость минимум 64 кбайт). Главное, не хватает площадей для ОЗУ.

Поэтому для больших ОЗУ используется другая система памяти, принцип которой поясняется на рисунке 4. Если через ключ *S* зарядить конденсатор *C*, то после размыкания ключа конденсатор будет поддерживать режим работы транзистора *T*, заданный начальным зарядным сигналом. Таким образом, режим транзистора (открытый или закрытый) как бы хранит один бит информации; но до каких пор? Пока не разрядится конденсатор *C**). Выключателем *S* служит, как всегда в микроэлектронике, транзистор, а его сопротивление велико, но не бесконечно.

Чтобы конденсатор не разрядился и хранимый бит не пропал, емкость *C* надо периодически (около 500 раз в секунду!) подзаряжать, как бы «освежая» память. Такая зыбкая, утекающая память называется динамической. С учетом систем поддержания общая схема ОЗУ оказывается намного сложнее, чем на рисунке 4, но все-таки проще и экономнее, чем на триггерах. В динамических ОЗУ удается сократить расход «жилплощади» до 2,5 транзистора на один бит. На сегодня динамические схемы достигают емкости 1 мегабит на кристалле кремния размером 7×9 мм. Это рекорд плотности застройки.

Покидая район ОЗУ, можем констатировать, что архитектура его, хотя и рациональна, все-таки очень однообразна. Это часто свойственно новым жилым районам и в наших городах. Заметим, что не весь район ОЗУ предоставляется клиенту микрокопьютера; частью страниц, иногда до 50 %, пользуется сам Процессор для сохранения результатов промежуточных вычислений, хранения программ обслуживания и т. п.

Город для хозяев

Перейдем теперь в район ПЗУ, благо он расположен неподалеку. В структуре ОЗУ и ПЗУ есть много общего, например матричная организация памяти, входные логические и буферные устройства и т. д. Однако есть и различия. Ну, прежде всего, здесь размещаются постоянные жители нашего города. Они настолько постоянны, что никогда не покидают свой жилой район. Кто читал повесть А. и Б. Стругацких «Понедельник начинается в субботу», возможно помнит, что ее герои, увлеченные работой научные сотрудники Института Чародейства и Волшебства (НИИЧАВО), для выполнения разных рутинных дел создавали свои личные копии-дубликаты, или «дублей». Команды, размещенные в ПЗУ, без всякого чародейства и без ущерба для себя многократно создают своих «дублей» по запросу Процессора. Попав в шину данных, «дубли» ничем не отличаются от других командных сигналов. Матрица стра-

---

*) В вычислительной технике термином «ячейка» пользуются для триггерной цепочки, способной запомнить 1 байт=8 бит или одно машинное слово. Мы несколько упрощаем структуру ОЗУ для первого знакомства.

*) Никаких специальных конденсаторов *C* в микросхеме нет. Мы ранее указывали («Квант», 1986, № 2), что транзистор в СБИС часто используется в роли диода или конденсатора.

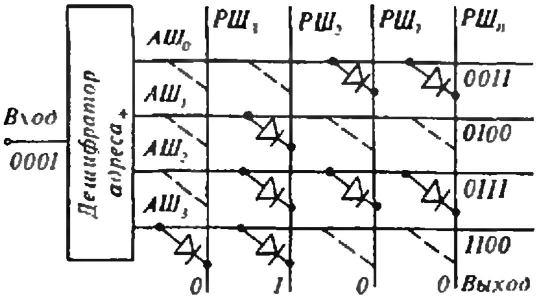


Рис. 5. ПЗУ на диодной матрице. Пунктиром обозначены пережженные перемычки схемы. Входной дешифратор по команде 0001 выбрал адресную шину $АШ_1$ (+). В результате на разрядных шинах $РШ_3$ — $РШ_n$ появился выходной сигнал 0100.

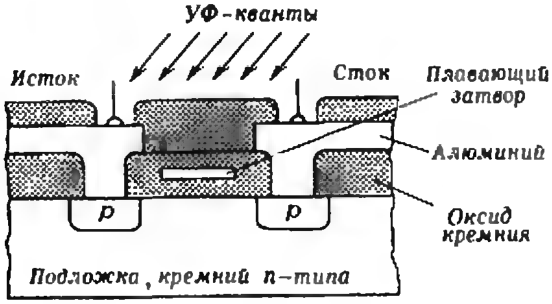


Рис. 6. МОП-транзистор (металл — оксид — полупроводник) с «плавающим» затвором.

ницы ПЗУ может быть организована из диодов и проводящих перемычек (рисунок 5). Запись постоянной информации производится пользователем после изготовления матрицы; для этого часть перемычек пережигают, пропуская через них большой ток по адресным проводам. Последовательность сохранившихся и выжженных перемычек эквивалентна чередованию единиц и нулей в двоичном машинном слове. Таким образом, в отличие от ОЗУ, по существу ПЗУ — это неуправляемая электрическая схема. Она более компактна, чем ОЗУ; в среднем расходуется один транзистор на бит.

«Материалом» для формирования команд-дублей служит непрерывная последовательность импульсов, поступающих от специального генератора, размещенного в районе Процессора.

Постоянная, но заменяемая...

Содержимое диодной матрицы ПЗУ нельзя изменить, и это является определенным неудобством. ПЗУ с пережигаемыми перемычками нельзя перепрограммировать. А в ОЗУ можно записать целую программу (это позволяют даже калькуляторы последних моделей), но при отключении электропитания сведения, записанные в ОЗУ, исчезают. И это тоже неудобство! Но все-таки недавно появилась возможность изготовления перепрограммируемых ПЗУ (ППЗУ). Специальные МОП-транзисторы*) с «плавающим» затвором (рисунок 6) «запоминают» поданный на них сигнал на годы (и даже десятилетия!). Плавающий затвор не соединен с выводами транзистора. На него попадают и застревают только высокоэнергичные, ускоренные электроны.

Разрядить затвор, т. е. удалить с него накопленные электроны, можно в потоке ультрафиолетовых лучей (УФ). УФ-кванты повышают энергию электронов, застрявших на затворе, и помогают им прорваться через тонкий слой диэлектрика. «Очищенные» затворы можно снова зарядить, подав на исток МОП-транзистора напряжение, значительно превышающее обычное рабочее (например, 30 вольт вместо 5). По этим причинам микросхему ППЗУ нужно делать в отдельном корпусе с герметичным окном, прозрачным для УФ, и размещать неподалеку ртутно-кварцевую лампу. Этот способ перепрограммирования достаточно эффективен, хотя и сложен. Недавно появились и более удобные ППЗУ, которые можно «очищать» электрическими сигналами.

Что же хранится в ПЗУ? Кроме упомянутых ранее программ — монитора, трансляторов и служебных математических подпрограмм, там же размещаются программа управления дисплеем, программа связи с печатающими устройствами, программа-редактор, программа-отладчик, указывающая ошибки неопытного программиста, и наконец, если МК специализирован, в ПЗУ имеется несколько самых необходимых программ по специализации (математика, экономика, управление и т. п.). По общему объему район ПЗУ часто не уступает, а то и сильно превосходит ОЗУ.

А не может ли случиться так, что в нашем городе окажется больше туристов, чем мест для них?

Да, для современных МК это вполне возможная ситуация! Если введенные программы слишком объемны или сложны, то район ОЗУ может оказаться переполненным. Ситуация будет сходной с курортным городом в разгар сезона при бесконтрольном заезде отдыхающих. Сначала ухудшится качество обслуживания, а затем может наступить полный «паралич». Экстренный выход тут один — всех выселить, т. е. стереть содержимое ОЗУ, и повторить ввод задачи снова, возможно по частям, или уменьшить точность расчетов, количество обрабатываемых данных. Другой выход — расширить емкость памяти, подключив к МК дополнительную микросхему ОЗУ.

---

*) Об устройстве и работе МОП-транзисторов рассказывалось в статье М. Е. Левинштейна и Г. С. Симина «Полевые транзисторы» в «Кванте» № 10 за 1985 год.

Прямое измерение расстояния до квазара

Одна из самых трудных задач астрономии — определение расстояний до небесных тел, особенно далеких, таких, как, например, квазары и скопления галактик. Чтобы лучше понять, как это можно сделать, обсудим сначала несколько конкретных вопросов.

Разбегание галактик. Вселенная расширяется — галактики, квазары, скопления галактик удаляются от нас и друг от друга. Скорость удаления v пропорциональна расстоянию R и связана с ним простой формулой

$$v=HR,$$

где H называют постоянной Хаббла.

Скорость можно определить по эффекту Доплера: изменение длины волны излучения, наблюдаемое при движении источника относительно наблюдателя. Так, при удалении источника от наблюдателя спектр излучения смещается в красную сторону, так что относительное увеличение длины волны $\Delta\lambda/\lambda_0$ связано со скоростью разбегания и формулой

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}=\left(1+\frac{v}{c}\right)\gamma=\left(1+\frac{v}{c}\right)\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

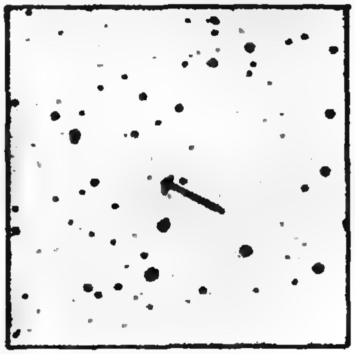
Множитель γ обязан специальной теории относительности и обусловлен изменением хода часов в движущейся системе отсчета.

Постоянная Хаббла. Величина H показывает, на сколько километров в секунду увеличивается скорость разбегания при увеличении расстояния на один мегапарсек (1 парсек $=3{,}6$ светового года $=3\times10^{13}$ километров). Эту постоянную измерить очень трудно. Для этого опять-таки надо знать расстояние до источника.

Существуют разные методы оценок расстояний. Например, зная абсолютную и видимую звездную величину объекта (об этом можно прочитать в § 23 школьного учебника по астрономии). Абсолютной звездной величиной принято называть ту видимую звездную величину, которую имел бы светящийся объект, если бы он находился от нас на стандартном расстоянии 10 парсек. Чтобы вычислить эту величину, нужно знать строение источника, а об этом можно лишь высказывать предположения, которые проверить невозможно.

Две разные группы астрофизиков (основывающиеся, очевидно, на различных предположениях о светящемся объекте) дают для H два значения: 50 и 100 км/с на мегапарсек. Возможны и другие, промежуточные, оценки.

Гравитационная линза. Если на пути световых лучей от далекого объекта к нам находится тело с очень большой массой, так что его гравитационное поле способно отклонить свет, как линза, то вместо одного светящегося объекта на небе появляются два его изображения.



Помеченная стрелкой звездочка на снимке на сегодня для нас — самый далекий, равно как и самый яркий, квазар.

Таким массивным телом может быть, например, галактика. Если она находится точно на линии, соединяющей Землю и источник света, то наблюдатель увидит светящееся кольцо. Если же галактика несколько сдвинута в сторону, то кольцо превращается в два светящихся пятна, лежащих в плоскости, в которой находятся источник, галактика и наблюдатель.

Явление раздвоения изображения гравитационной линзой впервые было обнаружено в 1979 году. С тех пор найдено несколько таких линз. Самая «мощная» среди них, открытая весной прошлого года, дает два изображения далекого квазара. Они расположены друг от друга на угловом расстоянии примерно две с половиной минуты и дают тождественные спектры излучения.

Расстояние. Фантастическое зрелище удвоения квазара (а возможно и утроение!) для астрономов оказалось очень полезным. Выяснилось, что звездная величина такого квазара непостоянна и с течением времени изменяется. Изображения «мигают», но не в унисон — одно отстает от другого примерно на 1,5 года. Это можно понять, поскольку свет, идущий в космическом пространстве по разным путям — с разных сторон галактики, доходит до Земли за разное время. Разность хода и определяет запаздывание «мигания». Зная угловое расстояние между изображениями и величину запаздывания, можно вычислить расстояние от источника, а затем и постоянную Хаббла. Вычисления дали значение $H=84$ км/с на мегапарсек — значение, лежащее между принятыми сейчас пределами (50 и 100).

Так была решена первая задача так называемой космической тригонометрии, и в космосе начала строиться абсолютная шкала расстояний. Если вспомнить еще о необычайно точных часах — пульсарах (см., например, «Квант», 1983, № 12, с. 12 и «Квант», 1985, № 2, с. 12), то слова о геометрии космоса — о пространстве и времени — приобретают ясное значение.

Все, что здесь рассказано, конечно, требует проверки. Помогут ли гравитационные линзы сколь-нибудь точно измерить постоянную H, покажет время. Пока даже самое существование таких линз скептиками подвергается сомнению. Ясно только, что потребуется еще немало идей и мастерства наблюдателей, чтобы решить задачу «о нахождении расстояния от пункта A до пункта B», если эти пункты отделены друг от друга расстоянием в миллионы парсек.

Я. С.

В феврале — марте будущего года планируется совместный советско-канадский трансарктический переход СССР — Северный полюс — Канада. С советской стороны в этом переходе примет участие полярная научно-спортивная экспедиция газеты «Комсомольская правда».

Своеобразной подготовкой к этому переходу для участников экспедиции «Комсомольской правды» был прошлогодний лыжный поход по льду Северного Ледовитого океана в условиях полярной ночи. Было пройдено свыше 700 км. О необычных трудностях арктических переходов рассказывает один из участников экспедиции заслуженный тренер СССР кандидат технических наук старший научный сотрудник Московского института стали и сплавов Ф. Н. Склокин.

С РЮКЗАКОМ ПО АРКТИКЕ

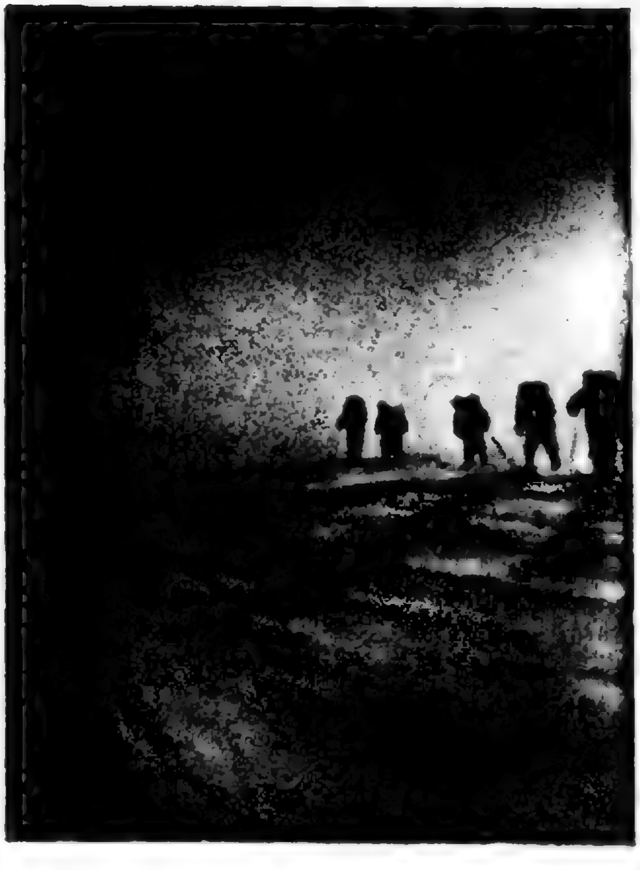
Кандидат технических наук
Ф. Н. СКЛОКИН

Тридцать восемь суток в условиях полярной ночи продолжался лыжный переход по Арктике одиннадцати участников полярной экспедиции газеты «Комсомольская правда». Движение по льдам, преодоление торосов, трещин, каналов с открытой водой или покрытых тонким льдом — все это было знакомо по предыдущим переходам. Но отсутствие света создавало совершенно непривычные условия. Помню, как на старте перехода, когда ушли провожавшие нас полярники, было психологически трудно двинуться в ночь, а не к людям, к видневшимся огням дрейфующей станции «Северный полюс-26». Но прошло несколько дней (вернее, ночей), и глаза стали привыкать к минимальной освещенности.

Первые две недели не было луны. Помогал свет звезд, но частая облачность лишала нас и этого света. Фонарик, а в палатке еще и обычная свечка — только эти источнники создавали возможность эффективной деятельности. Без фонарика невозможно было разобрать или собрать свой собственный рюкзак — на ощупь в перчатках нельзя было понять, что́ попадается под руки в расфасованных пакетах, а снять перчатки можно было лишь на очень короткое время — мороз.

Непривычные условия ночного перехода породили любопытный зрительный эффект. Во время ходьбы окружающая местность проглядывалась в пределах нескольких десятков метров, а линия горизонта угадывалась чисто интуитивно на уровне горизонтального взгляда вдаль, где, представлялось, ледяная пустыня смыкается с ночным небом. Из-за минимальной (почти отсутствующей) контрастности освещенности даже близкие детали ландшафта едва различались, глубина резкости была очень мала, глаз слабо воспринимал перспективу. Создавалось впечатление, что идешь по дну узкой траншеи. Особенно реальным это впечатление было, когда путь пролегал по относительно ровным ледяным полям.

Как-то на привале возник разговор об этом зрительном эффекте, и выяснилось, что каждый участник считал его личным ощущением, чисто психологическим; а на самом деле оно было общим для всех. Даже после бурного обсуждения этого эф-



фекта он не пропал — по-прежнему каждый лыжник шел как бы по дну траншеи.

Отсутствие видимости делало путь по льдам ночной Арктики несравненно более трудным, чем путь на Северный полюс весной 1979 года. Юрий Хмелевский, один из самых опытных участников экспедиции, вспоминал, что из-за плохого зрения он вообще едва-едва различал местность и ориентировался в основном по впереди идущему, все время следя за концами его лыж; по этой же информации он оценивал рельеф лыжни. При ходьбе у него создавалось впечатление, что лыжня идет в подъем, что впереди идущий лыжник уже забрался на небольшой пригорок. Причиной этому также было отсутствие привычной оценки перспективы из-за слабой общей освещенности.

Финишировали мы на дрейфующей станции «СП-27» в марте, когда на смену полярной ночи уже спешил полярный день.

Иногда в ясную солнечную погоду в Центральных районах Арктики можно наблюдать необычный оптический эффект: торосы на линии горизонта вдруг выросли в своих размерах в несколько раз. В среднем высота торосов один—три метра, а торосы, которые находятся на линии горизонта, выглядят как десяти-, двадцатиметровые валы. Когда видишь это в первый раз, то немного пугаешься: ведь валы торосов являются основными препятствиями, а тут куда ни глянь — всюду просто горы. Но все это лишь оптический эффект. Поглядев назад, неожиданно замечаешь, что и там тоже выросли огромные валы, а ведь ты только что прошел этот путь сквозь обычные торосы.

Объясняется этот эффект неоднородным распределением плотности воздуха по высоте. Как известно, чистый белый снег слабо поглощает солнечные лучи, в основном солнечный свет отражается от него. И все же воздух у поверхности ледяного покрова прогревается и поднимается немного вверх. В этом мы не раз убеждались, измеряя температуру воздуха на снегу и на уровне головы,— они различались: приповерхностный воздух имел температуру на несколько градусов ниже. А на высоте в несколько десятков и сотен метров воздух по-прежнему оставался холодным (разумеется, если не было ветра, который мог бы легко смешать эти разные слои). Так что теплый (относительно) воздух оказывался между слоями холодного. Плотность теплого воздуха, как известно, меньше, и соответственно показатель преломления света в слое теплого воздуха меньше, чем в холодном, более плотном. Неоднородность плотности приводит к оптической неоднородности воздуха, при которой возможно возникновение миражей. Ледяные горы, вырастающие на горизонте на месте обычных торосов, и есть миражи.

Во времена освоения Арктики первопроходцами — в конце XIX и в начале XX веков — бытовало мнение о существовании в Северном Ледовитом океане больших участков суши, островов. Фредерик Кук, известный американский полярный путешественник, одним из первых побывавший в районе Северного полюса, отмечал в своих дневниках, что в ясную солнечную погоду в апреле 1907 года он видел вдалеке, на линии горизонта, сушу, покрытую снегом с цепочками ледяных гор. Эту сушу он видел неоднократно. В первый раз он назвал свое видение Землей Бредли, во втором — Землей Крокера...

Только с развитием авиации в тридцатых годах нашего века был развеян миф о неоткрытой земле в районе Северного полюса. Суша, которую неоднократно видели арктические путешественники прошлых времен,— всего лишь оптическая иллюзия. Возможно, иногда это были айсберги — они очень редко, но все же встречаются в Северном Ледовитом океане. А оптический эффект усиливает впечатления путешественников, помогая принимать желаемое за действительное — каждому хотелось открыть неизвестную землю.

Задачи

М1036 — М1040; Ф1048 — Ф1052

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июня 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1036» или «Ф1048». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1036. Существует ли такой (невыпуклый) пятиугольник, который можно разрезать на два равных пятиугольника?

С. М. Хосид

М1037. Найдите все решения в натуральных числах x, y уравнения $x^y - y^x = x + y$.

А. И. Зайчик

М1038. а) Докажите, что если произведение mn делится на 6 (где m и n — целые числа, большие 1), то прямоугольник $m \times n$ клеток можно разрезать на уголки из трех клеток.

При каких m и n это можно сделать так, чтобы линии раздела не вырезали (рис. 1)

б) ни одного прямоугольника 2×3 клетки?

в) ни одного прямоугольника (меньшего $m \times n$)?

М. Хованов (ученик 9 класса), А. П. Савин

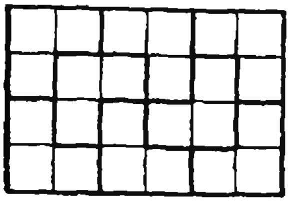


Рис. 1.

М1039. Точки A, B, C, D — вершины тетраэдра. Докажите, что

а) если $\vec{DA} \cdot \vec{BC} = \vec{DB} \cdot \vec{CA} = \vec{DC} \cdot \vec{AB}$, то все три эти скалярные произведения равны 0;

б) если три угла между противоположными ребрами тетраэдра равны, то они прямые.

В. Э. Матизен

М1040*. Числа 1, 2, ..., $3n$ произвольным образом разбиты на три группы по n чисел в каждой. Докажите, что можно выбрать по одному числу из каждой группы так, что одно из них равно сумме двух других.

В. Е. Алексеев, С. Савчев (НРБ)

Ф1048. Киномеханик по ошибке вставил киноленту так, что все события на экране «потекли в обратном направлении», при этом автомобили поехали назад. Как изменились скорость и ускорение автомобиля в результате такой ошибки?

А. С. Бутов

Ф1049. Деревянный плот оттолкнули от берега реки так, что в начальный момент его скорость была равной v и направлена перпендикулярно берегу. Траектория плота показана на рисунке 2. Крестиком на траектории отмечено место, в котором плот находился через время T после начала движения. Считая скорость реки постоянной и равной $\vec{u}$, найти графически точки траектории, в которых плот находился в моменты времени $2T$, $3T$, $4T$.

И. Ю. Потеряйко

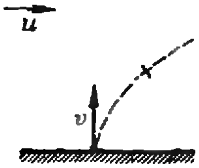


Рис. 2.

Ф1050. Небольшая частица массой m, несущая положительный заряд q, с очень большого расстояния приближается к конденсатору по направлению, перпендикулярному его пластинам, и пролетает сквозь конденсатор через небольшие отверстия в серединах пластин. Считая, что на большом расстоянии от конденсатора скорость частицы равна v, найти ее скорость: 1) в точке A внутри конденсатора (рис. 3); 2) в точке B сразу после вылета из конденсатора. Конденсатор заряжен до разности потенциалов U, расстояние между его пластинами много меньше размеров пластин; заряд конденсатора много больше q.

Г. В. Григорьев

Ф1051. В магнитном поле, индукция которого горизонтальна и равна B, катится без проскальзывания со скоростью v тонкое металлическое кольцо, в котором

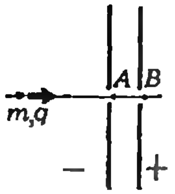


Рис. 3.

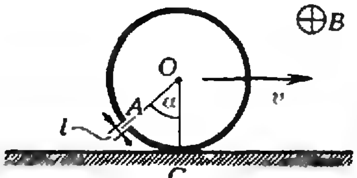


Рис. 4.

имеется очень маленький разрыв длиной l; вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости кольца (рис. 4). Найти ЭДС индукции в момент, когда угол AOC (см. рисунок) равен α.

Л. Г. Маркович

Ф1052. Известно, что освещенность, создаваемая на земле лунным диском в полнолуние, примерно в 10 раз больше, чем освещенность от «ущербной» луны в половину лунного диска. Как это объяснить?

Problems

M1036—M1040; P1048—P1052

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 15th, 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

M1036. Does there exist a (non convex) pentagon which can be cut into two equal pentagons?

S. M. Khosid

M1037. Find all the natural solutions (x, y) of the equation
$$x^y - y^x = x + y.$$

A. I. Zaichik

M1038. a) Prove that if the product mn is divisible by 6 (where m and n are integers greater than 1), then the $m\times n$ rectangle can be cut into "corners" made out of three little squares. For what m and n can this be done so that the cutting lines do not cut out (see figure Рис. 1)

a) any 2×3 rectangle?

b) any rectangle smaller than $m\times n$?

M. Khovanov (9th form student), *A. P. Savin*

M1039. The points A, B, C, D are the vertices of a tetrahedron. Prove that

a) if $\vec{DA}\cdot\vec{BC}=\vec{DB}\cdot\vec{CA}=\vec{DC}\cdot\vec{AB}$, then all three scalar products are 0;

b) if the three angles between opposite edges of the tetrahedron are equal, then they are right angles.

V. E. Matizen

M1040.* The integers $1, 2, \ldots, 3n$ are arbitrarily partitioned into three groups consisting of n integers each. Prove that an integer may be chosen in each group so that one of them is the sum of the two others.

V. E. Alekseev, S. Savchev (Bulgaria)

P1048. The projector operator in a movie house incorrectly introduced the film into the projector so that all the events on the screen were shown "flowing in reverse", e. g. automobiles moved backwards. How did the velocity and acceleration of automobiles change as the result of this mistake?

A. S. Butov

P1049. A wooden raft was pushed away from the shore so that its initial velocity v was directed perpendicularly to the shore. The trajectory of the raft is shown on figure Рис. 2. The cross on the trajectory marks the spot where the raft was located in time T after it began its motion. Assuming the velocity of flow of the river to be constant and equal to $\underline{u}$, find a graphic method for constructing the points of the trajectory where the raft will be at time $2T$, $3T$, $4T$.

I. Yu. Poteryaiko

P1050. A small particle of mass m, carrying a positive charge q, approaches a capacitor from very far away along a trajectory perpendicular to its plates and flies through small holes in the centre of the plates. Assuming that at a long distance

from the capacitor the velocity of the particle was v, find its velocity 1) at the point A inside the capacitor (see figure Рис. 3). 2) at the point B immediately after flying out of the capacitor. The capacitor is charged to a difference of potential U and the distance between its plates is much smaller than the size of the plates; the charge of the capacitor is much greater than q.

G. V. Grigoriev

P1051. A thin metallic ring, possessing a small discontinuity of length l, rolls without sliding with velocity v in a magnetic field whose induction is horizontal and equal to B; the vector $\vec{B}$ is perpendicular to the plane of the ring (see figure Рис. 4). Find the EMF of induction at the moment when the angle AOC (see the figure) equals α.

L. G. Markovich

P1052. The luminosity on the Earth's surface from a full moon is nearly 10 times greater than that from a half moon. Why?

Решения задач

М1015—М1020; Ф1028—Ф1031

М1015. *Можно ли разложить на множители с целыми коэффициентами многочлен* $x^4+x^3+x^2+x+12$?

Ответ: можно. Искомое разложение получается так:

$$x^4+x^3+x^2+x+12=\frac{1}{8}(8x^4+8x^3+8x^2+8x+96)=$$

$$=\frac{1}{8}((3x^2-x+10)^2-(x^2-7x+12)^2)=$$

$$=\frac{1}{8}(4x^2-8x+12)(2x^2-6x+8)=$$

$$=(x^2-2x+3)(x^2-3x+4).$$

Найти это разложение нам помогла догадка. Но существуют и более надежные способы решения таких задач. Можно было бы действовать «в лоб»: предположить, что данный многочлен разлагается в произведение $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами, раскрыть скобки и сравнить получающийся многочлен с данным. После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x возникает система, приведенная на полях; решить ее в целых числах нетрудно — требуется лишь небольшой перебор. Для многочленов более высокой степени такой «метод неопределенных коэффициентов» приводит к громоздким системам уравнений.

Имеются и общие правила-алгоритмы, позволяющие любой многочлен с целыми коэффициентами разложить в произведение многочленов с целыми коэффициентами или убедиться, что это невозможно, т. е. доказать, что многочлен *неприводим* *).

Один из алгоритмов для отыскания квадратичного множителя $g(x)=ax^2+bx+c$ данного многочлена $f(x)$ был указан еще Ньютоном (1707 г.) Возьмем любые три целых точки, скажем $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$. Если $f(x)=g(x)h(x)$, где g и h — многочлены с целыми коэффициентами, то числа $g(x_0)$, $g(x_1)$, $g(x_2)$ делят числа $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$. Последние три числа имеют лишь конечное число делителей. Для каждой тройки их делителей d_0, d_1, d_2 можно составить единственный квад-

$$\begin{cases} a+c=1, \\ ac+b+d=1, \\ ad+bc=1, \\ bd=12. \end{cases}$$

Для $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+12$, $f(-1)=12$, $f(0)=12$, $f(1)=16$.

Делители 12: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12.

Делители 16: ±1, ±2, ±4, ±16.

Одной из троек $g(-1)=6$, $g(0)=3$, $g(1)=2$ отвечает многочлен $g(x)=x^2-2x+3$, — делитель $f(x)$.

---

*) О неприводимых многочленах с целыми коэффициентами рассказывалось в 10-м и 11-м номерах «Кванта» за 1986 г.

ратный трехчлен $g(x)$ такой, что $g(x_i)=d_i$, и проверить, являются ли его коэффициенты целыми, делится ли на него $f(x)$ и будут ли целыми коэффициенты частного (последняя проверка при $a=1$ не нужна). Этим способом можно искать и делители $g(x)$ любой степени: нужно вместо трех точек взять $k+1$ целых точек. Правда, такой алгоритм (предложенный в 1793 г. астрономом Фридрихом фон Шубертом и переоткрытый уже в конце XIX века Леопольдом Кронекером) требует очень большого перебора. Об отыскании более эффективных алгоритмов рассказано, в частности, во 2-м томе книги Д. Кнута «Искусство программирования на ЭВМ» (М., 1977, разделы 4, 6, 2).

Н. Б. Васильев, С. Л. Манукян

M1016. *Многоугольник описан около окружности с центром O. Пусть P — центр масс многоугольника, K — центр масс его контура. Докажите, что точки P, O и K лежат на одной прямой, причем PO=2PK. (При определении центра P мы рассматриваем многоугольник как однородную пластину, центра K — как контур из однородной проволоки.)*

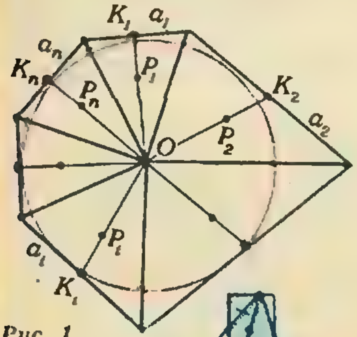


Рис. 1.

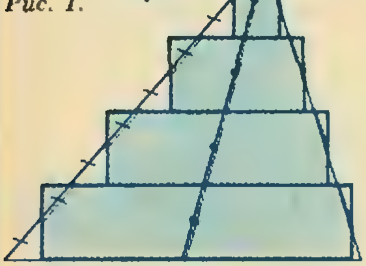


Рис. 2.

Заменим каждую сторону многоугольника ее центром масс (т. е. серединой) и поместим в эту точку массу, численно равную длине стороны. Ясно, что точка K совпадает с центром масс полученной системы материальных точек $(K_1, a_1), \ldots, (K_n, a_n)$ (здесь n — число сторон многоугольника, K_i — их середины, a_i — их длины). Чтобы найти центр масс P многоугольника как пластины, разобьем его на треугольники отрезками, проведенными из центра O окружности в его вершины (рис. 1), найдем центры масс $P_1, \ldots, P_n$ этих треугольников (P_i — центр масс треугольника, примыкающего к стороне a_i), и поместим в эти точки массы, равные площадям $S_1, \ldots, S_n$ треугольников. Тогда P совпадает с центром масс системы материальных точек $(P_1, S_1), \ldots, (P_n, S_n)$. Центр масс треугольной пластины лежит в точке пересечения медиан. (Для доказательства рассмотрим ступенчатую фигуру из k прямоугольников равной высоты, приближающую наш треугольник — см. рис. 2 для $k=4$. Их центры лежат на медиане треугольника, следовательно, центр масс всей фигуры тоже лежит на этой медиане. Переходя к пределу при $k\to\infty$, получим, что и центр масс треугольника лежит на его медиане.) Таким образом, точка P_i при $i=1, \ldots, n$ лежит на отрезке OK_i, причем $OP_i/OK_i=2/3$, т. е. система точек $K_1, \ldots, K_n$ переходит в систему $P_1, \ldots, P_n$ при гомотетии с центром O и коэффициентом $2/3$. А поскольку и массы в точках P_i пропорциональны a_i ($S_i=a_iR/2$, где R — радиус окружности), точка K при указанной гомотетии переходит в P, что равносильно утверждению задачи.

Аналогичное утверждение справедливо и для многогранника, описанного около сферы с центром O: если P — центр масс такого многогранника (как тела), а K — центр масс его поверхности, то $\overrightarrow{OP}=(3/4)\overrightarrow{OK}$.

И. З. Вайнштейн

M1017*. *Каждой вершине правильного пятиугольника приписано некоторое целое число так, что сумма всех пяти чисел положительна. Разрешается проделать следующую операцию: если трем последовательным вершинам приписаны числа x, y, z и $y<0$,*

Ответ. Да. В решении этой задачи используется прием, ставший уже стандартным: подбирается целочисленная функция от рассматриваемых 5 чисел, значения которой монотонно меняются, скажем, уменьшаются при каждой операции и в то же время ограничены снизу; такая функция не может изменяться сколь угодно долго (ведь каждый раз она уменьшается по крайней мере на 1), поэтому после конечного числа шагов дальнейшие операции будут невозможны.

В качестве такой функции можно взять величину *то эти числа заменяются соответственно на $x+y$, $-y$ и $z+y$. Такие операции выполняются, пока хотя бы одно из пяти чисел отрицательно. Обязательно ли этот процесс закончится через конечное число шагов?*

$$|x|+|y|+|z|+|u|+|v|+|x+y|+|y+z|+\ldots+|v+x|+|x+y+z|+|y+z+u|+\ldots+|v+x+y|+|x+y+z+u|+|y+z+u+v|+\ldots+|v+x+y+z|.$$

$$(x-z)^2+(z-v)^2+(v-y)^2+(y-u)^2+(u-x)^2,$$

где, x, y, z, u, v — числа, стоящие в последовательных вершинах пятиугольника. Действительно, эта величина неотрицательна, а если при $y<0$ произвести замену x на $x+y$, y на $-y$ и z на $y+z$, ее новое значение будет равно

$$(x-z)^2+(y+z-v)^2+(v+y)^2+(y+u)^2+(x+y-u)^2,$$

т. е., как показывает вычисление, будет меньше исходного на $-2y(x+y+z+u+v)$. Это число положительно (и следовательно, не меньше 2), поскольку сумма всех 5 чисел при рассматриваемой операции не меняется и положительна с самого начала.

На полях приведена еще одна функция, удовлетворяющая условию задачи (сумма модулей всех чисел, их последовательных пар, троек и четверок).

А. П. Савин

М1018. *Пусть A и B — соседние вершины правильного n-угольника с центром O. Треугольник XYZ, равный треугольнику OAB, вначале совпадает с ним, а потом движется в плоскости n-угольника так, что точки Y и Z остаются на контуре, а X — внутри n-угольника. Какую фигуру опишет точка X, когда Y и Z совершат полный оборот по границе n-угольника?*

Ответ. Искомое множество — это правильная «звездочка», составленная из n равных отрезков длины kR, где $k=\dfrac{1}{\cos(\pi/n)}-1$, а R — радиус описанной окружности данного n-угольника (см. рис. 1 для $n=5$); эти отрезки получаются из отрезков, соединяющих центр O многоугольника с его вершинами, при гомотетии с коэффициентом $-k$ и центром O.

Рассмотрим две последовательные стороны AB и BC данного многоугольника (рис. 2); пусть Y лежит на AB, Z — на BC. При повороте с центром X на угол $2\pi/n$ (равный углу YXZ) точка Y перейдет в Z, а прямая AB — в прямую, проходящую через Z и составляющую с AB угол $2\pi/n$, т. е. в прямую BC. Следовательно, прямые AB и BC одинаково удалены от центра поворота X, а это значит, что X лежит на биссектрисе угла ABC. При движении точки Y от A до B точка X будет двигаться по прямой BO от точки O до некоторого положения B_1 и обратно до O, причем B_1 — это наиболее удаленное от прямой AB положение X, поэтому при $X=B_1$, отрезок XY перпендикулярен AB. Отсюда находим, что $BB_1=XY/\sin\angle ABO=R/\cos(\pi/n)$. При движении Y по стороне BC точка X пройдет (туда и обратно) следующий луч звездочки — OC_1 и т. д.

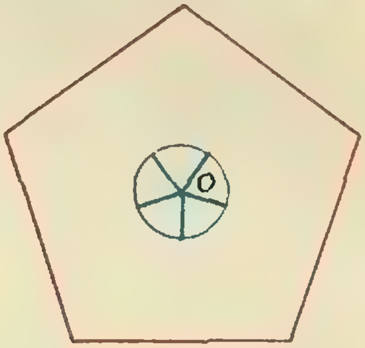


Рис. 1.

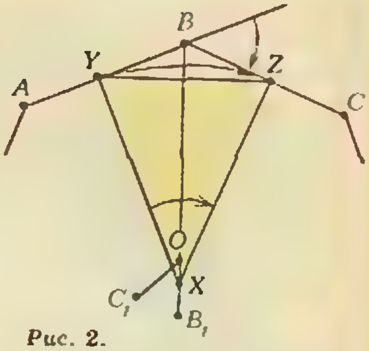


Рис. 2.

В. П. Дубровский

М1019. *На листе клетчатой бумаги отмечено некоторое конечное множество M узлов (точек пересече-*

Доказательство проведем по индукции. Для множества из одной точки утверждение очевидно. Докажем его для множества M из n точек, считая, что оно верно для любого множества из $n-1$ точек. Выбросим из *ния линий сетки). Докажите, что всегда можно окрасить некоторые точки множества M в белый цвет, а остальные — в красный так, чтобы на каждой линии сетки разность между числом белых и красных узлов по модулю не превосходила 1.*

M одну точку A, причем если хотя бы на одной линии сетки имеется нечетное число точек множества M, возьмем A на этой линии. Пользуясь предположением индукции, раскрасим остальные точки, как требуется по условию. Теперь надо доказать, что точку A можно окрасить так, что на двух линиях l и m, проходящих через A, это условие не нарушится.

После предварительной раскраски на каждой из линий l и m будет либо поровну красных и белых точек, и тогда наше условие не нарушится при любой раскраске A, либо точек одного цвета будет на 1 больше, чем другого, и тогда A нужно окрасить недостающим цветом. Это было бы неосуществимо, только если бы на одной линии, скажем на l, оказалось больше белых точек, а на другой — больше красных. Но тогда на каждой из линий l и m находится четное число точек множества M (включая A), и, следовательно, в силу выбора A на всех линиях сетки находится четное число точек из M. В таком случае на всех линиях, отличных от l и m, число белых точек равнялось бы числу красных. Подсчитывая общее число белых и красных точек по линиям, параллельным линии l (включая l), мы получили бы, что белых точек на 1 больше, чем красных; при подсчете по линиям, параллельным m, получилось бы, что красных точек больше. Это противоречие показывает, что единственный неприятный вариант встретиться не может, и точку A всегда можно окрасить в соответствии с условием.

А. П. Савин

M1020*. *На сфере радиуса 1 проведена*
а) кривая, длина которой меньше π;
б) замкнутая кривая, длина которой меньше 2π.
Докажите, что найдется плоскость, проходящая через центр сферы, не пересекающая проведенной кривой. (Можно считать, что кривая на сфере — это «ломаная», состоящая из дуг больших кругов.)

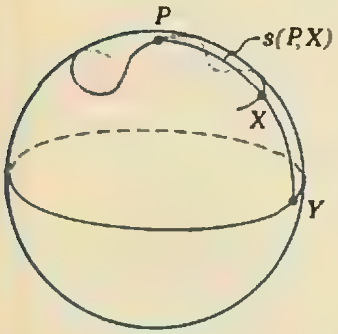


Рис. 1.

Решение этой задачи становится короче и яснее, если излагать его на языке сферической геометрии. Познакомимся с некоторыми словами этого языка.

Большая окружность, или, как чаще говорят, *большой круг* — это окружность ω, по которой сфера пересекается с произвольной плоскостью α, содержащей ее центр O; концы диаметра сферы, перпендикулярного плоскости α, называются *полюсами* окружности ω, *сферическое расстояние* $s(A, B)$ между двумя точками сферы A и B определяется как длина меньшей дуги большого круга, соединяющей A и B; если радиус сферы равен 1, то, очевидно,

$$s(A, B) = \angle AOB.$$

Известно, что каждый из плоских углов трехгранного угла меньше суммы двух других (доказательство можно найти, например, в учебном пособии: Геометрия 9—10 / под ред. З. А. Скопеца. — М.: Просвещение, 1981, с. 224), поэтому сферическое расстояние удовлетворяет «неравенству треугольника»*):

$$s(A, B) < s(A, C) + s(C, B).$$

В планиметрии из аналогичного неравенства выводится, что отрезок — кратчайшая из линий на плоскости, соединяющих две данные точки; в сферической геометрии точно так же доказывается, что *кратчайшей линией между двумя точками на сфере является дуга большого круга.*

Теперь перейдем непосредственно к задаче.

а) Первое решение. Возьмем на данной кривой точку P, которая делит ее на две части равной длины. Для любой точки X кривой сферическое расстояние $s(P, X)$ не превосходит длины участка кривой от P до X,

---

*) Если точки A и B диаметрально противоположны, знак $<$ в нем надо заменить на $=$.

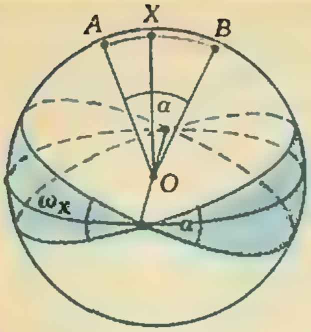


Рис. 2.

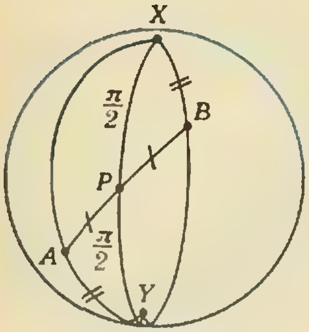


Рис. 3.

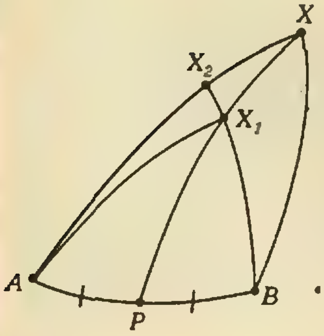


Рис. 4.

$s(A, X_1)+s(X_1, B)<$
$<s(A, X_2)+s(X_2, X_1)+$
$+s(X_1, B)=s(A, X_2)+$
$+s(X_2, B)<s(A, X)+s(X, B)$.

т. е. меньше $\pi/2$. Следовательно, наша кривая не пересекает большой круг с полюсом P (для любой его точки Y сферическое расстояние $s(P, Y)=\pi/2$; рис. 1). Плоскость, содержащая этот круг, и является искомой.

Во втором решении мы только докажем, что нужная плоскость существует, не указывая ее конкретно. Преимущество этого решения в том, что оно годится *для любого набора кривых на сфере, суммарная длина которых меньше* π.

Рассмотрим множество всех больших кругов, пересекающих нашу кривую, и для каждого отметим его полюсы. Докажем, что площадь множества M всех отмеченных полюсов меньше площади сферы, т. е. 4π. Это будет означать, что найдется большой круг, полюсы которого не принадлежат множеству M, т. е. не пересекающий нашу кривую.

Ясно, что полюсы всех больших кругов, проходящих через некоторую точку X, сами образуют большой круг ω_X с полюсом X. Когда точка X пробегает дугу AB большого круга, окружности ω_X «заметают» на сфере два равных двуугольника (рис. 2): вершины этих двуугольников являются полюсами большого круга AB, а «угол раствора» двуугольников равен длине $s(A, B)$ дуги AB. Площадь двуугольника с углом α на сфере радиуса 1 равна 2α (очевидно, она пропорциональна α и равна 2π при $\alpha=\pi$). Следовательно, площадь множества полюсов больших кругов, пересекающих дугу AB, равна $4s(A, B)$, а площадь всего множества M не превосходит $4(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)<4\pi$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — длины дуг, составляющих данную кривую (или несколько кривых).

б) Выберем на данной кривой две точки A и B, разбивающие ее на части равной длины. Проведем через A и B большой круг и на меньшей из его двух дуг с концами A и B возьмем середину P. Теперь, как и в первом решении задачи а), надо доказать, что для любой точки X нашей кривой $s(P, X)<\pi/2$. А это неравенство следует из леммы, которая приводится ниже (сумма длин дуг AX и XB не превосходит длины участка кривой AXB и потому меньше π).

Лемма. *Пусть P — середина стороны AB сферического треугольника ABX (на сфере радиуса 1). Тогда длина его «медианы» $s(P, X)$ меньше, равна или больше $\pi/2$, если сумма длин заключающих ее сторон $s(A, X)+s(B, X)$ соответственно меньше, равна или больше π.*

Доказательство. Пусть сначала $s(P, X)=\pi/2$ и Y — точка сферы, диаметрально противоположная X (рис. 3). Сферические треугольники PXB и PYA равны (они «сферически симметричны» относительно центра P), поэтому $s(X, B)=s(Y, A)$ и

$$s(A, X)+s(X, B)=s(A, X)+s(Y, A)=\pi.$$

Если $s(P, X)>\pi/2$, отложим на дуге PX точку X_1 такую, что $s(P, X_1)=\pi/2$ (рис. 4), тогда по доказанному сумма $s(A, X_1)+s(X_1, B)=\pi$, но из неравенства треугольника следует (см. рис. 4), что она меньше $s(A, X)+s(X, B)$. Аналогично рассматривается случай $s(P, X)<\pi/2$.

Задача б) допускает и решение, аналогичное второму решению задачи а). Пусть множество M образовано полюсами всех больших кругов, пересекающих данную кривую. Любой из этих кругов пересекает кривую не менее 2 раз (так как она замкнута), поэтому двуугольники, рассмотренные в решении задачи а), покрывают M по крайней мере в 2 слоя, и следовательно, площадь множества M меньше, чем $4\cdot 2\pi/2=4\pi$, т. е. меньше площади сферы.

Г. А. Гальперин, В. Н. Дубровский, В. В. Произволов

Ф1028. *Легкий стержень с массивным шариком на верхнем конце начинает падать из вертикального положения без начальной скорости. Нижний конец стержня упирается в уступ на горизонтальной плоскости (рис. 1). Какой угол с вертикалью будет составлять скорость шарика в момент удара о плоскость?*

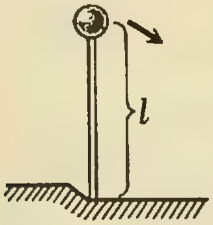


Рис. 1.

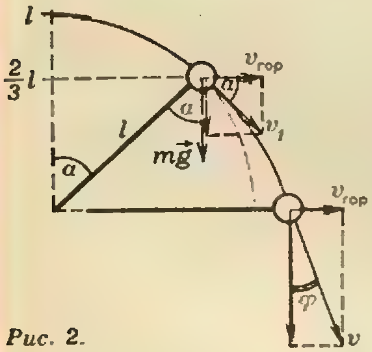


Рис. 2.

Шарик движется по дуге окружности до тех пор, пока действующая на него сила реакции стержня не обратится в нуль. Дальнейшее движение до удара о горизонтальную плоскость происходит по параболе, так как на шарик действует только сила тяжести.

Найдем сначала угол α, который стержень образует с вертикалью в тот момент, когда сила реакции обращается в нуль. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на направление к центру окружности (рис. 2):

$$\frac{mv_1^2}{l} = mg\cos\alpha \qquad (1)$$

(l — длина стержня). Входящую в (1) скорость шарика v_1 можно выразить через угол α с помощью закона сохранения энергии:

$$mgl(1-\cos\alpha) = \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (2)$$

Подставляя v_1^2 из (2) в (1), получим уравнение для определения α, которое дает $\cos\alpha = 2/3$. Таким образом, свободное движение шарика начинается на высоте $2l/3$ со скоростью $v_1 = \sqrt{2gl/3}$. Горизонтальная проекция скорости шарика $v_{гор} = v_1\cos\alpha = (2/3)\sqrt{2gl/3}$ в дальнейшем остается неизменной.

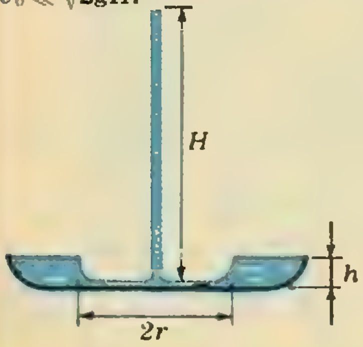
Рассмотрим теперь момент удара шарика о горизонтальную плоскость. Модуль скорости v в этот момент будет таким же, как при свободном падении с высоты l: $v = \sqrt{2gl}$. Направление скорости проще всего найти, выражая синус угла φ, образуемого вектором скорости с вертикалью (см. рис. 2), как отношение $v_{гор}/v$:

$$\sin\varphi = v_{гор}/v = \frac{3}{3\sqrt{3}} = 0{,}385,$$

откуда $\varphi = 22°40'$.

Е. И. Бутиков

Ф1029. *При стационарном падении струи воды на плоское блюдце можно наблюдать такую картину: в некотором радиусе r от места падения струи уровень воды очень низок, а на расстоянии r уровень испытывает скачок (см. рисунок). Оцените радиус r, если расход воды q, высота падения H, высота водяной ступени h. Считать, что начальная скорость истечения воды из крана $v_0 \ll \sqrt{2gH}$.*



Масса воды, вытекающей из крана за единицу времени, равна $q\rho$, где ρ — плотность воды. Поскольку скорость истечения воды из крана $v_0 \ll \sqrt{2gH}$, можно считать, что при падении на блюдце любая порция воды имеет скорость $v = \sqrt{2gH}$.

Будем считать, что при ударе о блюдце скорость v остается по абсолютной величине прежней и меняется только ее направление. При этом после удара каждая малая порция воды массой μ переносит (по радиальному направлению) импульс $\mu v = \mu\sqrt{2gH}$, который теряется при столкновении с «водяной стенкой». Пусть время соударения со «стенкой» равно Δt. Тогда

$$f\cdot\Delta t = \mu v = \mu\sqrt{2gH}, \qquad (1)$$

где f — сила, действующая на порцию μ воды со стороны «стенки» в том месте, где эта порция налетает на «стенку». Эта сила есть сила гидростатического давления неподвижной воды, образовавшей «ступеньку» высотой h, т. е.

$$f = \frac{1}{2}\rho gh\cdot\Delta s, \qquad (2)$$

где Δs — площадка на стенке, на которую попадает порция μ воды. Следовательно, суммарная сила, действующая со стороны «стенки» на ударяющуюся в нее воду, по абсолютной величине равна (см. (2)).

$$F = \sum f = \frac{1}{2}\rho gh\sum\Delta s = \frac{1}{2}\rho gh\cdot 2\pi rh = \pi\rho gh^2 r.$$

С другой стороны (см. (1)),

$$F=\sum\frac{\mu v}{\Delta t}=\frac{v}{\Delta t}\sum\mu=\frac{M}{\Delta t}v=q\rho v=q\rho\sqrt{2gH}$$

(масса M равна массе воды, вытекающей из крана за время Δt, и следовательно, $M/\Delta t=m=q\rho$). Таким образом, $\pi\rho g h^2 r=q\rho\sqrt{2gH}$, откуда получаем оценку r:

$$r=\frac{q}{\pi h^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

А. А. Алабугин, А. В. Ужанский

Ф1030. *На невесомой нити жесткостью k висит тело массой m. Максимальное натяжение, которое выдерживает нить, равно T. Тело приподнимают на высоту x от положения равновесия и отпускают. При каком минимальном x нить порвется?*

Заметим, что $T>mg$, — иначе было бы невозможно равновесие. В положении равновесия нить растянута на

$$\Delta l_0=mg/k. \qquad (1)$$

После того как груз был поднят на высоту x от положения равновесия и отпущен, он будет двигаться вниз. Пройдя положение, соответствующее длине свободной нити, груз начнет растягивать нить. Пусть Δl — максимальное растяжение нити. Тогда условие обрыва нити —

$$k\cdot\Delta l=T \Rightarrow \Delta l=T/k. \qquad (2)$$

В зависимости от соотношения параметров T и m возможны два случая: 1) $x<\Delta l_0$, 2) $x>\Delta l_0$. Рассмотрим их отдельно.

1) $x<\Delta l_0$. Запишем закон сохранения энергии, приняв за нулевой уровень потенциальной энергии тела в поле тяжести положение, когда нить не растянута:

$$-mg(\Delta l_0-x)+\frac{k}{2}(\Delta l_0-x)^2=-mg\cdot\Delta l+\frac{k}{2}(\Delta l)^2.$$

Подставляя значения Δl_0 и Δl из (1) и (2), находим x:

$$x=\frac{T-mg}{k}.$$

Легко видеть, что $x\leqslant l_0$ эквивалентно условию $T\leqslant 2mg$.

2) $x>\Delta l_0$. Из закона сохранения энергии —

$$mg(x-\Delta l_0)=-mg\cdot\Delta l+\frac{k}{2}(\Delta l)^2$$

— с учетом (1) и (2) находим:

$$x=\frac{mg}{2k}\left(\left(\frac{m}{mg}-1\right)^2+1\right) \text{ (при } T\geqslant 2mg).$$

В. Г. Харитонов

Ф1031. *Проводящая сфера разбилась на несколько осколков, разлетающихся на большие расстояния друг от друга. Осколки в произвольном порядке соединяют тонкими проводами. Что больше: электроемкость получившейся системы осколков или электроемкость сферы? Емкостью проводов пренебречь.*

Сообщим системе осколков заряд q (пусть для определенности $q>0$). Начнем собирать осколки, соединенные проводами (емкостью которых мы пренебрегаем), в сферу. Понятно, что поверхностная плотность заряда на любом уже собранном участке сферы будет положительна. Поэтому при сближении осколков между ними все время будут действовать силы отталкивания, и для того чтобы собрать осколки в сферу, нужно совершить работу $A>0$.

Заряд собранной сферы будет равен q, электростатическая энергия ее $W_{\text{сф}}=q^2/2C_{\text{сф}}$, где $C_{\text{сф}}$ — эффективность сферы. Энергия же системы осколков была $W_{\text{ос}}=q^2/2C_{\text{ос}}$, где $C_{\text{ос}}$ — электроемкость системы. Ясно, что $A=W_{\text{сф}}-W_{\text{ос}}$, и так как $A>0$, $W_{\text{сф}}>W_{\text{ос}}$, т. е.

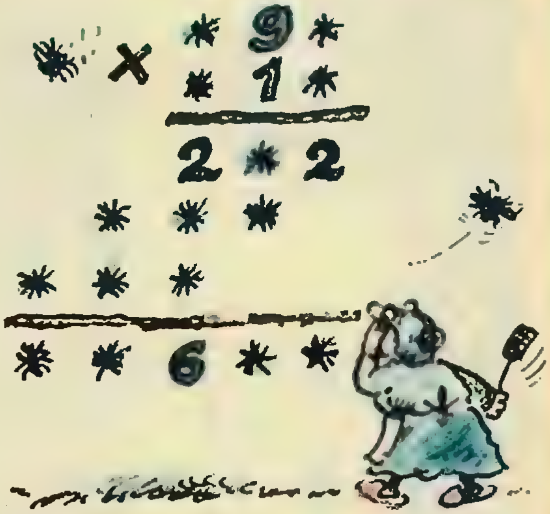
$$\frac{q^2}{2C_{\text{сф}}}>\frac{q^2}{2C_{\text{ос}}}.$$

Это означает, что $C_{\text{сф}}<C_{\text{ос}}$ — электроемкость сферы меньше электроемкости системы осколков, соединенных проводами.

И. М. Луценко

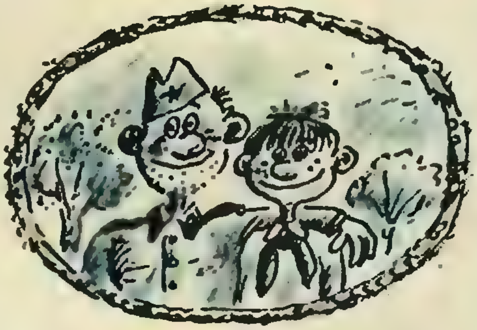
„Квант" для младших школьников.

Задачи

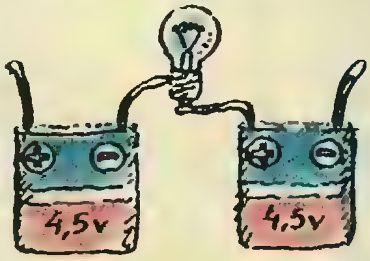


1. Замените на рисунке звездочки цифрами так, чтобы равенство оказалось верным.

2. В 1987 году возраст старшего из двух братьев стал равен сумме цифр года рождения младшего, а возраст младшего — сумме цифр года рождения старшего брата. Сколько им лет, если один старше другого на 7 лет?



3. Однажды Петя попробовал подключить лампочку к двум батарейкам так, как показано на рисунке. Однако лампочка не загорелась, хотя от каждой из батареек она зажигалась. Почему?



4. Шофер автобуса установил в одной кассе катушку билетов с номерами от 537000 до 537999, а в другой — с номерами от 462000 до 462999. В какой из катушек «счастливых» билетов больше (т. е. таких, что сумма первых трех цифр равна сумме следующих трех цифр)?

5. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разделил его на два четырехугольника, имеющих равные площади. Докажите, что эти стороны параллельны.

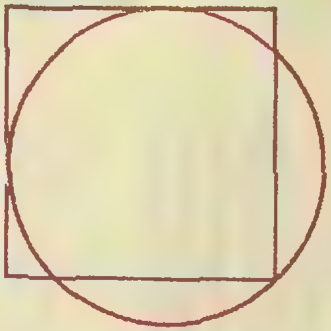
Эти задачи нам предложили ученица 7 класса из Мурома *Оля Зевалева*, ученик 10 класса из Пушкинского района АзССР *Натич Ширинов*, *С. В. Дворянинов*, *А. Г. Самосват*, *В. В. Произволов*.

А ВАШ БИЛЕТ?
ROCK ROCK ROCK

Калейдоскоп „Кванта"

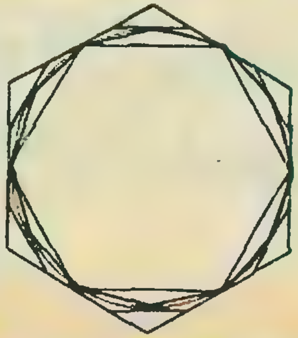
Замечательные числа

Письменная история числа π начинается с египетского папируса, датируемого примерно 2000 годом до н.э., где оно принимается равным $(16/9)^2=$ $=3{,}1604...$ Древние греки пытались с помощью циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий данному кругу, т. е. получить аппроксимацию числа π.



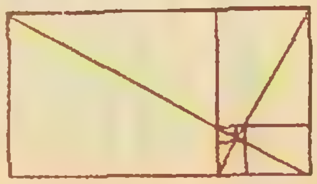
Число $\tau=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ называют отношением «золотого сечения». В таком отношении точка C делит отрезок AB, если $AB:AC=$ $=AC:CB$. (Положив $AB=$ $=x$, а $AC=1$, получаем, что $x:1=1:(x-1)$, откуда $x^2-x-1=0$. Положительный корень этого уравнения равен $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.)

Из приведенного уравнения следует, что $\tau^2=\tau+1$, а $1/\tau=\tau-1$. Если от прямоугольника, отношение неравных сторон которого равно τ (такой прямоугольник называется «золотым»), отрезать квадрат, получим подобный ему прямоугольник с коэффициентом подобия $1/\tau$. Этот процесс можно продолжать бесконечно.



Архимед для оценки числа π вычислял периметры вписанных и описанных многоугольников от шестиугольника до 96-угольника. Ему принадлежит приближенное значение $\pi\approx 22/7=3{,}1428...$ Индусы в V—VI веках пользовались числом $\sqrt{10}=$ $=3{,}1611...$, китайцы — числом $22/7$, а также числом $355/113=3{,}1415929...$

Любопытно, что τ равно радиусу окружности, описанной вокруг правильного десятиугольника со стороной 1. Но периметр такого десятиугольника приблизительно (с хорошей точностью) равен длине описанной окружности, т. е. $2\pi\tau\approx 10$ или $\pi\tau\approx 5$. Еще точнее соотношение $5\pi\approx 6\tau^2$. Отсюда $\pi=\sqrt[3]{30}=$ $=3{,}1072...$ Точнее $\pi=$ $=\sqrt[3]{31}=3{,}14138...$

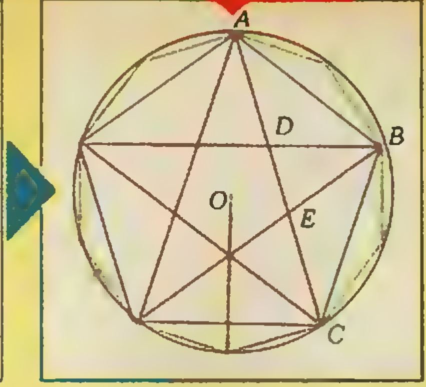


В 1596 году голландский математик Ван Цейлен представил число π с 32 верными знаками. В 1719 году французский математик Ланьи вычисляет π со 140 верными знаками. В 1844 году немец Дазе нашел π с 200 верными знаками; в конце XIX века было уже известно более 500 верных знаков числа π.

В правильном пятиугольнике имеется много пар отрезков, отношение которых равно τ: $AC:AB=AE:EC=AE:AD=\tau$ и т. д. Любопытны следующие представления числа τ:

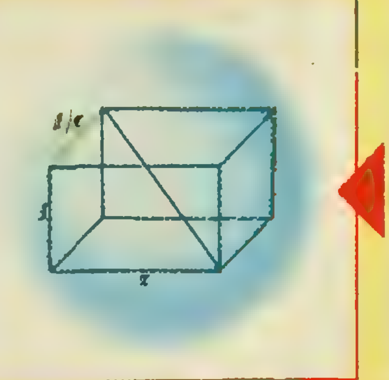
$$\tau=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}};$$

$$\tau=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}.$$



Пропорция золотого сечения часто использовалась художниками и архитекторами. Леонардо да Винчи находил τ в пропорциях человеческого тела. Древнегреческий скульптор Фидий использовал золотое сечение при оформлении Парфенона. В честь Фидия золотое сечение иногда обозначают буквой φ.

Недавно Джонатан и Питер Борвейны (США) нашли π с 29 360 128 верными знаками. Это число хранится в памяти вычислившей его ЭВМ. Если его распечатать, оно займет 30 томов по 400 страниц. Японские математики обещают вычислить π со 100 000 000 верных знаков.

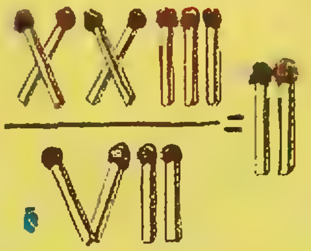


Золотым кубоидом называют прямоугольный параллелепипед с ребрами τ, 1, $1/\tau$. Его полная поверхность равна 4τ, а диагональ равна 2. Отсюда следует, что поверхность сферы, описанной около «золотого кубоида», равна 4π. Таким образом, отношение этой поверхности к поверхности самого кубоида равно $\pi:\tau$.

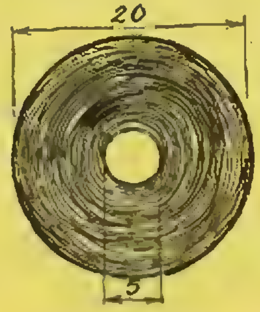
Головоломки

1. Уложите на стол семь монет: три однокопеечные, три трехкопеечные и одну двухкопеечную так, чтобы каждая из них касалась не менее трех других.

2. Переложите одну спичку так, чтобы изображенное на рисунке равенство выполнялось с точностью до 0,002.

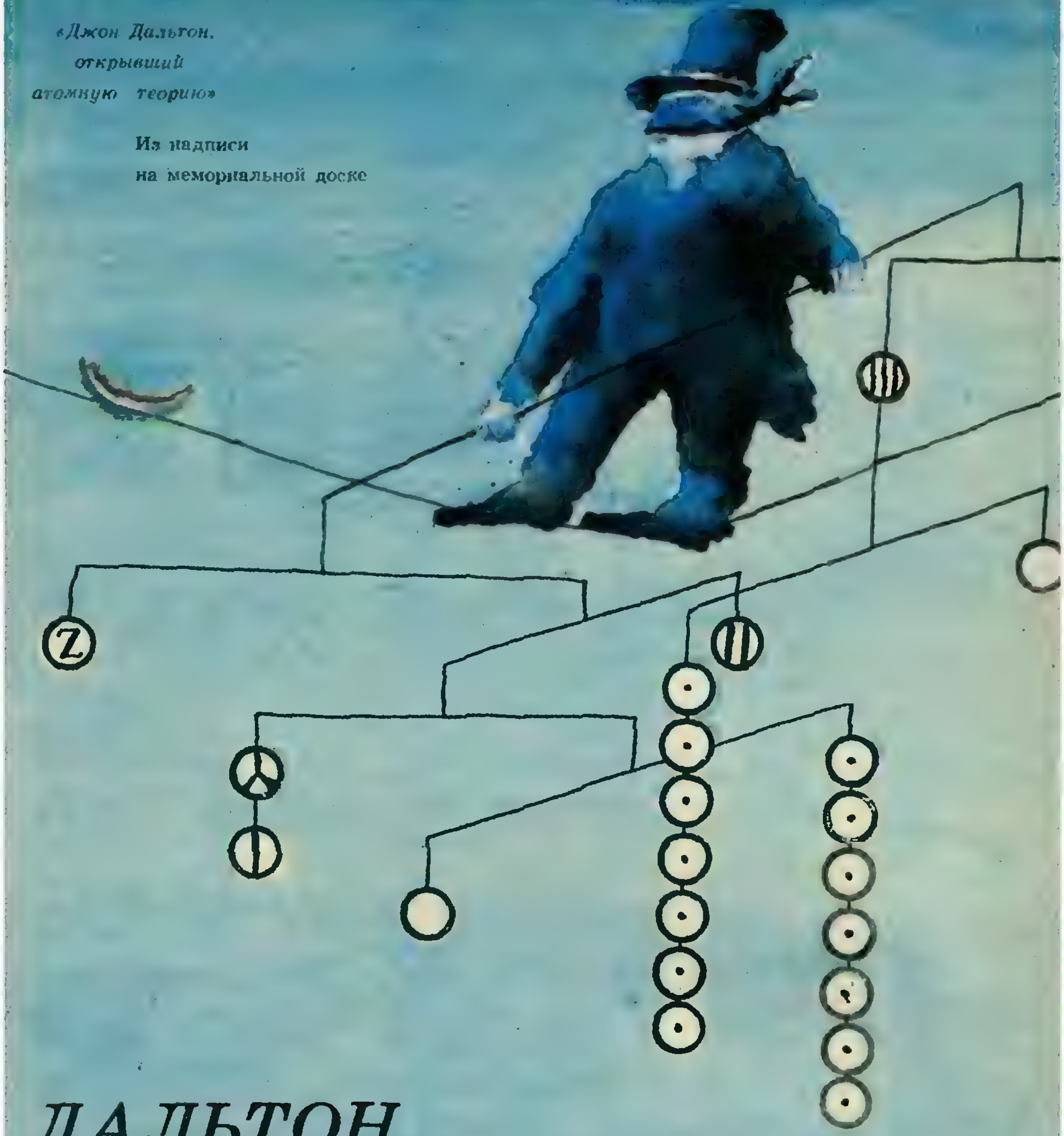


3. Магнитофонная лента длиной 500 м намотана на катушку диаметром 5 см; в результате получилась катушка диаметром 20 см. Какова толщина ленты?



«Джон Дальтон,
открывший
атомную теорию»

Из надписи
на мемориальной доске



ДАЛЬТОН ВЗВЕШИВАЕТ АТОМЫ

Кандидат физико-математических наук
А. С. ШТЕЙНБЕРГ

В 90-х годах XVIII века в не слишком серьезном английском журнале «Календарь для леди и джентельменов» стал сотрудничать молодой человек по имени Джон Дальтон. В его обязанности входило информировать читателей о погодных наблюдениях. Новый сотрудник выказывал весьма похвальное усердие. В частности, он начал вести дневник метеорологических наблюдений... А спустя много лет на страницах этого дневника появилась первая в мире таблица атомных весов элементов, которая прославила имя автора.

Идея о существовании «первокирпичика» вещества — атома — зародилась более двух тысяч лет назад. Но, как утверждает восточная пословица, «сколько ни говори «халва, халва», во рту сладко не станет». Если атомы — реальность, у них должны быть размеры и вес. А задача физики — их измерить. Но как?

Поставьте себя на место физика или химика конца XVIII века. В вашем распоряжении имеются данные о составе ряда веществ, накопленные за столетия алхимических и химических опытов. Например, известно, что вода состоит из кислорода и водорода, углекислый газ — из углерода и кислорода и т.д. Известно также, что существуют «простые вещества», которые невозможно разложить на более элементарные; это водород, кислород, азот, углерод, сера и т. д. Каковы ваши возможности в области измерений? Можно определять веса и объемы тел, в случае газа — измерять давление. Правда, из-за несовершенства аппаратуры все количественные данные большой точностью не отличаются, ошибки до 10 % — в порядке вещей...

Теперь подумайте, как на такой основе можно измерить что-либо, относящееся к мельчайшим атомам (само существование которых к тому же было под вопросом). Дальтон придумал и со столь скромным багажом приступил к «взвешиванию» атомов.

Он принял, что каждое из неразложимых, «простых», веществ состоит из атомов одного сорта. Дальтон понимал, что определить их абсолютный вес (скажем, в граммах) *) ему не под силу. Следовало поступить по-другому: принять вес самого легкого атома за единицу и в этих единицах выразить веса остальных. Самым легким из «простых» веществ был водород, и вес его атома Дальтон приравнял к 1. Далее он решил опираться на данные по химическим реакциям. Допустим, что, вступая в реакцию, два простых вещества A и B образует новое вещество. Тогда, поскольку A и B состоят из неделимых атомов, образование нового вещества может быть связано только с их соединением (рисунок 1). Вот как свою гипотезу формулировал сам Дальтон:

«Если имеются два тела A и B, склонные соединяться между собой, то реакции могут протекать в следующем порядке, начиная с простейшей, а именно:

1 атом $A+1$ атом B =
=1 атом C двойной,
1 атом $A+2$ атома B =
=1 атом D тройной,
2 атома $A+1$ атом B =
=1 атом E тройной,
1 атом $A+3$ атома B =
=1 атом F четверной,
...» и т. п.*)

(Отсюда сразу следовал знаменитый закон кратных отношений: если два элемента образуют друг с другом более одного соединения, то массы одного элемента, приходящиеся на одну и ту же массу другого, относятся как небольшие целые числа. Например, в двойном (AB) и тройном (AB_2) атомах (по терминологии Дальтона) массы вещества B, приходящиеся на одну и ту же массу вещества A, относятся друг к другу как 1:2.)

Теперь можно было сделать решительный шаг в определении атомных весов. Как? Разберем один из расчетов Дальтона.

При соединении кислорода с углеродом в зависимости от весовых соотношений реагентов образуется либо окись углерода, либо углекислый газ.

---

*) Понятно, что на самом деле речь идет о массе; но мы сохраняем терминологию, принятую в то время.

*) Комплекс из нескольких атомов Дальтон называл сложным (двойным, тройным и т. д.) атомом. Сейчас для него принято наименование «молекула».

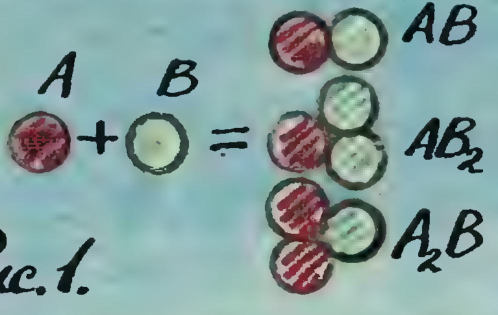


Рис. 1.

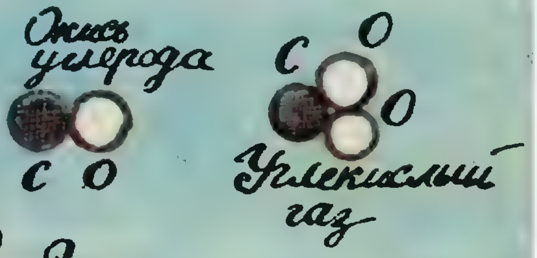


Рис. 2.

Вот какими численными данными располагал Дальтон:

44 % углерода+56 % кислорода= =окись углерода,

28,1 % углерода+71,9 % кислорода=углекислый газ.

В такой записи никаких закономерностей не видно. Но давайте определим, сколько приходится кислорода на одно и то же количество углерода в разных реакциях. В первой на 44 весовые части углерода — 56 весовых частей кислорода. А сколько потребуется кислорода на 44 весовые части углерода во второй реакции? Ответ дает простая пропорция:

$$44 \cdot \frac{79{,}9}{28{,}1} \approx 112{,}6.$$

Почти точно в два раза больше, чем в первой! Дальтон объяснил этот факт, предложив соответствующие атомные модели обоих веществ (см. рисунок 2):

1 атом углерода+1 атом кислорода= =1 атом двойной окиси углерода,

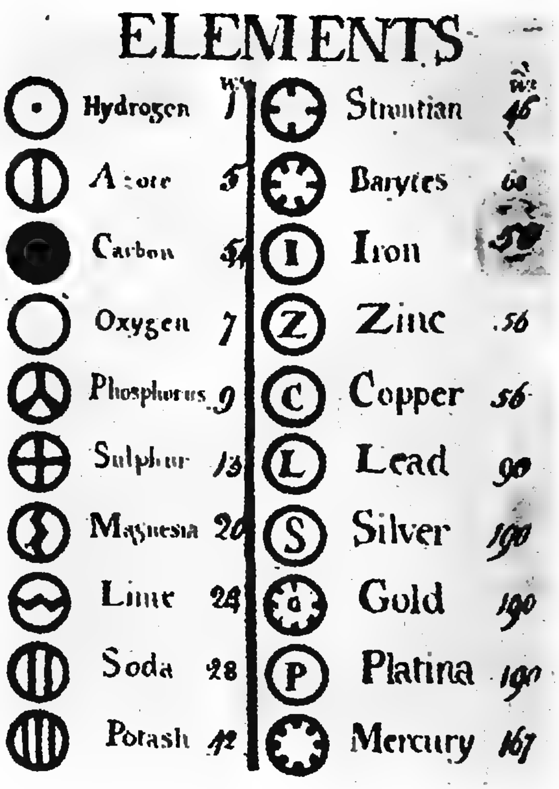
1 атом углерода+2 атома кислорода= =1 атом тройной углекислого газа.

Из такого объяснения (совершенно верного!) следовало, что вес атома кислорода относится к весу атома углерода как 56:44 (в хорошем согласии с современными данными).

План Дальтона по определению атомных весов был предельно ясен: сначала по реакции образования воды подсчитать вес атома кислорода, а затем по реакциям окисления — веса остальных простых веществ.

6 сентября 1803 года в дневнике Дальтона появилась первая таблица атомных весов ряда веществ. Мы приведем часть этой таблицы вместе с современными данными (в тех же единицах измерения):

Атом	Атомный вес	
	по Дальтону	современные данные
Водород (H)	1	1
Кислород (O)	5,66	15,37
Азот (N)	4	14
Углерод (C)	4,5	11,9
Вода (HO) (сложный атом)	6,66	17,87 (молекула H_2O)



Эта таблица символов различных атомов и атомных весов была опубликована в первом томе книги Дальтона «Новая система химической философии» (1808 год).

Казалось бы, ничего похожего. Но это не совсем так. Например, отношение весов кислорода и углерода по данным Дальтона равно 1,26. Современные методы дают очень близкое значение — 1,25. Не стоит также забывать, что это — лишь первая версия таблицы. Впоследствии Дальтон не раз уточнял ее. В частности, вес кислорода «вырос» до 7. К сожалению, один серьезный дефект оставался во всех вариантах: Дальтон неверно определял атомный вес кислорода. А поскольку атомные веса других веществ определялись в основном по реакциям окисления, ошибка автоматически переносилась и на них.

Из таблицы видно, что химическому составу воды, по Дальтону, соответствует формула HO, т. е. на каждый атом кислорода приходится один атом водорода. Именно здесь и крылась неточность. Сегодня химическая формула воды известна всем — H_2O. Но Дальтон этой формулы не знал, а без этого не мог двигаться дальше. Поэтому он ввел следующий принцип: в тех случаях, когда известно лишь одно соединение атомов *A* и *B*, оно является простейшим, т. е. по терминологии Дальтона двойным атомом *AB*. Поэтому формула воды и приняла вид HO.

Вероятно, этот принцип не очень удовлетворял Дальтона. Буквально через несколько строк после определения состава воды он пишет: «В конце концов надо допустить возможность того, что вода может быть тройным соединением. В этом случае, если два атома водорода соединяются с одним атомом кислорода, атом кислорода должен весить в 14 раз больше атома водорода»...

Дальше этого Дальтон не пошел. Более того, ко всем попыткам других исследователей пересмотреть или уточнить его результаты он относился крайне враждебно. Но научных занятий не оставлял до самого конца жизни. 27 июля 1844 года, за несколько часов до смерти и уже чувствуя ее приближение, Джон Дальтон в последний раз взобрался на метеовышку и дрожащей рукой сделал последнюю из 200 000 записей в своем дневнике...

Ошибки Дальтона еще при его жизни исправил замечательный шведский химик Якоб Берцелиус. Будучи убежденным сторонником атомистической теории Дальтона, Берцелиус в то же время писал: «Числа Дальтона лишены той точности, которая необходима для практического применения его теории». В 1826 году, следуя идеям английского ученого, Берцелиус составил таблицу атомных весов, которая по существу не отличается от современной.

Наш календарь

Дифракционной решетке — 200 лет

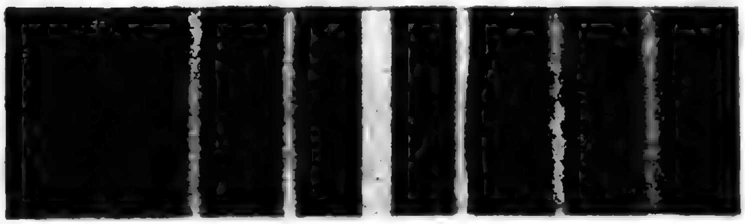
Едва ли какому-либо прибору современная физика обязана столь же многим, как дифракционной решетке, позволяющей точно и надежно определять длины световых волн.

Спектральные приборы с использованием дифракционных решеток впервые начал строить выдающийся немецкий оптик Й. Фраунгофер (1787—1826) в двадцатых годах прошлого века. И в течение более ста лет считалось, что именно он изобрел дифракционную решетку. Но когда в 1932 году в США готовились отметить юбилей одного из зачинателей физики и астрономии в Новом Свете Д. Риттенхауза (1732—1796), неожиданно обнаружилось, что этот ученый изготовил и исследовал дифракционную решетку еще в 1786 году.

Биография Дейвида Риттенхауза довольно хорошо известна. С детства он увлекался конструированием различных механизмов и приборов. Позже к этим увлечениям добавилась «натуральная философия», которую он постигал, штудируя сочинения великого Ньютона. Изготовление физических и астрономических приборов, исследования и наблюдения с их помощью стали делом всей его жизни. Оригинальные по замыслу и отличные по техническому исполнению хронометры, термометры, планетарии, оптические системы и другие приборы Риттенхауза принадлежали к наиболее совершенным исследовательским средствам его эпохи. Риттенхауз изучал сжимаемость воды и тепловое расширение дерева, занимался усовершенствованием громоотводов и экспериментировал с магнитами. Кстати сказать, оказалось, что в своем понимании природы магнетизма твердых тел он чуть ли не на сто лет опередил современников.

Научные заслуги Риттенхауза не остались без признания — он занимал пост профессора и ректора Пенсильванского университета, состоял почетным членом Лондонского королевского общества, после смерти знаменитого Б. Франклина (1706—1790) его избрали президентом Американского философского общества, а в конце жизни он был назначен управляющим Монетным двором.

Как-то в марте 1785 года Риттенхауз получил от одного знакомого юриста письмо, которое его необычайно заинтересовало. «Дорогой сэр! — говорилось в письме. — Позволю себе привлечь Ваше внимание к следующему вопросу из оптики. Я полагаю, вопрос этот совершенно нов, и ответ на него составит удовольствие для Вас и будет поучительным для меня. В один из вечеров прошлого лета, сидя у двери моего дома, я вынул из кармана шелковый носовой платок и, сильно растянув его обеими руками, стал смотреть через него на уличный фонарь ярдах в ста (примерно 90 м) от дома. Я ожидал, что увижу крупным планом нити ткани платка. И дей-



Дифракционная картина, полученная в монохроматическом свете с помощью дифракционной решетки.

ствительно, в согласии с ожиданием я увидел шелковые нити, выглядевшие как толстая проволока. Но я был чрезвычайно удивлен, когда обнаружил, что при движении платка вправо и влево темные полосы как будто вовсе не сдвигались, а оставались перед глазами неподвижными». В заключение юрист писал, что будет чрезвычайно признателен Риттенхаузу за объяснение явления, основанное на «философских принципах».

Через год на заседании Американского философского общества было оглашено ответное письмо Риттенхауза. Начиналось оно так: «Дорогой сэр! Эксперимент, о котором Вы писали, ...гораздо более любопытен, чем это могло бы показаться на первый взгляд. Ибо то, что Вы видите, не ткань платка в крупном плане, а нечто совсем иное...» И далее описывались эксперименты, в которых вместо шелкового носового платка использовалось то, что оптики называют плоской прозрачной дифракционной решеткой.

Риттенхауз изготовил эту решетку из 50—60 отрезков волоса диаметром около 0,1 мм и длиной приблизительно 10 мм, натянутых параллельным рядом на равных расстояниях порядка 0,2 мм один от другого между двумя латунными проволочками с тонкой резьбой, в углублениях которой закреплялись их концы. Исследователь проделал в затемнявшем помещение оконном ставне узкую щель (0,8×75 мм) и взглянул на нее через свою рамку с волосками, расположенную так, что волоски были параллельны щели. Он увидел картину, состоящую из яркой бесцветной линии в центре и пяти-шести радужных полосок — спектров — слева и справа от нее. Порядок цветов в спектрах был обратный тому, который наблюдается при разложении белого света призмой, т. е. в каждом из спектров наименьшее отклонение от центра испытывали фиолетовые лучи, а наибольшее — красные.

Риттенхауз измерил углы отклонения различных лучей в своих спектрах. Если пересчитать его данные на длины волн, то для красного света получается значение 620 нм, а для синего — 460 нм. Эти значения близки к действительным (как известно, видимый спектр простирается приблизительно от 800 нм в красной части до 400 нм в синей части), что явно свидетельствует о хорошей точности опытов Риттенхауза. Сам ученый, конечно, ни о каких световых волнах не помышлял. Следуя Ньютону, он был твердо убежден, что свет — это поток каких-то частиц, поэтому осмыслить наблюдаемое явление Риттенхауз не смог и продолжать эксперимент не стал. Но, видимо, важность их он интуитивно вполне сознавал, поскольку в конце своего сообщения об исследованиях пророчески отметил, что «продолжение этих опытов может привести к новым интересным открытиям, касающимся свойств этой удивительной субстанции, называемой светом».

Уже в первых опытах Риттенхауз выяснил, что по мере возрастания числа щелей в решетке спектральные полоски (линии) становятся более узкими и резкими. В его решетках на один миллиметр приходилось около 5 волосков и соответственно столько же щелей. Фраунгофер вместо волосков использовал штрихи, наносимые на стекло алмазным острием; число штрихов у него доходило до 300 на 1 мм. В 80-х годах прошлого века американский физик Г. Роуланд (1848—1901) построил специальную делительную машину и стал изготовлять дифракционные решетки с числом штрихов до 1000 на 1 мм. В наше время промышленным способом изготовляются решетки, в которых на миллиметр приходится до 6000 штрихов.

Б. Е. Явелов

Просто о простых числах

(Начало см. на с. 8)

которого в целых точках совпадают с множеством всех простых чисел. Этот многочлен имеет степень 25 и для его записи нужно использовать все буквы английского алфавита — переменных всего 26:

$$\begin{aligned}P = (k+2)\{1 &- [wz+h+j-q]^2 - \\ &-[(gk+2g+k+1)(h+j)+h-z]^2 - \\ &-[2n+p+q+z-e]^2 - \\ &-[16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2]^2 - \\ &-[e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2]^2 - [(a^2-1)y^2 + \\ &+1-x^2]^2 - [16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2]^2 - \\ &-[((a+u^2(u^2-a))^2-1)(n+4dy)^2+1- \\ &-(x+cu)^2]^2 - [n+l+v-y]^2 - [(a^2-1)l^2 + \\ &+1-m^2]^2 - [ai+k+1-l-i]^2 - [p + \\ &+l(a-n-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-x]^2 - \\ &-[z+pl(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm]^2\}\end{aligned}$$

Появился он в результате исследований диофантовых уравнений и связан с решением 10-й проблемы Гильберта советским математиком Ю. А. Матиясевичем (см. «Квант», 1970, № 7, с. 39).

В заключение предлагаем заинтересовавшимся читателям еще несколько задач.

Задачи

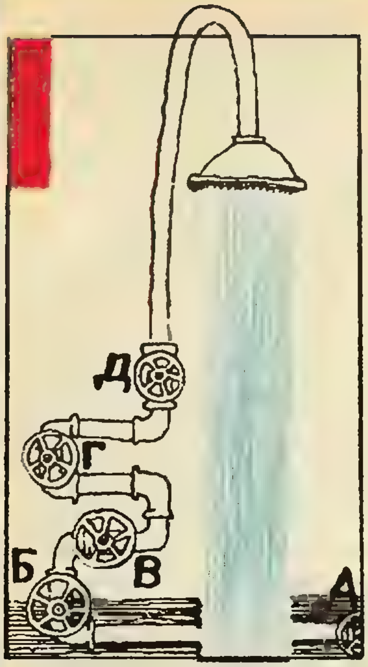
14. Найдите все простые числа, являющиеся одновременно суммами и разностями двух простых чисел.

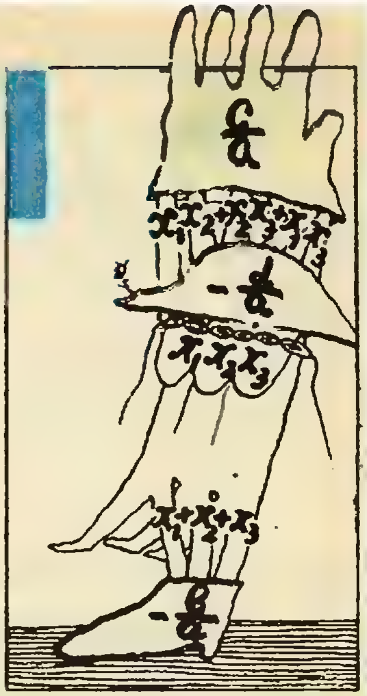
15. Докажите, что квадрат любого простого числа $p > 3$ при делении на 12 дает в остатке 1.

16. Докажите, что если p и p^2+2 — простые числа, то p^3+2 — тоже простое число.

17. Какие простые числа представляются в виде суммы двух кубов натуральных чисел?

18. Каково n, если $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$, $n+15$ — простые?





Школа в „Кванте"

Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Признак делимости на числа вида 10n±1» предназначена восьмиклассникам, заметка «Первый замечательный предел» — девятиклассникам и десятиклассникам, заметка «Формулы Виета» — учащимся восьмых — десятых классов.

Признак делимости на числа вида $10n\pm1$

В 1884 году в одном из номеров издававшегося в Киеве «Журнала элементарной математики» была помещена статья основателя журнала профессора В. П. Ермакова «Признаки делимости чисел». В статье были показаны описываемые ниже признаки делимости на числа вида $10n\pm1$.

Чтобы узнать, делится ли данное число N на число $m=10n+1$, нужно:

А. отбросить от числа N последнюю цифру;

Б. вычесть из полученного числа произведение отброшенной цифры на n;

В. с полученным числом проделать операции **А** и **Б**;

Г. делать это до тех пор, пока (после применения операции **Б**) не останется число, меньшее или равное 0;

Д. если оставшееся число есть 0, то N делится на $m=10n+1$; в противном случае N не делится на m.

Докажем это. Если k — последняя цифра числа N, то операции **А** и **Б** превращают число N в число

$$\frac{N-k}{10}-kn=\frac{N-k-10kn}{10}=\frac{N-km}{10}.$$

Очевидно, что это число делится на m тогда и только тогда, когда N делится на m. Дальнейшие операции уменьшают число, не меняя его делимости на m, откуда и следует Д.

Примеры

$$\boxed{N=11934,\quad m=51.}$$

$$11934\xrightarrow{\text{А}}1193\xrightarrow{\text{Б}}1173\xrightarrow{\text{А}}117\xrightarrow{\text{Б}}102\xrightarrow{\text{А}}10\xrightarrow{\text{Б}}0$$

$$\boxed{N=15314,\quad m=61.}$$

$$15314\xrightarrow{\text{А}}1531\xrightarrow{\text{Б}}1507\xrightarrow{\text{А}}150\xrightarrow{\text{Б}}108\xrightarrow{\text{А}}10\xrightarrow{\text{Б}}-38$$

Мы видим, что 11 934 делится на 51, а 15 314 не делится на 61.

Заметим, что если *в случае делимости* записать отброшенные цифры в обратном порядке, то получится частное; например, 11 934:51=234 (докажите!).

Чтобы получить признак делимости на $m=10n-1$, нужно в Б заменить вычитание сложением, в Г и в Д вместо 0 написать m, а вместо $10n+1$ написать $10n-1$.

Пример

$$\boxed{N=9246\,,\quad m=69}$$

$$9246\xrightarrow{\text{А}}924\xrightarrow{\text{Б}'}966\xrightarrow{\text{А}}96\xrightarrow{\text{Б}'}138\xrightarrow{\text{А}}13\xrightarrow{\text{Б}'}69$$

(здесь операция Б— это измененная операция Б).

Значит, 9246 делится на 69. Придумайте, как в этой строчке прочесть частное 9246:69.

Заметим, наконец, что если записывать числа в двоичной системе счисления, то любое из наших правил дает признак делимости на любое нечетное число (признак делимости на 2 в двоичной системе самоочевиден).

В. Г. Столяр

Первый замечательный предел

В учебном пособии «Алгебра и начала анализа 9—10» (М.: Просвещение, 1986) в п. 20 (с. 94) доказывается *теорема о производной синуса:* функция синус имеет производную в любой точке и $(\sin x)'=\cos x$. При доказательстве этой формулы существенно используется то, что отношение $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ стремится к единице, когда Δx стремится к нулю:

$$\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\to 1 \quad \text{при } \Delta x\to 0.$$

Иными словами, используется теорема о пределе отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$:

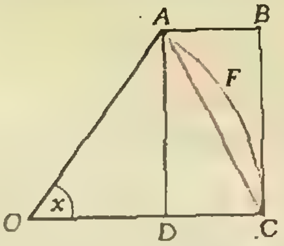
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

Математики называют этот предел *первым замечательным пределом.*

В этой заметке мы докажем теорему о пределе отношения $(\sin x)/x$ при $x\to 0$ (в школьном учебнике соответствующее доказательство опирается на геометрическую наглядность, см. с. 95). При доказательстве нам понадобится более формальное определение предела, чем то, которое дается в «Алгебре и началах анализа 9—10» на с. 76. Именно, мы будем говорить, что *функция $f(x)$ стремится к пределу L при $x\to a$ $(x\neq a)$, если для любого положительного ε найдется такое положительное δ, что для всех x, таких, что $|x-a|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-L|<\varepsilon$.* Другими словами, *функция $f(x)$ стремится к пределу L при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такую окрестность точки a, что при всех x из этой окрестности, $x\neq a$, будет выполняться неравенство $|f(x)-L|<\varepsilon$.* (Продумайте самостоятельно эквивалентность всех трех определений предела: наших двух и определения, данного в школьном учебнике.)

Итак, переходим к доказательству теоремы.

Предположим вначале, что $0<x<\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим единичную окружность с центром O и сравним площадь сегмента AFC с площадью прямоугольника $ABCD$ (см. рисунок).



Площадь сегмента AFC равна разности площадей сектора OAC и треугольника OAC, т. е.

$$S_{AFC}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x>0,$$

откуда

$$\sin x<x.$$

Оценим теперь площадь прямоугольника $ABCD$. Так как $AD=\sin x$, $DC=1-\cos x$,

$$S_{ABCD}=\sin x\,(1-\cos x)=$$
$$=2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\sin x<2\cdot\frac{x^2}{4}\cdot x=\frac{x^3}{2}.$$

Поскольку сегмент AFC лежит внутри прямоугольника, мы получаем цепочку неравенств:

$$0<S_{AFC}<S_{ABCD},$$

$$0<\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x<\frac{x^3}{2}, \qquad (*)$$

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<x^2$$

(в промежутке $0<x<\frac{\pi}{2}$).

Заметим теперь, что функция $\frac{\sin x}{x}$ четная, поэтому неравенство (*) справедливо и в промежутке $-\frac{\pi}{2}<x<0$, т. е. оно справедливо для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x|<\frac{\pi}{2}$.

Так как $x^2\to 0$ при $x\to 0$, то для любого $\varepsilon>0$ можно указать такую окрестность, что при всех x из этой окрестности, $x\neq 0$, будет выполняться неравенство $x^2<\varepsilon$. Учитывая (*), получим, что для всех x из этой окрестности, $x\neq 0$, будем иметь

$$1-\frac{\sin x}{x}=\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ — наша теорема доказана.

Г. А. Сорокин

Формулы Виета

В школьном курсе алгебры (см. «Алгебру 7», п. 23) доказывается *теорема Виета* для приведенных квадратных уравнений. Однако аналогичная теорема справедлива и для кубических уравнений, и для уравнений четвертой степени, и вообще для произвольных алгебраических уравнений степени n, причем старший коэффициент (при x^n) вовсе не обязательно равен единице.

При $n=1$ мы получаем линейное уравнение $ax+b=0$ и если x_1 — его корень, то $ax_1+b=0$, откуда

$$\boxed{x_1=-\frac{b}{a}.}$$

Пусть есть квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$, и пусть x_1 — его корень. Тогда

$$ax_1^2+bx_1+c=0.$$

Вычитая из уравнения $ax^2+bx+c=0$ тождество $ax_1^2+bx_1+c=0$, получим

$$a(x-x_1^2)+b(x-x_1)=0,$$

откуда

$$(x-x_1)(ax+ax_1+b)=0.$$

Так как x_1 корень уравнения $x-x_1=0$, то второй корень квадратного уравнения x_2 удовлетворяет уравнению

$$ax_2+ax_1+b=0.$$

Значит,

$$\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$$

Это — **первая** формула Виета для квадратного уравнения. Далее,

$$x_1^2+\frac{b}{a}x_1+\frac{c}{a}=0,$$

или

$$x_1^2-(x_1+x_2)x_1+\frac{c}{a}=0,$$

откуда получаем **вторую** формулу Виета

$$\boxed{x_1x_2=\frac{c}{a}.}$$

Заметим, что при выводе обеих формул Виета нам вовсе не понадобились формулы для корней квадратного уравнения. (Кстати, они из формул Виета легко находятся.)

Используя формулы Виета, мы можем доказать полезную **теорему**: *если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$, то $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$*. В самом деле,

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\right.$$
$$\left.+\frac{c}{a}\right)=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)=$$
$$=a((x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2))=$$
$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Для корней кубического уравнения формулы Виета выводятся совершенно аналогично, но чтобы читатели лучше усвоили технические приемы, мы еще раз проделаем всю последовательность шагов.

Для общего случая алгебраического уравнения степени n читатели, знакомые с методом полной математической индукции, смогут вывести формулы Виета самостоятельно. Здесь мы эти формулы только выпишем.

Пусть дано уравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}^{*}x+a_n=0.$$

Тогда

$$\boxed{\begin{gathered} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=-\frac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+ \\ +x_2x_4+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0}, \\ x_1x_2x_3+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_3}{a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2\ldots x_{n-1}+\ldots+x_2x_3\ldots x_n=(-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_0}, \\ x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}. \end{gathered}}$$

Итак, пусть у нас есть кубическое уравнение

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a\neq 0),$$

и пусть x_1 — его корень.

Значит, $ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d=0$, и поэтому

$$a(x^3-x_1^3)+b(x^2-x_1^2)+c(x-x_1)=0,$$
$$(x-x_1)(a(x^2+xx_1+x_1^2)+$$
$$+b(x+x_1)+c)=0,$$
$$(x-x_1)(ax^2+(ax_1+b)x+ax_1^2+$$
$$+bx_1+c)=0.$$

Поскольку x_1 — корень уравнения $x-x_1=0$, два других корня x_2 и x_3 нашего кубического уравнения являются корнями квадратного уравнения

$$ax^2+(ax_1+b)x+ax_1^2+bx_1+c=0.$$

Следовательно, для x_2 и x_3 справедливы уже выведенные нами формулы Виета для квадратных уравнений:

$$x_2+x_3=-\frac{ax_1+b}{a}=-x_1-\frac{b}{a}, \quad (*)$$

$$x_2x_3=\frac{ax_1^2+bx_1+c}{a}=x_1^2+\frac{b}{a}x_1+\frac{c}{a}. \quad (**)$$

Равенство (*) сразу же дает нужную нам первую формулу Виета для корней кубического уравнения

$$\boxed{x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}.}$$

Подставляя эту формулу в равенство (**), получим

$$x_2x_3=x_1^2-(x_1+x_2+x_3)x_1=$$
$$=-(x_1x_2+x_1x_3)+\frac{c}{a},$$

откуда

$$\boxed{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a}.}$$

Это — вторая формула Виета для корней кубического уравнения.

Подставляя теперь в тождество

$$x_1^3+\frac{b}{a}x_1^2+\frac{c}{a}x_1+\frac{d}{a}=0$$

вместо b/a и c/a их выражения через корни x_1, x_2, x_3 по формулам Виета, получим

$$x_1^3-(x_1+x_2+x_3)x_1^2+(x_1x_2+x_2x_3+$$
$$+x_1x_3)x_1+\frac{d}{a}=0.$$

Отсюда

$$\boxed{x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}.}$$

— это и есть нужная нам третья формула Виета.

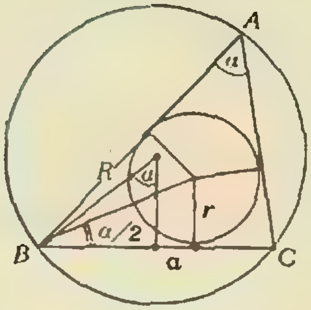
Знание формул Виета облегчает решение многих задач. Найдите, например, зависимость между коэффициентами кубического уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$, если известно, что сумма двух его корней равна произведению этих корней. Мы выпишем ответ:

$$(c+d)(b+c+d)=ad.$$

Геометрическое приложение: тождества в треугольнике

Формулы Виета могут быть использованы как средство получения целых серий тождеств для элементов треугольника.

Общий метод состоит в том, что три «однотипных» элемента (три стороны, или три угла или три высоты и т. д.) оказываются тремя корнями некоторого кубического уравнения, коэффициенты которого могут выражаться, например, через радиусы R и r описанной и вписанной окружностей, полупериметр треугольника p, площадь S и т. д. Приведем пример.



Пусть a, b, c — стороны треугольника, α, β, γ — его соответствующие углы. Очевидно, справедливы соотношения (см. рисунок):

$$\text{(I)} \begin{cases} p-a=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \\ a=2R\sin\alpha, \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{array}{l} p-b=r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},\\ b=2R\sin\beta,\end{array}\right.$$

$$(\mathrm{III})\left\{\begin{array}{l} p-c=r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},\\ c=2R\sin\gamma.\end{array}\right.$$

Исключая a из системы (I), получим для a тождество

$$a^3-2pa^2+(p^2+r^2+4Rr)a-4pRr=0.$$

Исключая же углы β и γ соответственно из второй и третьей систем, получим в точности такие же соотношения для b и c. Это означает, что числа a, b, c являются корнями кубического уравнения

$$x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0,$$

из которого и вытекает целая серия тождеств, опирающихся на формулы Виета. Например,

$$ab+ac+bc=p^2+r^2+4Rr,$$

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{2Rr}.$$

С. Ц. Копрински

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Самая длинная сторона треугольника имеет длину 5 см, самая короткая имеет длину 1 см. Какую наибольшую площадь может иметь такой треугольник?

2. Найдите геометрическое место точек пересечения высот треугольников, вписанных в данную окружность.

3. Шесть различных прямых на плоскости не все параллельны и не все проходят через одну точку. Каково наименьшее возможное количество точек пересечения этих прямых?

4. Найдите все пары целых положительных чисел x, y такие, что $2x+1$ делится на y и $2y+1$ делится на x.

5. Каких чисел больше среди целых чисел от 1 до 1 000 000 включительно:

а) делящихся на 11, но не делящихся на 5 или делящихся на 12, но не делящихся на 7?

б) делящихся на 13, но не делящихся на 6 или делящихся на 15, но не делящихся на 26?

Девятый класс

6. В угол α вписали окружность радиуса 1. Затем вписали вторую окружность, касающуюся первой окружности изнутри угла. Затем вписали третью окружность, касающуюся второй окружности изнутри угла и так далее. Найдите радиус 1000-й окружности.

7. На плоскости дан выпуклый многоугольник P. Обозначим через P_a фигуру, составленную из точек, отстоящих от P на расстоянии a (т. е. точек A, для которых внутри или на границе многоугольника найдется точка B такая, что $AB\leqslant a$). Площадь фигуры P_1 равна S_1, площадь фигуры P_2 равна S_2; найдите площадь многоугольника P.

8. На листе клетчатой бумаги проведена окружность, радиус которой в 10 раз больше стороны клетки. Известно, что окружность не проходит через узлы сетки и не касается ее линий. Через сколько клеток она проходит (укажите все возможности)?

9. При каких a и b уравнение $x^3+ax+b=0$ имеет три (различных) решения, составляющие арифметическую прогрессию?

10. Круг радиуса R расположен в верхней полуплоскости и касается оси Ox в точке O. При каких R этот круг целиком содержится в части плоскости, ограниченной параболой $y=x^2$?

Десятый класс

11. В пространстве дан выпуклый многогранник P. Обозначим через P_a пространственную фигуру, составленную из точек, отстоящих от P на расстоянии a (т. е. точек A, для которых внутри или на границе многогранника найдется точка B такая, что $AB\leqslant a$). Объем фигуры P_1 равен V_1, объем фигуры P_2 равен V_2, объем фигуры P_3 равен V_3; найдите объем многогранника P.

12. Найдите наибольшую площадь треугольника, содержащегося в квадрате со стороной 1.

13. Положим $P(x)=x^3-ax$. При каких x существует $y\neq x$ такое, что $P(y)=P(x)$?

14. Расположите в порядке возрастания числа $100^{100!}$, $100!^{100}$, $100^{100}!$. (Напомним, что символ $n!$ обозначает произведение $1\cdot 2\cdot\ldots\times\times n$.)

15. Вы выливаете воду из цилиндрического стакана, постепенно наклоняя его. Показалось дно. Вы остановились в тот момент, когда открылась ровно половина дна. Сколько воды осталось в стакане — меньше четверти или больше?

Публикацию подготовил *Д. Б. Фукс*

Информация

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет прием учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения. При поступлении на физический факультет МГУ удостоверение об окончании ЗФШ учитывается приемной комиссией на собеседовании.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до *1 сентября* по адресу: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Кузнецов Сергей Владимирович*
Класс ЗФШ	*9-й*
Профессия родителей	*мать — врач, отец — инженер*
Подробный домашний адрес	*240816, г. Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3.*

Решение приемной комиссии о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенное задание оценивается, рецензируется и высылается обратно. Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно окончившие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающим в 9 класс ЗФШ нужно решить задачи 1—4, а поступающим в 10 класс — задачи 4—7.

1. **«Несчастный случай».** Тело выпало из гондолы воздушного шара, поднимающегося вверх с постоянной скоростью $v_0 = 10$ м/с. На какой высоте будет находиться шар в тот момент, когда тело достигнет земли, если в момент выпадения тела шар находился на высоте $H = 240$ м? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. **«Пузырек».** В сосуде, наполненном водой плотностью ρ, всплывает пузырек воздуха объемом V с ускорением a. Найдите силу давления со стороны сосуда на опору. Масса сосуда вместе с водой равна M.

3. **«Возвращение».** Материальная точка начинает двигаться по прямой с постоянным ускорением. Спустя время T после начала движения знак ускорения меняется на противоположный, а величина его остается неизменной. Определите, через какое время t после начала движения точка вернется в исходное положение?

4. **«Металлический дождь».** На трехгранную призму, левая грань которой образует с горизонтом угол $\alpha < 45°$, а верхний угол призмы прямой, падают однородным потоком с одной и той же высоты металлические шарики. В какую сторону будет двигаться призма? Учитывать только один удар каждого шарика. Считать удары упругими. Трением пренебречь.

5. **«Встреча».** Две точки движутся по прямой навстречу друг другу с начальными скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ и постоянными ускорениями $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, направленными противоположно соответствующим скоростям в данный момент времени. При каком максимальном начальном расстоянии между точками они встретятся в процессе движения?

6. **«Заряды в поле».** В однородном электрическом поле находятся отрицательно заряженное тело массой m и зарядом $-q$ и положительно заряженное тело массой M и зарядом $+Q$. Заряды точечные, линия, их соединяющая, совпадает с направлением поля, напряженность которого равна $\vec{E}$. На каком расстоянии друг от друга и в какой последовательности по отношению к направлению поля должны находиться заряды, чтобы они могли двигаться с одинаковым ускорением?

7. **«Рулон».** Рулон бумаги раскручивается так, что скорость конца бумажной ленты постоянна и равна v. В начальный момент радиус рулона R. Какова угловая скорость вращения рулона спустя время t? Толщина бумажной ленты d.

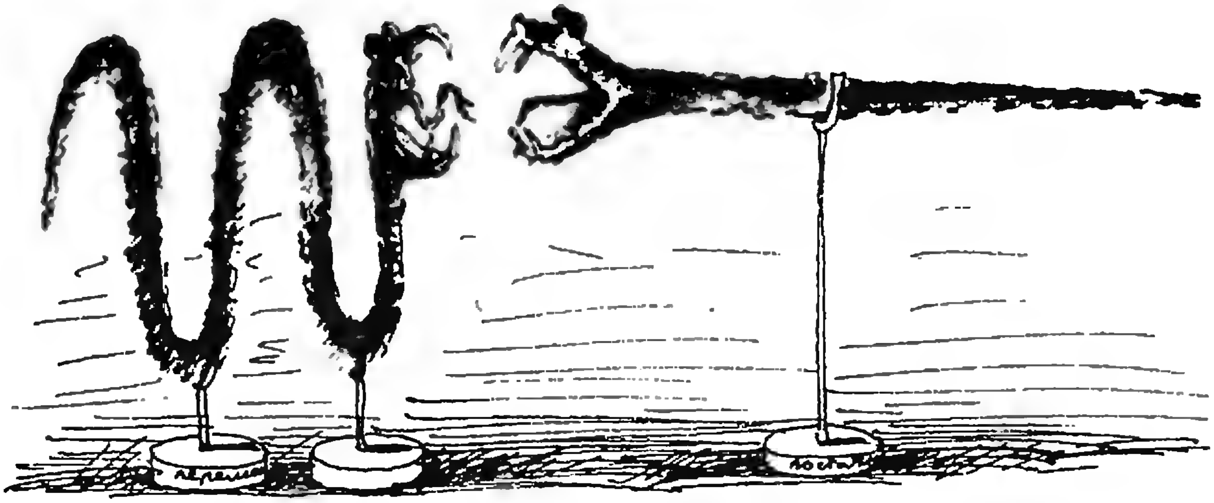
Советуем прочесть

В 1986 году в издательстве «Наука» в серии Библиотечка «Квант» вышли следующие книги:

Данилов И. Д. *Секреты программируемого микрокалькулятора.*

Липунов В. М. *В мире двойных звезд.*

Тихомиров В. М. *Рассказы о максимумах и минимумах.*



Лаборатория „Кванта"

Постоянный или переменный?

С. Л. ГАВРИЛОВ

Сегодня все мы привыкли к тому, что ток постоянный и ток переменный мирно соседствуют в технике и быту, дополняя и «выручая» друг друга. А сто лет назад, в восьмидесятых годах прошлого столетия, в Америке, например, развернулась отчаянная борьба между сторонниками одного и другого тока.

Предыдущая история электричества — от изобретения А. Вольтой первого гальванического элемента в 1800 году и до разработки Т. Эдисоном целой системы электрохозяйства в 1880 году — была историей развития постоянного тока. К этому времени, в частности, Эдисоном была одержана победа над сторонниками газового освещения, которые делали все возможное, чтобы не допустить внедрение электрического освещения.

В 1886 году после создания первых работоспособных трансформаторов у постоянного тока появился сильный конкурент — ток переменный. Его напряжение с помощью трансформатора можно преобразовывать в очень широких пределах, что особенно важно при передаче электроэнергии по проводам на большие расстояния. Вырабатывать переменный ток тоже проще и дешевле, чем постоянный.

Тем не менее сторонники постоянного тока вели борьбу всеми средствами. Если с кем-нибудь из персонала, обслуживающего системы переменного тока, происходил несчастный случай, в газетах появлялись статьи с громкими заголовками: «Убийство электрическим проводом», «Новое тело на проводах» и т. п. Когда комиссия, назначенная конгрессом США для выбора способа казни более «гуманного», чем повешение, рекомендовала использовать переменный ток, это послужило еще одним аргументом в борьбе против переменного тока.

Но преимущества переменного тока во многих областях были настолько очевидны, что Эдисон, будучи в первую очередь изобретателем и инженером, прекратил борьбу. И со временем возникшая из эдисоновской компании «Всеобщая компания электричества» («Дженерал Электрик») стала одной из основных фирм, производящих трансформаторы.

Давайте разберемся, какие же преимущества переменного тока помогли ему одержать победу? Но прежде — немного о нем самом.

В цепи переменного тока его направление и численное значение периодически изменяются. Эти изменения можно описать формулой

$$i=I_m\cos\omega t=I_m\cos 2\pi\nu t=I_m\cos(2\pi t/T),$$

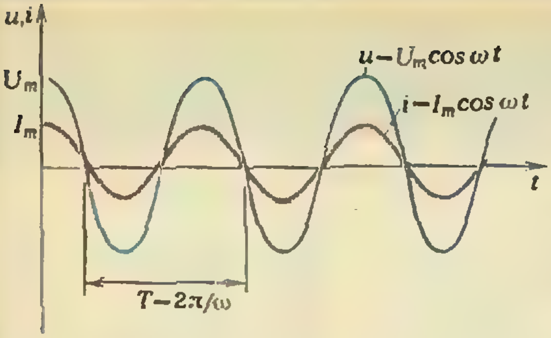


Рис. 1. Графики изменения тока и напряжения в цепи переменного тока.

где i — мгновенное значение переменного тока, I_m — его амплитуда, ν — частота, $\omega=2\pi\nu$ — циклическая частота, T — период изменения тока. Аналогичное выражение можно записать и для напряжения:

$$u=U_m\cos\omega t=U_m\cos 2\pi\nu t=U_m\cos(2\pi t/T).$$

Графики этих функций представлены на рисунке 1, но их можно увидеть и непосредственно — на экране школьного осциллографа. Для этого ко входу осциллографа нужно подсоединить отрезок провода длиной около метра (рис. 2). Провод будет выполнять роль антенны, и на нем возникнет сигнал, наведенный от электропроводки. Измерив с помощью осциллографа период синусоиды, можно убедиться, что частота наведенного сигнала $\nu=50$ Гц, что соответствует частоте переменного тока в электросети.

Генератор переменного тока можно смоделировать, если вращать рамку с проволочной обмоткой между полюсами постоянного магнита, как изображено на рисунке 3. Можно поступить и по-другому — вращать постоянный магнит внутри неподвижной обмотки. Кстати, именно по этому принципу работает большинство промышленных генераторов, только вместо постоянного магнита в них используют электромагнит.

Удобства переменного тока в электротехнике очевидны. С помощью такого тока можно создать так называемое вращающееся магнитное поле, которое и будет приводить в движение валы электродвигателя. Для передачи электроэнергии на большие расстояния с наименьшими потерями напряжение в начале линии передачи нужно повысить, а в конце (перед потребителем)— понизить. В случае переменного тока это легко сделать с помощью повышающего и понижающего трансформаторов (рис. 4).

Радиотехника и электроника тоже, как правило, имеют дело с сигналами переменного тока различной частоты и напряжения. Так, радиопередатчик преобразует ток высокой частоты в радиоволны, которые в радиоприемнике опять превращаются в переменный ток высокой частоты. Микрофон превращает звук в переменный ток низкой частоты, совпадающей с частотой звука. И, наоборот, громкоговоритель преобразует ток звуковой частоты в звук. Если собрать схему, изображенную на рисунке 5, можно наблюдать работу микрофона с помощью осциллографа. Для усиления сигнала можно использовать любой готовый усилитель звуковой частоты (который, безусловно, есть в школьном физическом кабинете).

Приведенные примеры хотя и не исчерпывают, но наглядно иллюстрируют многообразные применения переменного тока. Тем не менее и для постоянного тока тоже находится немало дел. Постоянным током, например, питают электронные схемы, электродвигатели (трамваи и электропоезда приводятся в движение постоянным током), бортовые системы самолетов, автомобилей и т. д. Даже

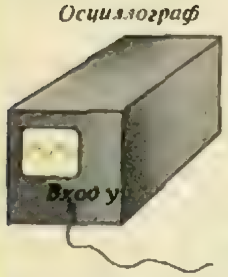


Рис. 2. Переменный ток на экране осциллографа.

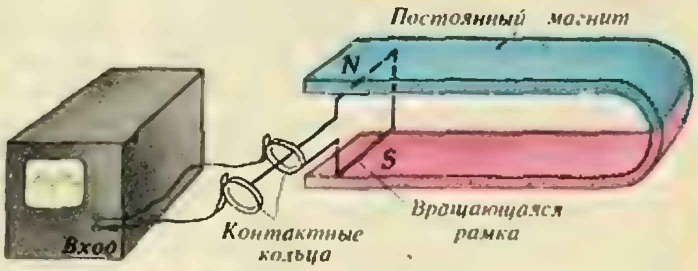


Рис. 3. Модель генератора переменного тока.

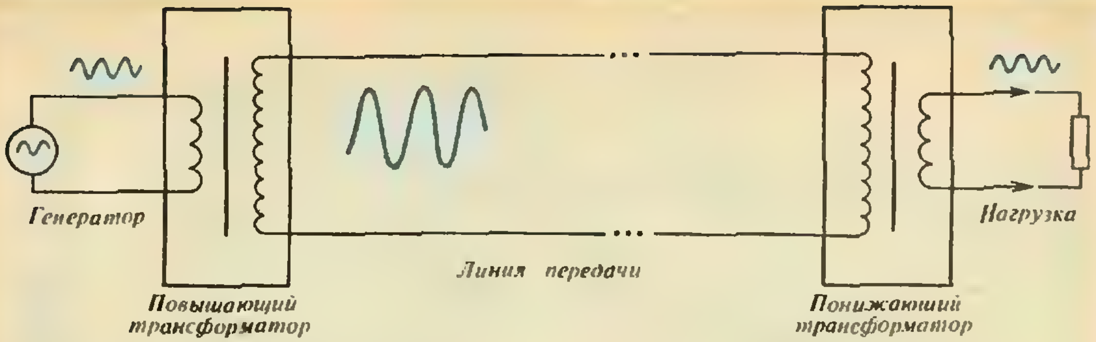


Рис. 4. Схема линии электропередачи.

для передачи электроэнергии на большие расстояния сейчас наряду с переменным током применяется также и постоянный ток. Это объясняется, во-первых, тем, что при передаче больших электрических мощностей становятся заметными потери на электромагнитное излучение, свойственное переменному току, что, конечно же, нежелательно. А во-вторых, теперь научились и постоянный ток преобразовывать в достаточно широком диапазоне. У нас в стране используются линии электропередач как переменного тока (с напряжением до 750 тыс. вольт), так и постоянного тока (с напряжением до 800 тыс. вольт).

Иногда приходится иметь дело с постоянным током очень низкого напряжения — миллионные доли вольта и даже менее. Для преобразования таких напряжений в напряжения, доступные для измерения и работы, применяют специальные приборы — усилители постоянного тока. Они используются в системах автоматического регулирования, в электронных моделирующих вычислительных машинах, в стабилизаторах постоянного тока и т. д.

Усилителю постоянного тока свойственно явление, получившее название «дрейф нуля». Оно состоит в том, что уровень потенциала на выходе усилителя может изменяться даже в отсутствие сигнала на входе (рис. 6). Обычно это связано с температурной нестабильностью элементов усилителя, особенно транзисторов. Дрейф нуля может вносить искажения в работу схемы, и, как правило, этим и определяется минимальная величина входного сигнала, доступная для усиления.

Наименьшим дрейфом обладает балансная схема, изображенная на рисунке 7. Работает она следующим образом. Входной сигнал подается на базы транзисторов T, а выходной сигнал снимается с их коллекторов. При поступлении сигнала ток через один транзистор увеличивается, а через другой — на столько же уменьшается, общий же ток через сопротивление эмиттера $R_э$ остается практически неизменным. Падение напряжения на сопротивлении $R_к$ в цепи коллектора одного транзистора увеличивается, а в цепи другого — уменьшается. Разность напряжений на коллекторах транзисторов пропорциональна входному сигналу — оно в несколько раз его больше. Замечательно, что при абсолютной идентичности плеч балансной схемы дрейф нуля можно было бы исключить полностью, а в реальных условиях его удается свести к минимуму.

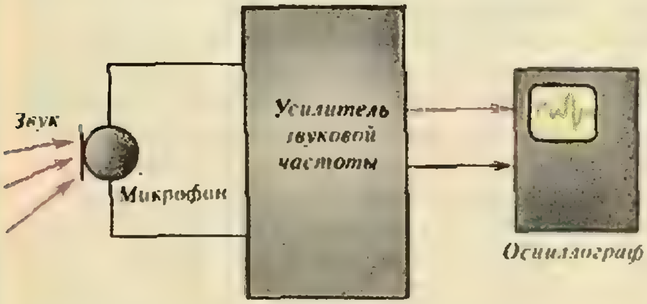


Рис. 5. Преобразование звукового сигнала в электрический.

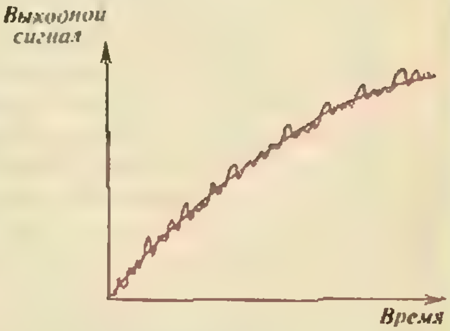


Рис. 6. Дрейф нуля в усилителе постоянного тока.

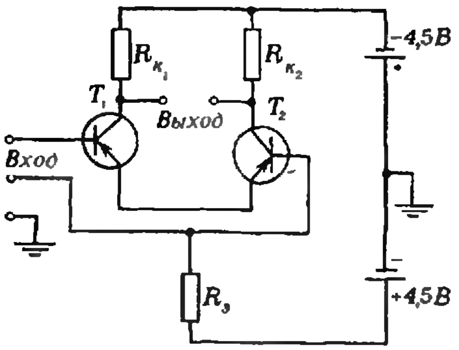


Рис. 7. Балансный усилитель постоянного тока: T_1, T_2 — МП 41; $R_э$=5,1 кОм; $R_{к1}=R_{к2}=3{,}3$ кОм.

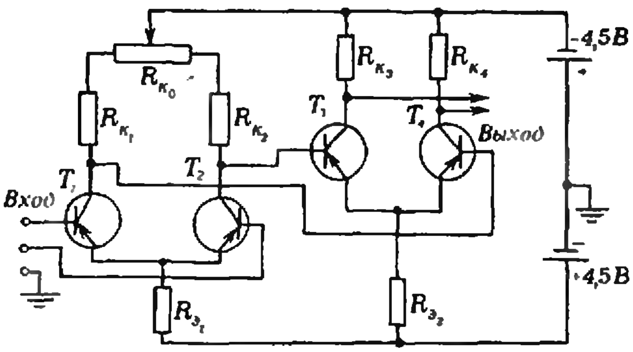


Рис. 8. Двухкаскадный усилитель постоянного тока: T_1, T_2, T_3, T_4 — МП 41; $R_{э1}=5{,}1$ кОм; $R_{э2}=1$ кОм; $R_{к1}=R_{к2}=3{,}3$ кОм; $R_{к3}=R_{к4}=510$ Ом.

На основе такой схемы можно построить многокаскадный усилитель с достаточно большим усилением. На рисунке 8 представлена схема двухкаскадного усилителя постоянного тока, которую можно собрать и испробовать в работе. Ее, например, можно использовать для измерения температуры с помощью термопары.

Принцип работы термопары основан на следующем явлении. Если два спая различных металлов, включенные в электрическую цепь, находятся при разных температурах, то в цепи возникает ток. Он обусловлен так называемой термо-ЭДС, появляющейся в местах спаев. Иными словами, спай двух различных металлов может преобразовывать тепловую энергию в электрическую. Термопары обычно используют для измерения очень высоких или очень низких температур.

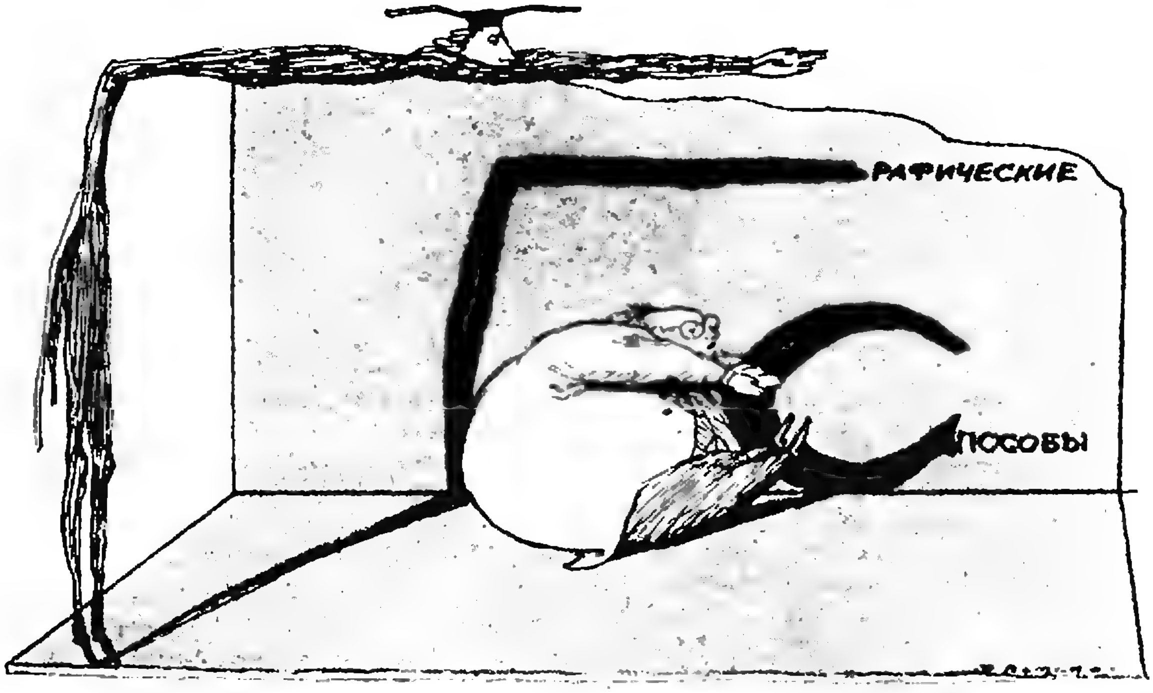
Напряжение, вырабатываемое термопарой, очень мало́, обычно не более нескольких десятков микровольт на градус. Поэтому термопару часто подключают к усилителю постоянного тока, а усиленный сигнал подают на измерительное устройство или на прибор, регулирующий температуру. Хорошие термопары получаются из соединений сплавов хромель (сплав хрома с никелем) и копель (сплав меди с никелем и марганцем) или алюмель (сплав алюминия, никеля, марганца и кремния) и копель. Но можно сделать термопару и из более доступных материалов, например из железа и алюминия.

Металлы в месте контакта должны быть надежно сварены. Это можно сделать так. Графитовый стержень из батарейки для карманного фонаря нужно аккуратно заточить и подключить к одному выводу лабораторного автотрансформатора. Проволочки из разных металлов надо сложить концами и скрутить, а свободные концы проволочек надо подключить ко второму выводу автотрансформатора. Если теперь графитовый стерженек приблизить к скрученным концам проволочек, то при достаточном напряжении (оно подбирается опытным путем) возникнет вольтова дуга, и проволочки сварятся. Чтобы спай получился чистым, без окалины, концы проволочек лучше смочить спиртом или тройным одеколоном (соблюдая меры предосторожности, чтобы вспыхнувший при сварке спирт ничего не поджег!). Очевидно, что места графита и проволочек, за которые приходится при сварке браться руками, должны быть надежно заизолированы, так как напряжение может потребоваться достаточно большое — до 100 вольт.

Изготовленную термопару подключают ко входу усилителя постоянного тока, а к его выходу можно подключить милливольтметр. Для того чтобы проградуировать прибор, термопару можно поместить сначала в сосуд с кипящей водой, а затем в сосуд со льдом. Показания вольтметра будут соответствовать 100 °С и 0 °С.

Бывают еще усилители постоянного тока с использованием переменного. В них сигнал постоянного тока преобразуется в сигнал переменного тока, усиливается, а затем опять превращается в постоянный ток.

Из всего сказанного можно сделать вывод, что начавшаяся сто лет назад «война между постоянным током и переменным» закончилась не только миром, но и очень тесным и плодотворным сотрудничеством.



Практикум абитуриента

О графическом способе решения некоторых физических задач

В. А. БОДИК, И. Я. СТРЕШИНСКИЙ

Часто графическое представление физического процесса делает его более наглядным и тем самым облегчает понимание рассматриваемого явления. Позволяя порой значительно упростить расчеты, графики широко используются на практике для решения различных научно-технических и народно-хозяйственных задач. Умение строить и читать графики сегодня является обязательным для многих специалистов.

В данной статье мы рассмотрим вопрос об использовании графиков для решения некоторых типов физических задач.

§ 1. Легко и красиво решаются графически многие кинематические задачи.

Задача 1. *Заданы уравнения движения двух тел:* $x_1=20t$, $x_2=250-5t$. *Требуется найти: а) место и время встречи; б) где было второе тело, когда первое проходило 100-й метр своего пути; в) в какой момент расстояние между телами составляло 125 м. Тела начали двигаться одновременно.*

На одних осях координат построим графики зависимости координаты x от времени t для обоих тел (рис. 1).

а) Ордината и абсцисса точки пересечения графиков есть соответственно место и время встречи: $x=200$ м, $t=10$ с.

б) С помощью первого графика узнаем момент времени, в который первое тело проходило 100-й метр: $t=5$ с. Теперь, зная это время, по второму графику находим координату второго тела: $x=225$ м.

в) Расстояние между телами в начальный момент было равно 250 м. Следовательно, расстояние 125 м — это длина средней линии в треугольнике ABC, и искомый момент времени $t=5$ с. Из симметрии видно, что такое же расстояние будет между телами и через $t=15$ с после начала движения.

Задача 2. *Найдите время и место соударения частиц, движущихся по*

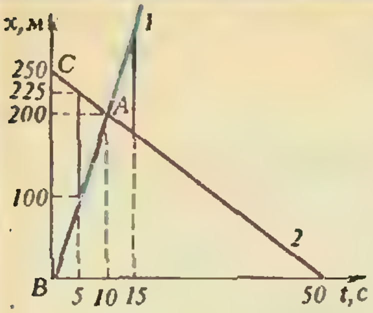


Рис. 1.

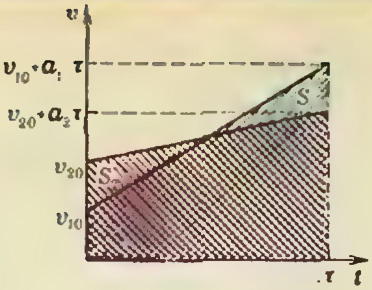


Рис. 2.

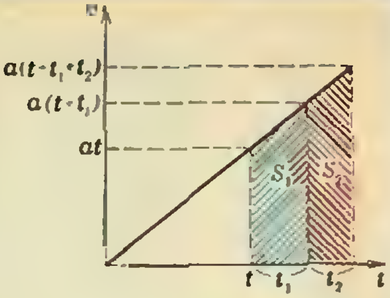


Рис. 3.

одной прямой. Начальная скорость первой частицы v_{10}, ее ускорение a_1, начальная скорость второй частицы v_{20}, ее ускорение a_2. В момент времени $t=0$ обе частицы имели координату $x_0=0$, $v_{20}>v_{10}$, $a_2<a_1$.

К моменту встречи обе частицы пройдут одинаковые пути l, поэтому условием их соударения будет равенство площадей S_1 и S_2, заштрихованных под графиками зависимости скорости v от времени t (рис. 2):

$$S_1=\frac{2v_{10}+a_1\tau}{2}\tau,\quad S_2=\frac{2v_{20}+a_2\tau}{2}\tau.$$

Учитывая, что $S_1=S_2$, находим

$$\tau=\frac{2(v_{20}-v_{10})}{a_1-a_2},$$

$$x=l=\frac{2(v_{20}-v_{10})(v_{20}a_1-v_{10}a_2)}{(a_1-a_2)^2}.$$

Задача 3. *Пассажир, опоздавший к поезду, заметил, что предпоследний вагон прошел мимо него за время $t_1=10$ с, а последний — за $t_2=8$ с. Считая движение поезда равноускоренным, определите время опоздания пассажира.*

На рисунке 3 представлен график зависимости скорости поезда v от времени t. Обозначим длину одного вагона через l. Тогда $S_1=S_2=l$. Приравнивая S_1 и S_2, находим искомое время опоздания пассажира:

$$\frac{at+a(t+t_1)}{2}t_1=\frac{a(t+t_1)+a(t+t_1+t_2)}{2}t_2,$$

$$t=\frac{t_2^2+2t_1t_2-t_1^2}{2(t_1-t_2)}=31\ \text{с}.$$

§ 2. Использование площади под графиком часто позволяет значительно упростить решение задачи.

Задача 4. *Длинные сани, скользящие по очень гладкому льду, въезжают на асфальт и останавливаются, не пройдя и половины своей длины. После этого саням резким толчком сообщают первоначальную скорость, и через некоторое время они вновь останавливаются. Как относятся пути торможения в обоих случаях?*

Сила трения скольжения $F_{тр}$ в данном случае зависит, прежде всего, от того, какова длина x части саней, находящейся на асфальте:

$$F_{тр}=\mu mgx/L$$

(здесь μ — коэффициент трения, m — масса саней, L — их длина). График зависимости $F_{тр}$ от x (рис. 4) дает возможность найти работу по преодолению силы трения. Начальные кинетические энергии саней в обоих случаях равны, значит, равны и работы по преодолению сил трения. Таким образом, записывая равенство работ — площадей S_1 и S_2, находим искомое отношение путей торможения:

$$\frac{\mu mgx_1}{2L}x_1=\frac{\mu mgx_1+\mu mgx_2}{2L}(x_2-x_1),$$

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{x_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

§ 3. Часто в задачах, где встречаются изменяющиеся величины, мы делаем усреднения. Понять методику усреднения могут помочь графики.

Задача 5. *На покоящееся тело массой M налетает со скоростью v_0 тело массой m. Сила, возникающая при взаимодействии, сначала линейно растет от 0 до значения F_0 в течение промежутка времени τ, а затем линейно убывает до 0 за то же время. Определите скорости тел после соударения, считая его центральным.*

Изобразим график зависимости силы взаимодействия F от времени t и заменим переменную силу $F(t)$ постоянно действующей силой f (рис. 5). Поскольку результатом действия сил является изменение импульсов взаимодействующих тел, импульсы обеих сил должны быть равны.

Импульс силы есть площадь под данным графиком, поэтому, записы-

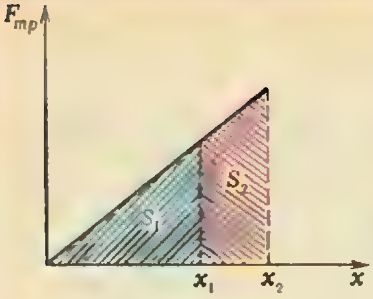


Рис. 4.

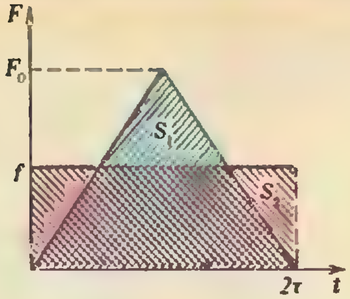


Рис. 5.

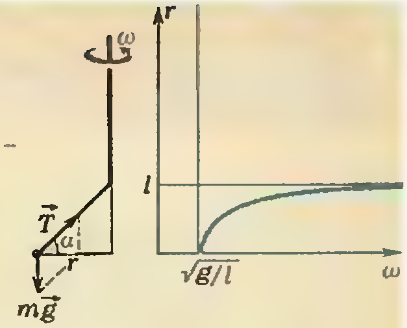


Рис. 6.

вая равенство площадей S_1 и S_2, найдем силу f:

$$F_0\tau = 2f\tau, \text{ откуда } f = F_0/2.$$

Теперь запишем для каждого из соударяющихся тел второй закон Ньютона и найдем соответствующие изменения скоростей тел:

$$m(v_0 - v) = 2f\tau, \; MV = 2f\tau,$$

откуда

$$v = v_0 - 2f\tau/m = v_0 - F_0\tau/m,$$
$$V = 2f\tau/M = F_0\tau/M.$$

§ **4.** В заключение рассмотрим еще одну область применения графиков — для более глубокого понимания физических процессов.

Задача 6. *К вертикально вращающемуся стержню прикреплена нить длиной l (рис. 6). На другом конце нити подвешен шарик. Как зависит расстояние r между шариком и стержнем от угловой скорости вращения стержня ω? Считать, что угловая скорость меняется настолько медленно, что при любом ее значении движение шарика успевает установиться.*

Запишем второй закон Ньютона для шарика массой m:

$$m\omega^2 r = mg \operatorname{ctg} \alpha.$$

Так как $\operatorname{ctg} \alpha = r/\sqrt{l^2 - r^2}$, получаем

$$r = \sqrt{l^2 - g^2/\omega^4}.$$

Изобразим график зависимости расстояния r от угловой скорости вращения ω (см. рис. 6). Из графика видно, что при $\omega \leqslant \sqrt{g/l}$ шарик по окружности не движется, а при неограниченном увеличении ω ($\omega \to \infty$) расстояние r асимптотически приближается к длине нити l.

Упражнения

1. Почтовая связь между пристанями M и K осуществляется двумя катерами. В установленное время катера отплывают от своих пристаней, встречаются, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Если катера отплывают от своих пристаней одновременно, то катер, выходящий из M, тратит на путь в оба конца 3 часа, а катер из K — 1,5 часа. Скорости обоих катеров относительно воды одинаковы. Определите, на сколько позже должен отплыть катер из K, чтобы оба катера находились в пути одно и то же время.

2. Конькобежец проходит дистанцию длиной L с постоянной скоростью, а затем тормозит с постоянным ускорением a. При какой скорости время движения до остановки будет наименьшим?

3. Глубина проникновения частиц массой m в область действия тормозящей силы прямо пропорциональна импульсу частиц: $l = aP$. Найдите зависимость тормозящей силы от глубины проникновения.

4. В длинном цилиндрическом сосуде находится вещество, плотность которого увеличивается с глубиной по закону $\rho \sim x^2$. Как относятся длины частей сосуда, имеющих одинаковые массы? Оболочка сосуда невесома.

Поправка

В «Кванте» № 1 за этот год была опубликована статья «О столкновении шаров и «серьезной» физике». В начале этой статьи рассматривался вопрос о нецентральном соударении шаров с произвольным соотношением масс. В полученном выражении для скорости первого шара после соударения был потерян один корень: в формуле для v_1' вместо «—» должно стоять «±». Правило выбора знака при этом оказывается следующим. В случае $m_1 \leqslant m_2$ при любых углах θ имеется только одно решение, соответствующее знаку «+» перед радикалом. В случае

$$\frac{m_2}{\sin\theta} \geqslant m_1 > m_2 \text{ и } \frac{\pi}{2} > \theta > 0.$$

оба знака перед радикалом дают физически реализующиеся решения. Рассеяние на углы $\theta > \frac{\pi}{2}$ невозможно.

Учет знаков «±» в v_1' приводит к тому, что в формуле для $\frac{|\Delta T|}{T_1}$ — для относительного изменения кинетической энергии налетающего шара — перед радикалом вместо «+» должно стоять «∓». Соответствующие изменения следует внести в рисунок 2.

Редакция приносит извинения за допущенную неточность.

Варианты вступительных экзаменов

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты: математико-механический, физический, прикладной математики — процессов управления)

1. Двое рабочих изготавливают вместе за 8 часов 136 деталей. Если бы первый рабочий делал на 2 детали в час меньше, а второй — на одну больше, то на изготовление одной детали второй рабочий тратил бы на 4 минуты меньше, чем первый. Сколько деталей в час изготавливает первый рабочий?

2. Решите неравенство $3x+\sqrt{5x+9}<-5$.

3. При каких a большее из двух чисел $5a-1$ и $|2a|$ равно квадрату меньшего?

4.1 *(для математико-механического факультета).* Расстояние от основания высоты, опущенной из вершины A треугольника ABC, до вершины B в два раза меньше, чем до вершины C. Найдите угол A, если известно, что $\frac{AC}{AB}=a$.

4.2 *(для физического факультета).* На стороне AB длины c треугольника ABC выбрана точка D. Через точку D проведены две прямые, параллельные соответственно AC и BC и пересекающие сторону AC в точке F и сторону BC в точке E. Найдите BD, если известно, что $AC=b$, $BC=a$, $\frac{BE}{AF}=\alpha$.

4.3 *(для факультета прикладной математики — процессов управления).* В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания с гипотенузой делит гипотенузу в отношении a. В каком отношении точки касания делят катеты?

5. Шар радиусом R вписан в треугольную пирамиду, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

(химический факультет)

1. Если к смеси двух веществ A и B добавить 3 кг вещества A, то его процентное содержание увеличится вдвое. Если же к исходной смеси добавить 3 кг вещества B, то процентное содержание вещества A уменьшится вдвое. Определите вес A и его процентное содержание в смеси.

2. Решите неравенство $x<\sqrt{\frac{5x+2}{3}}$.

3. Решите уравнение

$$\cos x+\sin x=\frac{0{,}5+\sqrt{\frac{3}{8}}}{\cos x}.$$

4. Найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружности равнобедренного треугольника с углом α при основании.

5. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды, проходящего через вершину пирамиды и середины двух сторон оснований, если известно, что длина стороны основания равна a, а угол между плоскостью сечения и основанием равен α.

Вариант 3

(географический и геологический факультеты)

1. Из города A в город B, расстояние между которыми 100 км, выехал велосипедист. Через час после этого из A выехал второй велосипедист, который, нагнав первого, с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в A в тот момент, в который первый достиг B. Какова скорость первого велосипедиста, если скорость второго 30 км/ч?

2.1 *(для географического факультета).* Решите систему уравнений

$$\begin{cases}4^x+2^y=12,\\ \sqrt{3x-2y}=\sqrt{5+x-3y}.\end{cases}$$

2.2 *(для геологического факультета).* Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-7x}-\sqrt{x-3}=0.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{-\frac{3}{2}\cos 2x}=\sin x.$$

4. Решите неравенство

$$(\log_{x+1}x)\cdot\log_{\frac{1}{x}}(x-2)>1.$$

5. На плоскости даны две окружности радиусов r_1 и r_2 $(r_1>r_2)$. Найдите расстояние между центрами окружностей, если известно, что оно в k раз больше расстояния между точками касания общей внешней касательной.

Вариант 4

(биолого-почвенный факультет, отделение математической лингвистики филологического факультета)

1. Из города A в город B, расстояние между которыми 270 км, отправился путешественник. Первую часть пути длиной 120 км он преодолел на автомобиле, вторую — на мотоцикле. Оставшуюся третью часть пути он проехал на автомобиле за 1 час. Скорость мотоцикла на 15 км/ч меньше скорости автомобиля. Найдите скорость автомобиля, если известно, что средняя скорость путешественника равна 54 км/ч.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{6x+4}=1.$$

3.1 *(для отделений почвоведения и математической лингвистики).* Решите уравнение

$$\sin x+2\sin^3x+\sqrt{2}\sin 2x=0.$$

3. 2. Решите неравенство

$$\frac{1-\sin x}{\sin 2x}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4.1 *(для отделения почвоведения).* В прямоугольный треугольник площади 24 вписана окружность. Точка касания с гипотенузой делит гипотенузу в отношении 2:3. Найдите длины сторон треугольника.

4.2. Окружность касается сторон AB и AD квадрата $ABCD$ и проходит через вершину C. В каком отношении эта окружность делит сторону BC?

5. Основание треугольной пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Найдите объем пирамиды, если известно, что все двугранные углы при основании пирамиды равны β.

Вариант 5

(факультеты психологии и экономический)

1. Два путешественника отправились из пункта A в пункт B на велосипедах. Каждый через некоторое время пересел на мотоцикл: первый, проехав 1/8 пути, а второй — 3/4 пути. Во сколько раз скорость мотоцикла больше скорости велосипеда, если известно, что первый путешественник затратил на весь путь из A в B в два раза меньше времени, чем второй?

2.1 *(для факультета психологии и отделения экономической кибернетики).* Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x+3\cdot 2^y=7, \\ x+2y=2. \end{cases}$$

2. 2 *(для отделений политэкономии и прикладной социологии).* Решите уравнение

$$2\lg(x^3)=\lg(x^6+x^2-x-2).$$

2. 3. Решите неравенство

$$3x+2+\sqrt{5x+4}<0.$$

3. 1 *(для факультета психологии).* Решите уравнение

$$2\sin^3 x\cdot\cos^3 2x=\sin^2 x+\cos^2 2x.$$

3.2 *(для отделений экономической кибернетики, политэкономии и прикладной социологии).* Решите уравнение

$$1+2\sin x\cdot\sin 3x=4\sin x+4\sin 3x+\cos 2x.$$

3. 3. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\cos x}=\sqrt{6}.$$

4.1 *(для факультета психологии и отделения экономической кибернетики).*

Найдите периметр равнобедренного треугольника площади S, если известно, что длина высоты, опущенной на основание, равна h.

4.2 *(для отделений политэкономии и прикладной социологии).* Решите неравенство

$$\log_2\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\leqslant -1.$$

4.3. Решите уравнение

$$\log_x 4+\log_2(x^2)=5.$$

5. Основанием четырехугольной пирамиды $OABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=2$, $BC=\sqrt{3}$. Боковые грани OAB, OBC и OCD наклонены к основанию соответственно под углами 45°, 60° и 45°. Найдите угол наклона грани OAD к основанию.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Из одной точки одновременно бросают два тела — горизонтально и вертикально вверх с одинаковыми скоростями v_0. На каком расстоянии будут тела через заданный промежуток времени t?

2. Сплошной однородный шар объемом V и плотностью ρ плавает на границе двух несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1<\rho<\rho_2$). Какая часть объема шара будет находиться в верхней и какая в нижней жидкости?

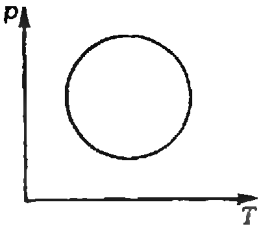


Рис. 1.

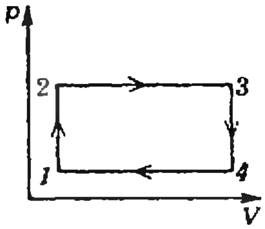


Рис. 2.

3. На какую высоту может подняться автомобиль с работающим мотором по ледяной горе ($\mu<\operatorname{tg}\alpha$), если у начала подъема он имел скорость v_0?

4. На $p-T$-диаграмме (рис. 1) показан процесс, проводимый с идеальным газом. Объем газа постоянен. Найдите точки, где масса газа максимальна и минимальна.

5. Над одним молем газа совершают замкнутый цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 2). Температуры в точках 1 и 3 равны T_1 и T_3. Определите работу, совершаемую за цикл, если точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

6. Два заряженных шарика, подвешенные на нитях одинаковой длины, опускают в керосин. Найдите плотности шариков, если угол расхождения нитей в воздухе и керосине одинаков. Шарики одинаковые.

7. Электрон влетает в плоский конденсатор посередине между пластинами. Расстояние между пластинами d, длина пластин l, напряжение между ними U. Какова должна быть скорость электрона, чтобы он попал в круглую мишень радиусом R, расположенную на расстоянии L от конденсатора? Краевыми эффектами пренебречь.

8. Электромотор питается от источника с напряжением $U=24$ В. Чему равна мощность на валу мотора при протекании по обмотке тока $I_1=8$ А, если известно, что при полностью заторможенном якоре течет ток $I_2=16$ А?

9. При падении на плоскую границу двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 луч преломился таким образом, что угол между отраженным и преломленным лучами составил $\gamma=90°$. Найдите угол падения луча.

10. Человек посмотрел по вертикальному направлению на дно водоема и оценил его кажущуюся глубину в $h=0{,}9$ м. Определите истинную глубину водоема. Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

Публикацию подготовили
А. С. Меркурьев, А. С. Чирцов

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Найдите все решения уравнения $\cos x\sin 2x=3\sin^2 x$, удовлетворяющие условию $-12<x<-10$.

2. Решите неравенство

$$\log_{1/2}(\sqrt{x+1}-x)<2.$$

3. Решите уравнение

$$7^{x-0.125x^2}=7^{1-x}\cdot(\sqrt[8]{7})^{x^2}+6.$$

4. Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x, y, удовлетворяющая уравнению $12x^2+41xy+35y^2=5$ и двум неравенствам $y+1<x$, $a^2x-3ay<6$.

5. В правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания и высотой, равными 1, вписан прямоугольный параллелепипед, основание которого расположено в плоскости основания пирамиды, а вершины противоположной грани — на боковой поверхности пирамиды. Площадь основания параллелепипеда равна $\frac{1}{18}$. В каких пределах может меняться диагональ параллелепипеда?

Вариант 2

(факультет технической кибернетики)

1. Решите уравнение

$$3^{2x+1}=3^{x+2}+\sqrt{1-6\cdot 3^x+3^{2(x+1)}}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)^3-\sqrt{1-9\log_3(1+x+2\sqrt{3})}=$$
$$=1,5\log^3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right).$$

3. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства $4x^2+8x+3<0$ будет содержаться среди решений неравенства $2ax^2-(7a-4)x-14>0$?

4. Найдите $\sin 2a$, если $\cos 2a\geqslant-\frac{1}{8}$ и $\sin a\geqslant\frac{3}{4}$.

5. Про тетраэдр известно, что все его грани подобные, но не все равные между собой треугольники, причем у любых двух граней есть по меньшей мере одна пара равных ребер, не считая общего ребра. Докажите, что длины сторон каждой грани образуют геометрическую прогрессию, и найдите объем этого тетраэдра, если длины двух ребер, лежащих в одной грани, равны $\sqrt{2+2\sqrt{5}}$ и $2\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Вариант 3

(радиофизический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_5(3-2x)}-\frac{1}{4-\log_5(3-2x)}<0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+2^y=-1, \\ -20x+3,5\cdot 2^{y+1}=146. \end{cases}$$

3. Найдите все решения уравнения $\cos x+(1+\cos x)\,\mathrm{tg}^2x-1=0$, удовлетворяющие неравенству $\mathrm{tg}\,x>0$.

4. Прямоугольник $ABCD$ расположен на координатной плоскости так, что сторона AB лежит на оси ординат, вершины C и D лежат соответственно на параболе $y=-x^2+2x-2$ и на прямой $y=3-3x$, причем абсцисса вершины D принадлежит отрезку $[0,12;\ 1,2]$. Какое значение должна иметь абсцисса вершины D, чтобы площадь прямоугольника $ABCD$ была наименьшей?

5. В пространстве даны точки A, B, C, D, причем $AB=BC=CD=5$. Найдите угол между прямыми AC и BD.

Физика

Задачи устного экзамена

1. При распаде неподвижного ядра образуется три осколка массами m_1, m_2 и m_3 с общей кинетической энергией E_0. Найдите скорости осколков, если направления скоростей составляют друг с другом угол $\alpha=120°$.

2. Параллельный пучок молекул азота, имеющих скорость $v=400$ м/с, падает на стенку под углом $\alpha=30°$ к ее нормали. Концентрация молекул в пучке $n=0,9\cdot10^{19}$ см$^{-3}$. Найдите давление молекул пучка на стенку, считая, что молекулы ударяются о нее абсолютно упруго.

3. Гелий массой $m=10$ г нагрели на $\Delta t=100$ °C при постоянном давлении. Определите количество теплоты, переданное газу, приращение внутренней энергии и работу по расширению газа.

4. Два удаленных сферических проводника радиусов R_1 и R_2 были заряжены до потенциалов φ_1 и φ_2 соответственно. Затем их соединили тонким проводником. Чему равно изменение энергии системы? Объясните полученный результат.

5. Плоский конденсатор заполнили диэлектриком и на пластины подали некоторую разность потенциалов. Его энергия при этом равна $W=2\cdot10^{-5}$ Дж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора. Работа, которую надо было совершить для этого, равна $A=7\cdot10^{-5}$ Дж. Найдите диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

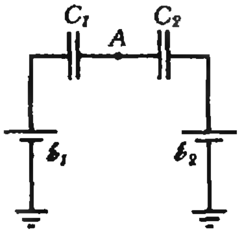


Рис. 1.

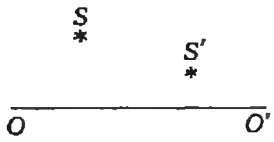


Рис. 2.

6. Два конденсатора и два источника соединены по схеме, изображенной на рисунке 1. Определите потенциал в точке A (по отношению к земле), если $C_1=0,1$ мкФ, $C_2=0,4$ мкФ, $\mathcal{E}_1=1,5$ В, $\mathcal{E}_2=3$ В.

7. Протон влетает в однородное магнитное поле ($B=40$ мТл) со скоростью $v=4,5\times10^5$ м/с под углом $\alpha=60°$ к направлению вектора $\vec{B}$. Найдите путь и перемещение протона за время $\Delta t=2,45$ мкс его движения в магнитном поле. Масса протона $m_p=1,67\times10^{-27}$ кг, его заряд $q_p=1,60\cdot10^{-19}$ Кл.

8. На прозрачный шар, имеющий радиус R и показатель преломления n, падает в направлении одного из диаметров узкий параллельный пучок световых лучей. На каком расстоянии от центра шара лучи будут сфокусированы?

9. На дне ручья лежит камешек. Мальчик хочет дотронуться до него палкой. Прицеливаясь, он держит палку под углом $\alpha=45°$. На каком расстоянии от камня палка воткнется в дно ручья, если его глубина $h=50$ см? Показатель преломления воды $n=1,33$.

10. Задана оптическая ось линзы OO', светящаяся точка S и ее изображение в линзе S' (рис. 2). Найдите построением с помощью линейки и карандаша положение фокуса линзы.

Публикацию подготовили
В. А. Опарин, С. П. Преображенский,
И. Б. Русанов, Ю. А. Хватов

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0{,}5}(x+1).$$

2. Найдите $\cos 2\alpha$, если известно, что $2\operatorname{ctg}^2\alpha+7\operatorname{ctg}\alpha+3=0$ и угол α удовлетворяет неравенствам:

а) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$; б) $\frac{7\pi}{4}<\alpha<2\pi$.

3. Решите систему неравенств

$$\sqrt{x^2-9x+20}\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant\sqrt{x^2-13}.$$

4. В треугольник вписана окружность радиуса 3. Вычислите длины сторон треугольника, если одна из них разделена точкой касания на отрезки с длинами 4 и 3.

5. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на апофемах пирамиды и четыре в плоскости основания. Все ребра пирамиды равны a. Вычислите полную поверхность и объем куба.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Упростите выражение

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:$$
$$:\frac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\cdot\sqrt{a+1}-(a+1)\cdot\sqrt{a-1}}.$$

2. Два тела начали движение одновременно и движутся прямолинейно навстречу друг другу. Одно из них проходит в каждую минуту 7 м, другое в первую минуту прошло 24 м, а в каждую последующую проходит на 4 м меньше, чем в предыдущую. Через сколько минут оба тела встретятся, если первоначальное расстояние между ними было равно 100 м?

3. Решите уравнение

$$1+\sin 2x=\sin x+\cos x.$$

4. Решите неравенство

$$3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2.$$

5. Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 5 и 3 и углом 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35. Найдите объем призмы.

Вариант 3
(химический факультет)

1. Проверьте равенство

$$\frac{\sin 20^\circ\cdot\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cdot\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cdot\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cdot\cos 99^\circ}=1.$$

2. Решите уравнение

$$3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x.$$

3. При каких значениях p оба корня уравнения $x^2+2(p+1)x+9p-5=0$ отрицательны?

4. Смешали 30 %-ный раствор соляной кислоты с 10 %-ным и получили 600 г 15 %-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

5. В цилиндр вписана прямая призма, основанием которой служит равнобедренный треугольник с тупым углом, равным α. Найдите объем цилиндра, если известно, что боковая сторона основания призмы равна b, а диагональ бóльшей боковой грани равна l.

Вариант 4
(индустриально-педагогический факультет)

1. Докажите тождество

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2(2x-1)+\log_2(x+5)=\log_2 13.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+5x}>25^{-3}.$$

4. Упростите и вычислите значение выражения

$$\sqrt[6]{4x\cdot(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}\quad\text{при } x=50.$$

5. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 и 18, а площадь равна 90. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 6. Определите боковую поверхность этой пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Чтобы покинуть Землю, ракета должна развить скорость $v=11{,}2$ км/с. На какой высоте и через какой промежуток времени при вертикальном подъеме это произойдет, если ракета будет двигаться с постоянным ускорением $a=30g$? Каково на этой высоте ускорение свободного падения? Радиус Земли $R=6{,}37\cdot10^6$ м. Расчет удобно проводить с помощью микрокалькулятора.

2. Если бы через центр Земли удалось прорыть сквозной канал, то сколько времени понадобилось бы свободно падающему камню, чтобы достичь противоположного конца канала? Радиус Земли $R=6{,}37\cdot10^6$ м. Считать, что действующая на камень сила тяжести меняется по закону $F=mgr/R$, где r — расстояние от камня массой m до центра Земли.

3. Найдите зависимость модуля силы трения скольжения тела массой m о поверхность наклонной плоскости от угла наклона плоскости α в интервале $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$. Коэффициент трения скольжения равен μ.

4. Можно ли достать воду из колодца глубиной $h=12$ м с помощью насоса, расположенного на поверхности Земли и способного создавать в опущенной в колодец трубе сколь угодно низкое давление воздуха?

5. Две сферы объемом V_1 и V_2 соединены короткой трубкой, в которой имеется изолирующая пористая перегородка. С ее помощью в сосудах устанавливается равенство давлений, но не температур. Система находится при температуре T_0 и содержит газ под давлением p_0. Затем температура первой сферы изменяется до T_1, а второй — до T_2. Какое давление установится в системе? Тепловым расширением сфер пренебречь.

6. Из колодца глубиной H качают воду насосом мощностью N. КПД насоса η. За какое время откачается объем воды V?

7. Как должны соотноситься расстояния между двумя точечными зарядами в керосине и в вакууме, чтобы сила взаимодействия зарядов была одинаковой в обоих случаях?

8. Какова сила взаимодействия между протоном и электроном на первой орбите в модели атома Бора? Расчет удобно проводить с помощью микрокалькулятора.

9. Электрон, находясь в однородном магнитном поле, движется по окружности радиусом r. Индукция магнитного поля $\vec{B}$. Направление вектора индукции перпендикулярно плоскости окружности. Найдите кинетическую энергию электрона.

10. Считая радиус атомного ядра равным $R=1{,}2\cdot10^{-15}\cdot A^{1/3}$ м, где A — массовое число, определите плотность ядерного вещества, выраженную в числе нуклонов в 1 м^3 и в кг/м^3. Масса нуклона $m_0=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг. Какова будет масса 1 см^3 вещества, состоящего из одних ядер?

Публикацию подготовили
М. И. Каликина, В. В. Лаптев

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция $f(x)=\operatorname{tg}^2 x+16\cos^2 x$.

а) Найдите наименьший период функции f.

б) Решите уравнение $f(x)=9$.

в) Найдите минимум функции f.

2. Дана функция $f(x)=\log_2\dfrac{x(x+1)}{x+2}$.

а) Найдите область определения функции f.

б) Решите уравнение $f(x)=1$.

в) Решите неравенство $f(x)>0$.

г) При каких значениях a уравнение $f(x)=\log_2(x+a)$ имеет решение?

3. Окружности радиусов 1 и R с центрами в точках A и B касаются друг друга внешним образом. Прямая l касается этих окружностей в двух различных точках C и D соответственно.

а) Докажите, что отношение $\dfrac{AB}{CD}$ равно $k(R)=\dfrac{R+1}{2\sqrt{R}}$.

б) Найдите величину R, если $k(R)=\dfrac{5}{3}$.

в) Докажите, что $k(R)\geqslant 1$.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x)=Ax^2+x+B\cdot\ln x$.

а) Найдите A и B, если известно, что $f(1)=2$, $f'(1)=4$.

б) При каких A и B точки $x=1$ и $x=2$ являются точками экстремума для функции f?

в) При каких A и B функция возрастает на всей своей области определения?

2. Дана функция $f(x)=\log_2 x+\log_x 2$.

а) Найдите область определения функции f.

б) Решите уравнение $f(x)=\dfrac{5}{2}$.

в) При каких значениях аргумента функция f принимает экстремальные значения?

г) При каких значениях a уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы одно решение?

3. Дан треугольник ABC, в котором $CB=1$, $\widehat{C}=\pi/2$, $\widehat{B}=\beta$, CH — высота треугольника, точка D лежит на отрезке AH, $DH=HB$.

а) Какие значения может принимать угол β?

б) Докажите, что $AD=\dfrac{1}{\cos\beta}-2\cos\beta$.

в) Какие значения может принимать угол β, если известно, что отрезки AD и CD равны?

Вариант 3

1. Дана функция $f(x)=9^x-2\cdot3^x-3$.

а) Решите уравнение $f(x)=60$.

б) Решите неравенство $f(x)\geqslant 0$.

в) Найдите наименьшее значение функции f.

г) Сколько решений имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от величины a?

2. Дана функция $f(x)=x^4-(x-1)^4$.

а) Имеет ли функция f экстремумы?

б) Решите уравнение $f(x)+1=0$.

в) Решите неравенство $f(x)>1$.

3. В единичную окружность вписан треугольник ABC такой, что $AB=AC$, $\widehat{A}=2\alpha$, AD — высота треугольника. Обозначим $H(\alpha)=AB-AD$.

а) Докажите, что $H(\alpha)=2(\cos\alpha-\cos^2\alpha)$.

б) Найдите все такие α, что $H(\alpha)=4/9$.

в) Найдите наибольшее значение величины H.

Физика

Задачи письменного экзамена

1. Тело брошено с некоторой высоты в горизонтальном направлении со скоростью v_0. Найдите скорость тела через t секунд после бросания. Приведите два способа решения.

2. К концам однородного стержня приложены две противоположно направленные силы $F_1=40$ Н и $F_2=100$ Н. Определите силу натяжения стержня в поперечном сечении, которое делит стержень на две части в отношении 1:2.

3. Тело массой m поднимают по наклонной плоскости высотой h. Угол у основания наклонной плоскости β, коэффициент трения между телом и плоскостью μ. Определите работу силы трения и работу силы тяжести.

4. Металлический шарик массой $m=20$ г, падающий со скоростью $v=5$ м/с, ударяется упруго о стальную плиту и отскакивает от нее в прямо противоположном направлении с такой же по модулю скоростью. Найдите импульс, приобретенный шариком, и среднюю силу, сообщившую шарику этот импульс, если соударение длилось $t=0{,}1$ с.

5. Резиновую камеру накачали на берегу до нормального давления. На какую глубину нужно опустить камеру в воду, чтобы ее объем уменьшился вдвое? Температура воздуха $T_1=300$ К, температура воды $T_2=277$ К, плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3.

6. На расстоянии R от точечного заряда $+q$ расположен проводящий шар радиусом r, соединенный тонкой длинной проволокой с землей. Определите величину отрицательного заряда, индуцированного на шаре. Влиянием проволочки пренебречь.

7. Электрическую плитку, рассчитанную на напряжение $U_1=220$ В, требуется переделать, не меняя и не укорачивая спирали, на напряжение $U_2=110$ В так, чтобы ее мощность осталась прежней. Что нужно сделать? Дайте аналитическое решение и эскиз схемы плитки после переделки.

8. Электрон влетает во взаимно перпендикулярные электрическое ($E=1000$ В/м) и магнитное ($B=0{,}01$ Тл) поля. Каковы должны быть направление и скорость движения электрона для того, чтобы он двигался прямолинейно?

9. В однородном магнитном поле ($B=0{,}01$ Тл), линии индукции которого вертикальны, соскальзывает с наклонной плоскости металлическая палочка длиной $l=1$ м. Определите разность потенциалов на концах палочки, если угол наклона плоскости к горизонту $\alpha=30°$.

10. Оптическая система состоит из двух собирающих линз с фокусными расстояниями $F_1=20$ см и $F_2=10$ см. Между линзами расстояние $l=30$ см. Предмет находится на расстоянии $d_1=30$ см от первой линзы. На каком расстоянии от второй линзы получится изображение?

Публикацию подготовили *А. Н. Коточигов, М. А. Марамзин, С. В. Фомин*

Ответы, указания, решения

Избранные школьные задачи

1. $\sqrt{99}/4$. Указание. Не забудьте, что длина третьей стороны не превосходит 5.

2. Круг без границы, концентричный данной окружности и имеющий втрое больший радиус. Указание. Если угол A треугольника ABC равен α, то угол между высотами, проведенными из вершин B и C, равен $\pi-\alpha$. Поэтому точка пересечения высот лежит на окружности, равной данной и пересекающейся с ней в точках B и C.

3. 5. Решение. Если одна из данных шести прямых l проходит только через одну точку пересечения A, то остальные пять прямых либо проходят через A (пусть таких m_1), либо параллельны l (пусть таких m_2). Имеем: $m_1+m_2=5$, $m_1>0$, $m_2>0$ и число точек пересечения равно $1+m_1m_2$; последнее есть 5 или 7. Предположим, что каждая прямая проходит по крайней мере через две точки пересечения. Если точек пересечения меньше чем 5, то их 4. Обозначим их через A, B, C, D; тогда наши прямые — это прямые AB, AC, AD, BC, BD и CD. Эти прямые не должны иметь точек пересечения, отличных от A, B, C, D, поэтому $AB\parallel CD$, $AC\parallel BD$ и $AD\parallel BC$. Из первого и третьего следует, что $ABCD$ — параллелограмм, но диагонали AC и BD параллелограмма не могут быть параллельны. Противоречие.

4. (1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 7), (7, 3). Решение. $2x+1$ нечетно и делится на y, поэтому y нечетно; аналогично x нечетно. Числа x и y взаимно просты: если x и y делятся на p, то $2x$ и $2x+1$ делятся на p, и, значит, 1 делится на p. Число $2x+2y+1$ делится на x и на y; значит, оно делится на xy, следовательно, $2x+2y+1\geqslant xy$. Пусть $x\leqslant y$; тогда либо $2x+2y+1<5y$, либо $x=y=1$. В обоих случаях $xy<5y$ и $x<5$. Остаются две возможности: $x=1$ и 3 делится на y или $x=3$ и 7 делится на y.

5. а) Первых больше. б) Первых больше. Решение. Если p и q взаимно просты и N делится на pq, то среди чисел $1, \ldots, N$ имеется ровно N/p, делящихся на p, и ровно N/pq, делящихся на pq. Значит, среди чисел $1, \ldots, N$ имеется ровно $(N/p)-(N/pq)=N(q-1)/pq$ чисел, делящихся на p, но не делящихся на q. Теперь обратимся к вопросам а) и б).

а) Число 997 920 делится на $11\cdot 5$ и на $12\cdot 7$. В силу сказанного среди чисел 1, …, 997 920 имеется $997\,920\cdot 4/55=72\,576$, делящихся на 12, но не делящихся на 7. Первых больше, и оставшиеся до миллиона 2080 чисел этого баланса не изменят: среди них делящихся на 12 менее 200.

б) Аналогично предыдущему среди чисел 1, …, 999 960, делящихся на 13, но не делящихся на 6, есть 64 100, а делящихся на 15, но не делящихся на 26 — столько же (потому что $5/13\cdot 6=25/15\cdot 26$). Поскольку вычитание числа 999 960 не меняет делимости ни на одно из чисел 13, 5, 15, 26, среди оставшихся до миллиона чисел интересующих нас столько же, сколько среди чисел 1, …, 40. А среди этих чисел первых имеется три (13, 26, 39), а вторых — два (15, 30).

6. $\left(\dfrac{1-\sin(\alpha/2)}{1+\sin(\alpha/2)}\right)^{999}$. Указание. Гомотетия с центром в вершине угла, переводящая 1-ю окружность во 2-ю, переводит 2-ю окружность в 3-ю, 3-ю в 4-ю и т. д. Простой подсчет показывает, что коэффициент этой гомотетии равен $\dfrac{1-\sin(\alpha/2)}{1+\sin(\alpha/2)}$.

7. $2S_1-S_2+2\pi$. Решение. P_a состоит из P, нескольких прямоугольников общей площадью ap, где p — периметр многоугольника P, и нескольких секторов, составляющих круг радиуса a (рис. 1). Следовательно, $S_a=S+ap+\pi a^2$. Решая относительно S и p систему $S_1=S+p+\pi$, $S_2=S+2p+4\pi$, получаем: $S=2S_1-S_2+2\pi$ (и $p=S_2-S_1+3\pi$).

8. 79 или 80. Решение. Окружность пересекает 20 горизонтальных линий и 20 вертикальных, каждую по 2 раза. Поэтому за один полный оборот она 80 раз переходит из клетки в клетку. У нее есть 4 возможности дважды

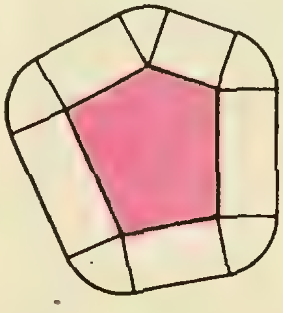


Рис. 1.

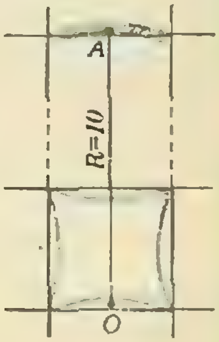


Рис. 2.

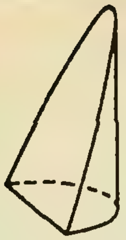


Рис. 3.

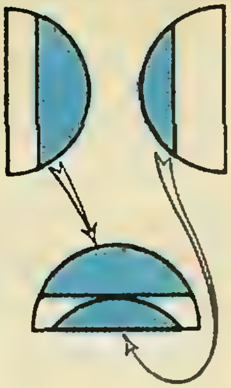


Рис. 5.

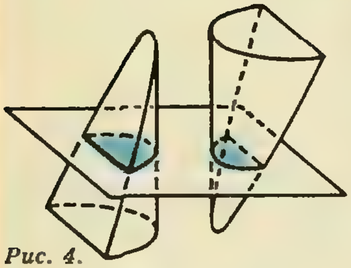


Рис. 4.

побывать в одной клетке: в самом верху, в самом низу, на левом крае и на правом крае. Но из этих четырех возможностей может реализоваться не более одной. В самом деле, если, скажем, вблизи своей крайней верхней точки A окружность дважды пересекает сторону одной клетки, то точка A лежит в сегменте, указанном на рисунке 2, а центр O окружности лежит точно в таком же сегменте на 10 клеток ниже. В аналогичных сегментах должен находиться центр окружности, чтобы она дважды пересекала сторону одной клетки слева, внизу и справа. Но ясно, что никакие два из этих сегментов не имеют общих точек, так что центр может находиться не более чем в одном из них.

9. $a<0$, $b=0$. Указание. Подставьте $c-d$, c и $c+d$ ($d\neq 0$) в наше уравнение и из суммы первого и третьего полученных равенств вычтите удвоенное второе. (Другой способ: если вы знаете формулы Виета для кубического уравнения, воспользуйтесь ими. Кроме того, задачу можно решить, исследовав функцию $y=x^3+ax+b$ с помощью производной.)

10. $R\leqslant 1/2$. Решение. Найдем точки параболы $y=x^2$, отстоящие от точки $(0; R)$ на расстоянии R. Для x получаем уравнение $x^2+(x^2-R)^2=R^2$, т. е. $x^2(x^2+1-2R)=0$. Оно не имеет решений, отличных от 0, если $1-2R\geqslant 0$, т. е. если $R\leqslant 1/2$.

11. $3V_1-3V_2+V_3-8\pi$. Решение аналогично решению задачи 7. P_a состоит из: 1) нашего многогранника P; 2) объединения прямоугольных параллелепипедов с высотой a, построенных на гранях многогранника P; 3) объединения цилиндрических секторов, расположенных около ребер многогранника P; 4) объединения шаровых секторов, расположенных около вершин. Объем части 1) есть V, объем части 2) есть Sa, где S — полная поверхность многогранника P, объем части 3) есть la^2, где l — число, не зависящее от a (найдите его), в секторы части 4) составляют полный шар радиуса a, т. е. имеют суммарный объем $\frac{4}{3}\pi a^3$. Итак, $V_a=V+Sa+la^2+\frac{4}{3}\pi a^3$. Остается подставить $a=1, 2, 3$, решить полученную систему трех уравнений относительно V, S, l и взять значение V.

12. $1/2$. Решение. Наибольшую площадь имеет треугольник, вершины которого лежат в вершинах квадрата. В самом деле, пусть ABC — треугольник, лежащий в квадрате, и пусть C — не вершина квадрата. Проведем через C прямую, параллельную AB. Часть, отсекаемая этой прямой от квадрата и не содержащая A и B, содержит хотя бы одну вершину квадрата C' (может случиться, что C' лежит на нашей прямой). Площадь треугольника ABC' больше или равна площади треугольника ABC.

13. Если $a>0$, то при $|x|<\sqrt{4a/3}$; если $a\leqslant 0$, то ни при каких x. Решение. Пусть $x^3-ax=y^3-ay$, $x\neq y$. Тогда $y^3-x^3=a(y-x)$, $y^2+xy+x^2=a$, $y^2+xy+(x^2-a)=0$. Последнее равенство, рассматриваемое как уравнение относительно y, имеет решение при $x^2-4(x^2-a)\geqslant 0$, т. е. при $|x|\leqslant\sqrt{4a/3}$, причем это решение единственно и равно x только при $x=0$, $a=0$. (Другое решение можно получить, исследуя при помощи производной график функции $y=x^3-ax$.)

14. $100!^{100}<100^{100!}<100^{100}!$. Решение. Очевидно, $100!<10^{10}\cdot 100^{90}=10^{190}$, т. е. в числе $100!$ не больше 190 знаков, а в числе $100!^{100}$ не больше 19 000 знаков. В числе $100^{100!}$ знаков $2\cdot 100!$, т. е. явно больше, чем в предыдущем числе, но не больше чем 10^{191}. Наконец,

$$100^{100}!>(100^{99})^{100^{100}-100^{99}}>(100^{99})^{\frac{1}{2}100^{100}}=$$
$$=10^{99\cdot 100^{100}}>10^{10^{201}},$$

т. е. в этом числе по крайней мере 10^{201} знаков.

15. Меньше четверти. Решение. Нас интересует объем фигуры, изображенной на рисунке 3. Возьмем две такие фигуры, вторую перевернем и поставим рядом с первой. Сечение того, что получится, горизонтальной плоскостью состоит из двух секторов (рис. 4), которые можно расположить в половине основания цилиндра так, чтобы они не пересекались (рис. 5). Поэтому их суммарная площадь меньше половины площади горизонтального сечения цилиндра, а суммарный объем двух (одинаковых) фигур меньше половины объема цилиндра.

Замечание. Объем нашей фигуры ничего не стоит вычислить при помощи интеграла: он равен $\frac{2}{3\pi}\approx 21{,}2\,\%$ от объема цилиндра.

О графическом способе решения некоторых физических задач

1. $\Delta t=45$ мин.
2. $v=\sqrt{La}$.
3. $F=l/(a^2m)$.
4. $a=1/(\sqrt[3]{2}-1)$.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 8 деталей.
2. $\left[-\frac{9}{5}; -\frac{16}{9}\right[$.
3. $\left\{1, \frac{6-\sqrt{11}}{25}\right\}$. Указание. Рассмотрите два случая: $5a-1\geqslant|2a|$ и $|5a-1|<2a$.

4.1. $\arccos\left(\frac{2-a^2}{a}\right)$, $\arccos\left(\frac{a^2+2}{3a}\right)$ $(1<a<2)$.

Указание. Рассмотрите случаи тупого и острого угла B.

4.2. $\frac{abc}{a+ab}$. Воспользуйтесь подобием треугольников ABC, BDE и ADF.

4.3. $\frac{-a-1+\sqrt{a^2+6a+1}}{2}$,

$\frac{-a-1+\sqrt{a^2+6a+1}}{2a}$.

5. $\frac{1}{3}R^3\cdot \operatorname{tg}\alpha\cdot \operatorname{tg}\beta\cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}$.

Вариант 2

1. 1 кг; $33\frac{1}{3}$ %.
2. $\left[-\frac{2}{5};\ 2\right[$.
3. $x=-\frac{\pi}{8}+(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$; $(k\in \mathbb{Z})$.
4. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot \sin 2\alpha$.
5. $\frac{a^2\sqrt{3}}{48\cdot \cos\alpha}$.

Вариант 3

1. 20 км/ч

2.1. $x=1{,}5$, $y=2$.

2.2. $4+\sqrt{13}$.

3. $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+k\pi$; $(k\in \mathbb{Z})$.

4. $\left]\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right[$. **Указание.** Преобразуйте левую часть неравенства к виду $\log_{x+1}\left(\frac{1}{2-x}\right)$.

5. $\frac{k\cdot(r_1-r_2)}{\sqrt{k^2-1}}$ $(k>1)$.

Вариант 4

1. 60 км/ч.

2. $-1/2$.

3.1. $x_1=k\pi$, $x_2=\pm\frac{3}{4}\pi+2l\pi$; $k,\ l\in \mathbb{Z}$.

3.2. $\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ 2k\pi\right[\ \cup\ \left[\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \pi+2k\pi\right[$. $(k\in \mathbb{Z})$.

Указание. Выполните замену $y=\sin x$.

4.1. 10,8 и 6 см.

4.2. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

5. $\frac{c^3}{6}\cdot\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot \operatorname{tg}\beta}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$. **Указание.** Докажите, что основание высоты пирамиды — центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

Вариант 5

1. В 3 раза.

2.1. $\{(2;\ 0),\ (0;\ 1)\}$.

2.2. 2.

2.3. $\left[-\frac{4}{5};\ -\frac{7}{9}\right[$.

3.1. $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $(k\in \mathbb{Z})$. **Указание.** Используйте очевидные неравенства $\sin^2 x\geqslant \sin^3 x\times\cos^3 2x$ и $\cos^2 2x\geqslant \sin^3 x\cdot \cos^3 2x$.

3.2. $x=\frac{k\pi}{2}$; $k\in \mathbb{Z}$.

3.3. $x=\pm\frac{\pi}{8}+2k\pi$; $(k\in \mathbb{Z})$.

4.1. $\frac{2(S+\sqrt{h^2+S^2})}{h}$.

4.2. $[-3;\ -2[$. 4.3. $\{4,\ \sqrt{2}\}$.

5. 30°. **Указание.** Проведите перпендикуляры из основания высоты пирамиды к сторонам основания.

Физика

1. $l=\sqrt{2}\,v_0t$.
2. В верхней жидкости (плотностью ρ_1) находится $(\rho_2-\rho)/(\rho_2-\rho_1)$ часть объема шара, а в нижней — $(\rho-\rho_1)/(\rho_2-\rho_1)$ часть.
3. $h_{\max}=v_0^2/(2g(1-\mu \operatorname{ctg}\alpha))$.
4. В точке A масса газа максимальна, а в точке B — минимальна (рис. 6).

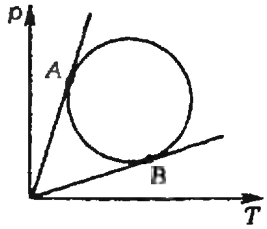


Рис. 6.

5. $A=RT_1(\sqrt{T_3/T_1}-1)^2$.
6. $\rho=\rho_к\varepsilon/(\varepsilon-1)$ ($\rho_к$ — плотность керосина).
7. а) Электрон не пролетит мимо мишени, если $v_0\geqslant\sqrt{\frac{eUl(L+l/2)}{mdR}}$ при $\frac{l+2L}{2R}>\frac{l}{d}$;

   б) электрон не упадет на положительную пластину, если $v_0\geqslant\frac{l}{d}\sqrt{\frac{eU}{m}}$ при $\frac{l+2L}{2R}<\frac{l}{d}$.
8. $P_{мех}=I_1U(1-I_1/I_2)=96$ Вт.
9. $\alpha=\operatorname{arctg}(n_2/n_1)$.
10. $H=nh=1{,}2$ м.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. Таких решений нет. 2. $\left[-1;\ \frac{5}{4}\right[$.

3. $\{4-2\sqrt{2};\ 4+2\sqrt{2}\}$.

4. $a\in\left]-2;\ \frac{-17-3\sqrt{41}}{20}\right]\cup\left[\frac{-17+3\sqrt{41}}{20};\ \frac{1}{6}\right[$.

Указание. Исходное уравнение приводится к виду $(3x+5y)(4x+7y)=5$. Если пара целых чисел $(x,\ y)$ является решением этого уравнения, то числа $3x+5y$ и $4x+7y$ целые, поэтому пара $(3x+5y;\ 4x+7y)$ совпадает с одной из четырех пар: $(5;\ 1)$; $(1;\ 5)$; $(5;\ -1)$; $(-1;\ -5)$.

5. $d\in\left[\frac{\sqrt{5}}{3};\ \frac{\sqrt{17}}{3}\right[$. **Указание.** Рассмотрим плоскость, в которой лежит верхнее основание параллелепипеда. Сечение пирамиды этой плоскостью — квадрат, в который вписан прямоугольник площади 1/18. Если этот прямоуголь-

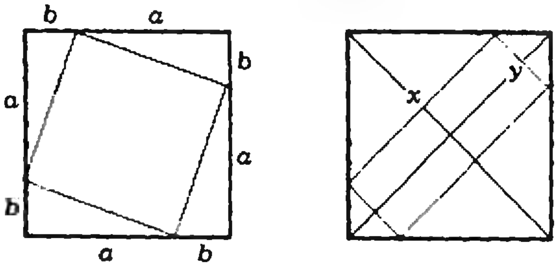


Рис. 7. а) б)

ник является квадратом со стороной $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (рис. 7, *а*), то для стороны сечения $a+b$ из равенства $a^2+b^2=\frac{1}{18}$ получаем оценку $\frac{1}{18}=$ $=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\geqslant(a+b)^2-\frac{(a+b)^2}{2}=$ $=\frac{(a+b)^2}{2}$, откуда $a+b\leqslant\frac{1}{3}$. Отсюда следует, что параллелепипеды с «квадратными» основаниями могут быть вписаны в пирамиду лишь тогда, когда секущая плоскость удалена от плоскости основания на расстояние h, не меньшее чем $\frac{2}{3}$ и не большее, чем $1-\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Квадрат длины диагонали параллелепипеда при этом равен $d^2=\frac{1}{9}+h^2$.

Если основание параллелепипеда — прямоугольник со сторонами x и y (рис. 7, *б*), то $xy=\frac{1}{18}$, а сторона сечения пирамиды плоскостью, в которой лежит верхнее основание, равна $\frac{x+y}{\sqrt{2}}\geqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{xy}=\frac{1}{9}$; отсюда следует, что все такие сечения удалены от плоскости основания на расстояние h, не превосходящее $\frac{2}{3}$.

При $0<h\leqslant\frac{2}{3}$ квадрат длины диагонали равен

$$d^2=h^2+x^2+y^2=\left(1-\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2+x^2+y^2=$$

$$=\frac{3}{2}\ (x+y)^2-(x+y)\sqrt{2}+\frac{8}{9}.$$

Наименьшее значение d^2 достигается при $x+y=\frac{\sqrt{2}}{3}$, то есть при $h=\frac{2}{3}$.

Наибольшее значение функции d^2 достигается при $x+y=\sqrt{2}$, но при этом «пропадает» параллелепипед ($h=0$).

Вариант 2

1. $\left\{\log_3\frac{6+\sqrt{33}}{3}\right\}$.
2. $\{0\}$.
3. $a\in[4;\ \infty[$.
4. $\sin 2\alpha=\pm\frac{3}{8}\sqrt{7}$.
5. Таких тетраэдров два. $V_1=\frac{2}{3}(1+\sqrt{5})$; $V_2=\frac{2}{3}\sqrt{22+10\sqrt{5}}$. *Указание.* Из условия следует, что тетраэдры, описанные в условии задачи, «устроены» так, как показано на рисунке 8. (Здесь d — наибольшее ребро, $0<k<1$ — коэффициент подобия треугольников.) Поскольку $\sqrt{2+2\sqrt{5}}/2\sqrt{2+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, постольку либо $k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, либо $k^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Первый случай невозможен (не существует треугольника со сторонами d, kd, k^2d). Во втором случае $\left(k=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$ получаем 2 тетраэдра с $d=$ $=\sqrt{2+2\sqrt{5}}$ и с $kd=2\sqrt{2+\sqrt{5}}$. Для вычисления объема полезно заметить, что треугольник со сторонами d, kd и k^2d — прямоугольный ($k^4=k^2+1$).

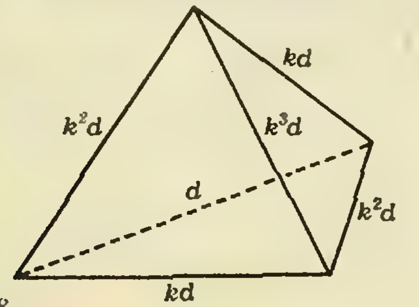


Рис. 8.

Вариант 3

1. $\left]-3;\ -1\right[\ \cup\ \left]1;\ \frac{3}{2}\right[$.
2. $\{(-4{,}5);\ 3)\}$.
3. $x=\frac{\pi}{3}+(2n+1)\pi,\quad n\in Z$.
4. $x_D=1{,}2$.
5. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$. *Указание.* По теореме синусов радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому угол CAD может принимать значения $5\pi/12$ и $7\pi/12$. В первом из них $BD\perp AC$. Во втором случае через точку D проведите прямую, параллельную AC, а через точку B — плоскость, перпендикулярную AC. Эта плоскость пересечет l в точке K. Найдите отношение $DK/BD=\cos\widehat{BDK}$.

Физика

1. $v_1=\sqrt{\frac{E_0m_2m_3}{m_1(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)}}$;

$v_2=\sqrt{\frac{E_0m_1m_3}{m_2(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)}}$;

$v_3=\sqrt{\frac{E_0m_1m_2}{m_3(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)}}$.

2. $p=2\mathrm{M}v^2n\cos^2\alpha/N_\mathrm{A}=1{,}01\cdot10^5$ Па (здесь $\mathrm{M}=28\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса азота, $N_\mathrm{A}=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро).
3. $\Delta U=(3/2)(m/\mathrm{M})R\,\Delta T=3{,}11\cdot10^3$ Дж;
$A=(m/\mathrm{M})R\,\Delta T=2{,}08\cdot10^3$ Дж;
$Q=\Delta U+A=5{,}19\cdot10^3$ Дж.
4. $\Delta W=-\frac{2\pi\varepsilon_0R_1R_2(\varphi_1-\varphi_2)^2}{R_1+R_2}$;
уменьшение энергии связано с выделением джоулева тепла при перераспределении зарядов на проводниках.
5. $\varepsilon=(A+W)/W=4{,}5$.
6. $\varphi_A=\mathscr{E}_2-\frac{(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)C_1}{C_1+C_2}=2{,}7$ В.
7. $l=v\,\Delta t=1.1$ м;

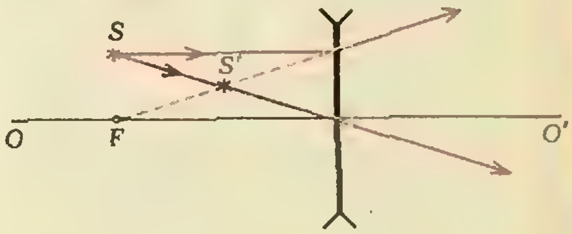


Рис. 9.

$$s=\sqrt{\left(\frac{2m_p v\sin\alpha}{q_p B}\right)^2+(v\cos\alpha\,\Delta t)^2}=0{,}59\ \text{м}.$$

Указание. Протон движется по винтовой линии и за время Δt он сделает 1,5 оборота.

8. $x\approx R/(n-1)$.

9. $x=h\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)=0{,}19$ м.

10. См. рис. 9.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Вариант 1

1. $\{1\}$. 2. а) $-3/5$; б) $4/5$.

3. $\{4\}\cup[5;7]$.

4. 7, 24, 25.

5. $3a^2/4$, $a^3\sqrt{2}/32$.

Вариант 2

1. $\sqrt{a^2-1}$. 2. 4 мин. 3. $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $x_2=\pi/2+2\pi k$, $x_3=2\pi l$ $(k, l, n\in Z)$.

4. $]1/100; \infty[$.

5. $75\sqrt{3}/4$.

Вариант 3

2. $\{0; 1/2\}$. 3. $]5/9; 1]\cup]6; \infty[$.

4. 150 г; 450 г;

5. $\pi b^2\sqrt{e^2-4b^2\sin^2\alpha/2}/4\cos^2\alpha/2$.

Вариант 4

2. $\{3/2\}$. 3. $]-6; 1[$.

4. $\{10\}$. 5. 192.

Физика

1. $H=v^2/(60g)=2{,}13\cdot10^5$ м$=213$ км; $t=v/(30g)=38$ с; $g_H=gR^2/(R+H)^2=9{,}19$ м/с^2.

2. $t=\pi\sqrt{R/g}=2{,}53\cdot10^3$ с$=42{,}2$ мин.

3. $F_{тр\,п}=mg\sin\alpha$, где $0\leqslant\alpha<\operatorname{arc\,tg}\mu$; $F_{тр\,ск}=\mu mg\cos\alpha$, где $\operatorname{arc\,tg}\mu\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$.

4. Нет, нельзя.

5. $p=\frac{p_0T_1T_2(V_1+V_2)}{T_0(V_1T_2+V_2T_1)}$.

6. $t=\varrho VgH/(\eta N)$.

7. $r_к/r_в=\sqrt{1/\varepsilon_к}$.

8. $F=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r_1^2}=\frac{m^2e^6}{(4\pi\varepsilon_0)^3\hbar^4}=8{,}3\cdot10^{-8}$ Н (здесь $r_1=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$ — радиус первой боровской орбиты, $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная, $\hbar=1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг — масса электрона, $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл — его заряд).

9. $E_k=e^2r^2B^2/(2m)$.

10. $N=1{,}38\cdot10^{44}$ м$^{-3}$; $\varrho=m_0N=2{,}3\cdot10^{17}$ кг/м^3; $m=\varrho V_0=2{,}3\cdot10^{11}$ кг (здесь $V_0=1$ см^3).

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. а) π.

б) $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi l$ $(k, l\in Z)$.

в) 7. Указание. Сделайте замену переменной $v=\cos^2x$.

2. а) $]-2; -1[\cup]0; \infty[$;

б) $x\in\left\{\frac{1-\sqrt{17}}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$;

в) $]-\sqrt{2}; -1[\cup]\sqrt{2}; \infty[$;

г) $a\in]-1; 0[\cup]1; \infty[$. Указание. Решение существует, если величина $x=\frac{-2a}{a+1}$ удовлетворяет условиям $x>-a$, $x\in]-2; -1[\cup]0; \infty[$.

3. б) $R\in\{1/9; 9\}$.

в) Указание. Гипотенуза всегда больше катета.

Вариант 2

1. а) $A=B=1$.

б) $A=-1/6$, $B=-2/3$.

в) $A\geqslant0$; $B\geqslant0$. Указание. Надо найти A и B такие, что $2Ax+1+\frac{B}{x}\geqslant0$ при $x>0$.

2. а) $]0; 1[\cup]1; \infty[$;

б) $x\in\{\sqrt{2}; 4\}$;

в) $x\in\{1/2; 2\}$;

г) $a\in]-\infty; -2]\cup[2; \infty[$. Указание. Сделайте замену переменной $v=\log_2x$ и исследуйте соответствующую функцию аргумента v.

3. а) $\beta\in\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$. Указание. При $\beta<\frac{\pi}{4}$ точка D не попадает на гипотенузу.

б) Указание. Используйте равенство $AD=AB-2BH$.

в) $\beta=\frac{\pi}{8}$. Указание. Фактически надо найти β такое, что $AD=1$.

Вариант 3

1. а) $x=2$;

б) $x\in]1; \infty[$;

в) -4. Указание. Сделайте замену переменной $v=3^x$ и найдите минимум выражения v^2-2v-3.

г) при $a\in]-\infty; -4[$ нет решений; при $a\in\{-4\}\cup[-3; \infty[$ одно решение, при $a\in]-4; -3[$ два решения. Указание. В обозначениях п. в) задача равносильна нахождению числа положительных корней уравнения $v^2-2v-3=a$.

2. а) Экстремумов нет.

б) $x=0$;

в) $x\in]1; \infty[$. Указание. Из п. а) видно, что функция f возрастает и $f(1)=1$.

3. б) $\alpha_1=\arccos\frac{1}{3}$, $\alpha_2=\arccos\frac{2}{3}$. Указание. По условию задачи $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; в) 1/2.

Физика

1. $v=\sqrt{v_0^2+g^2t^2}$; вектор $\vec{v}$ составляет с горизонтом угол $\alpha=\operatorname{arctg}((gt)/v_0)$.

2. $T=(F_1+2F_2)/3=80$ Н.

3. $A_1=-\mu mgh\operatorname{ctg}\beta$; $A_2=-mgh$.

4. $P=2mv=0{,}2$ кг·м/с; $F=2mv/t=2$ Н.

5. $h=\frac{p_0}{\varrho g}\left(2\frac{T_2}{T_1}-1\right)=8{,}7$ м (здесь $p_0=101\,325$ Па — нормальное давление).

6. $Q=qr/(R+r)$.

7. Две половины спирали следует соединить параллельно.

8. $v=E/B=10^5$ м/с; $\vec{v}\perp\vec{E}$ и $\vec{B}$.

9. $\Delta\varphi=0{,}02$ В.

10. $f_2=7{,}5$ см.

В поисках оптимального раскроя

(см. «Квант» № 3)

1. Для доказательства достаточно каждое выражение вида $\sin(2t+\theta_k)$ разложить по формуле для синуса суммы; собрав отдельно слагаемые, содержащие $\sin 2t$, и слагаемые, содержащие $\cos 2t$, мы представим сумму $T(t)$ в виде

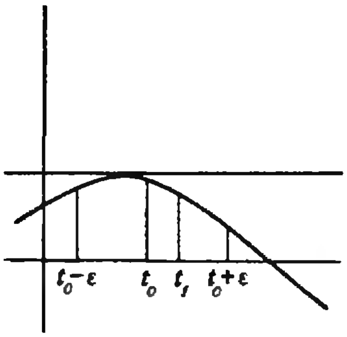


Рис. 10.

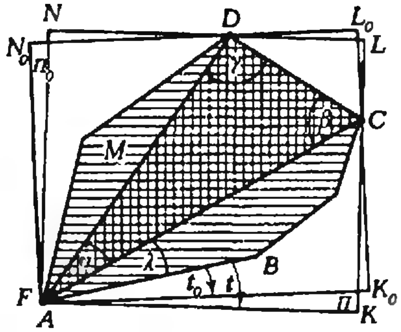


Рис. 11.

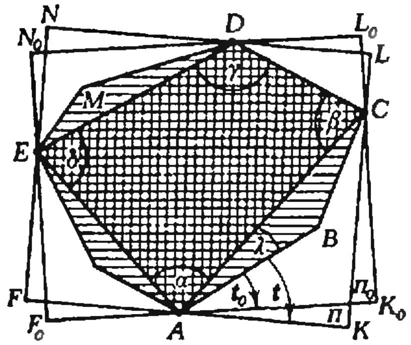


Рис. 12.

$T(t)=P\sin 2t+Q\cos 2t$, где числа P и Q от t не зависят. Затем, пользуясь приемом введения вспомогательного угла, представим $T(t)$ в требуемом виде.

2. Если функция $f(t)=\sin(2t+\theta)$ (рис. 10) на некотором интервале имеет точку минимума, то в такой точке значение $f(t)$ обязано быть равным -1. Но на интервале $(t_0-\varepsilon;\ t_0+\varepsilon)$ функция нигде не принимает значения -1 (она там по условию неотрицательна). Поэтому для функции $\sin(2t+\theta)$ нет на интервале $(t_0-\varepsilon;\ t_0+\varepsilon)$ никаких точек минимума. Следовательно, найдется там такое значение аргумента t_1, для которого верно требуемое неравенство.

3. Применим ту же идею «малого шевеления» к варианту II. Вводя обозначения: $\widehat{BAK_0}=t_0$, $S_{ACD}=\sigma$, видим, что $S_{\Pi_0}=\sigma+T(t_0)$, где

$$T(t_0)=S_{AK_0C}+S_{CL_0D}+S_{DN_0A}=$$

$$=\frac{1}{2}AC^2\cdot\sin(2t_0+2\lambda)-$$

$$-\frac{1}{2}CD^2\sin(2t_0+2\lambda-2\beta)+$$

$$+\frac{1}{2}AD^2\sin(2t_0+2\lambda+2\alpha).$$

В силу задачи 1 эту сумму можно представить в виде

$$T(t_0)=\varrho\sin(2t_0+\theta). \qquad (*)$$

где ϱ и θ от t_0 не зависят, $\varrho>0$. Поворачивая опорную прямую AK_0 (рис. 11) вокруг точки A на малый угол, убеждаемся, что при этом описанный прямоугольник будет по-прежнему иметь на своем контуре точки A, C, D. Говоря точнее, можно выбрать настолько малый интервал $(t_0-\varepsilon;\ t_0+\varepsilon)$, что пока угол $t(t=\widehat{BAK})$ принадлежит этому интервалу, соответствующий опорный прямоугольник $\Pi(FKLN)$ будет иметь вершину F в точке A, а внутри сторон KL и LN — соответственно точки C и D. Понятно, что

$$S_\Pi=\sigma+T(t),\ T(t)=\varrho\sin(2t+\theta), \qquad (**)$$

где ϱ и θ — те же, что и в формуле $(*)$. Но в силу утверждения из задачи 2 возможно подобрать такой угол t в интервале $(t_0-\varepsilon;\ t_0+\varepsilon)$, что $\sin(2t+\theta)<\sin(2t_0+\theta)$.

Для соответствующего описанного прямоугольника будет $T(t)<T(t_0)$, $S_\Pi<S_{\Pi_0}$, т. е. прямоугольник Π_0 и в варианте II не является оптимальным.

4. Пусть на контуре описанного прямоугольника Π_0 (рис. 12) расположены вершины A, C, D, E многоугольника M; пусть AB — сторона M, а t_0 — угол ее наклона к стороне AK_0. Пошевелим немного опорную прямую AK_0, повернув ее вокруг вершины A на малый угол. В результате прямая AK_0 займет новое положение AK, а угол t_0 немного увеличится (или уменьшится); его новое значение обозначим через t. Соответственно повернется немного (и, быть может, несколько деформируется) прямоугольник Π_0; новый описанный прямоугольник обозначим через Π. Однако если угол поворота достаточно мал (т. е. если t достаточно мало отличается от t_0), то картина качественно не изменится: четыре вершины A, C, D, E останутся внутренними точками четырех различных сторон опорного прямоугольника Π, а остальные вершины M будут внутри Π. Так будет обстоять дело, пока угол t будет оставаться внутри некоторого достаточно малого интервала $(t_0-\varepsilon;\ t_0+\varepsilon)$. Обозначим углы и площадь вспомогательного четырехугольника $ACDE$ через α, β, γ, δ, σ; пусть $\widehat{CAB}=\lambda$. Нетрудно подсчитать, что $S_{\Pi_0}=\sigma+T(t_0)$, где

$$T(t_0)=S_{K_0AC}+S_{CL_0D}+S_{DN_0E}+S_{EF_0A}=$$

$$=\frac{1}{2}AC^2\sin(2t_0+2\lambda)-\frac{1}{2}CD^2\sin(2t_0\alpha+$$

$$+2\lambda-2\beta)+\frac{1}{2}DE^2\sin(2t_0+2\lambda-2\beta-2\gamma)-$$

$$-\frac{1}{2}AE^2\sin(2t_0+2\alpha+2\lambda).$$

Учитывая задачу 1, можем $T(t_0)$ представить в виде

$$T(t_0)=\varrho\sin(2t_0+\theta).$$

где ϱ и θ — числа, не зависящие от t_0 (а зависящие только от элементов многоугольника M (точнее, от длин отрезков AC, CD, DE, EA и от углов α, β, γ, δ, λ). Аналогично найдем, что

$$S_\Pi=\sigma+T(t),\ \text{где}\ T(t)=\varrho\sin(2t+\theta).$$

Рассуждая, как в предыдущих двух вариантах, заключаем, что прямоугольник Π_0 не является оптимальным.

5. Пусть AB (рис. 13) — сторона многоугольника, причем A и B — нетупые углы; пусть F — вершина многоугольника M, наиболее уда-

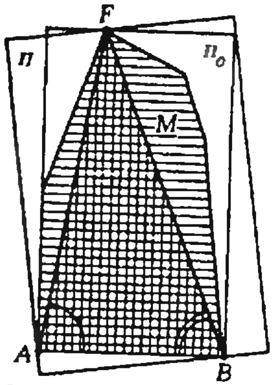


Рис. 13.

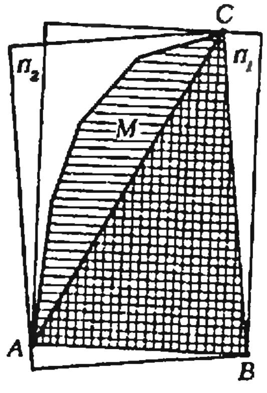


Рис. 14.

ленная от прямой AB, и $S_{ABF}=\sigma$. Описанный около M прямоугольник Π_0, чей контур содержит в качестве своей стороны отрезок AB, имеет площадь 2σ. Пусть Π — произвольный другой описанный прямоугольник. Тогда он накрывает $\triangle ABF$, причем отрезок AB уже не является для Π стороной. Если BF или AF (для определенности — BF) — сторона M, то угол при вершине F в многоугольнике тупой, и поэтому описанный прямоугольник Π, построенный на прямой BF, не имеет своей стороной отрезок BF, так что $S_\Pi>2\sigma$. Если же ни BF, ни AF, ни AB не служат стороной для описанного прямоугольника Π, то — как мы уже видели (случай треугольника) — $S_\Pi>2\sigma$. Значит, только один описанный прямоугольник, а именно Π_0, имеет наименьшую возможную площадь (2σ).

6. Так как у M не может быть более трех нетупых углов, то в нашем случае две стороны многоугольника M, к которым прилегают нетупые углы, — смежные. Пусть это будут AB и BC (рис. 14). Описанный около M прямоугольник Π_1, имеющий своей стороной отрезок AB, будет, очевидно, иметь площадь 2σ, где $\sigma=S_{ABC}$. То же верно для прямоугольника Π_2, для которого стороной служит BC. Всякий же другой описанный прямоугольник Π будет содержать треугольник ABC, причем ни одна сторона этого треугольника не окажется стороной прямоугольника Π. Поэтому $S_\Pi>2\sigma$. Тем самым показано, что только Π_1 и Π_2 — оптимальные прямоугольники для M.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 3)

Вопросы и задачи

1. Наличие пор в стенках сосуда приводит к увеличению свободной поверхности жидкости, и большее число высокоэнергичных молекул могут покинуть ее, тем самым «охлаждая» содержимое сосуда.

2. Хлеб черствеет, часть влаги испаряется, и вес хлеба уменьшается.

3. Увеличение свободной поверхности жидкости увеличивает скорость ее испарения.

4. Вода из-за большой теплоемкости прогревается медленнее воздуха, поэтому она холоднее. При выходе из воды капельки ее, оставшиеся на теле, испаряются, кожа охлаждается, и воздух кажется холоднее воды.

5. При кипении в пробирке будет насыщенный пар, вода в стакане и в пробирке будет на одном уровне.

6. Поскольку в обоих сосудах температура 100 °С, из внешнего сосуда во внутренний энергия передаваться не будет, и вода в стакане не закипит.

7. Можно, если понижать в сосуде с водой давление до давления насыщенного пара при данной температуре.

8. Температура плавления бронзы ниже, чем железа.

9. График I—I относится к стеклу, II—II — к металлу.

10. Движение воды в реке постоянно выносит со дна на ее поверхность более теплую воду.

11. Да, если вода нагревается в герметически закупоренном сосуде. В этом случае ее температура может достигнуть 374 °С, температура же плавления свинца 327 °С.

12. За счет потенциальной энергии взаимодействия молекул, убывающей при их перестройке в процессе кристаллизации.

Микроопыт

Медная проволока перережет лед быстрее. Одна из причин, сбуславливающих это явление,— хорошая теплопроводность меди, обеспечивающая подвод тепла из окружающей среды к месту контакта лед — медь.

Задачи XLIX Московской городской математической олимпиады

(см. «Квант», 1986, № 9, с. 57)

Подробные указания и решения этих задач включены в сборник «Московские математические олимпиады», выпущенный в конце прошлого года издательством «Просвещение».

Избранные задачи Ленинградской городской олимпиады по математике

(см. «Квант», 1986, № 9, с. 57)

1. Рассмотрите проекции вершин на самую длинную сторону.

2. Рассмотрите номера дней, дающие фиксированный остаток при делении на 100.

3. Пусть минимальные пути из A в B до и после закрытия одной авиалинии (ребра) различны и состоят соответственно из $a+p+b$, $a+q+b$ ребер; a и b ребер — общие, p и q образуют цикл, $1\leqslant p<q$. Рассмотрим пути от A и B до самых далеких от них точек цикла. Можно доказать что $a+(p+q-1)/2\leqslant N$ и $b+(p+q-1)/2\leqslant N$, откуда (поскольку $p\geqslant 1$) $a+q+b\leqslant 2N$.

4. В качестве этих точек M можно взять $4^4=256$ концов векторов $\overrightarrow{OM}=k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+k_3\vec{v}_3+k_4\vec{v}_4$, где k_i принимают значения 0, 1, 2 и 3 ($1\leqslant i\leqslant 4$); векторы v_i «общего положения» (так что все 256 точек M различны), а прямые — их тоже 256 — переходят через все точки M параллельно векторам v_i. (Аналогичное решение задачи с заменой 4 на 3 — проекция на плоскость проволочного куба $2\times2\times2$, разделенного на клетки $1\times1\times1$; наш пример — проекция «4-мерного куба $3\times3\times3\times3$».)

5. а) Ответ: первый. Выигрышная стратегия: идти по биссектрисе угла прямоугольника к вершине. б) Ответ: второй. Одна из выигрышных стратегий: двигаться параллельно диагоналям и, обойдя прямоугольник, заставить первого вернуться к исходной точке.

Если первый ход на четном расстоянии от параллельной ему стороны квадрата, есть более простая стратегия: продолжить отрезок, проведенный первым.

6. Легко доказать «от противного».

7. Ответ: 987 (16-е число ряда 1, 1, 2, 3, 5, ... чисел Фибоначчи). Если a_k — количество четных чисел, для которых шаг 1 алгоритма выполняется k раз, то $a_{k+1}=a_k+a_{k-1}$.

8. Ответ: $16+64\sqrt{2}$. Пример строится легко. Для доказательства оценки удобно клетки доски 9×9 раскрасить в шахматном порядке в черный и белый цвета (углы — белые) и затем еще 16 белых клеток покрасить в красный цвет тоже в «шахматном порядке» (углы остаются белыми). Тогда среди $50-2=48$ ходов из 25 белых клеток лишь 32 хода могут вести в красные клетки.

9. Рассмотрите проекции на диаметр объединения; нужная прямая перпендикулярна диаметру.

10. Добавьте сумму $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10\,001}}$ (меньшую исходной) и

запишите $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$ как $\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}$.

11. Ответ: 1. Подынтегральная функция f такова, что $f(x)+f(-x)=1$ (то есть ее график симметричен относительно точки (0; 1/2)).

12. Убедитесь, что многочлены $(t-u_1)(t-u_2)\times\times(t-u_3)$ и $(t-v_1)(t-v_2)(t-v_3)$ совпадают.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 1)

Задание 1 (А. Домбровский, Л. Ломинский, 1975 г.). Задача на геометрическую тему Новотного.

1. Кс4 (с угрозой 2. Фс3×) 1... С:с4 (дорога ладье к полю с3 перекрыта) 2. Фс3×, 1... Л:с4 (дорога слону к полю d3 перекрыта) 2. Фd3×, 1... Ф:с4 2. Ф:f2×, 1... Фе3 2. Фd5×, 1... Се3 2. Ке2×.

Задание 2 (А. Грин, 1968 г.). 1. Лb4! (Неожиданное вступление, смысл которого — отрезать слона от поля с3 (1. Ф:f6 Сс3!) 1... cb 2. Ф:f6 g5 3. Фg7×, 1... С:b4 2. Ф:с7+ Крh6 3. Фh2×, 1... g3 2. Фh6+! Кр:h6 3 Лh4×.

Шахматная страничка
(см. «Квант», 1986, № 12)

Тема «симметрия и асимметрия» довольно популярна в шахматной композиции, иногда даже проводятся специальные конкурсы. Этюд № 23 завоевал первый приз на конкурсе Скандинавских стран, который назывался «Симметричные начальные положения с асимметричной игрой». Этюд № 24 получил одну из наград на конкурсе пешечных этюдов, посвященном 90-летию со дня рождения Н. Григорьева, «короля пешечных этюдов».

Задание 23 (У. Мутоваара, 1967 г.). **1. Крd3!** После 1. Кре3 (f3)? b6! 2. Крf4 Крf8 3. Крg5 Крg8 4. Крh6 Крh8 5. Крg5 Крg8 6. Крf5 Крf8 7. Крс5 Кре8 8. Крd5 Крd8 9. Крс4 Крс8 10. Крb5 Крb7 11. h5 h6 выигрывают черные. 1 ... b5 2. Кре3 Крd8 3. Крf4 Кре8 4. Крg5 Крf8 5. Крh6. Но не 5. Крh5? Крg8 6. Крh6 Крh8 7. h5 Крg8 с ничьей. 5 ... Крg8 6. h5! Крh8 7. Крg5 Крg8 8. Крf5 Крf8 9. Кре5 Кре8 10. Крd5 Крd8 11. Крс5 Крс8 12. Крb6! (выпускает победу 12. Кр:b5? Крb7 с ничьей) 12 ...Крb8 13. h6 и белые выигрывают.

Задание 24 (А. Ботоканов, 1985 г.) **1. Кре1!** (убедитесь сами, что не годится 1. Крg1?) 1 ...Кр:g3 2. Кре2 Кр:g4 3. Крf2 Кр:g5 4. Крg3 Крh5 5. Крh3! g5 6. Крg3 g4 7. Крf4! Крh4 — пат № 1. 1 ...Кр:е3 2. Крd1! Кр:е4 (любопытно 2 ...Крf3 3. Крd2! Кр:g3 4. Крс3! Крf3 5. Крd3! Кр:g4 6. Крс4! Крf4 7. Крd4 Кр:g5 8. Крс5 с ничьей) 3. Кре2! (но не 3. Крd2? Крf3! 4. Крd3 Кр:g3, и черные берут верх) 3 ...Кр:е5 4. Кре3! Крd5 5. Крd3 е5 6. Кре3 d4 7. Крf4! Крd4 — пат № 2.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов,
Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович, С. П. Новиков,
М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина,
Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев,
Е. П. Велихов, И. Я. Верченко,
Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев,
Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов,
В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин,
А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов,
Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов,
Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова,
Е. К. Тенчурина, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор М. Л. Медведская

Сдано в набор 18.02.87. Подписано к печати 27.03.87.
Т-09673. Бумага 70×108/16. Печать офсетная.
Усл. кр.-от. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,38.
Тираж 207 430 экз.
Цена 40 коп. Заказ 393.

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский
полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
142300, г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ОБЕЗЬЯНЬИ РЕКОРДЫ

Шахматные «поединки», в которых черные полностью копируют ходы белых, пока не получат мат, называются «обезьяньими» партиями. Вот две известные миниатюры, предложенные С. Лойдом: 1. c4 c5 2. Фa4 Фa5 3. Фc6 Фc3 4. Ф:c8×; 1. d4 d5 2. Фd3 Фd6 3. Фh3 Фh6 4. Ф:c8×. В этих примерах дело заканчивается матом, который объявляет белый ферзь. Рекорды Лойда являются абсолютными — побить их невозможно. А каковы рекорды обезьяньих партий, в которых мат дается другими фигурами?

В начале века этим вопросом интересовался выдающийся шахматный композитор К. Тракслер. Он составил симметричные партии, где ладья ставила мат за 9 ходов, слон — за 8, конь — за 7 и пешка — за 15 ходов. В дальнейшем многие любители математических головоломок на шахматной доске не раз улучшали «обезьяньи» рекорды. Приведем самые короткие партии, известные на сегодняшний день.

Матует ладья: 1. Кf3 Кf6 2. Кg5 Кg4 3. К:h7 К:h2 4. К:f8 К:f1 5. Кg6 Кg3 6. Л:h8×; чернопольный слон: 1. d4 d5 2. Крd2 Крd7 3. Крd3 Крd6 4. Сe3 Сe6 5. c3 c6 6. Фd2 Фd7 7. Сf4×; белопольный слон: 1. e4 e5 2. f4 f5 3. ef ef 4. f6 f3 5. fg fg 6. Сe2 Сe7 7. Сh5×; конь: 1. Кc3 Кc6 2. Кe4 Кe5 3. e3 e6 4. Кe2 Кe7 5. g3 g6 6. Кf6× (или 5. c3 c6 6. Кd6×); пешка: 1. g4 g5 2. h4 h5 3. Кf3 Кf6 4. Кe5 Кe4 5. hg hg 6. g6 g3 7. gf×. Наконец, на девятом ходу мат может объявить король: 1. d3 d6 2. Крd2 Крd7 3. Крc3 Крc6 4. Крb3 Крb6 5. Крa3 Крa6 6. Сe3 Сe6 7. Сb6 Сb3 8. ab ab 9. Крb4×.

До сих пор речь шла о матовании фигурами, которые имеются на доске в начальный момент. А за сколько ходов при симметричной игре могут объявить мат превращенные фигуры? Быстрее всего матуют превращенные ферзь или ладья: 1. c4 c5 2. d4 d5 3. dc dc 4. c6 c3 5. c7 c2 6. cdФ(Л)×.

Н. Скляр предлагает партии, в которых мат объявляют превращенные конь или слон. Матует превращенный конь: 1. e3 e6 2. Кe2 Кe7 3. g4 g5 4. h4 h5 5. hg hg 6. g6 g3 7. g7 g2 8. g8К g1К 9. Кf6×; превращенный чернопольный слон: 1. d4 d5 2. c3 c6 3. Крd2 Крd7 4. Крc2 Крc7 5. e4 e5 6. de de 7. e6 e3 8. e7 e2 9. edС×.

Н. Скляр придумал еще две интересные головоломки на тему симметрии. Какое наименьшее число симметричных ходов надо сделать, чтобы получить следующую позицию?

Белые: Крd1, Сa8, Сh8; черные: Крd8, Сa1, Сh1.

Автору головоломки удалось выполнить задание за 19 ходов: 1. d4 d5 2. e4 e5 3. ed ed 4. Ф:d4 Ф:d5 5. Ф:a7 Ф:a2 6. Ф:a8 Ф:a1 7. Ф:b8 Ф:b1 8. Ф:c7 Ф:c2 9. Ф:b7 Ф:b2 10. Крd1 Крd8 11. Ф:f7 Ф:f2 12. Ф:g8 Ф:g1 13. Ф:h8 Ф:h1 14. Ф:h7 Ф:h2 15. Ф:g7 Ф:g2 16. С:g2 С:g7 17. Сa8 Сa1 18. Сb2 Сb7 19. Сh8 Сh1.

То же самое задание и для следующей позиции, но с дополнительным условием: взятие разрешается только фигурами одного наименования: пешка бьет пешку, конь коня и т. д.

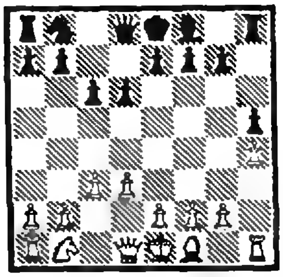
Белые: Крe1, Фd1, Сc1, Кb1, Лa1; черные: Крe8, Фd8, Сc8, Кb8, Лa8.

1. g4 g5 2. h4 h5 3. hg hg 4. f3 f6 5. gf gf 6. fe fe 7. Крf2 Крf7 8. a4 a5 9. b4 b5 10. ab ab 11. c3 c6 12. bc bc 13. cd cd 14. Фc2 Фc7 15. e8Л e1Л 16. Сa6 Сa3 17. С:a3 С:a6 18. Кf3 Кf6 19. Кd4 Кd5 20. Кc6 Кc3 21. К:c3 К:c6 22. Л:a8 Л:a1 23. Л:a1 Л:a8 24. Кb1 Кb8 25. Сc1 Сc8 26. d8Ф d1Ф 27. Ф:d1 Ф:d8 28. Крe1 Крe8. Кто побьет рекорд?

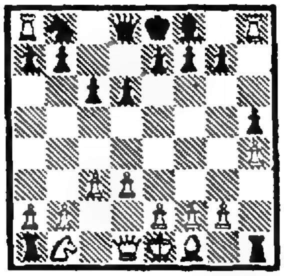
Кажется невероятным, но при полном копировании ходов противника (пока это возможно) черные могут даже выиграть. Белые (шутки ради) матуют сами себя, причем обратный мат ставится уже на восьмом ходу. Вот этот забавный рекорд: 1. e4 e5 2. Крe2 Крe7 3. Крe3 Крe6 4. Фf3 Фf6 5. Кe2 Кe7 6. b3 b6 7. Сa3 Сa6 8. Кd4+! ed×.

В заключение — две удивительные симметричные позиции, которые придумал международный гроссмейстер по шахматной композиции Г. Каспарян.

Обе они должны получиться из начальной расстановки фигур как можно быстрее. Первая возникает при симметричной игре за 7 ходов: 1. d3 d6 2. c3 c6 3. h4 h5 4. Кh3 Кh6 5. С:h6 С:h3 6. Л:h3 Л:h6 7. Лh1 Лh8.

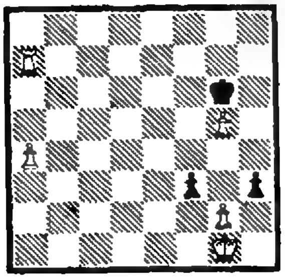


Вторая получается после 24-го хода белых (и игра не всегда «обезьянья»): 1. h4 h5 2. Кf3 Кf6 3. Кe5 Кe4 4. Кc6 Кc3 5. dc dc 6. Фd4 Фd5 7. Фa4 Фa5 8. Сf4 Сf5 9. Кa3 Кa6 10. Лd1 Лd8 11. Лd6 Лh6 12. Лe6 Лd2 13. Лh3 Лg6 14. Лd3 Лg3 15. Лh6 Лh3 16. Лb8 Лh1 17. Лd7 Сd3 18. Сd6 cd 19. cd Фd8 20. Фd1 Лc2 21. Лc7 Лe1 22. Лc8 Лa1 23. Лa8 Кb8 24. Кb1.



Конкурсные задания

7. Придумать самую короткую обезьянью партию, в которой мат объявляет превращенный белопольный слон белых.

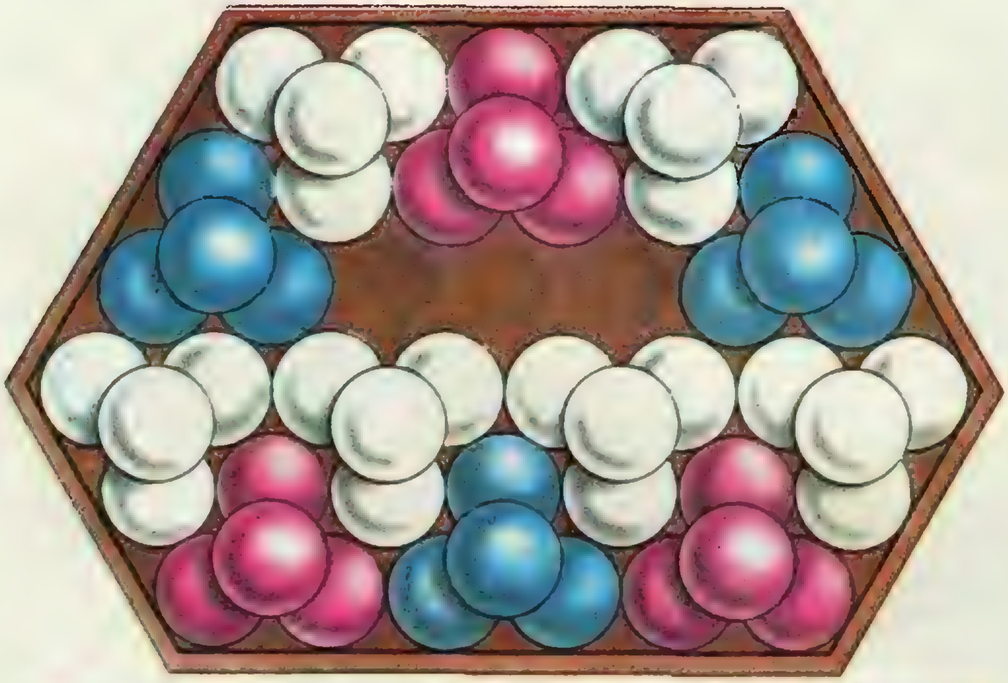


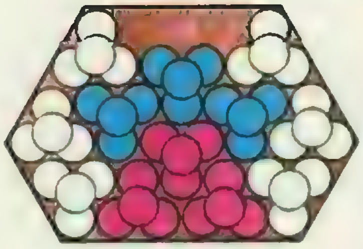
8. Ход черных. **Белые выигрывают.**

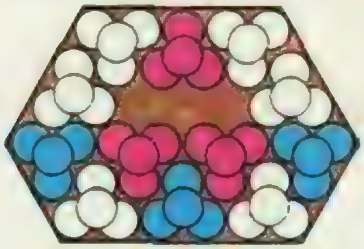
Срок отправки решений — 20 июня 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 7, 8».

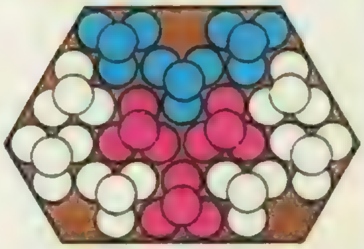
Цена 40 коп.
Индекс 70465

Те, кто следят за головоломками на последних страницах обложек нашего журнала, уже знакомы с «перевертышами» («Квант» № 1 и № 2) и «волшебными кольцами» («Квант № 3). А теперь представляем своего рода гибрид этих двух типов головоломок, выведенный авторами «перевертышей» А. Дремовым и Г. Шевцовой (его идею предложил А. Калинин). Родство показанной здесь головоломки с «перевертышами» очевидно. Она состоит из фигурок — 12 пирамидок, склеенных из шариков,— которые можно перекатывать в шестиугольной коробочке. Для удобства на ее дне расположены по треугольной решетке 3×13 = 39 круглых лунок, три из них пустые. (Важное пояснение: для перекатывания пирамидки из шариков нужна только одна пустая лунка рядом с ней — в эту лунку попадает верхний шарик пирамидки; два «опорных» шарика остаются в старых лунках). Как и в других перестановочных головоломках надо одно данное расположение превратить в другое; несколько вариантов расположений вы видите на рисунках. Заметьте, однако, что эта головоломка существенно отличается от перевертышей-пирамидок хотя бы тем, что по ходу игры пустые лунки способны разбредаться по всей коробке, и уже поэтому передвижения пирамидок из шариков нельзя заменить перекатываниями обычных тетраэдров. (Подумайте попутно, можно ли переставить пирамидки из шариков так, чтобы пустые лунки образовали основание одной такой пирамидки.) Итак, сходство нашей головоломки с «перевертышами» довольно поверхностное. Связь же ее с «волшебными кольцами» глубже и обнаруживается не сразу. Оказывается, существует последовательность ходов, в результате которой 7 пирамидок переставляются по циклу,— так образуется одно кольцо. Аналогично возникает и второе, пересекающееся с первым,— тоже из 7 пирамидок. Попробуйте найти эти кольца! Сделать это в уме или на бумаге очень не просто. Советуем изготовить головоломку и занумеровать пирамидки (см. рисунок), иначе путаница неизбежна. Таким образом, решение «перевертышей из семи шариков» сводится к нахождению циклических перестановок (ответ см. в «Кванте» № 5) и решению «волшебных колец» (о котором рассказано на обложке «Кванта» № 3).









НОМЕР
5

Квант
1987
5

Основан в 1970 году

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 Время творить, время дерзать!
4 *П. А. Певзнер.* Лучшее пари для простаков
9 *Г. С. Симин.* Оптическая электроника при свечах
16 *Д. Г. Кругогин.* Кто управляет городом МК?

Задачник «Кванта»

22 Задачи М1041 — М1045; Ф1053 — Ф1057
24 Решения задач М1021 — М1025; Ф1033 — Ф1037

«Квант» для младших школьников

31 Задачи
34 *Н. Я. Виленкин.* Из истории дробей

32 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»

37 Физика 8, 9, 10:
Законы сохранения и системы отсчета
Как работает электродвигатель?
Физика музыкальной гармонии
49 Избранные школьные задачи

Новости науки

44 Мечта становится реальностью

Математический кружок

45 *С. И. Соболев.* О случайных блужданиях

Практикум абитуриента

50 *Э. Г. Готман.* Правильное решение геометрической задачи

55 **Варианты вступительных экзаменов**
61 **Ответы, указания, решения**
Шахматная страничка
Чемпионаты компьютеров (*3-я с. обложки*)

Наша обложка

Солнечные батареи, оптические кабели связи, чувствительные фотодетекторы — все это сегодняшний день оптической электроники. А начало этой самой молодой области полупроводниковой техники было положено ... более ста лет назад. О первых шагах оптоэлектроники рассказывается в статье Г. С. Симина. Фотографии на первой и второй страницах обложки — иллюстрации к этой статье.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1987

Время творить, время дерзать!

Дорогие наши читатели-школьники! В вашей жизни произошло знаменательное событие. После длительной активной подготовки состоялся XX съезд ВЛКСМ. Он открыл новую эру в истории комсомола, стал хорошей практической школой перестройки и демократизации одной из самых массовых общественных организаций нашей страны. Над материалами съезда надо упорно думать, их надо внимательно изучать и обсуждать в коллективах. Ведь они затрагивают все стороны жизни молодежи и подвергают их открытому, честному, критическому анализу.

У нашего комсомола имеются немалые заслуги, отмеченные высокими наградами Родины. Но и его не обошли элементы застоя, бюрократизации, формализма, с которыми мы столкнулись в последние десятилетия как в экономике, так и в социальной действительности. Не имея необходимых условий для самостоятельного преодоления этих негативных явлений, многие из вас утратили социальную активность, замкнулись в кругу личных интересов, пытались приспособиться к окружающей действительности.

Решения съезда по мере их практической реализации приведут к коренному обновлению всех сторон деятельности комсомола. Они призывают вас к активности, самодеятельности, самоуправлению. Ведь вам предстоит участвовать в революционном обновлении социалистического общества. Думайте, спорьте, ищите, предлагайте, настаивайте, добивайтесь, словом, включайтесь в открытую борьбу за совершенствование нашей советской школы, нашего социалистического общества. Овладевайте знаниями, расширяйте свой кругозор, укрепляйте волю, дисциплинируйте характер. Упорная учеба — залог успешной трудовой деятельности в будущей жизни. Но не зубрите, а старайтесь понять изучаемый материал, найти свой интерес в каждом школьном предмете.

Надо преодолеть привычную инерцию в учебе. В отчетном докладе ЦК ВЛКСМ съезду по этому поводу сказано четко: «Приобретение знаний — напряженный труд. Однако в сознании учащихся и студентов по-прежнему живет убеждение, что период учебы — это лишь пора подступов к труду, это еще не сама жизнь, а подготовка к ней». С этим неправильным убеждением надо распрощаться поскорее и навсегда.

В отчетном докладе ЦК ВЛКСМ поставлена и такая задача: «Давайте, товарищи, займемся новым для нас делом — поиском талантов. Ведь это бесценное достояние общества». Таланты пробуждаются рано, еще за школьной партой. Но нелегко бывает их заметить, поддержать, взрастить. Именно к этому и стремится наш «Квант», пробуждая интерес к физико-математическим наукам и стараясь помочь самостоятельному развитию юных талантов.

Выбирайте комсомольскими вожаками тех, кто талантлив, честен, трудолюбив, принципиален, кто может постоять за интересы ученического коллектива. Выбирайте и поддерживайте их своей инициативой, конкретными, интересными для вас делами. Время бесхребетных соглашателей и приспособленцев, ловкачей и тунеядцев уходит в прошлое.

Чаще обращайтесь к Ленину, к его работам послеоктябрьского периода. Ответы на многие вопросы о месте молодежи и комсомола в жизни общества и сегодня можно найти в его речи на III съезде РКСМ, в центральной идее этой речи о том, что главная задача Союза молодежи — учиться коммунизму.

Впереди у вас необычайно интересная и непростая жизнь. Помните, что недалеко то время, когда на ваши плечи ляжет ответственность за будущее социализма, за судьбы человечества. Выступая на съезде, генеральный секретарь ЦК КПСС М. С. Горбачев сказал, обращаясь к молодежи: «Развитие цивилизации сегодня стирает грань между возможным и невозможным. В ваше распоряжение поступает такая колоссальная научно-техническая мощь и интеллектуальный потенциал, каких не было в руках ни у одного из живших на Земле поколений человеческого рода... И, вступая во владение этой мощью, помните, что вы творите будущее».

ЛУЧШЕЕ ПАРИ ДЛЯ ПРОСТАКОВ

Кандидат физико-математических наук
П. А. ПЕВЗНЕР

> *— Почему ты никогда не играешь? — Спросил Малыш у Смока, когда они как-то раз сидели в «Оленьем роге».— Неужели тебя не тянет к игорному столу?*
> *— Тянет,— ответил Смок.— Но я знаю статистику проигрышей, а мне нужна верная прибыль.*
>
> Джек Лондон, Смок Беллью

Вы наверняка знаете игру *орел-решка*: игрок А выбирает какую-нибудь сторону монеты (например, О — орел), сообщает об этом В; В берет другую сторону; после этого подбрасывается монета ... Ни у кого не возникает сомнений в том, что игра орел-решка — честный способ решения спорных вопросов.

В 1974 году Мартин Гарднер в статье «Парадокс, возникающий из-за нетранзитивных отношений» познакомил читателей журнала *Scientific American* с «такой же честной» игрой, которую он назвал *лучшим пари для простаков*. Эта игра сходна с игрой орел-решка, только игроки задумывают слова не из одной буквы, как в игре орел-решка, а из нескольких букв. Например, игрок А задумывает слово ОРО и сообщает об этом В; В в свою очередь задумывает какое-нибудь слово такой же длины, например, ООР. Разумеется, выбранные слова не должны совпадать, поэтому А и сообщает о своем выборе В. После этого игроки начинают подбрасывать монету, записывая результат каждого бросания. Например, после 6 бросаний с исходами: решка, орел, решка, решка, орел, решка, будет записана последовательность РОРРОР. Игра прекращается в тот момент, когда в записываемой последовательности букв на конце возникнет слово, выбранное А или В; в первом случае победа присуждается А, во втором — В. Таким образом, побеждает тот, чье слово появится раньше. Например, если на седьмом броске монеты выпадет О, то победит А, так как будет написано РОРР*ОРО* (курсивными буквами выделено возникшее в последовательности слово, выбранное игроком А); Если на седьмом броске выпадет Р, то игру следует продолжить (так как в РОРРОРР не содержится ни ОРО, ни ООР); при этом в случае, когда на 8-м, 9-м и 10-м бросках выпадут О, О, Р, победит В — ведь будет написано РОРРОРР*ООР*.

Если вы играете в игру орел-решка, то выбор орла или решки — дело вкуса, так как слова О и Р равноправны. На первый взгляд кажется, что и в «лучшем пари для простаков» все слова равноправны. В 1969 году создатель этой игры Вальтер Пенней обнаружил неравноправность слов. Большинство математиков, узнавших правила игры, в первый момент отказываются в это поверить. Тем не менее это так — для многих пар слов выбор одного из них (самого «сильного») обеспечивает преимущество игроку, осуществившему этот выбор: этот игрок выигрывает чаще, чем его противник, игра оказывается нечестной. Более того, существует формула, позволяющая количественно выразить это преимущество.

С этой формулой связана почти детективная история. Гарднер привел ее в своей статье, сославшись на известного английского математика Джона Конвея, сообщившего о ней в письме (без доказательства). Гарднер признался, что у него нет идей о том, как ее доказывать и «предположил», что она получена с помощью магии, как и многие другие результаты Конвея.

Соображения Конвея об этой задаче до сих пор не напечатаны, но в конце 70-х, начале 80-х годов его формула была независимо и разными способами доказана сразу несколькими математиками. Однако все эти работы использовали довольно серьезный математический аппарат, и формула появлялась в них, как фокус: после деления одних трехэтажных выражений на другие. Оказывается, существует элементарное доказательство формулы Конвея, эскиз которого приводится в заключение этой статьи. Более того, сейчас имеется и простой алгоритм для нахождения лучшего ответа для второго игрока, хотя первоначальный замечательный алгоритм (для слов из трех букв), предложенный в статье Гарднера и принадлежащий его коллеге Б. Волку, по туманности и запутанности не уступает алхимическим рецептам получения философского камня.

Но мы отвлеклись. Осталось невыясненным, почему слова в нашей игре могут быть неравноправными.

Какое слово сильнее?

Рассмотрим конкретный пример. Представим себе, что в игре с двухбуквенными словами игрок А поставил на комбинацию «решка-решка», а В — на комбинацию «орел-решка». Тогда А выиграет, только если при первых двух бросаниях выпадет РР: если выпадет ОР, сразу же выигрывает В, если выпадет РО или ОО, то В тоже выиграет, хотя и не сразу; именно, в последних двух случаях В выиграет, как только при очередном бросании выпадет Р (а это когда-нибудь и произойдет — при честном бросании монета не может всегда выпадать орлом). Таким образом, из четырех равновозможных случаев (РР, ОР, РО, ОО) игрок А выигрывает в одном (РР), т. е. шансы на выигрыш у А в три раза хуже, чем у В.

По поводу игры с двухбуквенными словами стоит заметить, что умный игрок А не будет выбирать слово РР (равно как и слово ОО). Он выберет слово ОР (или РО), а тогда его шансы на выигрыш и проигрыш одинаковы, если, конечно, В не выберет одно из «слабых» слов ОО или РР (проверьте!).

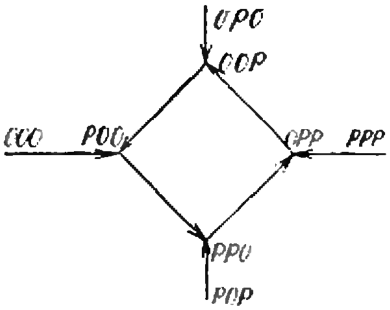


Рис. 1.

Но если перейти к трехбуквенным словам, картина принципиально меняется. Именно: *какое бы трехбуквенное слово не выбрал игрок* А, *его соперник* В *может подобрать другое слово, которое ему дает больше шансов на выигрыш.*

— Как же так,— спросит читатель,— почему бы игроку А не выбрать «самое сильное» слово, ведь он выбирает первым? А дело как раз в том, что нет самого сильного слова. Ситуацию наглядно поясняет рисунок 1. На нем выписаны все трехбуквенные слова составленные из букв О, Р, а красные стрелки между двумя словами указывают, какое из этих двух слов сильнее (т. е. дает больше шансов на выигрыш).

Посмотрите на рисунок 1: из каждого слова выходит хотя бы одна стрелка; значит, для любого слова есть более сильное, т. е. *нет самого сильного слова.* Обратите внимание на цикл из слов РРО, ОРР, ООР, РОО и РРО. Мы видим: из того, что слово X сильнее Y, а Y сильнее Z, вовсе не следует, что X будет сильнее Z (ситуация, которая часто возникает в спортивных соревнованиях). Математики говорят, что отношение «быть сильнее» *нетранзитивно* (отсюда и название упомянутой статьи Гарднера). Имея в своем распоряжении рисунок 1, игрок В, руководствуясь стрелками, всегда может в ответ на выбор А выбрать для себя более сильное слово. И тогда он будет чаще выигрывать, чем его противник.

Но насколько чаще? И откуда следует, что рисунок 1 правильно отражает реальную ситуацию? На эти вопросы нам предстоит ответить.

Оценим шансы на выигрыш

Вернемся к двухбуквенной игре. Будем, как и раньше, предполагать, что наивный игрок А выбрал слово $A=11$, а его хитрый противник В поставил на слово $B=01$ (вместо букв О, Р мы теперь пишем цифры 0, 1, а игрока и выбранное им слово обозначаем одной буквой). Последовательности бросаний монеты, на которых выигрывает А, будем называть *A-сериями* (аналогично определяются *B-серии*). Например, 11 — A-серия, а 01, 001, 0001, 101, 1001, 10001 — B-серии.

B \ A	00	01	10	11
00	▨	1/2	1/4	1/2
01	1/2	▨	1/2	3/4
10	3/4	1/2	▨	1/2
11	1/2	1/4	1/2	▨

Таблица 1.

Очевидно, что 11 — единственная *А*-серия (т. е. А выигрывает в том и только в том случае, когда первые два броска монеты дают 1). Далее, не менее очевидно, что *В*-серии имеют вид 0...1, либо 10...1 (на месте многоточия может стоять любое число нулей).

Итак, 11 — единственная *А*-серия. Давайте попытаемся определить вероятность*) выигрыша А, т. е. долю случаев, в которых после двух бросаний появляется последовательность 11.

В результате одного бросания возможны два исхода (0 и 1) — вероятность каждого исхода равна 1/2. В результате двух бросаний возможны четыре исхода, вероятность каждого равна 1/4, следовательно вероятность выигрыша А равна 1/4 (т. е. А выигрывает в 1/4 всех случаев):

$$P(A, B)=P(11)=1/4$$

(через $P(A, B)$ обозначена вероятность выигрыша А у В, через $P(11)$ — вероятность серии 11).

В результате n бросаний могут получиться 2^n (равновозможных) исходов; следовательно, вероятность каждой серии длины n равна $1/2^n$. Для того, чтобы посчитать вероятность $P(B, A; n)$ выигрыша В за n шагов или менее, необходимо найти вероятность каждой *В*-серии длины $\leqslant n$ и просуммировать эти вероятности. Получим

$$P(B, A; n)=P(01)+P(001)+\ldots$$

$$\ldots+P(\overbrace{0\ldots0}^{n-1}1)+P(101)+P(1001)+\ldots$$

B \ A	00	01	10	11
00	▨	1	1/3	1
01	1	▨	1	3
10	3	1	▨	1
11	1	1/3	1	▨

Таблица 2.

$$\ldots+P(1\underbrace{0\ldots0}_{n-2}1)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Следовательно, В выигрывает у А за n шагов или менее с вероятностью, которая при больших n очень близка к 3/4; вероятность того, что после n бросаний еще никто не выиграл, равна $1/2^{n-1}$ (т. е. ничтожно мала при больших n). Переходя к пределу в равенстве $P(B, A; n)=3/4-1/2^{n-1}$ при $n\to\infty$, можно считать, что мы получим вероятность $P(B, A)$ выигрыша В у А при «неограниченном продолжении» игры:

$$P(B, A)=3/4.$$

Вероятность выигрышей для произвольных двухбуквенных слов *А* и *В* показана в таблице 1 (число, стоящее на пересечении строки *В* и столбца *А*, дает вероятность выигрыша В у А). Эту таблицу несложно составить.

Оценим преимущество

По таблице 1 строится таблица 2, дающая *преимущество В над А*

$$d(B, A)=\frac{P(B, A)}{P(A, B)}. \qquad (1)$$

В таблице 3 приводятся преимущества для всех трехбуквенных слов. Пользуясь этой таблицей мы и построили «нетранзитивный» граф, показанный на рисунке 1.

Но как найдены числа в таблице 3? К сожалению, формула (1) малопригодна для вычислений при длине слов $l\geqslant3$. Уже для трехбуквенных слов *А*, *В* найти $P(A, B)$ непосредственно — весьма неприятная задача, а для больших l — безнадежная. Но тут нас выручает «магическая»

---

* Мы не определяем здесь понятие *вероятности* — в нашей статье слова «вероятность» и «доля случаев» — синонимы. Читателей, желающих ознакомиться с этим понятием, мы отсылаем к книге: А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров, *Введение в теорию вероятностей*, М.: Наука, 1978.

B \ A	000	001	010	011	100	101	110	111
000	▨	1	2/3	2/3	1/7	5/7	3/7	1
001	1	▨	②	②	1/3	5/3	1	7/3
010	3/2	1/2	▨	1	1	1	3/5	7/5
011	3/2	1/2	1	▨	1	1	③	⑦
100	⑦	③	1	1	▨	1	1/2	3/2
101	7/5	3/5	1	1	1	▨	1/2	3/2
110	7/3	1	5/3	1/3	②	②	▨	1
111	1	3/7	5/7	1/7	2/3	2/3	1	▨

Таблица 3.

Формула Конвея

Формула Конвея позволяет найти $d(B, A)$ при произвольных B и A, не вычисляя никаких вероятностей. Для того, чтобы объяснить эту формулу, нам нужно определить многочлен Конвея $K_{XY}(t)$ слов X, Y.

На рисунке 2 слово Y шесть раз записано под словом X, причем каждое новое слово Y сдвигается на одну позицию вправо по сравнению с предыдущим (для n-буквенных слов слово Y будет записано под X n раз). Каждому сдвигу слова Y поставим в соответствие число 1 или 0 в зависимости от того, совпадают ли все буквы, находящиеся друг под другом в общих позициях X и Y, или нет. Полученное таким образом слово (длины n) из нулей и единиц называется *корреляцией* X *и* Y и обозначается $\langle XY \rangle$. Так, например, для 2-го сдвига Y общие позиции совпадают, поэтому во второй строке на рисунке 2 записана единица — вторая буква слова $\langle XY \rangle$. В нашем примере

$$\langle XY \rangle = 010011.$$

В общем случае, пусть $\langle XY \rangle = e_1 \ldots e_n$ (где e_i — нули или единицы). Тогда *многочлен Конвея слов* X, Y определяется так:

$$K_{XY}(t) = e_1 + e_2 t + \ldots + e_n t^{n-1}$$

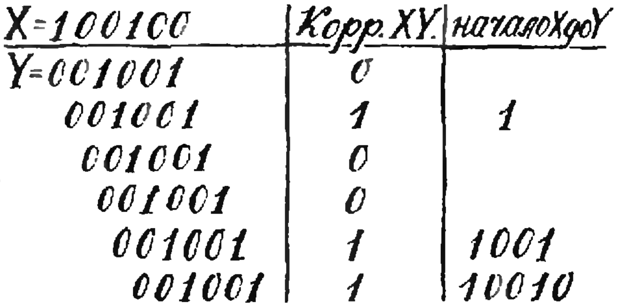
В нашем случае $K_{XY}(t) = t + t^4 + t^5$.

Очень странное определение! Во всяком случае совершенно непонятно, как до него можно было додуматься. Но оно работает — на нем основана формула Конвея:

$$\boxed{d(B, A) = \frac{K_{AA}(1/2) - K_{AB}(1/2)}{K_{BB}(1/2) - K_{BA}(1/2)}.} \qquad (*)$$

Можно понять Гарднера, когда он приписывает вывод этой необычной формулы «потусторонним» силам: ну магия, и только!

Не останавливаясь пока на выводе формулы (*), поясним, как ею пользоваться. Сначала нужно найти корреляции $\langle AA \rangle$, $\langle AB \rangle$, $\langle BB \rangle$, $\langle BA \rangle$. Затем по ним написать четыре многочлена Конвея, в каждый из них подставить $t = 1/2$ и, наконец, выполнить действия, указанные в пра-



X=100100	Корр. XY	начало X до Y
Y=001001	0	
001001	1	1
001001	0	
001001	0	
001001	1	1001
001001	1	10010

Рис. 2.

$X = 100100 \qquad Y = 001001$

$XY = 010011$

$K_{XY}(t) = t + t^4 + t^5, \ K_{XY}(1/2) = 19/32$

XY-ростки : 1, 0100, 01001

$YX = 001001$

$K_{YX}(t) = t^2 + t^5, \ K_{YX}(1/2) = 9/32$

YX-ростки : 00, 00100

$XX = 100100$

$K_{XX}(t) = 1 + t^3, \ K_{XX}(1/2) = 9/8$

XX-ростки : ∅, 100

$YY = 100100$

$K_{YY}(t) = 1 + t^3, \ K_{YY}(1/2) = 9/8$

YY-ростки : ∅, 001

$$d(Y,X) = \frac{K_{XX}(1/2) - K_{XY}(1/2)}{K_{YY}(1/2) - K_{YX}(1/2)} = \frac{9/8 - 19/32}{9/8 - 9/32} = 17/27$$

Рис. 3.

вой части формулы (*). Конкретный пример разобран на рисунке 3.

Имея таблицу преимуществ и зная загаданное игроком А слово A, игрок В легко найдет оптимальный выбор ответа B — для этого ему нужно лишь разыскать максимальное значение в столбце под словом A. Например, для первого столбца $A = 000$ (табл. 3), $d_{\max} = 7$, и нужно взять $B = 100$. Это обеспечивает семикратное преимущество. В таблице 3 максимальные элементы в столбцах обведены в кружочки — все они не меньше 2; — следовательно, при любом выборе А, В может ответить так, что у В будет по крайней мере 2-кратное преимущество в игре.

Как выбрать ответное слово?

Мы уже объяснили, как это сделать. Но при этом предположили, что предварительно составлена таблица преимуществ. Нельзя ли, зная слово A, непосредственно найти оптимальный ответ B, не вычисляя всей таблицы (или целого ее столбца, длина которого равна 2^l)?

Оказывается — можно. Расскажем, как это делается.

Пусть игрок А выбрал слово $A = a_1 a_2 \ldots a_l$ ($l > 2$, a_i равно 0 или 1). Тогда игроку В следует выбрать слово $B = b_1 b_2 \ldots b_l$,

$$b_2 = a_1, b_3 = a_2, \ldots, b_l = a_{l-1}$$

(пока первая буква b_1 слова B не фиксируется).

В этом случае при сдвиге слова A на одну позицию относительно B

$$\begin{aligned} B &= b_1 b_2 b_3 \ldots b_l \\ A &= \, a_1 a_2 \ldots a_{l-1} a_l \end{aligned}$$

все буквы, находящиеся друг под другом, совпадают, поэтому первый член в многочлене $K_{BA}(t)$ при $t = 1/2$ равен $1/2$ — мы тем самым стремимся максимизировать значение $K_{BA}(1/2)$ в формуле Конвея. Вообще предлагаемый выбор оптимального ответа основан на (довольно тонком) анализе формулы Конвея, который мы проводить не будем.

Осталось объяснить, как выбирается b_1. Обозначим $A' = a_1 a_2 \ldots a_{l-1}$. Пусть r — минимальное число, при котором после сдвига A' на r позиций происходит совпадение написанных друг под другом букв:

$$\begin{aligned} A' &= a_1 \ldots a_r a_{r+1} \ldots a_{l-1} \\ A' &= \ a_1 \ldots a_{l-r-1} a_{l-r} \ldots a_{l-1} \end{aligned}$$

(т. е. $a_1 = a_{r+1}$, $a_2 = a_{r+2}$, ..., $a_{l-r-1} = a_{l-1}$). Так вот, букву b_1 следует выбирать по правилу $b_1 \neq a_r$ (например, при $A = 100100$ имеем $r = 3$, и следует брать $B = 110010$).

Американские математики Гуибас и Одлыжко доказали в 1981 году, что такой выбор слова B — оптимален. Более того, ими доказано, что число

$$\min_A \max_B d(B, A)$$

(т. е. преимущество В над А при самом лучшем для А выборе слова A) стремится к 2 при возрастании l. Другими словами, при указанном выборе ответа второй игрок в среднем выигрывает в два раза чаще самого хитрого первого игрока.

Нам осталось лишь привести обещанное доказательство.

Эскиз доказательства формулы Конвея

Даны слова A, B длины $l > 2$. Через S_A обозначим (бесконечное) множество *укороченных A-серий*, т. е. всех слов, получаемых из A-серий отбрасыванием их последних l букв. Аналогично определим S_B. Пусть $m_1, \ldots, m_k$ номера разрядов слова $\langle XY \rangle$, где стоит 1 (напомним, что $\langle XY \rangle$ — это корреляция слов X и Y); через H_{XY} обозначим множество из k слов, составленных соответственно из первых $m_1, m_2, \ldots, m_k$ букв слова X. Через $M * H$, где M и H любые множества слов, обозначим *слияние* M и H, т. е. новое множество, составленное из всех слов вида XY (слова X и Y записаны подряд в одно слово, $X \in M$, $Y \in H$). На-

(Окончание см. на с. 15)

ОПТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА ПРИ СВЕЧАХ

Кандидат физико-математических наук
Г. С. СИМИН

Оптическая электроника (или оптоэлектроника) — самая молодая и, возможно, самая перспективная область современной полупроводниковой электроники, любимица физиков, разработчиков сверхбыстродействующих ЭВМ и систем сверхдальней связи. Ею занимаются самые передовые лаборатории мира, оснащенные наисовременнейшим оборудованием. И уж конечно не при свете свечей. Между тем наш рассказ об оптоэлектронике мы начнем с тех далеких времен, когда в России А. Н. Лодыгин еще только разрабатывал первые конструкции угольных ламп накаливания, а Европа освещалась в основном свечами и газовыми фонарями.

Из многих известных в XIX веке полупроводников — как тогда говорили, веществ, «худо проводящих электричество»,— селен был материалом, удостоенным особого внимания ученых. Дело в том, что в 1873 году английский телеграфный служащий А. Мей случайно обнаружил, что сопротивление селена резко уменьшается, если на него падает свет. Возможно, Мей не слишком обрадовался новому явлению, так как обнаружил его, исследуя селеновые изоляционные опоры телеграфного кабеля. Но руководитель Мея, инженер У. Смит, сразу оценил важность открытия. Он быстро провел первые исследования и в том же 1873 году сообщил о них в печати. Это сообщение вызвало бурный интерес у физиков всего мира.

К исследованию селена обратились ученые из Германии, Франции, Англии, России, Америки. Предпринимались многочисленные попытки повысить светочувствительность селена. С этой целью были испробованы десятки способов его получения. Однако все эти поиски велись практически «вслепую» — ведь физики XIX века и понятия не имели о невероятной чувствительности полупроводников к примесям, о методах их очистки. Поэтому публикуемые результаты противоречили друг другу, приводимые численные данные различались в десятки и сотни раз. Встречались и просто курьезные (с нашей, сегодняшней точки зрения) сообщения. Некоторые авторы писали, например, что светочувствительность селена возрастает, если рядом с ним положить каучук или камфару, побывавшие перед тем в озоне. Другие сообщали, что селен наиболее чувствителен к соседству с терпентинным маслом. Однако не следует забывать, что в то время полупроводники еще не были осознаны как особый, удивительный класс материалов. Так что не спешите посмотреть свысока на эксперименты столетней давности — это были первые шаги на пути, который привел к созданию оптической электроники.

«Селеновый бум» привлек внимание знаменитого немецкого электротехника Вернера Сименса. Сименс был наделен редкостным изобретательским талантом. Еще двадцатипятилетним молодым человеком, отбывая пятилетнее тюремное заключение за участие в дуэли, он изобрел способ гальванического серебрения и золочения и позолотил свою тюремную ложку, перенеся на нее золото с завалявшейся в кармане монеты. Это было в начале сороковых годов XIX века. В семидесятые годы Сименс, крупный промышленный магнат, почетный доктор Берлинского университета, член Берлинской академии наук, автор ртутного эталона сопротивления, увековечившего его имя, оставался таким же неукротимым изобретателем, как в юности. Он увлекся изучением селена, и это увлечение имело весьма серьезные последствия для дальнейшей судьбы селена. В 1875 году Сименс опубликовал статью, в которой, наряду с детальным описанием способов получения и свойств селена, сообщил об изобретенном им новом приборе — абсолютном электрическом фотометре. Скажем несколько слов о фотометрии и ее состоянии в XIX веке, чтобы вы лучше смогли оценить изобретение Сименса.

Можно считать, что фотометрия зародилась во II веке н. э., когда Птолемей начал изучать яркость звезд. И все дальнейшее развитие этой области науки было связано, в основном, с астрономическими наблюдениями. В 1604 году Кеплер установил законы освещенности. В 1729 году французский ученый П. Бугер сформулировал принцип фотометрии и заложил начала научных измерений в этой области. Идея Бугера состояла в том, чтобы использовать способности глаза улавливать разницу освещенностей, даже если эта разница составляет всего 1 %. В фотометре Бугера две части экрана освещаются двумя источниками — изучаемым (например, звездой) и «эталонным» (например, свечой). Освещенность той части экрана, на которую светит эталонный источник, можно менять (например, приближая или удаляя свечу). При равенстве освещенностей, создаваемых изучаемой и «искусственной» звездой, положение последней регистрируется. Таким образом можно делать косвенные измерения.

Фотометр Бугера неоднократно усовершенствовался в течение более 100 лет, однако основной принцип его работы был неизменным: равенство освещенностей констатировал глаз. Устал астроном — точность измерений резко падает; при различных оттенках цвета измеряемого и эталонного источников оценка становится затруднительной; появился в поле зрения яркий предмет — снова ошибка в измерениях. Субъективный характер измерений стал серьезным недостатком фотометрии. А между тем потребность в фотометрах росла: к небесным светилам прибавлялись земные лампы, яркость которых тоже нужно измерять.

Занявшись исследованием селена, Сименс не мог пропустить возможность практического использования выполненных экспериментов. Он сконструировал фотометр, в котором впервые субъективная оценка на глаз была исключена и интенсивность света могла быть выражена в электрических единицах. Электрическая цепь фотометра Сименса состояла из гальванического элемента, гальванометра и куска селена с проволочными электродами. В темноте сопротивление селена так велико, что стрелка гальванометра почти не отклоняется. При освещении селена его сопротивление падает, ток увеличивается, и стрелка гальванометра отклоняется тем сильнее, чем ярче свет. (Именно так работает и современный фотоэкспонометр!)

На основе селенового фоторезистора Сименс сделал первую в мире оптоэлектронную игрушку (конечно, в то время ее никто так не называл; термин «оптоэлектроника» появился много десятков лет спустя). Основным элементом этой игрушки была модель человеческого глаза, в которую был вмонтирован селеновый фоторезистор. Стоило приблизить к глазу зажженную свечу — и он тут же закрывался, «щурясь» от яркого света, совсем как живой.

Изобретение селенового фотометра дало толчок к появлению целой серии остроумных приборов. Интересным и очень смелым для того времени развитием работ Сименса явилось изобретение американского инженера Дж. Кэри. В том же 1875 году он предложил проект устройства для передачи изображений на расстояние. Принцип действия этого устройства представляется теперь очень простым. Передаваемое изображение сначала проецируется на приемник, который состоит из большого числа селеновых ячеек, составленных вплотную. Сопротивление ячеек изменяется в различной степени в зависимости от того, насколько ярко освещена та или иная ячейка. Воспроизводится изображение на «экране», который представляет собой панель с лампочками, причем число лампочек равно числу селеновых ячеек приемника. Каждая лампочка соединена последовательно с соответствующей ячейкой и источником напряжения. При включении напряжения яркость свечения той или иной лампочки тем больше, чем меньше сопротивление соединенного с ней селенового элемента, т. е. чем ярче освещена соответствующая ячейка. При достаточно большой длине проводов, соединяющих приемник и экран, изображение может быть передано на значительное расстояние.

Изобретение Кэри, однако, оказалось в то время практически нереализуемым. Ведь если приемник содержит, например, 100×100 ячеек, то необходимо протянуть до экрана 10 000 проводов и подключить их к 10 000 лампочек, к 10 000 источников, и чтобы ни одна лампа не перегорела!

Несколько следующих применений селенового фоторезистора вызвали настоящие сенсации.

В далеком Вашингтоне Александр Грехем Белл с интересом читал поступающие из-за океана сообщения об исследованиях селена и сам испробовал немало способов приготовления материала с высокой светочувствительностью. После нескольких удачных опытов Беллу пришла в голову странная на первый взгляд мысль — в электрической цепи, в которую был включен исследуемый селеновый образец, заменить гальванометр... телефоном. Мысль эта не покажется столь уж странной, если вспомнить, что незадолго до того Белл как раз взял патент на первый в мире телефон и теперь с успехом распространял свое детище по всей стране. Телефон Белла издавал звуки, если ток, текущий через него, менялся достаточно быстро. Поэтому Белл решил, что если в цепи последовательно с телефоном*) будет включен селеновый фоточувствительный образец, то телефон будет звучать, когда свет, падающий на селен, будет часто прерываться. 17 мая 1878 года, читая лекцию в Королевском институте в Лондоне, доктор Белл объявил, что «возможно слышать звуки, вызванные прерыванием света». Мелодические звуки разной высоты Белл получал, меняя скорость вращения диска с прорезями, расположенного между ярким источником и селеновым приемником.

Два года спустя эта идея Белла получила сенсационное развитие.

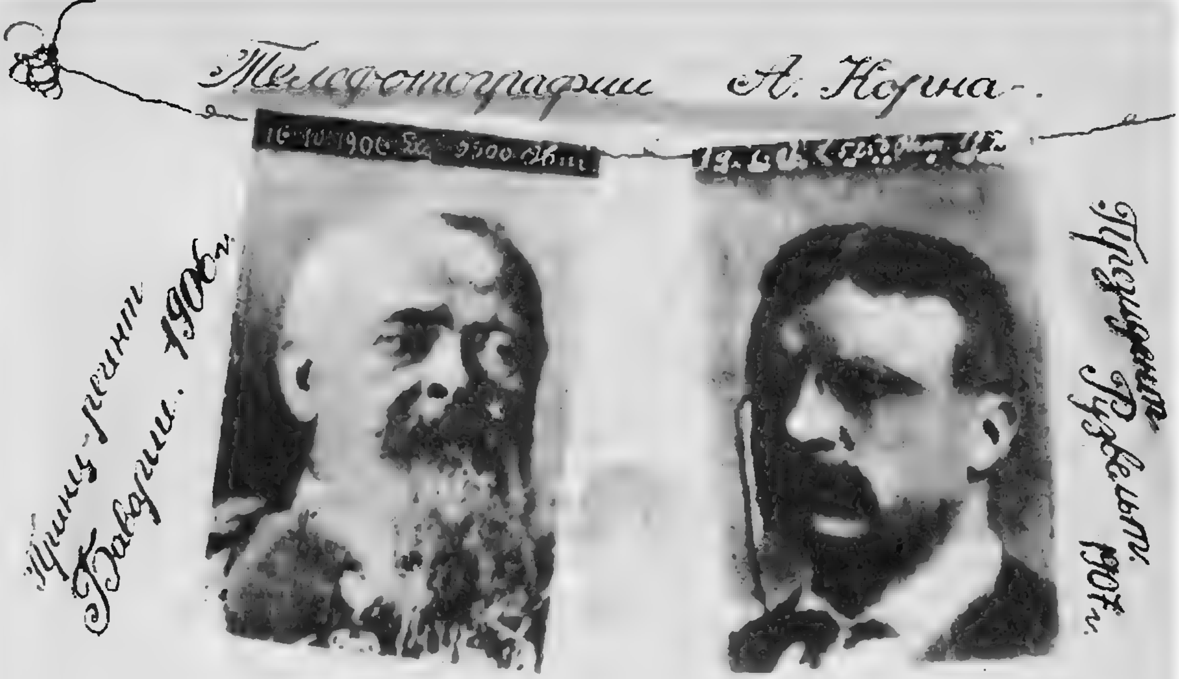
Солнечным летним днем 1880 года жители Вашингтона с удивлением наблюдали, как прилично одетый господин устанавливал на крыше Франклиновской школы странное сооружение. Многие узнали в господине друга и помощника профессора Белла мистера Тейнтера. Тейнтер направил на солнце небольшое зеркало; отраженный солнечный свет проходил через несколько линз и ярким тонким лучом упирался прямо в окно стоящего напротив здания. В этом здании помещалась исследовательская лаборатория Белла. Став позади зеркала и приспособив к нему нечто вроде рупора, Тейнтер начал что-то негромко говорить в рупор, глядя при этом на окно лаборатории. В ответ в окне появился мистер Белл, размахивающий шляпой.

В этот день Белл и Тейнтер успешно осуществили беспроводную оптическую телефонную связь. Сооружение на крыше было передающей станцией. В лаборатории Белла располагалась приемная станции. Посылаемый с крыши луч падал на фотоприемник — селеновый фоторезистор, включенный в электрическую цепь последовательно с телефоном. Когда Тейнтер говорил в рупор, звуковые колебания заставляли зеркало слегка вибрировать. При этом из-за «расфокусировки» менялась освещенность фотоприемника ... Поднеся к уху телефон, Белл отчетливо услышал голос Тейнтера: «Мистер Белл, если вы слышите меня, подойдите к окну и помашите шляпой». Ответ Белла свидетельствовал о полном успехе опыта.

Сенсационное сообщение об эксперименте Белла и Тейнтера вызвало новую волну повышенного интереса к селену, новые попытки увеличить его светочувствительность. Последователь Белла, его соотечественник, С. Фритс сумел получить образцы, сопротивление которых под действием солнечного света уменьшалось более чем в 300 раз (Белл и Сименс достигли лишь пятнадцатикратного изменения). Фритс предложил и еще одно возможное применение селена. Если подключить селеновый фоторезистор к какому-либо электрическому аппарату, то этим аппаратом можно будет управлять при помощи света. Например, селеновый элемент может быть включен в цепь электромагнитного реле. При освещении элемента его сопротивление уменьшится, ток в цепи возрастет, и контакты реле замкнутся без всякого прямого вмешательства в электрическую цепь реле. В этой идее содержится принцип действия так называемой оптопары — одного из основных элементов

---

*) Имеется в виду не телефонный аппарат в целом, который мы и привыкли называть телефоном, а сам звучащий элемент Белла — электромагнит с мембраной.


Телефотографии А. Корна.
16.10.1906
Принц-регент Баварии. 1906 г.
Президент Рузвельт 1907 г.

современной автоматики (вспомните хотя бы пропускные автоматы в метро). И хотя оптопары появились лишь во второй половине нашего столетия, идея оптического управления с помощью селенового элемента была очень эффектно реализована намного раньше.

1 февраля 1907 года в Париже в переполненном конференц-зале перед журналистами, учеными, предпринимателями и членами правительства выступал инженер из Мюнхена Артур Корн. Слева и справа от него на длинном столе располагались два больших медленно вращающихся цилиндра непонятного для публики назначения.

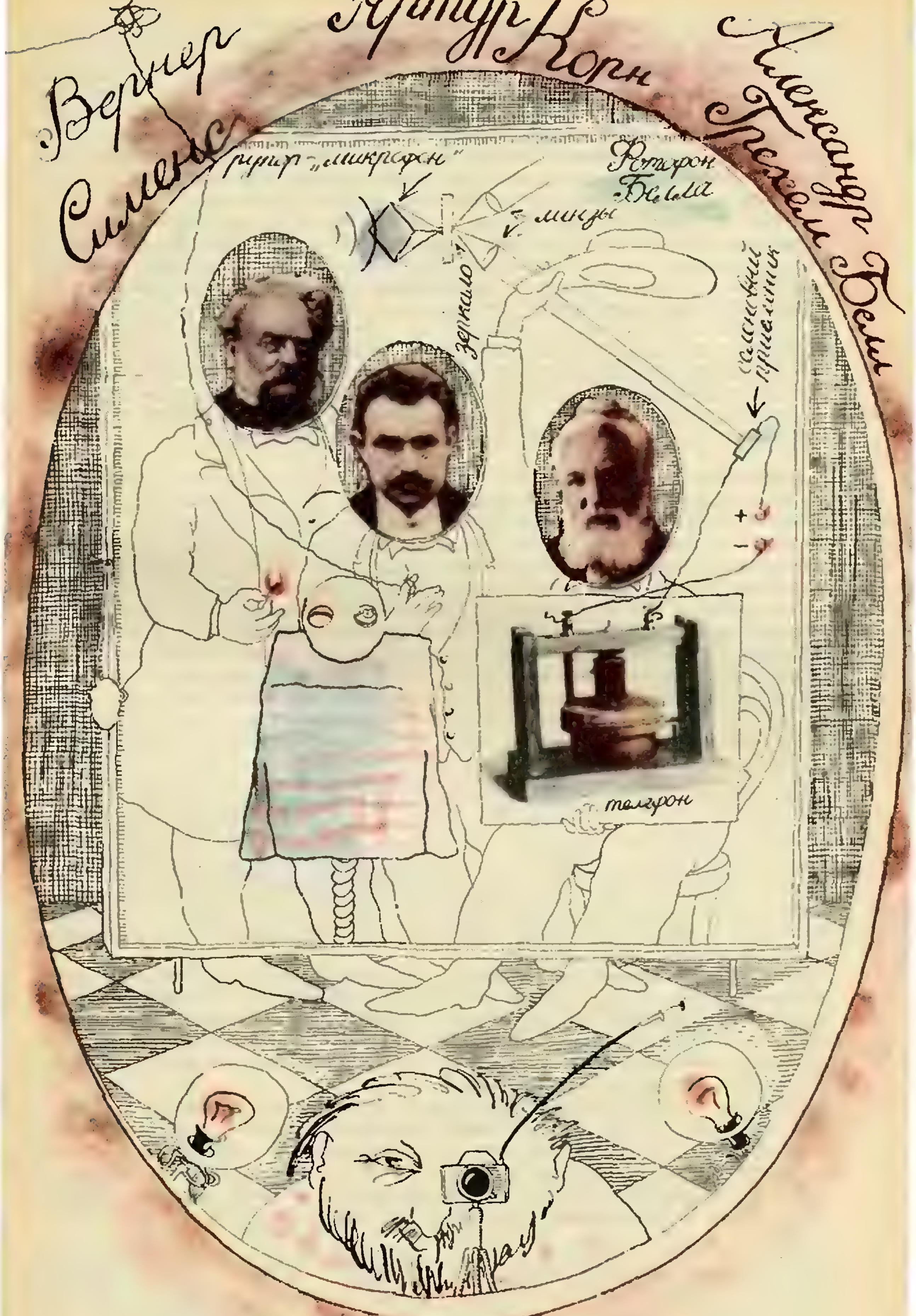
«Мадам и месье,— начал свое выступление Корн,— проблема передачи фотографий по телеграфу решена! Это можно делать так же, как мы передаем по телефону звук.»

В конференц-зале присутствовали люди, весьма далекие от науки, поэтому Корн долго и пространно объяснял устройство телефона и телеграфа, разные технические детали. Сегодняшний читатель «Кванта» знаком с этими «подробностями», и поэтому мы сразу перейдем к изложению идеи фототелеграфа, реализованной впервые восемьдесят лет назад.

Фотография не передается целиком, а разбивается на 100 полос, а каждая полоса — на 100 элементов. На передающей станции надо измерить тон каждого элемента и соответственно повернуть регулятор тока. На приемной станции это изменение тока изменит силу света лампы, которая засвечивает участок фотопленки. Теперь нужно перейти к следующему элементу на передающей станции и соответственно передвинуть фотопленку на приемной. Идея хороша, но если тратить только 5 секунд на передачу одного элемента, то на передачу всей фотографии понадобится, увы, 14 часов непрерывной работы. Вот если бы регулятор тока работал автоматически, мгновенно измеряя тон каждого элемента и сообщая его приемной станции...

Таким автоматическим регулятором может служить селеновый фотоэлемент. Сфокусированный свет лампы, пройдя сквозь фотографию, свернутую в виде цилиндра, отражается зеркальцем на селеновый фотоэлемент, который регулирует ток в телеграфном проводе. Вращается цилиндр на передающей станции, строго с той же скоростью вращается цилиндр на приемной станции. Медленно ползет вниз лампа, «просматривающая» фотографию,— с той же скоростью ползет луч, засвечивающий фотопленку. А селеновый образец посылает в линию связи импульсы, точно отражающие прозрачность очередного элемента. Просто, не так ли?

Между тем Корн потратил на реализацию своей идеи более трех лет. И проблемой был вовсе не селен, нет, полупроводник работал безотказно.


Вернер Сименс
Артур Корн
Александр Грехем Белл
рупор-„микрофон"
Фотофон Белла
линзы
зеркало
селеновый приемник
+
-
телефон

Главная сложность была в достижении полной синхронности механических перемещений и равенства скоростей вращения барабанов.

Наконец, к 1907 году проблема была решена. И вот демонстрация в Париже. Барабаны, установленные слева и справа от Корна,— это передающая и приемная станции. А провода, выходящие из передающей станции, подсоединены к телеграфной линии Париж — Лион. (На второй странице обложки помещена фотография из французского журнала «L'Illustration», в котором сообщалось о сенсационном эксперименте Корна.) Сигнал от селенового элемента бежит по одной паре проводов в Лион, а по другой — обратно, в Париж, всего 1000 километров. Фотография, помещенная в передающем цилиндре, «просматривалась» 12 минут. Пленку из приемного цилиндра тут же проявили и отпечатали — и под рукоплескания зала была продемонстрирована фотография президента Французской республики Фоллиера. Корн, принимая поздравления, заявил, что не сомневался в успехе, так как несколько ранее им был столь же удачно передан портрет президента Рузвельта по линии Мюнхен — Нюрнберг — Мюнхен.

Передача изображений с помощью фотоэлемента стала быстро завоевывать признание. Аппараты, действующие по разработанному Корном принципу, удалось усовершенствовать настолько, что они могли с высокой четкостью передавать на расстояние мелкий газетный текст.

* * *

Таким был этот самый первый и не слишком известный виток истории полупроводниковых приборов. Зародившиеся в конце XIX века, они на год опередили появление телефона и трансформатора, на 20 лет — радио и почти на 50 лет — ... самих себя, то есть рождение класса «полупроводниковых приборов»! Как ни парадоксально, но изобретение Корна было последним крупным событием на этом начальном этапе. Новых приборов пришлось ждать еще долгие десятки лет. Это время понадобилось для создания квантовой теории электрических свойств полупроводников, разработки уникальных методов их очистки от случайных примесей, а также способов введения строго контролируемого количества нужных примесей, изготовления сложных комплексов оборудования для производства приборов. Только после этого на рубеже 50-х годов нашего столетия и стало возможным начало «полупроводниковой революции», одним из самых передовых отрядов которой является современная оптическая полупроводниковая электроника.

Эта интереснейшая наука, сокращенно называемая оптоэлектроникой, изучает законы превращения электрического тока через полупроводник в свет и обратные законы, по которым свет, падающий на полупроводник, вызывает в нем электрические сигналы. На основе оптоэлектроники сегодня создано огромное количество приборов, прочно вошедших в нашу жизнь и ставших уже привычными. Достойно удивления и восхищения то, что более 100 лет назад ученые сумели не только изготовить первые оптоэлектронные приборы, но и с поразительной интуицией предвосхитить важнейшие области их будущего использования и развития.

Чувствительный фотометр Сименса стал прообразом современных полупроводниковых приемников света — фотодетекторов. Они улавливают слабые оптические сигналы на расстоянии десятков километров от источника, «читают» оптические команды современных станков с программным управлением, сигнализируют об обрыве или окончании ленты в магнитофонах и выполняют еще много важных задач.

Попытка Дж. Кэри изготовить светящийся экран для передачи изображения на расстояние сегодня находит свое продолжение в работах исследователей многих стран по созданию плоского телевизионного экрана, призванного заменить громоздкий кинескоп современных телевизоров. Информационные табло («светящиеся газеты»), установленные на крышах зданий в Москве, Ленинграде и других городах, прямо реализуют смелую идею столетней давности.

Фотофон Белла, который был надолго забыт в результате многолетнего триумфального шествия электрического телефона по всему миру, в 70-е годы XX века родился заново в виде систем оптической телефонной связи. Эти системы позволяют по одному оптическому кабелю передавать одновременно тысячи телефонных разговоров; не будь таких систем, и к началу XXI века, по мнению специалистов, телефонная сеть стала бы настолько перегруженной, что при наборе любого номера непременно звучал бы сигнал «занято».

В самые отдаленные уголки нашей страны каждое утро поступают свежие газеты, переданные по фототелеграфу, придуманному в начале века.

Все большее значение в качестве источников электроэнергии приобретают солнечные батареи. Они установлены на космических кораблях, на крышах зданий в высокогорных районах, в микрокалькуляторах. Идея создания таких батарей была выдвинута в 1884 году. В 30-х годах нашего столетия академик А. Ф. Иоффе организовал первые работы по изготовлению высокоэффективных солнечных элементов. (На первой странице обложки вы видите фрагмент солнечной батареи, установленной на космической станции «Мир». Эта фотография была сделана космонавтами Л. Кизимом и В. Соловьевым с борта космического корабля «Союз Т-15».)

Эти и многие другие замечательные приборы, уже созданные и те, что появятся в будущем, сегодняшний и завтрашний день оптической электроники — все это зародилось более ста лет назад, в несовершенных экспериментах со скромным кристалликом селена.

Лучшее пари для простаков

(Начало см. на с. 4)

помним, что $P(X)$ обозначает вероятность появления слова X в процессе игры со словами A, B, а $P(A, B)$ — вероятность выигрыша А у В. Формула Конвея вытекает из следующих трех утверждений (доказательство каждого из них — задача для читателя).

1. Для любых слов X, Y длины l

$$K_{XY}\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{S\in H_{XY}} P(S).$$

2*. Множество T всех слов не содержащих ни A, ни B (т. е. последовательностей, на которых ни один из игроков еще не выиграл), можно представить в виде

$$T_1=(S_A*H_{AB})\cup(S_B*H_{BB});$$
$$T_2=(S_B*H_{BA})\cup(S_A*H_{AA}),$$

притом $T_1=T_2=T$ (обе эти формулы задают одно множество T).

3. Суммы вероятностей слов из T_1 и T_2 выражаются формулами

$$\sum_{S\in T_1} P(S)=$$
$$=2^l\left[P(A, B)K_{AB}\left(\frac{1}{2}\right)+P(B, A)K_{BB}\left(\frac{1}{2}\right)\right],$$

$$\sum_{S\in T_2} P(S)=$$
$$=2^l\left[P(B, A)K_{BA}\left(\frac{1}{2}\right)+P(A, B)K_{AA}\left(\frac{1}{2}\right)\right].$$

Чтобы доказать формулу Конвея, остается только приравнять правые части последних двух равенств (это можно, ибо $T_1=T_2$) и воспользоваться определением $d(B, A)=P(B, A)/P(A, B)$.

Для читателя, вошедшего во вкус, предлагаем

Решенные и нерешенные задачи

1. Пусть подбрасывается не монета, а игральный кубик, и загадывается слово из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Докажите, что тогда преимущество второго игрока над первым выражается формулой

$$d(B, A)=\frac{K_{AA}(1/6)-K_{AB}(1/6)}{K_{BB}(1/6)-K_{BA}(1/6)}.$$

2. Неизвестно, как должен играть А, для того, чтобы его проигрыш был минимальным (в игре с монетой) при $l\geqslant 3$.

3. Не исследован случай, когда А загадывает слово из n букв, а В — из m букв ($m>n$). Каковы оптимальные стратегии в этом случае?

4. Неизвестны стратегии ни одного из игроков А, В, С для игры трех лиц. Попытайтесь понять, как должен играть С для того, чтобы максимизировать выигрыш, при фиксированных выборах А и В*).

5. В «лучшем пари для простаков» 0 и 1 равноправны, т. е. выпадают с равной вероятностью при каждом бросании монеты: $P(0)=P(1)=1/2$. Представьте себе, что монета «фальшивая», т. е. при ее подбрасывании 0 выпадает чаще, чем 1: $P(0)>1/2$. Понятно, что если $P(0)$ близко к 1 (например, $P(0)=0{,}999$), то загадывая слово 00000 из пяти букв, игрок А выигрывает с вероятностью, не меньшей, чем $0{,}999^5>1/2$. Возникает задача: при каких значениях $P(0)$ игрок В продолжает выигрывать в игре с задумыванием слова из l букв? Даже при $l=3$ ответ на этот вопрос неизвестен.

Гипотеза. При любом значении $P(0)$ у В существует выигрышная стратегия при достаточно большой длине загадываемых слов.

---

* В игре трех лиц можно рассмотреть вариант, когда первые два игрока могут организовывать коалиции, т. е. объединяться для борьбы с С.

КТО УПРАВЛЯЕТ ГОРОДОМ МК?

(Путешествие по микрокомпьютеру)

Кандидат технических наук Д. Г. КРУТОГИН

Сегодня нам предстоит посетить архитектурный центр нашего города и одновременно главный производственный район — короче говоря, микропроцессор. Неслучайно мы откладывали этот визит, неслучайно ходили вокруг да около. Сложен для анализа микропроцессор, как сложен архитектурный шедевр. И рассказать о нем не так просто. Можно бы опять нарисовать план, перечислить детали МП, взаимодействие их в работе, но мы сделаем это позже. А начнем с того, что построим в своем воображении простейший микропроцессор (ПМП) из самых необходимых блоков. Если он сможет «работать» (там же, в воображении), то, наверное, его нетрудно будет и немного усложнить, чтобы приблизиться к реальной архитектуре и реальным функциям МП.

Итак, с чего начать? Процессор должен выполнять все арифметические и логические операции. Напомним, всех операций не так уж много: арифметические — сложение с учетом знака (т. е. и вычитание) и умножение (деление) при помощи сдвига двоичного числа вправо — влево на целое число разрядов; логические — «И», «ИЛИ», «НЕ». Эти операции выполнит в нашем ПМП арифметико-логическое устройство, сокращенно — АЛУ. Вот уже это — архитектурная жемчужина города МК и вообще вычислительной техники.

Самый главный работник

АЛУ — это многоразрядный (8, 16, а иногда и больше) набор сумматоров, способный в зависимости от импульсов управления перестраиваться с арифметических на логические действия или наоборот. О работе одноразрядного сумматора «Квант» рассказывал в прошлом году (см. майский номер). А на рисунке 1 можно видеть четырехразрядное (совсем простое) АЛУ. По проводам шины данных на входы A_0 — A_3 и B_0 — B_3 поступают поразрядно операнды A и B, с выходов F_0 — F_3 поразрядно выходят результаты, входы S_0 — S_3 служат для управления АЛУ, переключают его на те или иные операции (сложение, вычитание, отрицание и т. п.).

Глядя на рисунок 1, представьте себе большой лабиринт с прямоугольными переходами. В нем есть восемь входов и четыре выхода; но, в отличие от обычных лабиринтов, в этом лабиринте некто («имя» этого некто УФК, и познакомимся мы с ним немного позднее) то и дело передвигает стенки, меняя конфигурации проходов. В результате АЛУ при разных сигналах управления произведет разные действия с одинаковыми операндами, а на выходе будут разные ответы.

АЛУ работает с огромной, фантастической быстротой; то, что оно может сделать, оно делает за миллионные доли секунды (а самые быстродействующие АЛУ — в сотни раз быстрее). Это его качество очень ценно, и можно сказать, что все остальное, что есть в МК, устроено так, чтобы АЛУ, по возможности, не приходилось ждать.

Откуда же берутся операнды? Обычно из районов ОЗУ или ПЗУ. Но вызвать их оттуда, как правило, можно только по очереди, например, сначала A, потом B. Значит, пока ПМП ожидает появления B, операнд A должен где-то немного подождать. Ближайшей «приемной» служит специальный регистр памяти, называемый аккумулятором. В нем столько же разрядов, сколько в АЛУ. Аккумулятор не только подает один из операндов в АЛУ, он же принимает в себя и результат операции — слово F. Потом аккумулятор переправит это слово в ОЗУ или в какой-то другой регистр памяти внутри процессора, но сначала важно побыстрее освободить АЛУ.

Следующий важный момент — управление. Мы уже отметили, что АЛУ нужно управлять, задавая ему порядок работы. Значит нашему ПМП нужны соответствующие органы управления. (Вот как повернулось дело! Раньше мы отмечали, что всем управляет процессор, а им, оказывается, тоже кто-то управляет.)

«Процессор» для процессора

Устройство управления и формирования команд (обозначим его УФК)

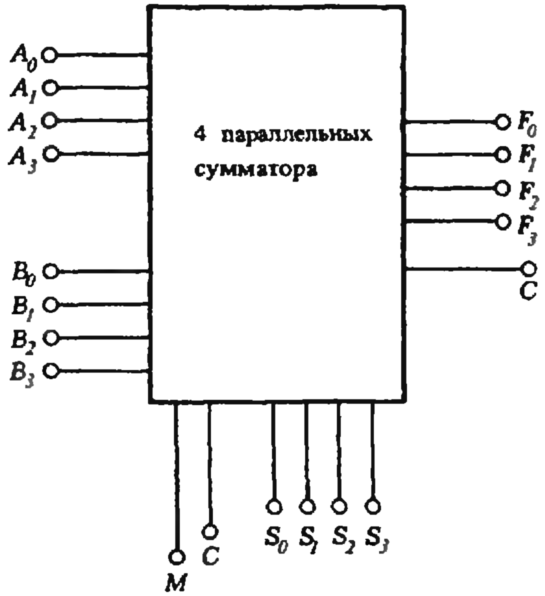


Рис. 1. Схематическое изображение связей четырехразрядного АЛУ. С — указатель сигнала сдвига и переноса разрядов. М — переключатель «арифметика — логика».

занимает в районе ПМП приличный по размерам микрорайон. Задача этого микрорайона: получить очередную команду из текста программы и расшифровать ее до уровня простейших импульсов, подаваемых на входы S_i и M арифметико-логического устройства.

В основном микрорайон УФК застроен логическими устройствами, которые называются дешифраторами. Они и впрямь напоминают шифровальные карты, отверстия которых из самого случайного текста выбирают несколько букв секретного донесения. А роль отверстий выполняют разные варианты подключения элементов дешифратора к шине, несущей текст команды. Хотя элементы застройки типовые — это логические элементы *) И — НЕ, ИЛИ — НЕ, но причудливая их архитектура позволяет реализовать несколько десятков комбинаций, обеспечивающих управление ПМП. Системы УФК управляют не только АЛУ, но и аккумулятором и другими районами МК. Один из кварталов УФК специализирован на обслуживании систем ввода и вывода, он же управляет буферами соответствующих шин в периоды контакта с внешними устройствами. До сотни каналов управления выходит из района УФК.

Следующий вопрос — откуда УФК получает команду для расшифровки? Разумеется, из ЗУ (откуда приходят и операнды). Но на время расшифровки, формирования микрокоманд и их исполнения прибывшая из памяти команда должна располагаться рядом с УФК (быть под рукой), т. е. в специальном регистре памяти — регистре команд (РК). В РК столько же разрядов, сколько в АЛУ и аккумуляторе.

Ясно, что аккумулятор и РК — ближайшая, сверхоперативная память процессора.

Было бы неплохо, если бы внимательный читатель нарисовал сейчас блок-схему описанной выше части ПМП. Два прямоугольничка, один под другим, нужно соединить узким коридором, в котором стоит двунаправленная стрелка — это АЛУ и аккумулятор (А). Ниже расположится прямоугольник чуть большего размера — УФК, стрелки от него идут в АЛУ и аккумулятор. Справа расположите квадратик РК, стрелки от него направлены к блоку УФК. Теперь над аккумулятором нарисуйте маленький, но важный квадратик — буфер (Б), а затем к буферу и регистру команд подведите справа шину данных (для этого на ней придется сделать развилку). Буфер Б (мы раньше сравнили его с постом ГАИ) может пропускать данные от памяти (ОЗУ) в процессор, в другом состоянии — наоборот — от процессора к ОЗУ. Но есть у него и третье состояние, когда он вообще устраняется от обмена данных, как бы «смотрит в небо». В такое состояние буфер «впадает» (конечно, по сигналу УФК!) в то время, когда по шине данных поступает слово-команда. В результате команда оказывается в регистре команд, но никак не в АЛУ. Если теперь вспомнить, что команды и «поселены» были в ОЗУ отдельно от операндов, и вызываются так, чтобы не попасть в арифметико-логическое устройство, станет понятно, как ЭВМ разбирается в командах. Чуть позже мы проверим правильность вашего рисунка, а теперь вернемся к командам. Вот такой вопрос — кто и когда вызывает очередную команду? Эту обязанность выполняет еще один регистр памяти, который называют программным счетчиком, или счетчиком команд (СК).

Этим счетчиком управляет все тот же блок УФК. При начале исполнения программы на счетчик записывается адрес первой по порядку команды. Как только эта команда попала в РК и начала расшифровываться в УФК, счетчик получает сигнал приращения, например на единицу, и тем самым записывает адрес следующей команды (или второй части той же команды, если она длинная).

Та же процедура повторяется со следующей командой и т. д. до команды останова. Но иногда в очередной команде содержится указание для счетчика перейти не к следующей, а к какой-то другой команде, которая далеко впереди (или, наоборот, позади) очередной. Тогда в счет-

---

*) Конструкции логических элементов рассматривались в февральском номере «Кванта» за 1986 год.

чике устанавливается вновь заказанный адрес, и все продолжается.

Пойди туда, знаю куда; возьми то, знаю что

Мы уже упоминали раньше, что команды на машинном языке не слишком разнообразны, но многие команды содержат адрес ячейки, из которой надо взять операнд, или адрес, в который следует отправить результат. Такие команды в МК не «помещаются» в одно слово, они как бы «тащат» за собой слова-адреса. Но команды попадают в РК, а затем в УФК, а вот адресам там нечего делать. Адреса нужны только для того, чтобы по ним буферное устройство сформировало запрос в память в адресной шине (о ней мы говорили в прошлом номере «Кванта», путешествуя «по столбовым дорогам МК»). На время подготовки запроса и ожидания ответа слова́-адреса размещаются в специальной приемной — регистре адреса памяти (РАП). А для «прочтения» адреса и «составления» запроса используются дешифраторы, такие же как в УФК.

Итак, на схеме ПМП должны появиться еще два регистра сверхоперативной памяти: СК и РАП. (РАП и СК — «адресный стол» нашего города; правда, они хранят не все адреса, а только те, которые нужны для текущей работы.) Кроме этих регистров со специальными функциями, МП обычно содержит еще несколько регистров памяти, не «привязанных» к какой-либо определенной функции. Эти регистры так и называются — регистры общего назначения (РОН). Они имеют объем в одно или два машинных слова и особенно удобны для кратковременного хранения операндов промежуточных вычислений.

Теперь продолжим наш чертеж и все упомянутые регистры (как общие, так и специальные) поместим в левой части рисунка, в виде «этажерки» прямоугольничков. К «этажерке» идут многочисленные стрелки-связи от УФК (это понятно — ведь управлять надо каждым регистром отдельно). А от регистров «этажерки» стрелки идут на буфер адресной шины, через которую микропроцессор обращается и к постоянной, и к оперативной памяти.

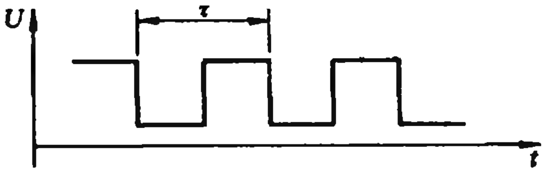


Рис. 2. Импульсы тактового генератора. Период — или такт — в микропроцессорах составляет обычно 0,1—0,5 микросекунды.

Взгляд на часы

Чтобы окончить построение ПМП, нужен еще один, последний, но очень важный элемент. Где-то поблизости от УФК надо изобразить генератор тактовых импульсов — часы нашего города.

Прямоугольные импульсы, или, как их называют, такты, генератора (рисунок 2) используются как эталон единого времени всеми узлами микрокомпьютера. Например, шесть тактов отводится на считывание по частям двухбайтовой команды, три такта — на операцию суммирования и т. п. Паузы между операциями — время для ответа ОЗУ или ПЗУ — тоже отсчитываются тактами генератора.

Тактовым генератором может служить мультивибратор (близкий «родственник» триггера) или другая транзисторная переключающая схема. А чтобы «часы» не убегали и не отставали (при изменении температуры, при других воздействиях), к ним обычно подключают дополнительный кварцевый резонатор с очень высокой стабильностью частоты колебаний, как в обычных (уже обычных!) электронных часах.

Вот теперь пора проверить готовый чертеж ПМП (см. рисунок 3). За границы рисунка уходят: шина адресная, шина данных (двунаправленная), шина управления памятью и вводом — выводом, а также линии связи с внешними устройствами, цепи питания и т. п. О работе этих узлов мы говорили ранее. Какие же архитектурные элементы нам чаще всего встречались в ПМП?

Регистры оперативной памяти в аккумуляторе, РК, «этажерке» РОН, РАП, СК. Как видите, роль их в структуре процессора существенна.

Логические схемы сумматора в АЛУ.

Логические схемы дешифратора в УФК и буферных схемах шин.

Внутренние шины связи между отдельными элементами процессора.

Конечно, реальный микропроцессор намного сложнее нашего простого. В нем появляется еще несколько важных регистров специализированного назначения, предусматривается возможность прерывания программы и возврата к ней, а также разных способов обращения к памяти. Общую сложность структуры МП можно оценить, если вспомнить, что за каждым регистром, сумматором или дешифратором стоят десятки, а то и сотни транзисторов, а во всем микропроцессоре их десятки или сотни тысяч.

Но давайте взглянем на микропроцессор не с архитектурной, а с функциональной точки зрения. Что делает он в микроЭВМ, что делает процессор в больших ЭВМ? Для чего вообще нужен процессор?

Робот-лифтер

В январском номере «Кванта» за прошлый год в статье «Элементарные логические операции» был рассмотрен пример управления лифтами: многоэтажный дом, один или несколько лифтов, на каждом этаже одна кнопка вызова. Лифтами управляет командный аппарат. В ответ на многообразие возможных задач-ситуаций аппарат выдает одно из трех решений: вверх, вниз, стоп (если лифта два, то независимых решений $2\times3=6$). Решения приготовлены заранее и существуют в виде схемы электрических соединений обычных выключателей или реле. Эти соединения можно описать логическими операциями (см. рисунок 4, *а*): если включена кнопка «э10» (этаж) ИЛИ «э9» (и т. д.) И (при этом!) включена кнопка «л12» (пустой лифт стоит на 12 этаже) И НЕ включена кнопка «стоп1» (перегруз!) И НЕ включена кнопка «стоп2» (открыты двери!), то решение задачи — ВНИЗ. А иначе — СТОП. Лифт при движении нажимает на контакты поэтажных выключателей, схема соединений меняется, и перед десятым этажом включается НЕ «л10», т. е. СТОП (рисунок 4, *б*).

Таким образом, командоаппарат запоминает и сравнивает команды-вызовы, операнды-текущее состояние, команды-запреты (они вообще превыше всех других!), а потом выдает команду-ответ. Каждая команда легко представима: 1 — кнопка нажата, 0 — кнопка отпущена. Это привычный нам двоичный код.

Процессор (или микропроцессор) — многократно усложненный командоаппарат, сжатый в размерах до нескольких квадратных миллиметров микросхемы. У него в запасе не три, а более сотни вариантов решений, он сопоставляет множество данных,

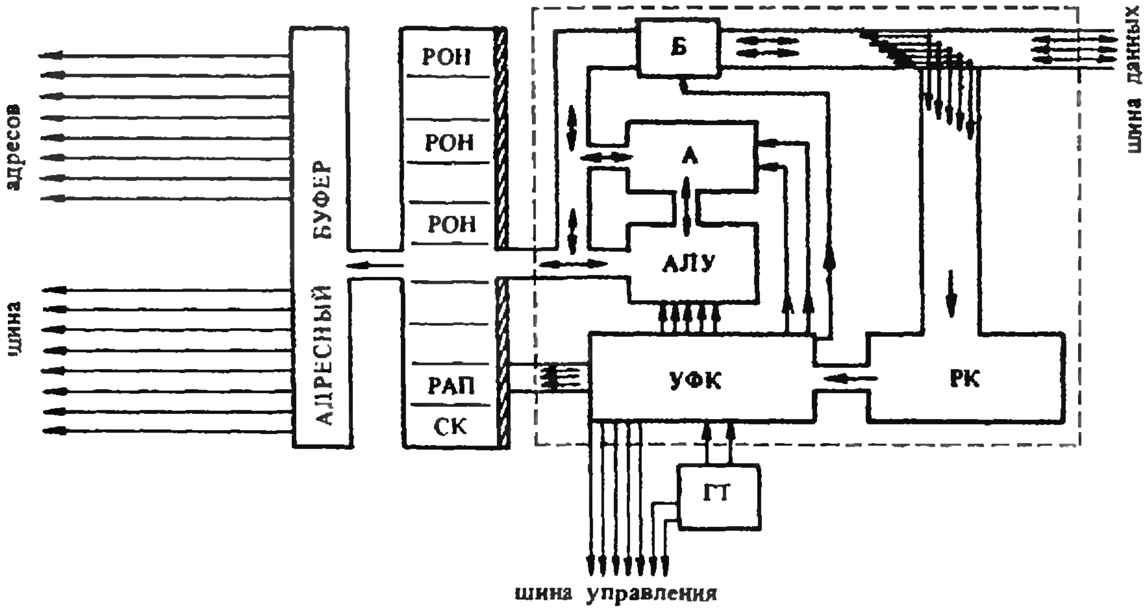


Рис. 3. Схема простейшего микропроцессора. Розовой плашкой выделена основная часть схемы, с которой мы начинали «строительство».

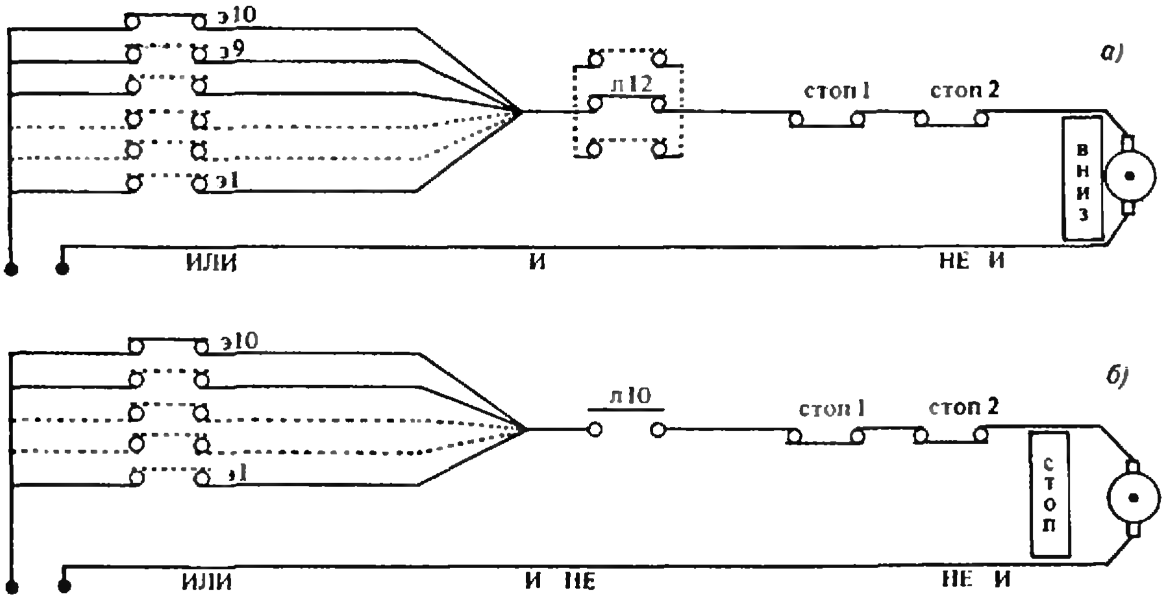


Рис. 4. Логика управления лифтом.

десятки запретов. Свои ответы процессор посылает в сотни и тысячи разных адресов. Словом, он намного мощнее скромного командоаппарата по скорости и по возможностям, но по смыслу действий и по функциям — он тоже командоаппарат! Варианты решений (микрокоманды), которыми пользуется микропроцессор, записаны в постоянной памяти блока УФК. Поэтому, заканчивая путешествие по городу Микрокомпьютеру, уместно сравнить микропроцессор с административно-культурным районом, а устройствам управления и формирования команд (УФК) придать статус горисполкома (оперативное текущее руководство жизнью города).

Вместо заключения

Задачи городского совета, т. е. определение общих целей, перспектив, порядка исполнения работ, выполняет программа, которую ввели в МК пользователи, т. е. мы с вами. Следовательно, при всем совершенстве конструкции ЭВМ и МК не содержат в себе творческого начала, его вкладывает в них человек, вкладывает в виде постоянных или заменяемых программ.

Чего же мы не увидели в городе МК из того, что полагается увидеть экскурсантам? Нет здесь памятника основателям и первостроителям города. В предельной тесноте и рациональности нашего города ему нет места. Но если бы он был, то на его вершине стоило бы отвести почетное место трем ученым: Майклу Фарадею — физику, первым отметившему особые свойства полупроводников, Чарльзу Бэббеджу — первому «архитектору» и строителю вычислительных машин, Джорджу Булю — математику, изобретателю алгебры логики — науки, на которой основана схемотехника ЭВМ. Эти три человека могли быть знакомы, ибо жили в Англии примерно в одно время.

Второй ярус памятника должен бы вместить десятки крупных ученых: от Д. Менделеева и Н. Бора, Я. Френкеля и В. Шоттки до изобретателей транзистора — Дж. Бардина и У. Браттейна.

В третьем ярусе памятника достойны поместиться тысячи инженеров из разных стран, представители нескольких поколений физиков, химиков, математиков, металлургов, технологов, радиоинженеров, конструкторов, чьим трудом и талантом создан микроскопический и прекрасный город. Собственно, он и есть лучший памятник их вдохновенной работе.

Задачи

М1041 — М1045; Ф1053 — Ф1057

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 августа 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5—87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1041» или «Ф1053». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1041—М1045 предлагались на 50-й Московской городской математической олимпиаде в 1987 году.

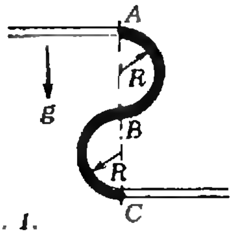


Рис. 1.

М1041. На плоскости заданы а) четыре, б) три вершины правильного пятиугольника. С помощью двусторонней линейки восстановите остальные его вершины. (Двусторонней линейкой можно делать то же, что и обычной линейкой без делений, а также проводить прямую, параллельную данной, на расстоянии, равном ширине линейки.)

М. И. Гринчук

М1042. В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (из одного, двух и т. д. человек, кроме команды всего класса). Докажите, что каждая команда будет соревноваться с командой, состоящей из всех остальных учеников класса.

И. Н. Сергеев

М1043. Можно ли разбить множество всех целых чисел на три подмножества, так, чтобы для любого целого n числа n, $n-50$, $n+1987$ принадлежали трем разным подмножествам?

С. В. Конягин

М1044. Докажите, что из четырех чисел всегда можно выбрать два числа x и y, такие что

$$0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 1.$$

И. Н. Сергеев

М1045. В некотором царстве, некотором государстве, территория которого имеет форму квадрата со стороной 2 км, царь решает созвать всех жителей к 7 часам вечера к себе во дворец на бал. Для этого он в полдень посылает с поручением гонца, который может передать любое указание любому жителю, который в свою очередь может передать любое указание любому другому жителю и т. д. Каждый житель до поступления указания находится у себя дома (в известном месте) и может передвигаться со скоростью 3 км/ч в любом направлении. Докажите, что царь может организовать оповещение так, чтобы все жители успели придти к началу бала.

С. В. Конягин

Ф1053. В тонком гладком трубопроводе скользит (в поле силы тяжести) гибкий однородный шнур (рис. 1). Участки AB и BC трубопровода представляют собой полуокружности радиусом R, точки A, B и C лежат на одной вертикали; длина шнура $l=2\pi R$. Найти все точки шнура, в которых натяжение равно нулю в тот момент, когда нижний конец шнура находится в точке C.

И. Ю. Потеряйко

Ф1054. Два стержня одинаковой формы сделаны из материалов с разными упругими свойствами — модули Юнга материалов равны соответственно E_1 и E_2. Стержни склеены торцами и покрашены одной краской, так что получившийся образец выглядит как однородный стержень. Какой модуль Юнга «вещества» этого стержня измерит экспериментатор, не знающий, что стержень составной?

В. А. Давыдов

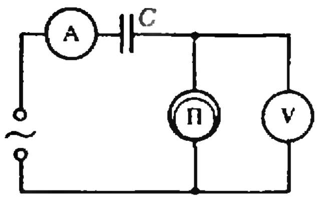


Рис. 2.

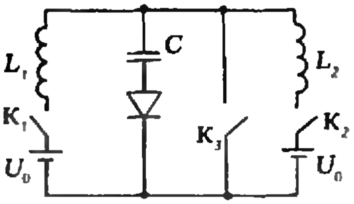


Рис. 3.

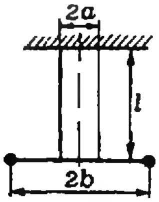


Рис. 4.

Ф1055. Электрический прибор П подключен к сети переменного тока с напряжением 220 В через конденсатор емкостью $C=0{,}5$ мкФ (рис. 2). Амперметр показывает ток $I=0{,}01$ А, показание вольтметра — $U=180$ В. Найти мощность, потребляемую от сети прибором. Считать амперметр и вольтметр идеальными.

А. Р. Зильберман

Ф1056. В схеме, изображенной на рисунке 3, ключ K_3 сначала замкнут, а ключи K_1 и K_2 разомкнуты. В некоторый момент времени замыкают ключ K_1, а спустя время $t_1=0{,}1$ с замыкают ключ K_2. Еще через время $t_2=0{,}2$ с размыкают ключ K_3. Найти: 1) максимальное напряжение на конденсаторе; 2) ток через катушку L_1 через время $t_3=1$ с после замыкания ключа K_1. Сопротивлением проводов пренебречь, диод считать идеальным; $L_1=1$ Гн, $L_2=0{,}5$ Гн, $C=10$ мкФ, $U_0=10$ В.

А. Р. Зильберман

Ф1057. Гантель, состоящая из двух шариков массой m каждый, закрепленных на концах легкого стержня длиной $2b$, подвешена в горизонтальном положении на двух нерастяжимых нитях длиной l, расстояние между которыми $2a$ (рис. 4). Найти период малых крутильных колебаний гантели.

М. М. Цыпин

Problems

M1041 — M1045; P1053 — P1057

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in Englich) may be posted no later than August 1st 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies

M1041. Let a) four, b) three vertices of a regular pentagon in the plane be given. Construct the other vertices by means of a two—sided ruler. (A two—sided ruler does anything a one—sided unmarked ruler can do and can also be used to draw a line parallel to a given one at the distance equal to the ruler's width.)

M. I. Grinchuk

M1042. A tug-of-war competition is organized among the pupils of a certain class. Every possible team which can be made up of one, two, etc. pupils (but not the entire class) must participate exactly once. Prove that each team will compete against the team consisting of all the other pupils of the class.

I. N. Sergeev

M1043. Can the set of all integers be partitioned into three subsets so that for any integer n the numbers n, $n-50$, $n+1987$ will belong to three different subsets?

S. V. Konyagin

M1044. Prove that out of any four positive numbers it is always possible to choose two numbers x and y such that

$$0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 1.$$

I. N. Sergeev

M1045. Once upon a time the King of a small square Kingdom of side 2 km decided to invite all his subjects to a Ball at the Court at 7 PM. At noon he dispatched a Messenger who could transmit any message to any inhabitant of the Kingdom, who in turn could transmit any message to any other inhabitant, etc. Each inhabitant stays at his house (whose location is known) until he gets a message and then walks at 3 km per hour in the required direction. Prove that the King could have organized the transmission of messages so that all his loyal subjects could reach the Court in time for the Opening of the Ball.

S. V. Konyagin

(In Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS. Problems M1041—M1045 from this issue were proposed at the 50th Moscow Mathematics Olympiad.

P1053. A uniform elastic string slides inside a smooth pipe (in the Earth's gravitational field). The sections AB and BC of the pipe are semicircles of radius R, the points A, B, C are on the same vertical (see figure Рис. 1), the length of the string is $l=2\pi R$. Find all the points of the string where the tension is zero at the moment when the string's lower extremity is at the point C.

I. Yu. Poteryaiko

P1054. Two rods of identical shape are made from materials with different elasticity properties: Young's modulus of the material equals E_1 and E_2 respectively. The rods are glued together end to end and covered with a coat of the same paint, so that the sample obtained looks like a uniform rod. What value of Young's modulus for the "material" constituting the rod will be measured by the unsuspecting experimentator, who is unaware that the rod is not uniform?

V. A. Davydov

P1055. The electric apparatus П is connected to a source of alternating current of 220 V via a capacitor of $C=0.5$ μF (see figure Рис. 2). The ammeter shows a current of $I=0.01$ A, the woltmeter shows $U=180$ V. Find the power from the source used by the apparatus. The ammeter and voltmeter are assumed ideal.

A. R. Zilberman

P1056. In the circuit shown on figure Рис. 3 the switch K_3 is turned on at first, while the switches K_1 and K_2 are turned off. At a certain moment K_1 is switched on, and in $t_1=0.1$ seconds later so is K_2. In another $t_2=0.2$ seconds K_3 is switched off. Find: 1) the maximal tension on the capacitor; 2) the current through the coil L_1 in time $t_3=1$ s after the switch K_1 was turned on. The resistance of the wires may be neglected, the diodes assumed ideal; $L_1=1$ H, $L_2=0.5$ H, $C=10$ μF, $U_0=10$ V.

A. R. Zilberman

P1057. A weight for bodybuilding, consisting of two solid spheres of mass m each joined by a light rod of length $2b$, hangs horizontally on two inelastic wires of length l whose distance is $2a$ (see figure Рис. 4). Find the period of small rotational oscillations of the weight.

M. M. Tsypin

Решения задач

M1021 — M1025; Ф1033 — Ф1037

M1021. *Альпинист хочет подняться на скалу высотой 1000 м. После ночевки в лагере у подножья скалы он может подниматься, навешивая веревку, со скоростью 40 метров в час, а после холодной ночевки на скале — 30 метров в час. По готовой веревке он поднимается со скоростью 400 метров в час. За сколько дней он сможет достичь вершины, если будет работать на скале (включая подъем по веревке) 6 часов в день? (Временем спуска и других операций пренебречь.)*

Ответ: за пять дней.

Обозначим через x_n наибольшую высоту, до которой альпинист может подняться за n дней ($n=1, 2, \ldots$). Если к концу какого-то дня он достиг высоты h метров, на следующий день он может подняться на высоту $h+6\cdot 30=h+180$ метров, если будет ночевать на скале, и на высоту $h+\left(6-\frac{h}{400}\right)40=h+240-h/10$ метров, если спустится ночевать вниз. Ясно, что первый вариант выгоднее, если $180>240-h/10$, то есть $h>600$, второй — если $h\leqslant 600$. Таким образом,

$$x_{n+1}=\begin{cases} x_n+240-x_n/10, \text{ если } x_n\leqslant 600, \\ x_n+180, \text{ если } x_n\geqslant 600. \end{cases}$$

n	x_n
1	240
2	456
3	650,4
4	830,4
5	1010,4
...	...

Начав с $x_0=0$, можно определить x_n последовательно для всех n. Поскольку $x_4<1000$, а $x_5>1000$, альпинист сможет достичь вершины скалы к концу 5-го дня; для этого он должен первые две ночевки провести внизу, а последние две — на скале.

Н. Б. Васильев

М1022. *Первые 8 натуральных чисел можно расставить в две строки (рис. 1) так, что сумма чисел в верхней строке равна сумме чисел в нижней, а суммы чисел в столбцах также равны между собой. Можно ли расставить подобным образом первые: а) десять, б) двенадцать натуральных чисел?*

в) при каких натуральных n можно расставить таким образом числа от 1 до $2n$?

8	2	3	5
1	7	6	4

Рис. 1.

1	11	3	9	8	7
12	2	10	4	5	6

Рис. 2.

Ответ: а) нельзя, б) можно (рис. 2), в) можно при четных $n\geqslant 4$.

Рассмотрим сразу общий случай (задача в)). Сумма всех чисел от 1 до $2n$ должна быть четной (только тогда их можно разбить на две группы с равными суммами). Поскольку $1+2+\ldots+2n=n(2n+1)$, число n не может быть нечетным; отсюда же следует, что суммы по столбцам должны равняться $2n+1$.

Пусть $n=2k$. Выпишем в первой строке числа от 1 до $2k$, а под ними — числа, дополняющие их до $2n+1=4k+1$:

$$\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2k-1 & 2k \\ 4k & 4k-1 & 4k-2 & \ldots & 2k+2 & 2k+1. \end{array}$$

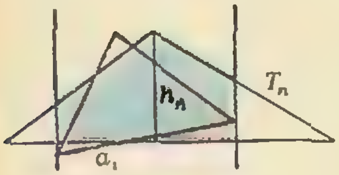
Сумма нижних чисел равна $(1+2+\ldots+2k)+2k\cdot 2k$, т. е. на $4k^2$ больше суммы верхних чисел. Следовательно, мы должны переставить в нескольких столбцах верхнее число вниз, а нижнее — вверх так, чтобы в итоге верхняя сумма увеличилась на $2k^2$ (а нижняя на столько же уменьшилась). Заметим, что m-е слева число верхней строки на $2k$ меньше m-го справа числа нижней строки для всех $m=1, 2, \ldots, 2k$, поэтому, если переставить одновременно числа в двух столбцах, равноотстоящих от краев таблицы, верхняя сумма возрастет на $4k$. При четном k такую перестановку достаточно проделать для $k/2$ симметричных пар столбцов: верхняя сумма возрастет на $4k\cdot k/2=2k^2$. При нечетном $k\geqslant 3$ переставим верхние числа $k+1$ и $2k$ с соответствующими нижними — $3k$ и $2k+1$, а также еще числа $(k-1)/2$ симметричных пар столбцов. Мы снова получим нужное увеличение верхней суммы:

$$3k-(k+1)+(2k+1)-2k+4k\cdot(k-1)/2=2k^2.$$

Наконец, при $k=1$ нужной расстановки, очевидно, не существует.

М. И. Штеренберг

М1023. *Всегда ли из 100 треугольников найдется хотя бы один такой, что его можно целиком покрыть остальными 99?*



Ответ: не всегда. Покажем, что существует даже бесконечная последовательность треугольников $T_1, T_2, \ldots$, ни один из которых нельзя покрыть остальными.

Эта последовательность строится по следующему принципу. Сначала определим последовательность a_n длин наибольших сторон треугольников T_n так, чтобы при любом наложении треугольников $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ на T_n оставалась непокрытой фиксированная (не зависящая от n) доля площади треугольника T_n,— это можно обеспечить выбором a_n, достаточно большого по сравнению с $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Затем надо подобрать последовательность площадей S_n треугольников T_n так, чтобы суммарная площадь треугольников $T_{n+1}, T_{n+2}, \ldots$ была меньше площади непокрытой части треугольника T_n,— этого можно добиться за счет достаточно быстрого убывания последовательности площадей.

Приведем пример одной из таких последовательностей треугольников. Пусть T_1 — правильный треугольник со стороной $a_1=1$; T_n при $n>1$ — равнобедренный треугольник с основанием $a_n=4^{n-1}$ и площадью $S_n=S_1/4^{n-1}$, где $S_1=\sqrt{3}/4$ — площадь треугольника T_1 (высота h_n треугольника T_n равна $2S_n/a_n=2\sqrt{3}/4^{2n-1}$). Рассмотрим треугольники $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Каждый из треугольников T_i, $1\leqslant i\leqslant n-1$, помещается в полосе ширины не больше a_i, перпендикулярной основанию треугольника T_n (см. рисунок). Площадь, покрываемая этой полосой в T_n, меньше $a_i\cdot h_n$, поэтому суммарная площадь, покрываемая треугольниками $T_1, \ldots, T_{n-1}$ в T_n меньше $(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})h_n$ (эта оценка очень грубая, но ее нам вполне хватит). Поскольку

$$a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=\frac{1}{3}(4^{n-1}-1)<\frac{1}{3}a_n,$$

покрытая площадь треугольника T_n меньше $a_nh_n/3=2S_n/3$, а значит, больше трети площади T_n остается непокрытой. В то же время

$$S_{n+1}+S_{n+2}+\ldots=$$

$$=S_1\left(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{4^{n+1}}+\ldots\right)=\frac{S_1}{4^n(1-1/4)}=\frac{1}{3}\frac{S_1}{4^{n-1}}=\frac{1}{3}S_n.$$

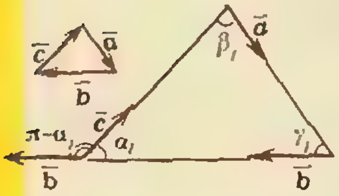
Следовательно, треугольниками $T_1, \ldots, T_{n-1}, T_{n+1}, T_{n+2}, \ldots$ нельзя покрыть весь треугольник T_n.

Г. А. Гуревич

М1024*. *Докажите, что для любых двух треугольников с углами α, β, γ и α_1, β_1, γ_1 выполнено неравенство*

$$\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma}\leqslant$$

$$\leqslant\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma.$$



Фиксируем α, β, γ. Мы должны доказать, что наибольшее значение левой части рассматриваемого неравенства как функции от α_1, β_1, γ_1 при $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=\pi$ достигается, когда $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta$, $\gamma_1=\gamma$. Умножая левую часть на $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$, придадим ей вид

$$\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha_1+\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta_1+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma_1=A.$$

Это выражение можно истолковать как сумму (взятую со знаком минус) трех попарных скалярных произведений векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ длин $a=\sin\alpha$, $b=\sin\beta$, $c=\sin\gamma$, направленных по сторонам треугольника с углами α_1, β_1, γ_1 (см. рисунок):

$$A=-(\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b})=$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})),$$

поскольку $bc\cos\alpha=-\bar{b}\cdot\bar{c}$ и т. д. Очевидно, что наибольшее значение эта величина принимает, когда $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$, т. е. из векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ можно составить треугольник. Углы этого треугольника равны α_1, β_1, γ_1, а противолежащие им стороны — $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$; по теореме синусов получаем, что $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$.

Р. П. Ушаков

М1025*. *Две прямые, проведенные через одну и другую точки пересечения продолжений противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разрезают его на четыре меньших четырехугольника. Докажите, что если в два их них, не имеющие общей*

Известно, что в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны. Оказывается, имеются еще два аналогичных признака, которые и используются в решении задачи.

Пусть стороны AB и DC четырехугольника $ABCD$ при продолжении пересекаются в точке E, AD и BC — в точке F (рис. 1). Тогда для существования вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности необходимо и достаточно выполнение любого из следующих *стороны, можно вписать окружности, то и в исходный четырехугольник можно вписать окружность.*

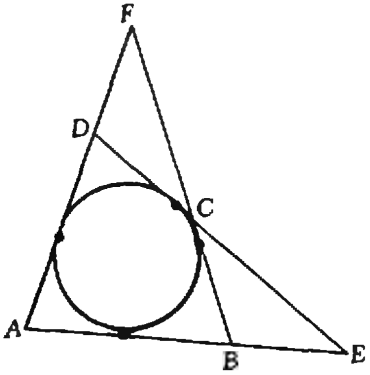


Рис. 1.

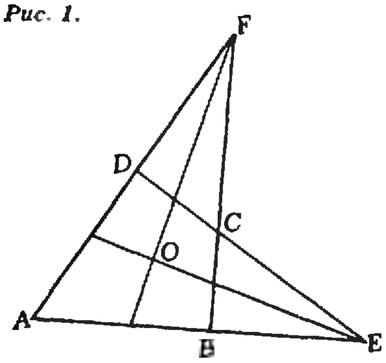


Рис. 2.

двух условий:

$$EB+FB=ED+FD, \tag{1}$$
$$EA-FA=EC-FC. \tag{2}$$

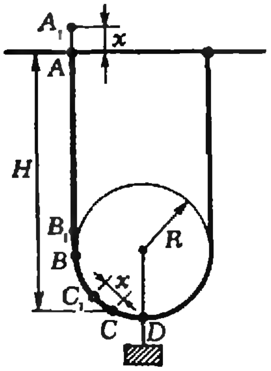
Докажем их необходимость. Пусть a, b, c, d, e, f — длины касательных, проведенных из точек A, B, C, D, E, F к вписанной в $ABCD$ окружности. Тогда $EB=e-b$, $FB=f+b$, $ED=e+d$, $FD=f-d$, так что обе части равенства (1) равны $e+f$. Аналогично доказывается, что обе части равенства (2) равны $e-f$.

Докажем достаточность условия (1). Пусть оно выполнено. Впишем в треугольник AED окружность и проведем к ней из точки F касательную, пересекающую EA и ED в точках B_1 и C_1. Из доказанного выше следует, что $EB_1+FB_1=ED+FD=EB+FB$, т. е. $FB=FB_1+(EB_1-EB)=FB_1\pm BB_1$ (знак зависит от того, с какой стороны от B лежит точка B_1). Полученное равенство при $B_1\neq B$ противоречит неравенству треугольника для точек F, B и B_1. Следовательно, $B_1=B$ — построенная окружность касается и четвертой стороны BC данного четырехугольника. Достаточность условия (2) устанавливается аналогично.

Теперь легко доказать утверждение задачи. Пусть O — точка пересечения прямых, разрезающих данный четырехугольник $ABCD$ (рис. 2). Если окружности можно вписать в четырехугольники при вершинах B и D, то в силу условия (1) для этих четырехугольников $EB+FB=EO+FO=ED+FD$; применяя условие (1) к $ABCD$, получаем, что и в этот четырехугольник можно вписать окружность. Для четырехугольников при вершинах A и C утверждение задачи по признаку (2) вытекает из равенств $EA-FA=EO-FO=EC-FC$.

И. Ф. Шарыгин

Ф1033. *Через блок радиусом R перекинут однородный гибкий канат массой m и длиной l, прикрепленный к двум крюкам на потолке, расположенным на расстоянии $2R$ (см. рисунок). На оси блока висит груз, масса которого вместе с блоком M. Трение между канатом и блоком отсутствует. Найти минимальную силу натяжения каната.*



Рассмотрим левую половину каната ABD (см. рисунок). Ясно, что чем ниже на участке AB точка каната, тем меньше в этой точке сила натяжения. Поэтому точку каната с минимальным натяжением надо искать где-то на участке BD. Возьмем произвольную точку C на этом участке, находящуюся на расстоянии H от потолка.

На участок каната ABC действует направленная вертикально вверх сила F_1 со стороны крюка, сила натяжения каната F в точке C (со стороны расположенной справа от точки C части каната), а также силы давления блока на канат, рассредоточенные по всей поверхности соприкосновения каната с блоком.

Переместим мысленно участок каната ABC на сколь угодно малое расстояние x таким образом, чтобы он занял новое положение $A_1B_1C_1$ (см. рисунок). При таком перемещении сила F_1 совершит работу F_1x, а сила F совершит отрицательную работу $-Fx$. Силы давления блока на канат работы не совершат (в каждой точке каната они направлены перпендикулярно направлению перемещения этой точки). Потенциальная энергия перемещенного участка каната увеличится при этом на ту же величину, на какую увеличится потенциальная энергия кусочка каната длиной x и массой $\frac{m}{l}x$ при перенесении его из положения CC_1 в положение AA_1. По закону сохранения энергии

$$F_1x-Fx=\frac{m}{l}xgH.$$

Отсюда

$$F = F_1 - \frac{m}{l}\, xgH. \qquad (1)$$

Теперь видно, что минимальное значение F на участке BD будет при максимально возможном значении H, т. е. в точке D. Равенство (1) для точки D имеет вид

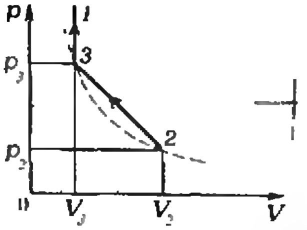
$$F_{\min} = F_1 - \frac{m}{l}\, g\left(\frac{l}{2} - \frac{\pi R}{2} + R\right).$$

Так как $F_1 = \frac{1}{2}(M+m)g$, что легко показать, то минимальная сила натяжения каната равна

$$F_{\min} = \frac{Mg}{2} + \frac{mg}{2}\,\frac{R}{l}(\pi-2) = \left(M + m(\pi-2)\frac{R}{l}\right)\frac{g}{2}.$$

В. И. Чивилев

Ф1034. *Моль идеального газа из начального состояния 1 с температурой $T_1 = 100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в состояние 2 (см. рисунок). Этот переход происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в процессе 2→3, в котором давление является линейной функцией объема, и наконец, в изохорическом процессе 3→1 газ возвращается в исходное состояние. Найти работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе 1→2, если в процессах 2→3→1 к газу в итоге подведено $Q = 72$ Дж тепла. Известно также, что $T_2 = T_3$, $V_2 = 3V_1$; газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).*



При расширении газа через турбину в пустой сосуд он совершает работу за счет своей внутренней энергии (так как подвода тепла нет). В процессе такого перехода отдельные части газа могут иметь разные температуры и давления — это так называемое «неравновесное» расширение. Однако после установления в газе равновесной температуры T_2 и давления p_2 совершенная газом работа однозначно определяется законом сохранения энергии:

$$A_{1\to2} = c_V(T_1 - T_2), \text{ где } c_V = \frac{3}{2}R.$$

На участке 2→3 начальная внутренняя энергия газа равна конечной, поэтому подведенное к газу тепло $Q_{2\to3}$ определяется совершенной газом работой (площадь трапеции):

$$Q_{2\to3} = A_{2\to3} = \frac{p_2 + p_3}{2}(V_3 - V_2) = RT_2\,\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}, \text{ где } \alpha = \frac{V_2}{V_1} = 3.$$

На участке 3→1 подведенное к газу тепло определяется изменением его внутренней энергии, так как в изохорическом процессе работа газом не совершается:

$$Q_{3\to1} = c_V(T_1 - T_3) = c_V(T_1 - T_2).$$

По условию $Q_{2\to3} + Q_{3\to1} = Q \neq 72$ Дж, или

$$RT_2\,\frac{1-\alpha^2}{2\alpha} + c_V(T_1 - T_2) = Q.$$

Последнее равенство позволяет найти температуру T_2, а затем и работу $A_{1\to2}$:

$$A_{1\to2} = \frac{Q + RT_1\,\dfrac{\alpha^2-1}{2\alpha}}{1 + \dfrac{R}{c_V}\,\dfrac{\alpha^2-1}{2\alpha}} = 625 \text{ Дж}.$$

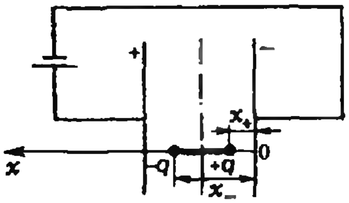
А. А. Шеронов

Ф1035. *Электрический диполь из двух жестко связанных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, пролетает плоский конденсатор, пластины которого подключены к источнику с постоянной ЭДС $\mathscr{E}$ (см. рисунок). Опре-*

Прежде всего следует отметить, что диполь будет «втягиваться» в конденсатор — результирующая сила, действующая на него со стороны пластин, направлена внутрь конденсатора, и следовательно, в конденсаторе скорость диполя возрастает.

Так как поле в конденсаторе поддерживается постоянным, можно пренебречь влиянием поля диполя на заряды пластин, т. е. считать поле конденсатора внешним (независимым) по отношению к диполю.

делите скорость диполя в центре конденсатора, если известно, что его скорость вдали от конденсатора равна v_0. Расстояние между пластинами конденсатора d, масса диполя m. Влиянием силы тяжести пренебречь.



Поле конденсатора — потенциальное; следовательно, в конденсаторе диполь будет обладать и потенциальной энергией. Эта энергия равна

$$W_п=(+q)\varphi_{x+}+(-q)\varphi_{x-}=q\frac{\mathscr{E}}{d}(x_+-x_-)=-ql\frac{\mathscr{E}}{d},$$

где x_+ и $x_-=x_++l$ — координаты зарядов $+q$ и $-q$, φ_{x+} и φ_{x-} — потенциалы в точках с координатами x_+ и x_-; координата x отсчитывается от отрицательно заряженной пластины (см. рисунок). При таком выборе начала отсчета работа по перемещению единичного заряда с отрицательной пластины на положительную равна ε.

Искомую скорость диполя найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv^2}{2}-ql\frac{\mathscr{E}}{d},$$

откуда

$$v=(v_0^2+\frac{2ql\varepsilon}{md})^{1/2}.$$

А. В. Шелагин

Ф1036. *К телу массой $m=20$ г, лежащему на гладком горизонтальном полу, привязаны две одинаковые упругие нити жесткостью $k=10^4$ Н/м. Одна нить приклеплена к стене, свободный конец второй нити начинают тянуть в горизонтальном направлении со скоростью $v=10$ м/с. Какая нить порвется, если разрыв каждой нити происходит при абсолютном удлинении $\Delta l_{пр}=5$ см? Считать, что закон Гука выполняется для нитей вплоть до их разрыва; трения нет.*

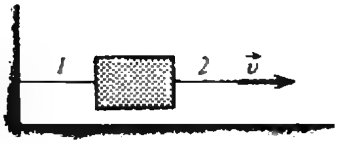


Рис. 1.

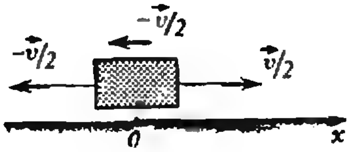


Рис. 2.

За процессом растяжения нитей удобно следить, перейдя из неподвижной системы (рис. 1) в систему координат, двужущуюся вправо со скоростью $v/2$; начало отсчета в первый момент времени совпадает с телом (рис. 2).

Относительно этой системы координат концы нитей движутся в разные стороны со скоростями $v/2$; тело в первый момент времени находится в начале координат ($x=0$) и движется влево со скоростью $v/2$.

Сила упругости, действующая на тело, не зависит от движения концов нитей, а зависит лишь от смещения тела x от первоначального положения:

$$F_x=-k(\Delta l+x)+k(\Delta l-x)=-2kx,$$

где $\Delta l=(v/2)t$ — абсолютное значение смещений концов нити к тому момеиту, когда смещение тела равно x. Следовательно, тело будет совершать гармонические колебания с частотой $\omega=\sqrt{2k/m}=10^3$ Гц около первоначального положения. Смещение тела меняется со временем по закону

$$x=-\frac{v}{2\omega}\sin\omega t,$$

а удлинения нитей —

$$\Delta l_1=\frac{v}{2}t-\frac{v}{2\omega}\sin\omega t,$$

$$\Delta l_2=\frac{v}{2}t+\frac{v}{2\omega}\sin\omega t.$$

Отсюда видно, что в течение четных полупериодов колебаний —

$$2n\frac{T}{2}<t<(2n+1)\frac{T}{2}\quad\left(T=\frac{2\pi}{\omega},\ n=0,1,2,\ldots\right)$$

— сильнее будет растянута первая нить, в течение нечетных полупериодов — вторая.

Таким образом, вторая нить порвется, если выполняется условие

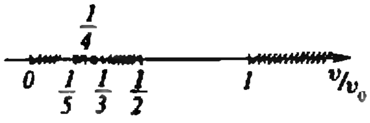


Рис. 3.

$$2n\,\frac{T}{2}\,\frac{v}{2}<\Delta l_{\text{пр}}<(2n+1)\,\frac{T}{2}\,\frac{v}{2},$$

или

$$\frac{1}{2n+1}<\frac{v}{v_0}<\frac{1}{2n},\ \text{где}\ v_0=2\omega\cdot\Delta l_{\text{пр}}/\pi.$$

Область скоростей (точнее, отношение v/v_0), при которых рвется вторая нить, на рисунке 3 показана штриховкой. При больших скоростях, т. е. когда $v/v_0>1$, всегда рвется та нить, за которую тянут; при меньших скоростях ответ неоднозначен.

Для приведенных в условиях данных $v/v_0=0{,}314$. Следовательно, порвется нить, привязанная к стене.

Е. П. Соколов

■

Ф1037. *В полой сфере проделано маленькое отверстие, через которое внутрь проникает узкий параллельный пучок света. Внутренняя поверхность сферы отражает свет во все стороны одинаково (диффузно) и не поглощает его. Как будут различаться в этом случае освещенности в точке, диаметрально противоположной отверстию, и во всех остальных точках сферы?*

Поскольку по условию задачи внутренняя поверхность сферы не поглощает падающую на нее световую энергию, после многократных отражений через некоторое время в системе установится равновесие. При этом каждый небольшой участок внутренней поверхности сферы всю попадающую на него световую энергию будет равномерно рассеивать во все стороны. В результате установления равновесия освещенность всех внутренних точек сферы, кроме точки, противоположной отверстию, будет одинаковой. При равновесии суммарная световая энергия, приходящая к отверстию в единицу времени от всех внутренних точек сферы, будет равна энергии, поступающей через отверстие в сферу извне. Таким образом, после установления равновесия (а именно такая ситуация и рассматривается в задаче) отверстие будет эквивалентно устройству, которое всю приходящую к нему энергию от всех внутренних точек сферы посылает узким пучком в диаметрально противоположную точку.

Легко понять, что в силу малости отверстия суммарная энергия, приходящая к нему от всех участков внутренней поверхности сферы, равна суммарной энергии, рассеиваемой во все стороны любым участком сферы, равным по площади отверстию (это следует из обратимости состояния равновесия — если все рассеиваемые лучи «заставить» двигаться в обратных направлениях, то ничего не изменится); это рассуждение не касается только точки, диаметрально противоположной отверстию.

Итак, в силу рассеяния доли энергии, посылаемые всеми внутренними точками как к отверстию, так и в противоположную отверстию точку, будут одинаковыми. Кроме того, ровно столько же энергии придет в точку, противоположную отверстию, и от отверстия. Следовательно, освещенность внутренних точек сферической поверхности будет ровно вдвое меньше освещенности точек участка сферы, противоположного отверстию. (Чем меньше площадь отверстия, тем точнее выполняется отношение 1:2.)

С. С. Кротов

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. У каких полуокружностей, изображенный на рисунке, сумма длин больше — у верхних или у нижних?

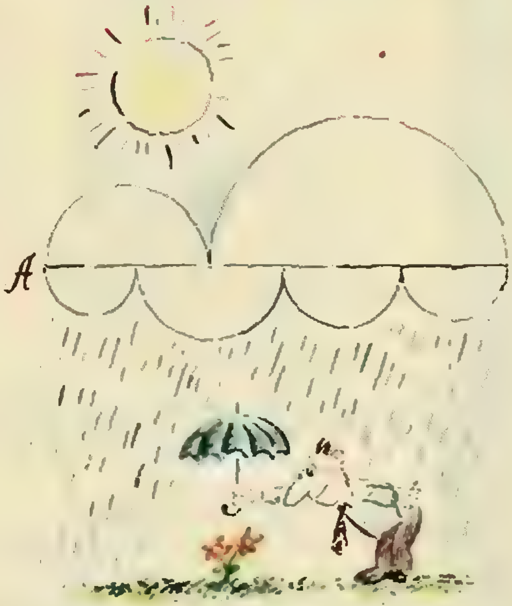
2. Почему растения не рекомендуют поливать днем, особенно в солнечную погоду?

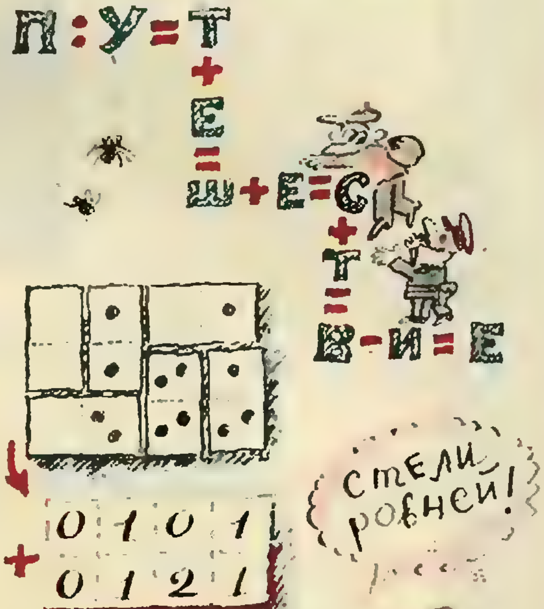
3. Совершите путешествие из пункта П в пункт Е (см. рисунок). Для этого замените буквы цифрами так, чтобы все равенства стали верными (одинаковые буквы заменяются одинаковыми цифрами, разные — разными). Счастливого пути!

4. Из шести косточек домино выложен прямоугольник так, что ему соответствует пример на сложение (см. рисунок). Сложите из шести косточек домино (может быть, других) такой же прямоугольник так, чтобы сумма (т. е. число в нижней строчке) была наименьшей.

5. В детском кафе стоят одинаковые круглые и одинаковые квадратные столы, на которых лежат одинаковые круглые и одинаковые квадратные салфетки. Известно, что круглый стол можно покрыть четырьмя квадратными салфетками, а квадратный — четырьмя круглыми салфетками. Покажите, что диаметр круглой салфетки не меньше половины диагонали квадратного стола, а сторона квадратной салфетки не меньше радиуса круглого стола.

Эти задачи нам предложили ученик 8 класса Ю. Файзуллаев из колхоза «Правда» Шаватского района Хорезмской области, А. П. Савин, Л. П. Мочалов, Тран Куанг Дат (СРВ), В. В. Произволов.





Калейдоскоп „Кванта"

...вещи не могут ни создаваться из ничего, ни, однажды возникнув, вновь обращаться в ничто...

Лукреций Кар.
«О природе вещей»

Вопросы и задачи

1. Может ли кинетическая энергия тела изменяться, если на тело не действуют силы?

●

2. Может ли кинетическая энергия тела оставаться неизменной, если равнодействующая приложенных к телу сил отлична от нуля?

●

3. Когда перенос электрического заряда из одной точки электрического поля в другую не сопровождается изменением энергии?

●

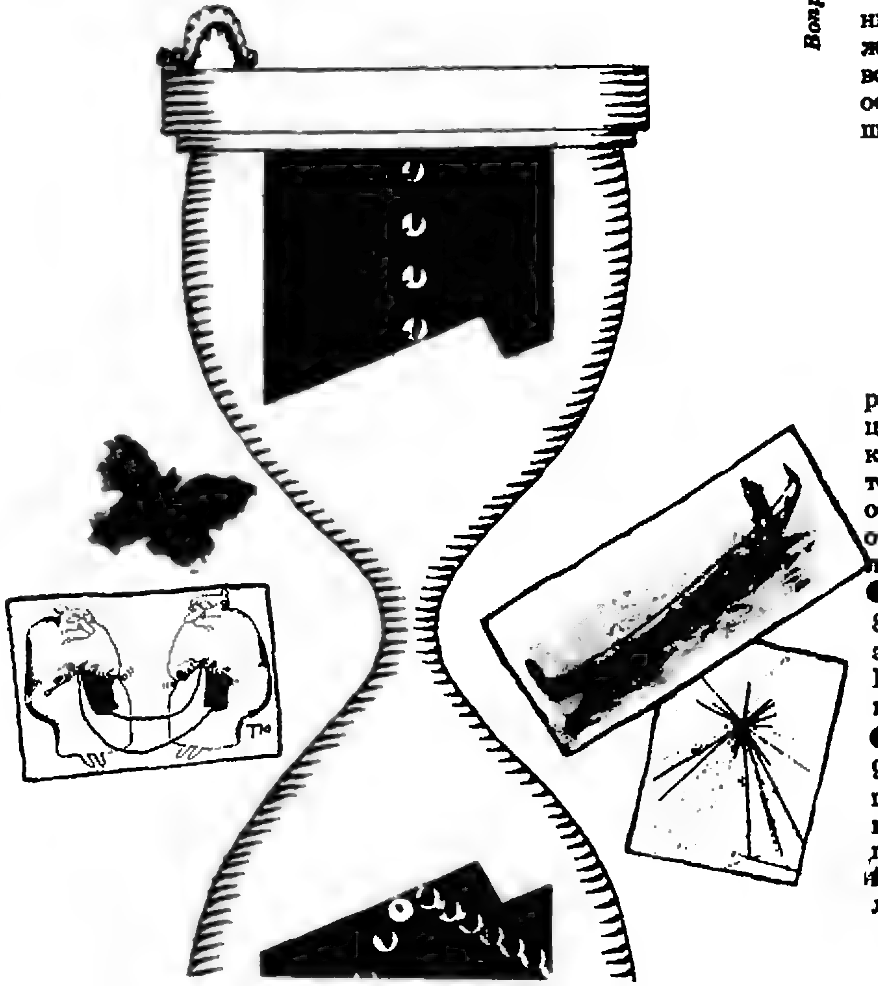
4. В какие виды энергии превращается при фотоэффекте энергия падающего на вещество света?

●

5. Каким образом космонавт, не связанный с кораблем, может вернуться на корабль?

Любопытно, что

● *...часто некоторые законы сохранения оказываются справедливыми лишь при описании ограниченного круга явлений. Так, при изучении химических реакций можно считать*

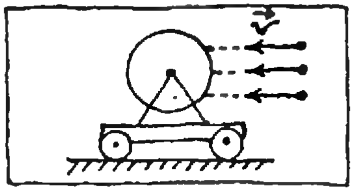


Вопросы и задачи

6. Зависит ли полный импульс хорошо центрированного маховика от частоты его вращения?

●

7. В массивный однородный цилиндр, который может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, попадает пуля, летящая горизонтально со скоростью v, и после удара о цилиндр падает на тележку. Зависит ли скорость тележки, которую она приобретает после удара пули, от того, в какую часть цилиндра попадет пуля?



●

8. Излучая фотон, атом газа изменяет свой импульс. Почему это изменение неизбежно?

●

9. В процессе аннигиляции электрона и позитрона никогда не возникает один гамма-квант. Какой из за[illegible] сохранения проявляется в этом факте?

масса сохраняется, однако при ядерных реакциях применение такого закона было бы ошибочным, так как, например, масса конечных продуктов деления урана меньше массы исходного количества урана.

Любопытно, что...

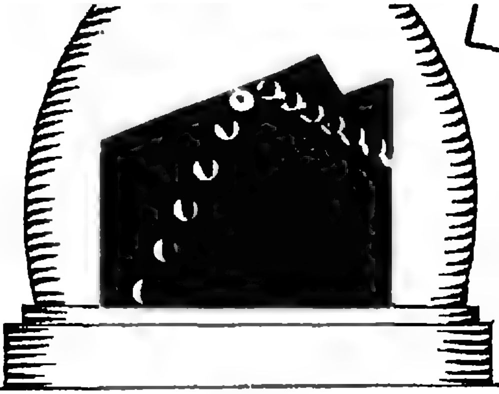
●

...если бы закон сохранения заряда не являлся вполне точным законом природы, то электрон мог бы распасться, например, на нейтрино и фотон. Поиски таких распадов, однако, не увенчались успехом и показали, что время жизни электрона по крайней мере не меньше 10^{22} лет. (Возраст же Вселенной оценивается сегодня учеными в 10^{10} лет.)

Любопытно, что ...

●

...именно закон сохранения заряда подсказал Дж. Максвеллу идею о возможном возникновении магнитного поля в результате изменения электрического поля. Развитие этой идеи привело Максвелла к предсказанию периодических электромагнитных процессов, распространяющихся в пространстве. Вычисленное значение скорости распространения оказалось в точности равным ранее измеренной скорости света.



А так ли хорошо знакомы вам

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

?

Развитие физики сопровождалось установлением самых разных законов сохранения, утверждающих, что в изолированных системах определенные величины не могут возникать или исчезать. Представления о том, что подобные законы существуют, возникли в глубине веков: приведенное в эпиграфе изречение Лукреция отражает еще античные взгляды. Сегодня физикам известно довольно много таких законов, часть из них знакома и вам — это законы сохранения импульса, энергии, заряда. Дальнейшее изучение физики позволит узнать, что есть весьма необычные законы сохранения, например, странности, четности и очарования. Но прежде — поработаем с теми, которые вы должны хорошо знать.

ляется в этом факте?

●

10. Металлическая пластина зарядилась под действием рентгеновских лучей. Каков знак заряда?

●

11. При аннигиляции электрона с позитроном образуются гамма-кванты; однако такого не происходит при встрече двух электронов или двух позитронов. Какой здесь сказывается закон сохранения?

Микроопыт

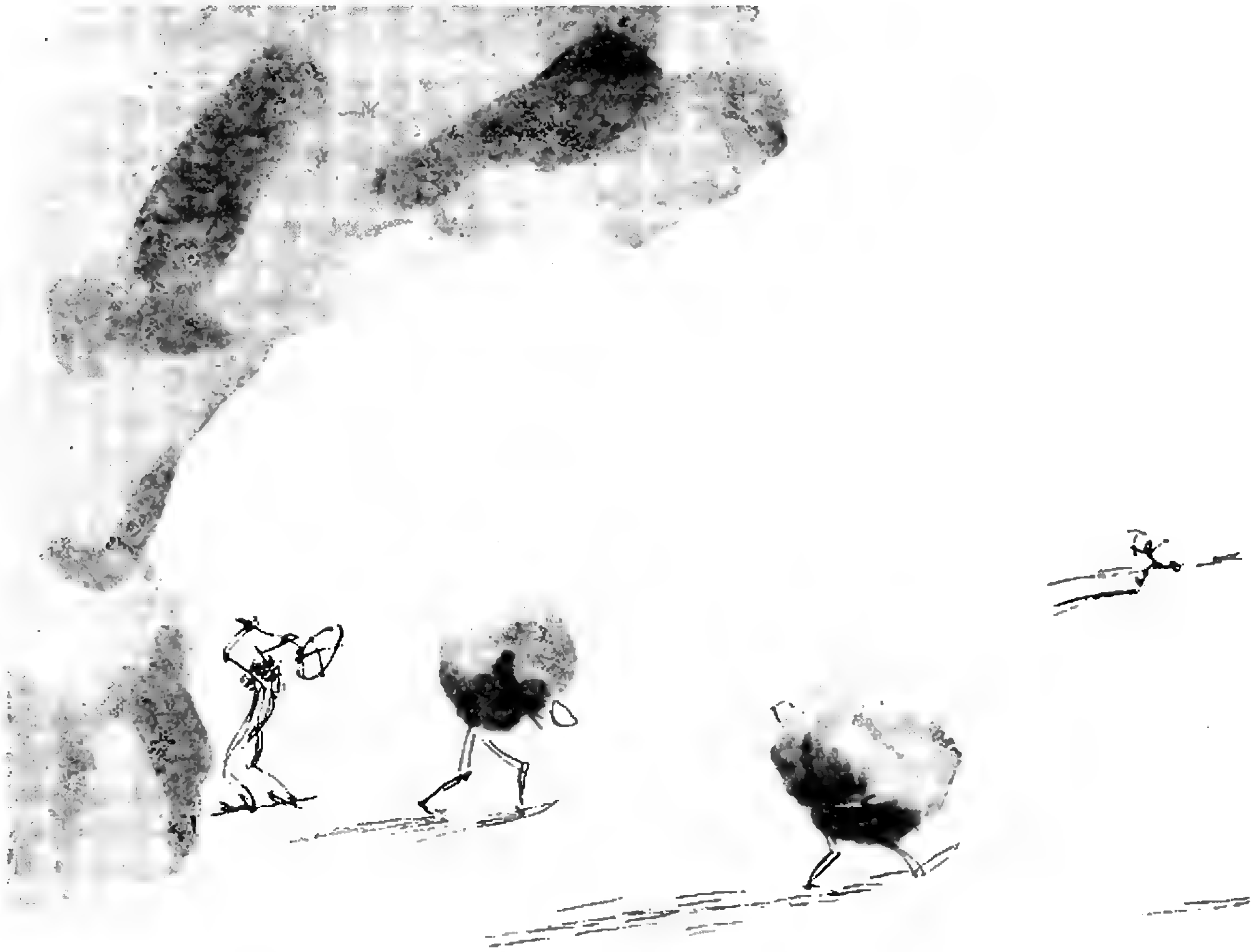
●

Пройдите от кормы неподвижной поначалу лодки к ее носовой части. Почему лодка станет двигаться в противоположную сторону?

Что читать в «Кванте»

О законах сохранения (публикации последних лет):

1. *«Столкновения тел» — 1984, № 4;*
2. *«Как вводятся физические величины» — 1984, № 10;*
3. *«Импульс и кинетическая энергия» — 1985, № 5 (с. 28);*
4. *«Механическая работа и механическая энергия» — 1985, № 5;*
5. *«Волк, барон и Ньютон» — 1986, № 9;*
6. *«Атомная физика в задачах» — 1986, № 12;*
7. *«Закон сохранения энергии» — 1987, № 5.*



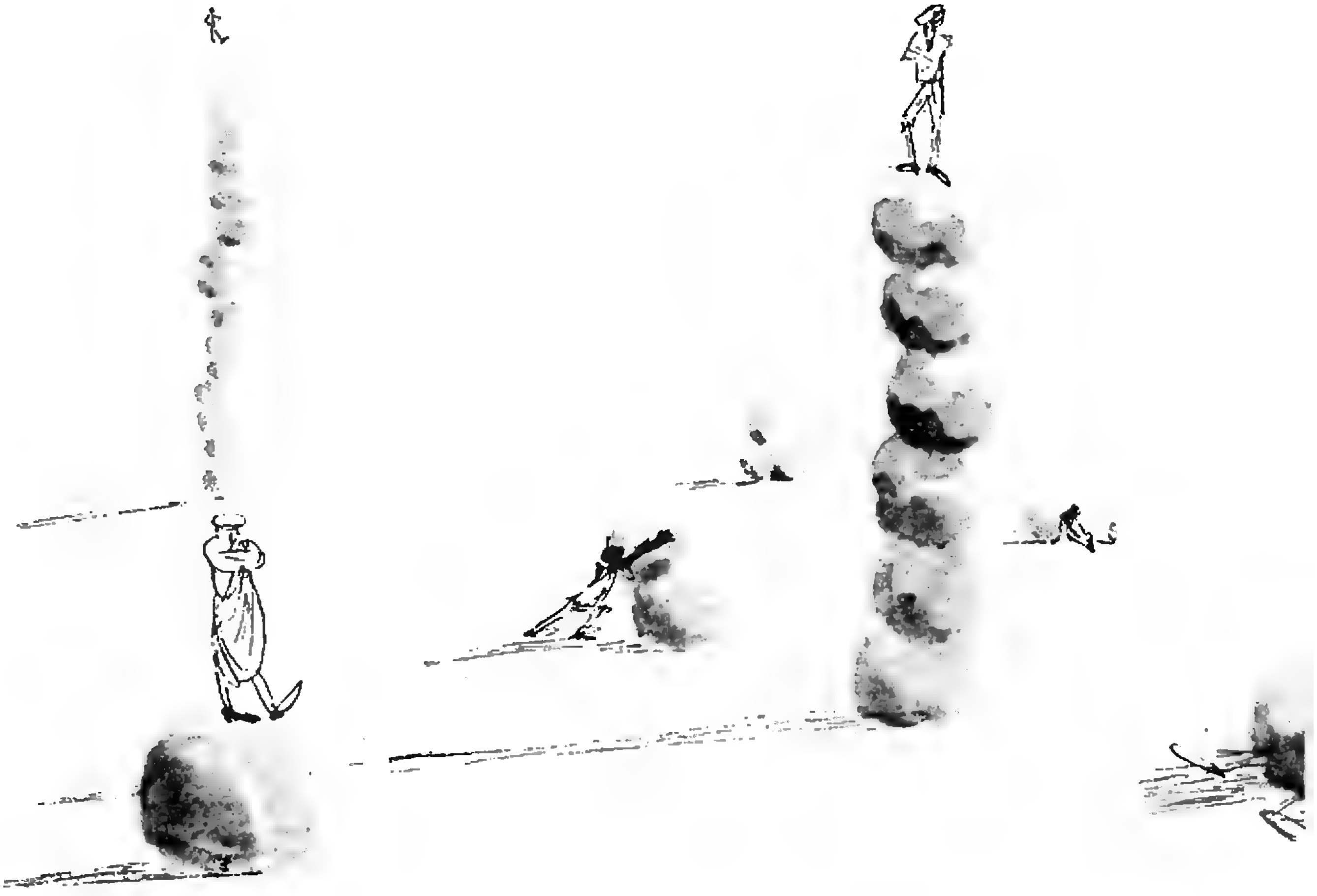
ИЗ ИСТОРИИ ДРОБЕЙ

Доктор физико-математических наук
Н. Я. ВИЛЕНКИН

Первой дробью, с которой познакомились люди, была *половина*. Хотя названия всех следующих дробей связаны с названиями их знаменателей (три — «треть», четыре — «четверть» и т. д.), для половины это не так — ее название во всех языках не имеет ничего общего со словом «два». Следующей дробью была *треть*. Эти и некоторые другие дроби встречаются в древнейших дошедших до нас математических текстах, составленных более 5000 лет тому назад,— древнеегипетских папирусах и вавилонских клинописных табличках. И у египтян, и у вавилонян были специальные обозначения для дробей 1/3 и 2/3, не совпадающие с обозначениями для других дробей.

Египтяне все дроби старались записать как суммы *долей*, т. е. дробей вида $1/n$. Единственным исключением была дробь 2/3. Например, вместо 8/15 они писали $1/3+1/5$. Иногда это бывало удобно. В папирусе, написанном египетским писцом Ахмесом, есть задача: ***разделить семь хлебов между восемью людьми***. Если резать каждый хлеб на 8 частей, придется сделать 49 разрезов. А по-египетски эта задача решалась так. Дробь 7/8 записывали в виде долей: $1/2+1/4+1/8$. Теперь ясно, что надо 4 хлеба разрезать пополам, 2 хлеба на 4 части и только один хлеб — на 8 частей (всего 17 разрезов).

Но складывать записанные в виде долей дроби было неудобно. Ведь в оба слагаемых могут входить одинаковые доли, и тогда при сложении появится дробь вида $2/n$. А таких дробей египтяне не до-



пускали. Поэтому папирус Ахмеса начинается с таблицы, в которой все дроби вида $2/n$, от $2/5$ до $2/99$, записаны в виде сумм долей. С помощью этой таблицы выполняли и деление целых чисел. Вот, например, как делили 5 на 21:

$$\frac{5}{21}=\frac{1}{21}+\frac{2}{21}+\frac{2}{21}=\frac{1}{21}+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right)+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right)=\frac{1}{21}+\frac{2}{14}+\frac{2}{42}=\frac{1}{7}+\frac{1}{21}+\frac{1}{21}=\frac{1}{7}+\frac{2}{21}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}.$$

Умели египтяне также умножать и делить дроби. Но при умножении приходилось умножать доли на доли, а потом, быть может, снова использовать таблицу. Еще сложнее обстояло дело с делением.

Совсем иным путем пошли вавилоняне. Дело в том, что система счисления в Вавилоне была *шестидесятиричной* — каждая единица следующего разряда была в 60 раз больше предыдущей. Например, запись $14''\,42'\,38$ означала число $14\cdot 60^2+42\cdot 60+38$, т. е. в нашей записи число 52958 (только вавилоняне пользовались не нашими цифрами, а другими обозначениями, составленными из клиньев). Поэтому и дроби были у вавилонян не десятичными, а шестидесятиричными. По сути дела мы и сейчас пользуемся такими дробями в обозначениях времени и величин углов. Например, время 3 ч 17 мин 28 с можно записать и так: $3{,}17'28''$ ч (читается 3 целых, 17 шестидесятых 28 три тысячи шестисотых часа). Вместо слов «шестидесятые доли», «три тысячи шестисотые доли» говорили короче: «первые малые доли», «вторые малые доли». От этого и произошли наши слова «минута» (по латыни «меньшая») и «секунда» (по латыни «вторая»). Так что вавилонский способ обозначения дробей сохранил свое значение до сих пор.

Не все дроби можно изобразить в виде конечных шестидесятиричных, как и не все дроби записываются в виде конечных десятичных. Например, дроби вида $1/7$, $1/11$, $1/13$ не могут быть записаны в шестидесятиричной форме. Но их можно с любой степенью точности заменить шестидесятиричными дробями. Так вавилоняне и поступали.

Шестидесятиричными дробями, унаследованными от Вавилона, пользовались греческие и арабские математики и астрономы. Но было неудобно работать над натуральными числами, записанными в десятичной системе, и дробями, записанными в шестидесятиричной. А работать с обыкновенными дробями было совсем уж плохо — попробуйте, например, сложить или умножить дроби $\frac{785}{2213}$ и $\frac{8917}{3411}$.

Поэтому голландский математик и инженер Симон Стевин предложил в 1585 году перейти к десятичным дробям. Сначала их писали весьма сложно, но постепенно перешли к современной записи. Еще за полтора столетия до Стевина десятичные дроби ввел работавший в Самаркандской обсерватории Улугбека астроном ал-Каши, но его работа осталась неизвестной европейским математикам.

Сейчас в ЭВМ используют двоичные дроби. В двоичной системе счисления единица каждого следующего разряда вдвое больше единицы предыдущего разряда. Это позволяет при записи чисел пользоваться лишь двумя цифрами: 0 и 1. Например, запись 100101 означает число $1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1$, т. е. число 37. Хотя и получается более длинная запись, но нужно всего две цифры. Такую запись гораздо легче реализовать в ЭВМ с помощью электрического тока (например, 1 — ток проходит, а 0 — ток не проходит). Двоичные дроби тоже имеют, например, вид 0,101101 (попробуйте прочесть, что это означает!). Любопытно, что двоичными дробями пользовались, по сути дела, в Древней Руси, где были такие дроби, как *половина, четь, пол-чети, пол-пол-чети* и т. д.

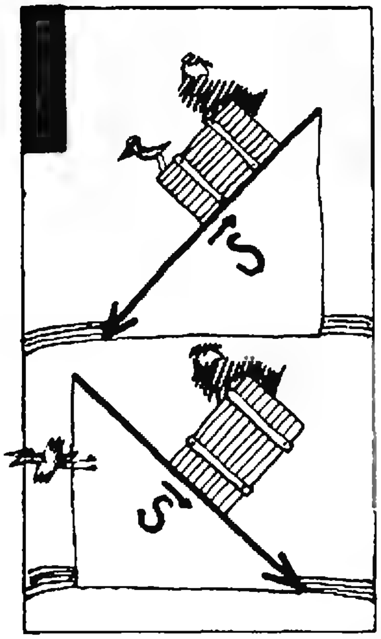
Интересная система дробей была в Древнем Риме. Она основывалась на делении единицы измерения веса *асса* на 12 долей. Двенадцатую долю асса называли *унцией*. А путь, время и т. д. сравнивали с наглядной вещью — весом. Например, римлянин мог сказать, что он прошел семь унций пути или прочел 5 унций книги. При этом, конечно, речь не шла о взвешивании пути или книги. Просто говорилось, что пройдено 7/12 пути или прочтено 5/12 книги. А для дробей, получающихся сокращением дробей со знаменателем 12 или раздроблением двенадцатых долей на более мелкие, были особые названия.

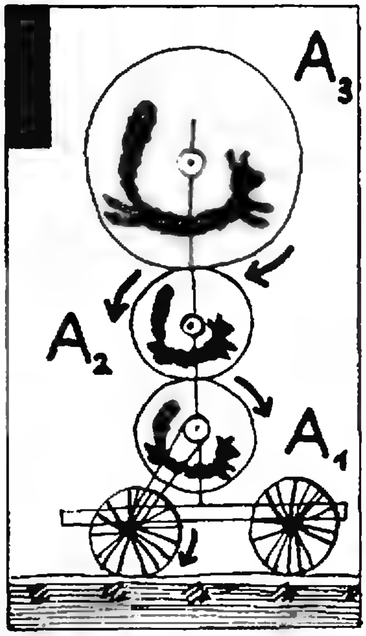
Даже сейчас иногда говорят «он скрупулезно изучил этот вопрос». Это значит, что вопрос изучен до конца, что ни одной самой малой неясности не осталось. А происходит странное слово «скрупулезно» от римского названия 1/288 асса — *скрипулус*. В ходу были и такие названия: *семис* — половина асса, *секстанс* — шестая его доля, *семиунция* — полунции, т. е. 1/24 асса и т. д. Всего применялось 18 различных названий. Чтобы работать с дробями, надо было для этих дробей помнить и таблицу сложения, и таблицу умножения. Поэтому римские купцы твердо знали, что при сложении *триенса* (1/3 асса) и *секстанса* получается *семис*, а при умножении *беса* (двух третей асса) на *сескунцию* (3/2 унции, т. е. 1/8 асса) получается *унция*. При этом они хорошо понимали, что умножают не сами веса (умножать вес на вес смысла не имеет), а выражающие эти веса дроби. Для облегчения работы составлялись специальные таблицы, некоторые из которых дошли до нас.

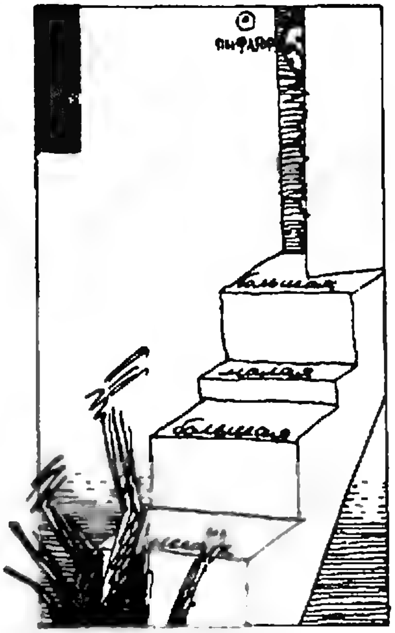
Так что ту роль, которую в Древнем Вавилоне играло число 60, а в Древней Руси — число 2, в Древнем Риме играло число 12 — римская система дробей и мер была *двенадцатиричной* (хотя числа они записывали по десятичной системе, только другим образом, чем это делаем мы). Из-за того, что числа вида $1/10^n$ не выражаются в форме конечных двенадцатиричных дробей, римляне не умели представлять результат деления на 10, 100 и т. д. дробью. Например, один римский математик, деля 1001 асса на 100, сначала получил 10 ассов, потом раздробил асс на унции и т. д., но от остатка, естественно, не избавился.

В греческих сочинениях по математике дробей не встречалось. Греческие ученые считали, что математика должна заниматься только целыми

(Окончание см. на с. 54)







Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Законы сохранения и системы отсчета» предназначена восьмиклассникам, «Как работает электродвигатель?» — девятиклассникам, «Физика музыкальной гармонии» — десятиклассникам.

Законы сохранения и системы отсчета

Есть надежный способ проверить, хорошо ли вы понимаете законы, относящиеся к движению тел,— рассмотрите явление в различных инерциальных системах отсчета. Нередко сразу же обнаруживаются парадоксы, свидетельствующие о том, что настоящего понимания у вас еще нет. Часто это связано с тем, что учителя и авторы учебников и задачников заботливо выбирают систему отсчета, где процесс выглядит наиболее просто. Такая методика в значительной мере оправданна: зачем вдаваться в сложные объяснения, если можно сделать проще. Однако все это хорошо до поры до времени. В нестандартной ситуации без обстоятельного анализа и настоящего понимания не обойтись.

Все сказанное непосредственно относится, прежде всего, к закону сохранения энергии.

Потенциальная энергия и работа. Вот простейшая задача. К стене прикреплена растянутая пружина с шаром на свободном конце. Сжимаясь, пружина совершает работу, равную изменению потенциальной энергии, взятому со знаком минус:

$$A = -\Delta E_p = \frac{kx^2}{2} \qquad (*)$$

(k — жесткость пружины, x — ее начальное растяжение).

Работа — произведение модулей векторов силы и перемещения на косинус угла между этими векторами — зависит от системы отсчета, так как при неизменной силе перемещение тела в различных системах отсчета различно. В то же время потенциальная энергия (а значит, и ее изменение) — функция расстояния между телами или их частями — от системы отсчета зависеть не может.

Что будет с равенством (*), если перейти в движущуюся систему отсчета? Работа изменится, а потенциальная энергия нет?

Недоразумение разрешается очень просто. В действительности изменение потенциальной энергии *двух* взаимодействующих тел во всех случаях равно, со знаком минус, работе *двух* консервативных сил, приложенных к телам. В этом все дело. Потенциальная энергия, как и сила, характеризует взаимодействие *двух* тел. К одному телу понятие потенциальной энергии не применимо. Обычно «для простоты» рассматриваются такие системы отсчета, в которых одно из тел (стена в нашем примере) неподвижно и поэтому одна из работ равна нулю. Работа же двух сил взаимодействия одинакова во всех системах отсчета благодаря третьему закону Ньютона. Покажем это.

Пусть два тела взаимодействуют друг с другом и в неподвижной системе отсчета совершают перемещения $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$, совпадающие по направлению с соответствующими силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, причем $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, $F_1 = F_2$ (рис. 1, *а*). Тогда полная работа

$$A = A_1 + A_2 = F_1 s_1 + F_2 s_2.$$

При переходе в систему отсчета, движущуюся относительной первой, оба тела получают дополнительные перемещения $\vec{s}_0$ (рис. 1, *б*). Работа в этой системе

$$A' = A'_1 + A'_2 = F_1(s_1 + s_0) + F_2(s_2 - s_0) = (F_1 s_1 + F_2 s_2) + (F_1 s_0 - F_2 s_0) = A.$$

Заметим, что полученный результат справедлив не только для консервативных сил — тяготения и упругости, но и для сил трения.

Работа сил трения. Говорят, и правильно говорят, что работа внутренних сил трения в системе всегда отрицательна. Как это доказать?

Нельзя ведь утверждать, что сила трения во всех случаях совершает отрицательную работу. Положите ручку на лист бумаги и потяните за лист. Сила, приложенная со стороны ручки к листу, совершает отрицательную работу, но сила, приложенная к ручке, — положительную. Кроме того, выбором системы отсчета работу любой силы из отрицательной можно превратить в положительную за счет изменения направления перемещения.

Однако в системе отсчета, где одно из взаимодействующих тел неподвижно, работа всегда отрицательна, так как сила трения направлена против скорости относительного движения тел. Только что было показано, что работа двух сил взаимодействия от системы отсчета не зависит. Поэтому и в любой системе отсчета суммарная работа сил трения отрицательна.

Кинетическая энергия и работа. С кинетической энергией в различных системах отсчета дело обстоит совсем иначе, чем с потенциальной. Кинетическая энергия относится к одному телу, а не к двум. Изменение кинетической энергии тела равно работе одной равнодействующей силы, т. е. сумме всех сил, приложенных к данному телу. Эти силы могут быть как внутренними силами системы, так и внешними.

Согласно теореме о кинетической энергии,

$$\Delta E_k = A.$$

При переходе в другую систему отсчета, движущуюся со скоростью $\vec{v}_0$ относительно первой (рис. 2), кинетическая энергия изменяется:

$$E_k = \frac{mv_1^2}{2},$$

$$E'_k = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m(v_1 - v_0)^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} - m(v_1 v_0) + \frac{mv_0^2}{2},$$

где v_1 — скорость тела в первой системе отсчета, а $v_2 = v_1 - v_0$ — во второй. При действии на тело внешней силы, по теореме о кинетической энергии, в движущейся системе от-

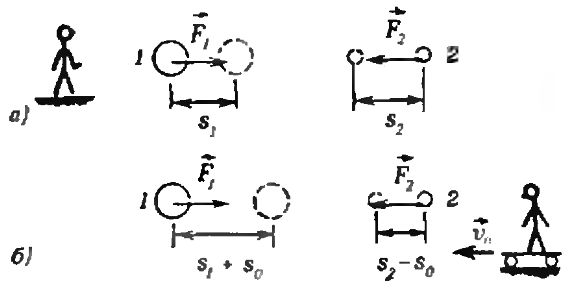


Рис. 1.

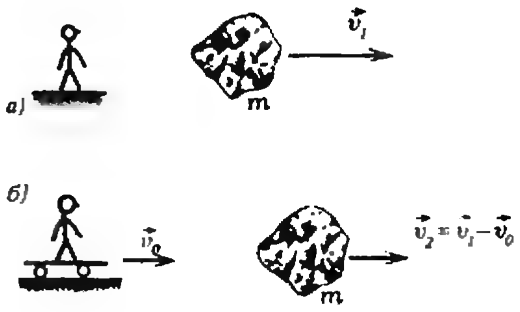


Рис. 2.

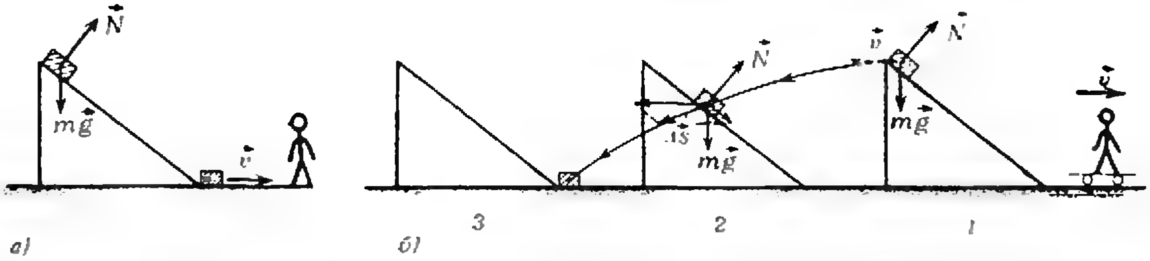


Рис. 3.

счета

$$\Delta E'_k = A'.$$

Таким образом, при переходе от одной системы отсчета к другой меняется не только кинетическая энергия, но и изменение кинетической энергии. Но всегда изменение кинетической энергии равно работе сил в этой же системе отсчета.

Определить, как меняется кинетическая энергия в зависимости от системы отсчета, не сложно, Вычислить же изменение работы гораздо сложнее. Рассмотрим такую задачу.

Кубик соскальзывает без трения с наклонной плоскости высотой h (рис. 3, *а*). У основания плоскости кинетическая энергия $E_{k2}=mv^2/2$, а начальная энергия $E_{k1} = 0$. Изменение кинетической энергии равно работе силы тяжести:

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{mv^2}{2} = mgh.$$

Рассмотрим движение кубика с точки зрения инерциальной системы отсчета, движущейся относительно наклонной плоскости со скоростью $v = \sqrt{2gh}$ (рис. 3, *б*). В этой системе начальная скорость кубика равна $v = \sqrt{2gh}$, а конечная скорость равна нулю, поэтому

$$\Delta E'_k = E'_{k2} - E'_{k1} = -\frac{mv^2}{2} \neq mgh.$$

Согласно теореме о кинетической энергии,

$$\Delta E'_k = -mgh = A'$$

— работа оказывается отрицательной. Дело в том, что в движущейся системе отсчета сила реакции плоскости не перпендикулярна перемещению кубика. Она-то и совершает отрицательную работу (наряду с положительной работой силы тяжести), уменьшающую кинетическую энергию кубика. Однако вычислить ее непосредственно, не прибегая к закону сохранения энергии, весьма затруднительно.

Закон сохранения импульса. Импульс силы не зависит от системы отсчета. Поэтому и изменение импульса тела одинаково во всех инерциальных системах отсчета:

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}\Delta t.$$

В данном случае все очень просто — импульс тела при переходе от одной системы отсчета к другой меняется, но изменение импульса остается одним и тем же.

Г. Я. Мякишев

Как работает электродвигатель?

Вопрос не такой простой, как кажется на первый взгляд. Естественный ответ со ссылкой на закон Ампера для силы, действующей на проводник с током со стороны магнитного поля, суть дела объясняет далеко не полностью.

Откуда берется сила Ампера? Она возникает из-за того, что на движущиеся в проводниках (металлических) электроны действует магнитная сила Лоренца. Ее модуль

$$F = evB \sin\alpha,$$

где e — заряд частицы, имеющей скорость $\vec{v}$, $\vec{B}$ — магнитная индукция, α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Сила $\vec{F}$ перпендикулярна $\vec{v}$ и $\vec{B}$, и ее направление определяется правилом левой руки. Казалось бы, если эта сила в любой момент времени перпендикулярна скорости, то работу совершать она не может. Тем не менее именно магнитная сила вращает якорь электродвигателя.

Столь же «загадочна» работа генератора, превращающего механическую энергию в энергию электрического тока. Если ЭДС индуцируется во вращающемся якоре генератора, то сторонней силой может быть только сила Лоренца. А она работы не совершает. Откуда же в генераторе появляется ЭДС?

Чтобы понять, в чем здесь дело, рассмотрим один из проводников обмотки якоря электродвигателя (рис. 1). Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости чертежа и направлен от нас. По проводнику сверху вниз течет ток I, электроны при этом движутся снизу вверх со скоростью $\vec{v}_1$ относительно проводника. Сам проводник движется слева направо со скоростью $\vec{v}_2$. Результирующая скорость электрона $\vec{v}$ направлена под углом к проводнику. Сила Лоренца $\vec{F}$ перпендикулярна скорости $\vec{v}$, и ее работа действительно равна нулю.

Однако силу $\vec{F}$, как и любую другую, можно разложить на две составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направленные перпендикулярно проводнику и вдоль него: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Составляющая $\vec{F}_1$ совпадает по направлению со скоростью $\vec{v}_2$ и совершает положительную работу A_1 по перемещению проводника. Другая составляющая $\vec{F}_2$ тормозит электроны и совершает отрицательную работу A_2.

Вычислим работу каждой силы в единицу времени.

Сила $\vec{F}_1$ возникает из-за движения электронов со скоростью $\vec{v}_1$ вдоль проводника. Угол α_1 между векторами $\vec{B}$ и $\vec{v}_1$ равен $\pi/2$. Модуль силы $F_1 = ev_1B$. Если бы проводник не двигался ($v_2 = 0$), то сила $\vec{F}_1$ равнялась бы $\vec{F}$ и не совершала бы работы. Но проводник движется со скоростью $\vec{v}_2$. Поэтому за единицу времени сила $\vec{F}_1$ совершает положительную работу

$$A_1/t = F_1v_2 = eBv_1v_2.$$

В свою очередь, сила $\vec{F}_2$ появляется за счет движения электронов вместе с проводником со скоростью $\vec{v}_2$, перпендикулярной к проводнику. Угол α_2 между векторами $\vec{B}$ и $\vec{v}_2$ также равен $\pi/2$. Модуль силы $F_2 = ev_2B$. Если бы в проводнике не было тока ($v_1 = 0$), то сила $\vec{F}_2$ равнялась бы силе $\vec{F}$ и не совершала бы работы. Но электроны движутся со скоростью $\vec{v}_1$ против направления силы $\vec{F}_2$. Поэтому эта сила тормозит электроны и за единицу времени совершает отрицательную работу

$$A_2/t = -F_2v_1 = -eBv_1v_2.$$

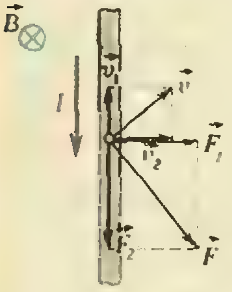


Рис. 1.

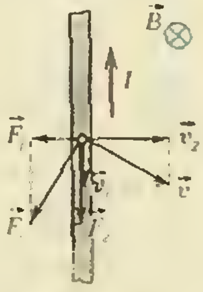


Рис. 2.

Весь фокус в том, что положительная работа составляющей силы Лоренца $\vec{F}_1$ равна по модулю отрицательной работе составляющей $\vec{F}_2$. Полная работа силы Лоренца, как это и должно быть, равна нулю.

Удельная работа $A_2/e = \mathscr{E}_i$ представляет собой ЭДС, индуцируемую в якоре электродвигателя. Работа силы $\vec{F}_2$ привела бы к остановке электронов и прекращению тока даже при нулевом сопротивлении обмоток якоря, если бы еще одну работу — A_3 — не совершал источник тока. Эту работу совершает электрическое поле, возникающее в проводнике при включении двигателя в цепь. Напряжение источника поддерживает движение электронов в обмотке, несмотря на торможение их магнитной силой $\vec{F}_2$ и наличие у проводников сопротивления R. Таким образом, в конечном счете электродвигатель работает за счет источника тока, питающего якорь.

Сила тока в цепи якоря определяется по формуле

$$I = \frac{U - \mathscr{E}_i}{R},$$

где U — приложенное к мотору напряжение. При включении двигателя в первый момент $\mathscr{E}_i \approx 0$, и сила тока оказывается весьма большой из-за малого сопротивления обмоток якоря. Она в 10—15 раз превышает силу тока работающего двигателя. Поэтому при пуске мощных двигателей применяются специальные реостаты для плавного повышения напряжения.

Работа генератора электрического тока объясняется так же, как и работа мотора. Когда якорь генератора приводится в движение, электроны проводников якоря приобретают скорость направленного движения $\vec{v}_2$ (рис. 2). Из-за этого появляется сила Лоренца $\vec{F}_2$, сообщающая электронам скорость $\vec{v}_1$ вдоль проводников. Результирующая сила $\vec{F}$ перпендикулярна суммарной скорости $\vec{v}$ и не совершает работы. Составляющая $\vec{F}_2$ представляет собой стороннюю силу, вызывающую появление тока в обмотке якоря. Она совершает положительную работу A_2. ЭДС генератора $\mathcal{E}_i = A_2/e$. Другая составляющая $\vec{F}_1$ направлена против движения проводника. Она совершает отрицательную работу A_1 и тормозит вращение якоря. Обе работы равны по модулю и противоположны по знаку. Якорь не останавливается, несмотря на тормозящую силу $\vec{F}_2$, благодаря действию внешних сил со стороны двигателя, вращающего якорь. Именно положительная работа внешних сил компенсирует отрицательную работу силы $\vec{F}_1$, и вращение якоря продолжается непрерывно.

Чем больше потребителей включено в цепь генератора, тем больше должна быть сила тока в якоре для поддержания на выходе генератора неизменного напряжения. Соответственно, больше будет сила $\vec{F}_1$, тормозящая якорь, и для поддержания номинального режима работы генератора потребуется бо́льшая мощность двигателя. Таким образом, включая без нужды обыкновенную электрическую лампочку, мы заставляем двигатель, вращающий якорь генератора, развивать чуть бо́льшую мощность.

Г. Я. Мякишев

Физика музыкальной гармонии

Вы знаете, что звуки, окружающие нас, есть не что иное, как колебания давления и плотности воздуха. Среди всего многообразия звуков некоторые оказывают на человека сильное эмоциональное воздействие. Это — звуки музыкальные. Объяснить их особое взаимодействие с мозгом только физическими причинами, разумеется, нельзя. Но можно, говоря словами Пушкина, «поверить алгеброй гармонию».

Согласно дошедшим из древности преданиям, первыми, кто попытался сделать это, были Пифагор и его ученики. Ими было установлено, что одинаково натянутые струны, сделанные из одного материала, издают согласное музыкальное звучание, если их длины относятся, как небольшие целые числа. Например, если взять две струны, одна из которых вдвое короче другой, то извлекаемые из них звуки оказываются согласными. Музыканты в таком случае говорят, что звуки отличаются на октаву, и обозначают их одной нотой: например, «до» первой октавы, «до» второй октавы и т. п.

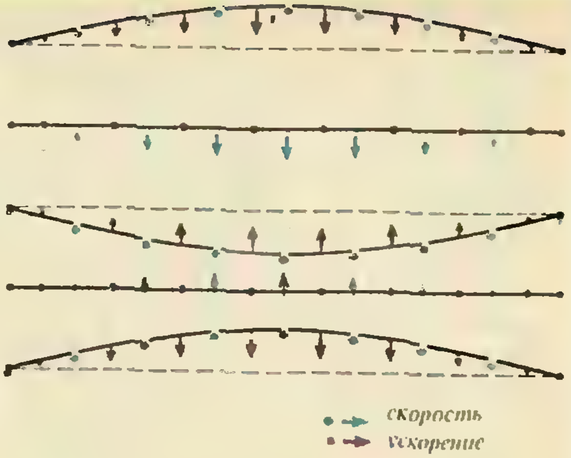


Рис. 1. Колебания струны, закрепленной с двух сторон и оттянутой посередине. Каждая следующая картинка отличается по времени от предыдущей на четверть периода колебаний.

Посмотрим, с физической точки зрения, как происходят колебания струны с закрепленными концами (рис. 1). Если струну оттянуть посередине и отпустить, она будет совершать колебания, при которых скорости и ускорения всех точек направлены одинаково.*) Такие колебания определяют основной тон звучания струны. Оказывается, частота ν основного тона струн, сделанных из одного и того же материала и натянутых с одинаковой силой, зависит только от их длины l, причем зависит обратно пропорционально: $\nu \sim 1/l$. Возможны также и другие колебания струны — с частотой вдвое, втрое и т. д. большей, чем частота основного тона. Их называют обертонами.

Но вернемся к музыкальным звукам. Теперь мы можем сказать, что частоты, соответствующие одной и той же ноте в первой, второй и т. д. октавах, относятся, как 1:2:4:8 ... А как следует выбирать музыкальные тоны

---

*) О том, как возникают такие колебания, можно прочитать, например, в заметке И. К. Белкина «О музыкальных звуках и их источниках» («Квант», 1985, № 9, с. 26). (*Примеч. ред.*)

внутри одной октавы, чтобы они тоже звучали согласно? Ответ на этот вопрос дали пифагорейцы, построив музыкальную гамму — согласную последовательность тонов внутри октавы, т. е. указав закон, по которому следует выбирать длины струн для извлечения этих тонов (рис. 2).

Попробуем воспроизвести рассуждения пифагорейцев. Возьмем струну длиной l с частотой основного тона ν_1. Соответствующий этой ноте тон в следующей октаве имеет частоту $2\nu_1$ — его можно извлечь из вдвое более короткой струны. Частотный интервал от ν_1 до $2\nu_1$, соответствующий одной октаве, мы и будем делить. Как уже упоминалось, весьма согласно звучат струны, длины которых кратны. Поэтому можно ожидать, что звук с частотой $^3/_2\nu_1$, извлекаемый из струны длиной $^2/_3 l_1$, также окажется согласным основному тону ν_1. Так в пифагоровой гамме появляется звук, называемый квинтой, частота которого в 1,5 раза больше частоты основного тона.

Затем естественно попробовать звучание струны, которая в 1,5 раза длиннее основной. Частота соответствующего ей основного тона составляет $^2/_3\nu_1$ и выходит за пределы рассматриваемой октавы. Однако мы уже знаем, что удвоением, т. е. увеличением на октаву, этот звук можно перевести в рассматриваемый промежуток и получить частоту $^4/_3\nu_1$. Такой звук называют квартой. Между собой частоты квинты и кварты относятся как $\frac{^3/_2\nu_1}{^4/_3\nu_1}=9/8=1{,}125$. Это отношение и было выбрано пифагорейцами в качестве основного шага — ступени гаммы.

Теперь мы можем воспроизвести весь пифагоров строй (названия тонов в нем происходят от латинских числительных). Основной тон — прима — имеет частоту ν_1. Следующий — секунда — частоту $\nu_2 = 1{,}125\nu_1$. Еще на один шаг отличается терция: $\nu_3 = 1{,}125\nu_2 = (1{,}125)^2\,\nu_1 = 1{,}2656\nu_1$. Если бы мы повторили эту процедуру еще раз, то получили бы звук, плохо сочетающийся с основным, и при этом пропустили бы уже известную нам кварту, частота которой $\nu_4 = {}^4/_3\nu_1 = 1{,}3333\nu_1$ $(\nu_4 < (1{,}125)^3\,\nu_1 = 1{,}424\nu_1)$. Поэтому в качестве четвертой ступени звукоряда берется кварта, а пятой — также уже известная нам квинта: $\nu_5 = 1{,}125\,\nu_4 = 1{,}50\,\nu_1$. Частоты двух последующих ступеней находятся по обычному правилу: $\nu_6 = 1{,}125\,\nu_5 = 1{,}6875\,\nu_1$ — секста, $\nu_7 = 1{,}125\,\nu_6 = 1{,}8984\nu_1$ — септима, и последней оказывается октава $\nu_8 = 2\nu_1$ — верхняя граница выбранного нами диапазона частот.

Как нетрудно видеть, из-за начального выбора квинты и кварты в пифагоровом строе возникло два различ-

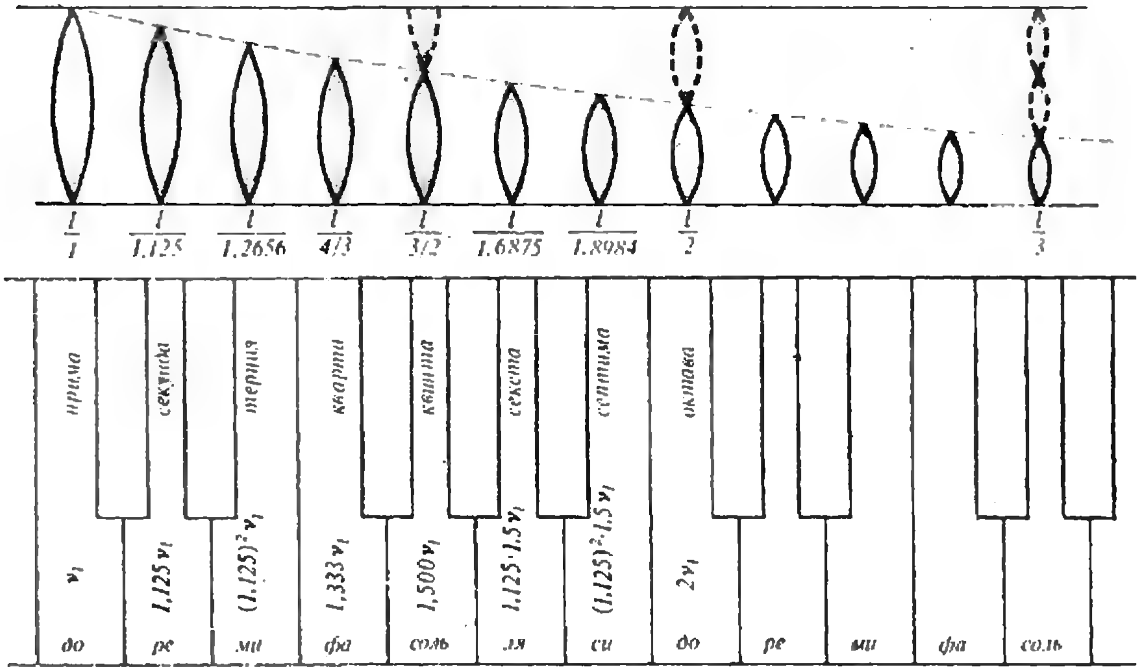


Рис. 2. Пифагорова гамма.

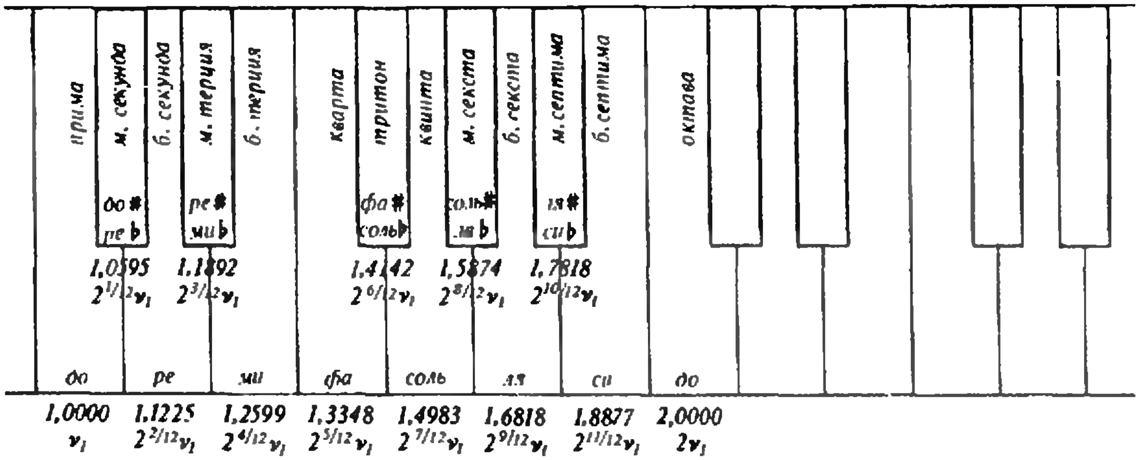

прима
м. секунда
б. секунда
м. терция
б. терция
кварта
тритон
квинта
м. секста
б. секста
м. септима
б. септима
октава
до# ре♭
ре# ми♭
фа# соль♭
соль# ля♭
ля# си♭
1,0595 $2^{1/12}\nu_1$
1,1892 $2^{3/12}\nu_1$
1,4142 $2^{6/12}\nu_1$
1,5874 $2^{8/12}\nu_1$
1,7818 $2^{10/12}\nu_1$
до
ре
ми
фа
соль
ля
си
до
1,0000 ν_1
1,1225 $2^{2/12}\nu_1$
1,2599 $2^{4/12}\nu_1$
1,3348 $2^{5/12}\nu_1$
1,4983 $2^{7/12}\nu_1$
1,6818 $2^{9/12}\nu_1$
1,8877 $2^{11/12}\nu_1$
2,0000 $2\nu_1$

Рис. 3. Хроматическая гамма.

ных интервала: основной интервал, или большая секунда,— $1{,}125 = \nu_2/\nu_1 = \nu_3/\nu_2 = \nu_5/\nu_4 = \nu_6/\nu_5 = \nu_7/\nu_6$ и малый интервал, или малая секунда,— $1{,}0535 = \nu_4/\nu_3 = \nu_8/\nu_7$. Пифагоровы тоны соответствуют белым клавишам клавиатуры, а черные клавиши размещены как раз между теми белыми, где оказывается большой интервал.

К сожалению, оказывается, что ширина двух малых интервалов — $1{,}0535 \times 1{,}0535 = 1{,}110$ (поскольку интервалы есть отношения частот, то для вычисления большего интервала входящие в него малые надо перемножать, а не складывать) заметно для слуха отличается от большого — 1,125. Поэтому звуки пифагоровой гаммы неравноправны — гамму не удается начать с любой из нот. Чтобы изменить тональность, музыкальный инструмент нужно настроить заново. Для струнных инструментов это сделать нетрудно, но орган, например, который состоит из множества труб — каждая для своего звука, настраивают при его создании.

Несмотря на это неудобство, пифагорова гамма (наряду с другими типами музыкальных рядов) прослужила музыкантам более двух тысяч лет — до XVI века. Затем получила распространение так называемая диатоническая гамма, которая была построена на частотах, составленных из отношений чисел 2, 3 и 5. Но и она страдала аналогичным недостатком.

Толчком к дальнейшему усовершенствованию музыкального строя, возможно, опять стали физические исследования. Француз М. Мерсенн (1588—1648) установил, как зависит частота колебаний струны не только от ее длины, но и от силы натяжения, сечения струны и плотности материала, из которого она сделана. Вскоре после этого было изобретено фортепиано — инструмент, в котором струны настроены на последовательные музыкальные тоны с частотами от 27,5 до 3520 Гц, охватывающие 7 октав.

Примерно в то же время был создан так называемый хорошо темперированный строй, то есть хроматическая гамма, в которой все последовательные интервалы выбраны равными между собой (рис. 3). Ключом к ее созданию стало математическое совпадение. Оказалось, что степени числа $\sqrt[12]{2}$ с хорошей точностью совпадают с пифагоровыми отношениями (сравните их сами) — хроматическая квинта, например, отличается от пифагоровой всего на 0,11 % — такая погрешность неразличима на слух. Поэтому на современных музыкальных инструментах можно играть в любой из 24 тональностей (12 мажорных и 12 минорных). То, что при этом можно добиться согласного звучания независимо от тональности, доказывал Бах, когда писал свой «Хорошо темперированный клавир» — 24 прелюдии и фуги во всех тональностях. Существуют ли физические причины различия между мажором и минором, увы, нам неизвестно до сих пор.

А. В. Бялко

Мечта становится реальностью

(Открытие высокотемпературной сверхпроводимости)

«Если нельзя, но очень хочется, то можно.» Этими словами можно охарактеризовать открытие, которое буквально сегодня произошло в физике твердого тела и о котором пойдет речь в данной заметке.

Впервые о сверхпроводимости, одном из самых ярких и необычных явлений физики, стало известно 28 апреля 1911 года. Нидерландский физик Г. Камерлинг-Оннес на заседании Королевской академии наук в Амстердаме сообщил об обнаруженном им эффекте — полном исчезновении электрического сопротивления ртути, охлажденной жидким гелием до температуры $T = 4{,}15$ К. Вскоре сверхпроводимость при низких температурах была обнаружена и в ряде других металлов и сплавов.

Практические перспективы открытого явления казались безграничными: линии передач электроэнергии без потерь, сверхмощные магниты, электромоторы и трансформаторы нового типа, аккумуляторы с неограниченной ёмкостью и т. п. Однако два непреодолимых в то время препятствия стали на пути реализации этих планов. Первое — это чрезвычайно низкие температуры, при которых сверхпроводимость проявлялась во всех известных материалах. Для охлаждения до таких температур приходится пользоваться остродефицитным и дорогим жидким гелием, что делает многие заманчивые проекты использования сверхпроводимости попросту нерентабельными. Второе препятствие — его вскоре с разочарованием обнаружил сам Камерлинг-Оннес — связано с тем, что сверхпроводимость оказалась весьма «капризной» по отношению к магнитному полю: в сильных полях она исчезает (в ртути, например, это происходит при индукции магнитного поля выше 0,04 Тл).

На протяжении длительного времени природа сверхпроводимости оставалась необъясненной, лишь в 1957 году это явление нашло последовательное теоретическое объяснение. Как оказалось, сверхпроводимость связана с возникновением в некоторых металлах при низких температурах специфического притяжения между электронами, обусловленного их взаимодействием посредством окружающей кристаллической решетки.

Создание теории сверхпроводимости дало мощный импульс дальнейшим ее исследованиям. Наряду с обнаружением принципиально новых, квантовых, эффектов, свойственных сверхпроводникам, значительный прогресс был достигнут и в получении новых сверхпроводящих материалов. Так, к середине 80-х годов были созданы сверхпроводники, способные выдерживать огромные магнитные поля (вплоть до 60 Тл) и пропускать соответственно большие токи. Однако в области повышения так называемой критической температуры — максимальной температуры, при которой в образце еще возможно протекание сверхпроводящего тока, за последние 15 лет, несмотря на колоссальные усилия ученых всего мира, не удалось сдвинуться с рекордного значения 23 К (для сплава Nb_3Ge) ни на один градус.

Но, может быть, явление сверхпроводимости принципиально невозможно при достаточно высоких температурах? Именно к такому выводу относительно обычной сверхпроводимости (обусловленной взаимодействием электронов посредством решетки) и склонялись ученые. Самые оптимистические прогнозы предсказывали предельно возможные значения критических температур порядка 30—40 К.

И вот в конце 1986 года научный мир был взбудоражен сенсационным сообщением об обнаружении нового ряда сверхпроводящих веществ с критическими температурами именно 30—40 К и даже выше. Этими долгожданными веществами оказались весьма сложные металлооксиды типа La—Sr—Cu—O, La—Pb—Cu—O, La—Ba—Cu—O. Впервые они были синтезированы швейцарскими учеными, но уже буквально через несколько месяцев их стали «печь» во многих лабораториях мира.

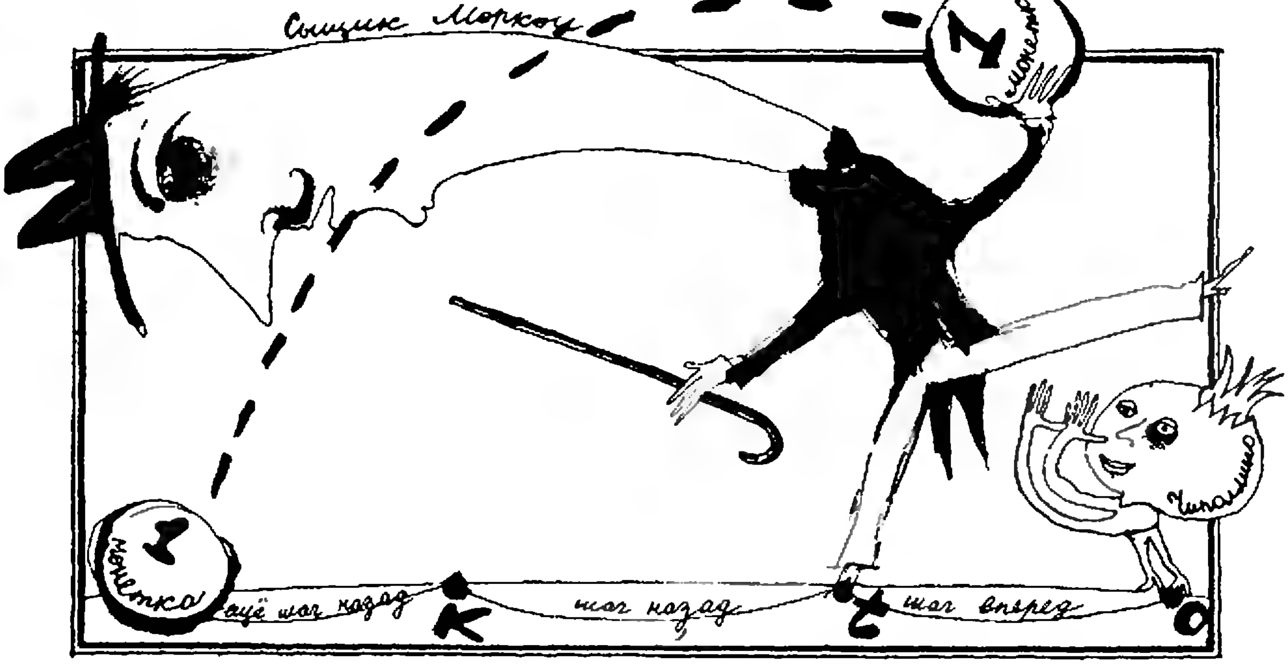
Подобно «золотой лихорадке» времен Клондайка, лихорадка поисков соединений с высокими критическими параметрами охватила ученых. Сведения о новых сверхпроводниках, с еще более высокой критической температурой, посыпались как из рога изобилия. Журнальные публикации не успевают за синтезом все новых и новых веществ с удивительными свойствами, известия о них немедленно передаются из лаборатории в лабораторию по телефону или, как во времена Гюйгенса и Ньютона, в письмах.

Уже поступили достоверные сообщения о достижении рекордной критической температуры в 120 К в соединениях типа Y—Ba—Cu—O. Успешные исследования в данном направлении ведутся и в нашей стране.

Вещества обнаруженного ряда представляют собой так называемую металлооксидную керамику. И проводимость в нормальном состоянии весьма невысока — по своим электрическим свойствам они являются плохими металлами, да и концентрация электронов проводимости в них невелика. Природа новой, высокотемпературной, сверхпроводимости пока остается неясной. Связана ли она с традиционным взаимодействием электронов друг с другом посредством решетки или обусловлена каким-то новым, неизвестным нам механизмом, еще неясно.

Объяснение обнаруженного феномена — дело будущего, однако практическую важность сделанного открытия переоценить трудно. Ведь теперь для охлаждения сверхпроводящих устройств можно будет перейти на использование дешевого и доступного жидкого азота (с температурой кипения 77 К). В результате можно ожидать настоящую революцию в целом ряде областей физики и техники, последствия которой до конца сегодня представить трудно.

Б. В.



Математический кружок

О случайных блужданиях

Кандидат физико-математических наук
С. И. СОБОЛЕВ

В радиопередаче по сказке Джанни Родари «Чиполлино и его друзья» сыщик мистер Моркоу ведет розыск спрятавшегося Чиполлино по принципу:

«Шаг назад, шаг вперед,
От нас разбойник не уйдет».

Этот принцип поиска можно было бы считать шуткой автора, если бы его эффективность не вытекала из одной теоремы теории вероятностей. Наша заметка посвящена этой теореме и примыкающим к ней задачам.

Случайные блуждания по прямой

Отметим целочисленные точки на прямой, возьмем монету и фишку. Представим себе, что в момент времени 0 в точке $a \in \mathbf{Z}$ стоит фишка. Бросим монету. Если она выпадет гербом, передвинем фишку на 1 вправо, если решкой, то на 1 влево. А дальше снова бросаем монету и поступаем по этому правилу и т. д. Если монета не имеет дефектов, то фишка, в момент времени t ($t = 0, 1, 2, \ldots$) стоящая в точке $k \in \mathbf{Z}$, в следующий момент времени $t + 1$ с вероятностью 1/2 окажется в точке $k + 1$ или с той же вероятностью окажется в точке $(k - 1)$*).

Описанный процесс называется *симметричным случайным блужданием* по множеству $\mathbf{Z}$ целых точек прямой, начинающимся в точке a. Такое блуждание называется симметричным потому, что у монетки герб и решка равноправны.

Немного уточняя ситуацию из сказки Джанни Родари, будем считать, что сыщик Моркоу в розысках Чиполлино совершает симметричное случайное блуждание по множеству $\mathbf{Z}$ (с помощью монетки).

---

*) *Вероятность* $p(x)$ события x — это некоторая численная характеристика возможности наступления этого события. Вероятность невозможного события принимается равной 0, достоверного события — равной 1, а вообще $0 \leqslant p(x) \leqslant 1$. В сложных ситуациях вероятность определяется аксиоматически, однако в этой заметке аксиоматическую теорию нам заменит небольшая доза здравого смысла. В частности, если несколько событий равновозможны, то их вероятности одинаковы; например, вероятность выпадения двойки (или пятерки) на нежульнической игральной кости равна, конечно же, 1/6, вероятность выпадения орла на негнутой монете — 1/2.

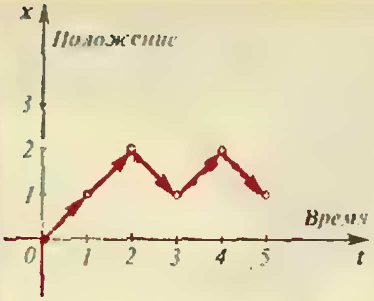


Рис. 1.

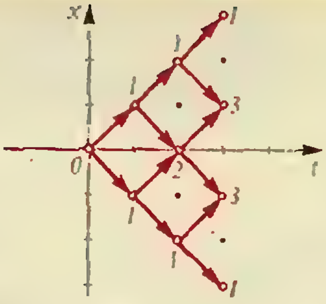


Рис. 2.

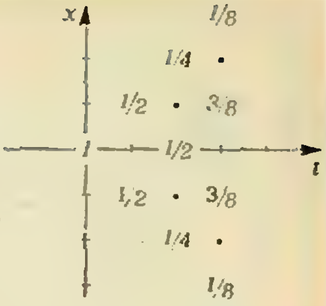


Рис. 3.

Задание 1. *Возьмите монету и фишку, фишку поставьте в точку* 0. *Бросьте монету, передвиньте фишку и запишите ее положение. Повторите до 10 раз. В результате вы должны получить строчку из последовательных положений фишки.*

Конкретное блуждание можно наглядно изобразить, нарисовав его траекторию. Положение фишки в момент времени t в точке k отметим точкой M_t с координатами $(t;\ k)$ на плоскости с прямоугольной декартовой системой координат. Соединив стрелкой точку M_t с точкой M_{t+1} $(t = 0, 1, 2, \ldots)$, мы и получим наглядное изображение траектории фишки.

Например, если при бросании монеты выпали последовательно Г, Г, Р, Г, Р, а начальное положение фишки было в точке 0, то последовательные положения такие:

время	0	1	2	3	4	5
положение фишки	0	1	2	1	2	1

и траектория выглядит так, как показано на рисунке 1.

Задание 2. *Нарисуйте траекторию, изображающую блуждание фишки из задания* 1.

Вероятность попадания в данную точку

Пусть блуждание фишки по прямой начинается в точке 0. Интересным является вопрос, с какой вероятностью в момент времени t фишка окажется в положении k. Иначе говоря, с какой вероятностью t-звенная траектория приходит в точку $(t;\ k)$? Обозначим эту вероятность $P_t(k)$. Ответ на поставленный вопрос зависит от числа $S_t(k)$ траекторий, ведущих из точки (0; 0) в точку $(t;\ k)$.

Напишем около каждой точки $(t;\ k)$, в которую приходит хотя бы одна траектория, число $S_t(k)$, показывающее сколько траекторий ведет в эту точку для $t = 0, 1, 2, 3$ (рис. 2).

Задание 3. *Продолжите рисунок 2 для* $t = 4, 5, 6$.

Можно подметить следующее. В точку $(t;\ k)$ могут идти стрелки только из точек $(t-1;\ k-1)$ и $(t-1;\ k+1)$, и больше ниоткуда. Поэтому

$$S_t(k) = S_{t-1}(k-1) + S_{t-1}(k+1). \tag{1}$$

Таблица, состоящая из чисел $S_t(k)$, начало которой мы нарисовали, оказывается так называемым *треугольником Паскаля*. Она вся, столбик за столбиком, порождается условием $S_0(0) > 1$ и соотношением (1). Например:

$$S_1(-1) = S_0(-2) + S_0(0) = 0 + 1 = 1,$$
$$S_1(1) = S_0(0) + S_0(2) = 1 + 0 = 1,$$
$$S_2(-2) = S_1(-3) + S_1(-1) = 0 + 1 = 1,$$
$$S_2(0) = S_1(-1) + S_1(1) = 1 + 1 = 2,$$
$$S_2(2) = S_1(1) + S_1(3) = 1 + 0 = 1,$$

и так далее.

Конечно, t-звенных траекторий в два раза больше, чем $(t-1)$-звенных — ведь каждая $(t-1)$-звенная траектория порождает две t-звенных. Поэтому однозвенных траекторий 2, двузвенных — 4 и так далее, t-звенных траекторий — 2^t. Все 2^t t-звенных траекторий — равновозможные траектории движения фишки (поскольку герб *Г* и решка *Р* — равновозможные исходы бросания монеты), из них $S_t(k)$ траекторий приходит в точку $(t;\ k)$. Поэтому вероятность $P_t(k)$, с которой t-звенная траектория приходит в точку $(t;\ k)$, равна $S_t(k)/2^t$. Около точки $(t;\ k)$, в которую приходит хотя бы одна траектория, выпишем вероятность $P_t(k)$. Полученную таблицу назовем *треугольником вероятностей*. Поделив равенство (1) на 2^t, получим *закон* *полусуммы*

$$P_t(k)=\frac{1}{2}P_{t-1}(k-1)+\frac{1}{2}P_{t-1}(k+1), \qquad (2)$$

порождающий (с использованием условия $P_0(0)\geqslant 1$) весь треугольник вероятностей (рис. 3).

Задание 4. *Продолжите треугольник вероятностей $P_t(k)$ вправо, выписав его для $t=4, 5, 6$.*

Формула (2) учитывает, что:

1) фишка может быть в момент времени t в положении k только если она была в момент времени $t-1$ в одном из соседних положений $k-1$ *или* $k+1$;

2) переходы из положения $k-1$ в положение $k+1$ или из положения $k+1$ в положение k происходят с вероятностями 1/2 (поэтому перед $P_{t-1}(k-1)$ и $P_{t-1}(k+1)$ и стоят коэффициенты 1/2).

Следующие два задания предназначены для тех, кто знаком с определением числа сочетаний и знает формулу бинома.

Задание 5. *Докажите, что*

$$P_n(k)=C_n^{\frac{n+k}{2}}/2^n,$$

где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m.

Задание 6. а) *Проверьте для $t=1, 2, 3, 4$, что коэффициент при x^k в разложении многочлена*

$$\frac{1}{2^n}\left(x+\frac{1}{x}\right)^t$$

по степеням x равен $P_t(k)$. б) *Докажите утверждение пункта а) для любого натурального t.*

Попадется ли Чиполлино?

Пусть в точке 0 на прямой спрятался Чиполлино, а в точке k находится мистер Моркоу. Мы предположили, что сыщик, разыскивая Чиполлино, совершает симметричное случайное блуждание, начинающееся в момент времени 0 в точке k на прямой. С какой вероятностью мистер Моркоу когда-нибудь найдет Чиполлино, т. е. окажется в точке 0?

Обозначим эту вероятность $P(k)$. Как и всякая вероятность, $P(k)$ — какая-то часть единицы:

$$0\leqslant P(k)\leqslant 1.$$

Заметим, что $P(0)>1$ (если $k=0$, то уже в момент времени 0 сыщик и Чиполлино находятся в одной точке,

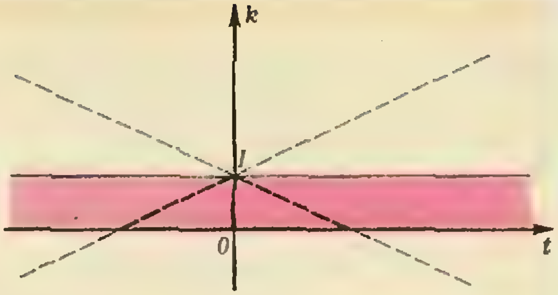


Рис. 4.

поимка — достоверное событие, а его вероятность равна 1). Если $k\neq 1$, то поскольку из точки k сыщик может попасть когда-нибудь в точку 0 только, пройдя в следующий момент времени после выхода из точки k через соседние точки $k-1$ и $k+1$, оказывается справедливым тот же самый закон полусуммы:

$$P(k)=\frac{1}{2}P(k-1)+\frac{1}{2}P(k+1).$$

Здесь учтено, что переход за единицу времени из точки k в точку $k-1$ происходит с вероятностью 1/2; то же верно для перехода из точки k в точку $k+1$.

Рассмотрим точки $M_k(k;\ p(k))$ на плоскости с прямоугольной декартовой системой координат xOy. Поскольку середина отрезка, соединяющего точки $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$, есть точка

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

ясно, что точка M_k (где $k\neq 0$) является серединой отрезка $M_{k-1}M_{k+1}$. Следовательно, точки M_k, где $k\geqslant 0$, лежат на одном луче, и точки M_k, где $k\leqslant 0$, тоже лежат на одном луче. Оба этих луча выходят из точки $M_0(0;\ 1)$ (так как $P(0)>1$) и лежат в полосе $0\leqslant y\leqslant 1$ (так как $0\leqslant P(k)\leqslant 1$ для любого k), закрашенной на рисунке 4. Следовательно, они составляют прямую $y=1$. Все точки $M_k(k;\ P(k))$ лежат на этой прямой, поэтому $P(k)\geqslant 1$ для любого k.

Итак, мы доказали, что сыщик с вероятностью 1 рано или поздно найдет Чиполлино, из какой бы точки k он ни начинал блуждание!

Читатель может спросить — а что если при бросании монеты все время будет выпадать единица, ведь тогда сыщик уйдет вправо по *прямой* и никогда не найдет Чиполлино? Конечно, такое блуждание логически возможно, но вероятность, что произойдет блуждание, не приводящее в точку 0, равна 0. Это — доказанная нами теорема. Вопрос о ее приложи-

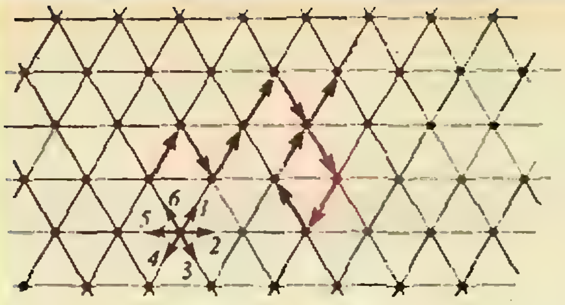


Рис. 5.

мости к «реальной действительности» — тонкий вопрос, мы его здесь обсуждать не будем.

Случайные блуждания на плоскости и в пространстве

Рассмотрим на плоскости треугольную сетку; возьмем фишку и (недеформированную) игральную кость. Шесть направлений движений по сетке обозначим цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, как показано на рисунке 5. Поставим фишку в один из узлов сетки и бросим кость. Передвинем фишку в соседний узел по направлению, отвечающему показанию кости. А дальше снова бросаем кость и поступаем по этому правилу и т. д. Этот процесс называется *симметричным случайным блужданием* по плоской треугольной сетке.

Предположим, что Чиполлино спрятался в одном из узлов сетки, а сыщик мистер Моркоу совершает случайные симметричные блуждания по сетке; найдет ли он Чиполлино? Оказывается, что и в этом случае *сыщик находит свою жертву с вероятностью единица*. Это тоже математическая теорема из теории вероятностей, известная под образным названием «все дороги ведут в Рим». Ее доказательство мы не приводим — оно несколько сложнее доказательства теоремы о случайном блуждании на прямой. Результат будет тем же для плоской квадратной сетки (вместо обычной игральной кости придется пользоваться «костью» в форме правильного тетраэдра).

Однако если перейти к кубической сетке в пространстве и аналогично определить на ней симметричное случайное блуждание (здесь снова подойдет обычная игральная кость — ведь из каждой вершины кубической сетки выходит шесть ребер), то результат оказывается совсем другим. Если Чиполлино спрячется далеко от сыщика, то вероятность поимки становится ничтожно малой. Это уже трудная теорема, об ее доказательстве мы говорить ничего не будем.

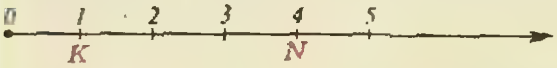


Рис. 6.

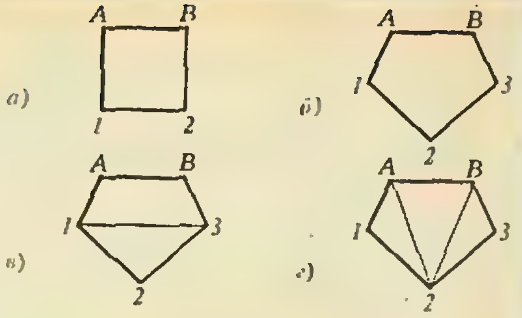


Рис. 7.

Два слова о приложениях

Игровой сюжет этой заметки не должен вводить читателя в заблуждение. Теория случайных блужданий — важный и очень полезный раздел теории вероятностей. Она с успехом применяется при изучении различных процессов развития (в физике, в химии и даже в экономике). Особенно в последние годы, когда случайные процессы легко моделируются на ЭВМ с помощью датчиков случайных чисел. Эффектные и неожиданные приложения она получает в практическом нахождении решений конкретных дифференциальных уравнений с помощью так называемого метода Монте Карло. Но это предмет для отдельного рассказа.

В заключение предлагаем два задания.

Задание 7. *Чиполлино спрятался в точке 0, в точке N находится пропасть, а сыщик Моркоу находится в точке k ($k \in \mathbb{Z}$, $0<k<N$). Сыщик ищет Чиполлино прежним образом. Если он попадет в точку 0, то найдет Чиполлино, а если попадет в точку N, то свалится в пропасть (рис. 6). С какой вероятностью сыщик найдет Чиполлино? С какой вероятностью сыщик свалится в пропасть?*

Указание: Докажите, что (в прежних обозначениях)

$$P(k)=\frac{1}{2}P(k-1)+\frac{1}{2}P(k+1),$$

где $k=1, 2, ..., N-1$; $P(0)=1$, $P(N)=0$. Как расположены точки $M_k(k; P(k))$, где $k=0,1, ..., N$? Ответ на первый вопрос: $P(k)>1-k/N$. Чтобы ответить на второй вопрос, можно поменять местами пропасть и Чиполлино. Покажите, что ответ дает число $P(N-k)-k/N$.

Задание 8. *Несколько прутиков связаны так, как показано на рисунках 7 а)—г). В точке 1 сидит гусеница. Точки A и B смазаны клеем. Гусеница движется по следующему закону. Если она попадет в точку A или в точку B, то в этой точке приклеивается. Если она находится в одной из точек (отличных от A и B), из которой выходит m прутиков, то она выбирает один из этих прутиков с вероятностью 1/m и ползет до его конца, а дальше снова действует, как описано. С какой вероятностью гусеница когда-нибудь приклеится в точке A? в точке B? где-нибудь?*

Указание. Пусть $P(k)$ — вероятность того, что гусеница, выходя из точки k, когда-нибудь приклеится в точке A. Исходя из закона движения, получаем систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$P(1)=\frac{1}{3}P(2)+\frac{1}{3}P(3)+\frac{1}{3}\cdot 1,$$
$$P(2)=\frac{1}{2}P(1)+\frac{1}{2}P(3),$$
$$P(3)=\frac{1}{3}P(1)+\frac{1}{3}P(3)+\frac{1}{3}\cdot 0,$$

откуда находим $P(1)$, $P(2)$ и $P(3)$.

Замечание. Задания 8 а) и 8 б) — это задание 7 в случаях $N=4$ и $N=5$ соответственно. Действительно, по прутику AB гусеница двигаться не может. Поэтому его можно убрать. Тогда, развернув прутики, конструкции на рисунках 7, а), б) можно превратить в ту конструкцию, которая показана на рисунке 6.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ x^2+xz+z^2=21, \\ y^2+yz+z^2=28. \end{cases}$$

2. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника, как на диаметрах, покрывают этот четырехугольник.

3. В арифметической прогрессии, составленной из натуральных чисел, есть член, оканчивающийся цифрой 3, но нет члена, оканчивающегося цифрой 5. Есть ли в ней член, оканчивающийся цифрой 7?

4. Из карьера нужно вывезти 870 т гранитных глыб. Докажите, что если каждая глыба весит не более 8 т, то для перевозки достаточно 17 платформ, грузоподъемностью 58 т каждая.

5. Докажите, что существует бесконечно много целых чисел, которые являются точными квадратами и остаются таковыми после приписывания к ним справа единицы (в десятичной записи).

Девятый класс

6. Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $x+y+z=a$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$. Докажите, что по крайней мере одно из чисел x, y, z равно a.

7. Разложите число 1987 в сумму натуральных чисел таким образом, чтобы произведение этих чисел было максимальным.

8. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 такие, что $BA_1:A_1C=CB_1:B_1A=AC_1:C_1B=1:2$. При пересечении отрезков AA_1, BB_1, CC_1 образуется треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади треугольника ABC.

9. На сторонах произвольного треугольника как на основаниях построены во внешнюю сторону равносторонние треугольники. Докажите, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника.

10. Многочлен
а) ax^2+bx+c,
б) ax^3+bx^2+cx+d
принимает при любом целом x целое значение. Какими могут быть его коэффициенты (например, обязательно ли они являются целыми)?

Десятый класс

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x=y^2+ay+b, \\ y=x^2+ax+b. \end{cases}$$

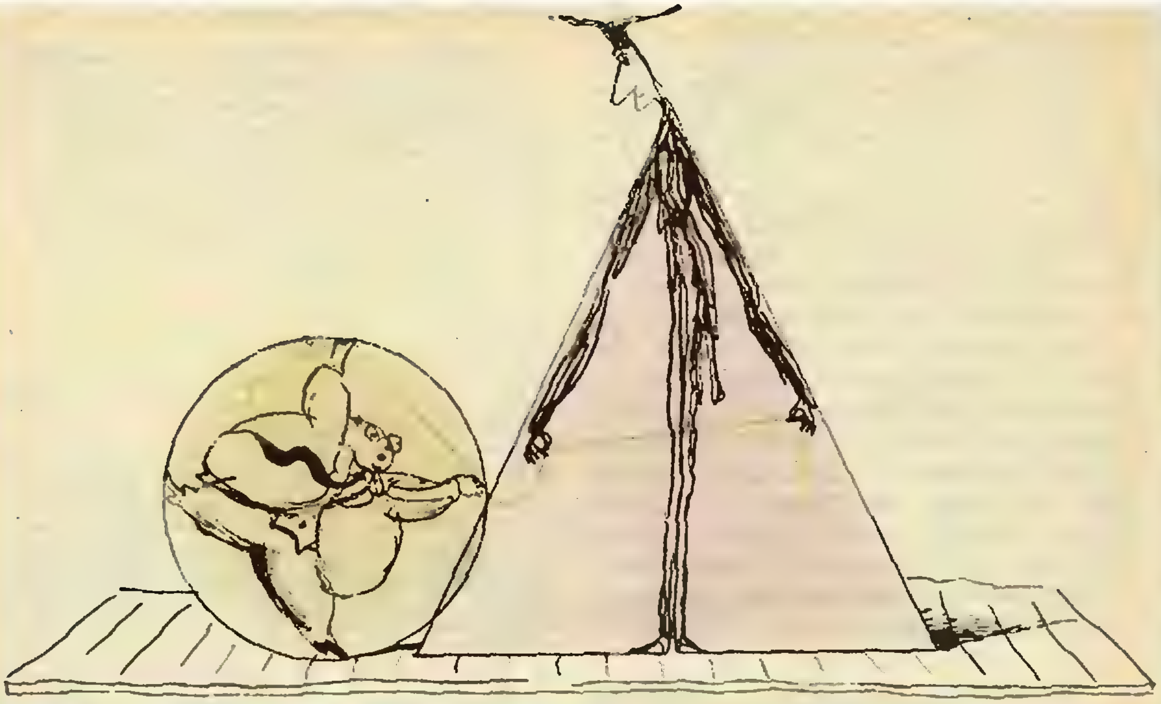
12. Докажите равенство $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

13. Какой из треугольников, вписанных в данную окружность, имеет наибольший периметр?

14. Даны несколько положительных чисел, сумма которых равна 3 и сумма квадратов которых равна 1. Докажите, что среди этих чисел найдутся три, сумма которых не меньше 1.

15. Докажите, что сумма углов пространственного неплоского четырехугольника меньше 360°.

Публикацию подготовили
Л. Д. Курляндчик и Д. Б. Фукс



Практикум абитуриента

Правильное решение геометрической задачи

Кандидат педагогических наук
Э. Г. ГОТМАН

Как известно, при решении геометрической задачи необходимо рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения элементов фигуры. Решение задачи, допускающей различные конфигурации, будет неполным и ошибочным, если ограничиться рассмотрением лишь одного из возможных случаев. Решая такие задачи, важно не ошибиться, приняв частное за общее.

С подобными ошибками сталкиваются учителя на уроках, члены жюри олимпиад. Задачи с неполными и неверными решениями встречаются и в литературе для учащихся.

Приведем несколько примеров, взятых нами из различных сборников олимпиадных задач.

Задача 1. *Впишите в данный треугольник ABC прямоугольник с наименьшей диагональю.*

Решение. Пусть в треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$ так, что его сторона KL лежит на прямой BC, а вершины M и N — на сторонах AC и AB (рис. 1,*а*). Пусть AD — высота треугольника ABC. Построим треугольник $A'B'C'$ с прямым углом C' так, чтобы стороны BC и $B'C'$ были равны и располагались на одной прямой, и чтобы прямые AA' и BC были параллельны (рис. 1,*б*). Тогда $A'C' = AD = h$.

Докажем, что если в треугольники ABC и $A'B'C'$ вписаны прямоугольники $KLMN$ и $K'L'M'N'$, имеющие равные высоты KN и $K'N'$, то эти прямоугольники равны.

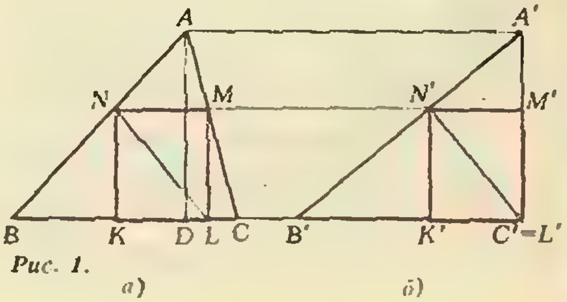


Рис. 1.

а) *б)*

Пусть $BC=a$. Из подобия треугольников ANM и ABC имеем

$$MN = \frac{a}{h}(h-x)\text{, где } x = KN.$$

Аналогично найдем, что

$$M'N' = \frac{a}{h}(h-x).$$

Значит, $MN = M'N'$, и задача сводится к более простой: *в прямоугольный треугольник $A'B'C'$ вписать прямоугольник с наименьшей диагональю.*

Ясно, что диагональ вписанного в прямоугольный треугольник $A'B'C'$ прямоугольника, угол которого совпадает с углом C', будет наименьшей, если она перпендикулярна гипотенузе $A'B'$. Любой другой прямоугольник будет иметь бóльшую диагональ, так как его диагональ, являясь наклонной к гипотенузе $A'B'$, больше перпендикуляра к $A'B'$.

Отсюда следует построение и в общем случае, поскольку $KN = K'N'$. При этом ясно, что длина наименьшей диагонали искомого прямоугольника (две вершины которого лежат на стороне BC) равна $\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$. Кроме того, поскольку диагональ $L'N'$ прямоугольника $K'N'M'L'$ перпендикулярна $A'B'$ (см. рис. 1, *б*), треугольники $K'N'L'$ и $A'B'C'$ подобны, так что $\frac{K'N'}{K'L'} = \frac{B'C'}{A'C'} = \frac{a}{h}$, т. е. у искомого прямоугольника $KLMN$ отношение сторон $\frac{KN}{KL} = \frac{a}{h}$.

Казалось бы, задача решена. Но это не так. Чтобы получить полное решение задачи, следует рассмотреть еще два случая: когда две вершины вписанного прямоугольника лежат на прямой AC и когда — на прямой AB, а затем сравнить результаты.

Пусть S — площадь треугольника ABC, a, b, c — длины его сторон, h_a, h_b, h_c — соответствующие им высоты.

Как мы уже доказали, наименьшее значение длины диагонали прямоугольника, вписанного в треугольник ABC так, что две его вершины лежат на прямой BC, равно

$$d_1 = \frac{ah_a}{\sqrt{a^2+h_a^2}} = \frac{2S}{\sqrt{a^2+h_a^2}}.$$

Следовательно, если две вершины прямоугольника лежат на прямой AC, то его диагональ имеет наименьшую длину, равную

$$d_2 = \frac{2S}{\sqrt{b^2+h_b^2}}.$$

Будем считать, что данный треугольник разносторонний, и $a>b>c$. Сравним выражения $a^2+h_a^2$ и $b^2+h_b^2$:

$$(a^2+h_a^2)-(b^2+h_b^2) = (a^2-b^2) + (h_a^2-h_b^2) = (a^2-b^2) + \left(\left(\frac{2S}{a}\right)^2 - \left(\frac{2S}{b}\right)^2\right) = a^2-b^2 + \left(\frac{4S^2}{a^2}-\frac{4S^2}{b^2}\right) = (a^2-b^2)\left(1-\frac{4S^2}{a^2b^2}\right) > 0,$$

поскольку $a>b$ и $2S<ab$.

Поскольку $a^2+h_a^2 > b^2+h_b^2$, и значит, если $a>b$, то $d_1<d_2$.

В результате проведенного исследования можно сделать следующий окончательный вывод: из всех прямоугольников $KLMN$ вписанных в данный треугольник ABC, наименьшую диагональ имеет прямоугольник, две вершины которого лежат на бóльшей стороне BC треугольника, и отношение сторон которого $\frac{KN}{KL} = \frac{a}{h}$.

Предлагаем читателям самостоятельно решить

Упражнение 1. Впишите в данный треугольник ABC прямоугольник, диагональ которого имеет данную длину d. Сколько решений может иметь задача?

Задача 2. *Через вершину A треугольника ABC проведите прямую так, чтобы сумма расстояний до этой прямой от вершин B и C треугольника была наибольшей.*

Решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABEC$ (рис. 2). Пусть l — прямая, проведенная через вершину A, l' — парал-

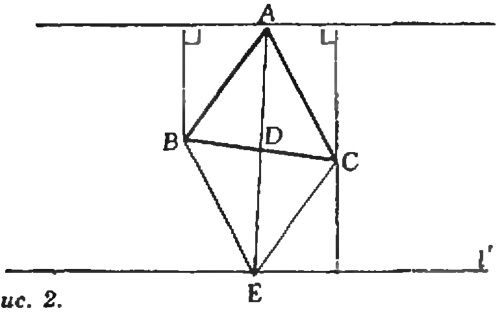


Рис. 2.

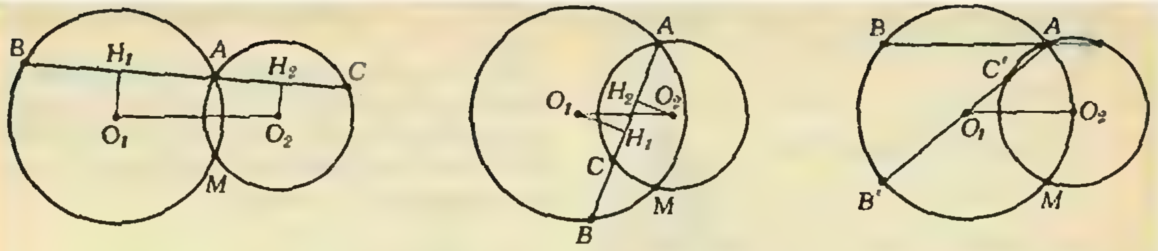


Рис. 3. а) б) в)

лельная ей прямая, проведенная через вершину E. Очевидно, расстояние от вершины B до прямой l равно расстоянию от вершины C до прямой l'. Значит, сумма интересующих нас расстояний равна расстоянию между прямыми l и l', т. е. расстоянию от точки E до прямой l. Это расстояние будет наибольшим, если прямая l перпендикулярна прямой AE, т. е. перпендикулярна медиане AD треугольника ABC, проведенной из вершины A. При этом интересующее нас наибольшее значение суммы расстояний равно $2AD$.

Рассуждение на первый взгляд не вызывает сомнений. Тем не менее в нем имеется ошибка. Для правильного решения задачи необходимо рассмотреть два возможных случая: 1) прямая l пересекает сторону BC треугольника; 2) прямая l сторону BC не пересекает. В первом случае рассуждение теряет силу (сделайте рисунок!). В этом случае сумма расстояний d_1 от вершин B и C до прямой l не больше BC и $d_1=BC$ тогда и только тогда, когда прямая l перпендикулярна стороне BC. Во втором же случае сумма расстояний d_2 не больше $AE=2AD$ и $d_2=2AD$ только тогда, когда прямая l перпендикулярна медиане AD. Остается сравнить d_1 и d_2. Получается следующий ответ:

если угол A больше 90°, то сумма расстояний от вершин B и C принимает наибольшее значение для прямой l, перпендикулярной стороне BC (и проходящей через вершину A);

если угол A меньше 90°, то наибольшее значение суммы расстояний от вершин B и C достигается для прямой l, перпендикулярной медиане AD (и проходящей через вершину A);

если угол A равен 90°, то наибольшее значение суммы расстояний от вершин B и C достигается для двух прямых l_1 и l_2, перпендикулярных соответственно прямым BC и AD (и проходящих через вершину A).

Отметим, что наше первоначальное рассуждение (приведшее к выводу «l перпендикулярна AD») неверно даже и для одного случая — когда прямая l лежит вне треугольника и не пересекает сторону BC. Действительно, угол BAD может быть тупым, и если через вершину A провести прямую l перпендикулярно AD, она пересечет сторону BC.

Упражнение 2. Через вершину A треугольника ABC проведите прямую так, чтобы сумма расстояний до этой прямой от вершин B и C треугольника была наименьшей.

Задача 3. *Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы ее часть, заключенная внутри кругов, была наибольшей.*

Решение. Пусть данные окружности пересекаются в точках A и M (рис. 3, *а*). Проведем через точку A произвольную прямую, пересекающую окружность с центром O_1 в точке B, а окружность с центром O_2 — в точке C. Проведем перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 к прямой BC. Легко видеть, что $BC=2H_1H_2$. Поскольку H_1H_2 — ортогональная проекция отрезка O_1O_2 на прямую BC, $H_1H_2=O_1O_2\cos\alpha$, где α — угол между секущей BC и линией центров O_1O_2, так что

$$BC=2O_1O_2\cdot\cos\alpha,$$

и отрезок BC имеет наибольшую длину, равную $2O_1O_2$, тогда и только тогда, когда $\alpha=0$, т. е. секущая BC параллельна прямой O_1O_2.

Приведенное рассуждение, однако, неверно. Дело в том, что в задаче говорится не об отрезке BC, а об отрезке секущей, заключенном внутри кругов. Возможны три случая расположения точек B и C: секущую можно провести так, что эти точки будут лежать

1) по разные стороны от точки A (рис. 3, *а*);

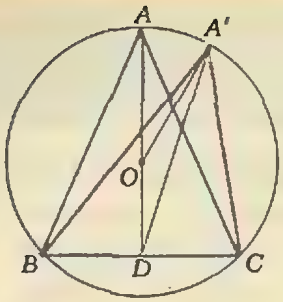


Рис. 4.

2) по одну сторону от точки A (рис. 3, *б*);

3) одна из них, например, точка C будет совпадать с точкой A *(сделайте рисунок)*.

В случае, если точка C лежит между точками A и B (рис. 3, *б*), отрезком секущей, заключенным внутри кругов, является не отрезок BC, а отрезок AB — хорда окружности! Хорда же имеет наибольшую длину, если она проходит через центр и является диаметром окружности. Таким образом, следует еще выяснить, какой из отрезков больше: отрезок, параллельный прямой O_1O_2, длина которого равна $2O_1O_2$ (убедитесь самостоятельно, что во всех перечисленных случаях $BC=2H_1H_2$), или же диаметр $2R$ бóльшей окружности (рис. 3, *в*). Окончательно получается *следующий* ответ:

если $O_1O_2>R$, то секущую следует провести параллельно линии центров O_1O_2;

если $O_1O_2<R$, то секущую следует провести через центр бóльшей окружности;

если $O_1O_2=R$, то условию задачи удовлетворяют две прямые, одна из которых параллельна O_1O_2, а другая *проходит* через центр бóльшей окружности (рис. 3, *в*).

Для окружностей одинакового радиуса получается аналогичный ответ, только в случаях $O_1O_2\leqslant R$ к указанным прямым добавляется еще прямая, проходящая через центр второй окружности.

Упражнение 3. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы ее часть, заключенная внутри кругов, была наименьшей.

В качестве упражнений приведем еще несколько задач с «решениями», в которых читателю предлагается самостоятельно найти ошибку.

Задача 4. *Из всех треугольников ABC с данным основанием BC и данным углом при вершине A найдите треугольник, имеющий наибольшую медиану, проведенную к основанию.*

«Решение». Пусть ABC — равнобедренный треугольник и $A'BC$ произвольный треугольник, имеющий с треугольником ABC общее основание BC и угол A', равный углу A (рис. 4). Тогда точка A' лежит на дуге BAC окружности, описанной *около* треугольника ABC. Обозначим центр этой окружности через O и середину стороны BC через D. Медиана AD равнобедренного треугольника ABC является его осью симметрии. Поэтому точка O лежит на AD и, следовательно, $AD=AO+OD$. Из треугольника $A'OD$ имеем $A'D<A'O+OD=AO+OD=AD$. Значит, из всех треугольников ABC с данным основанием BC и постоянным углом A при вершине наибольшую медиану имеет равнобедренный.

Задача 5. *Из всех треугольников ABC с данным основанием BC и постоянной высотой AH найдите треугольник, около которого можно описать окружность наименьшего радиуса.*

«Решение». Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием BC и постоянной высотой AH, и A_1BC — произвольный треугольник с такой же высотой, точки A и A_1 лежат на прямой l, параллельной прямой BC (рис. 5). Окружность, описанная около треугольника ABC, касается l в точ-

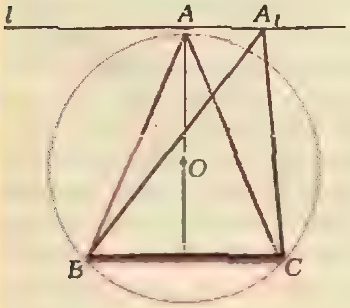


Рис. 5.

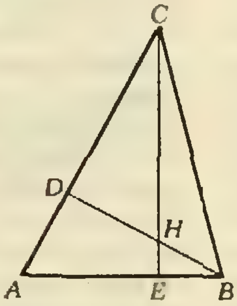


Рис. 6.

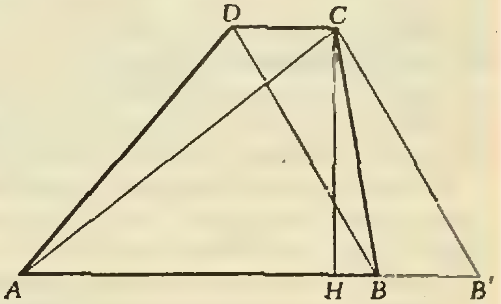


Рис. 7.

ке A, значит, точка A_1 лежит вне этой окружности. Поэтому угол A больше угла A_1.

Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, вычисляется по формуле $R=\frac{a}{2\sin\hat{A}}$ $(a=BC)$. А так как $\sin\hat{A}>\sin\hat{A}_1$, то наименьший радиус имеет окружность, описанная около равнобедренного треугольника.

Ответ: равнобедренный треугольник с основанием BC и данной высотой.

Задача 6. *Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что CH=AB. Найдите угол при вершине C.*

«Решение». Пусть BD и CE — высоты треугольника ABC (рис. 6). Поскольку треугольники ABD и CDH имеют равные гипотенузы $(AB=CH)$ и равные острые углы $(\angle ABD=90^\circ-\angle BAC=\angle ACE)$, они равны. Поэтому $BD=CD$. Значит, прямоугольный треугольник BCD — равнобедренный, следовательно, $\angle ACB=45^\circ$.

Задача 7. *Определите площадь трапеции по двум диагоналям 17 см и 113 см и высоте 15 см.*

«Решение». Пусть $ABCD$ — данная трапеция, CH — ее высота (рис. 7). Проведем $CB'\parallel BD$ до пересечения с AB в точке B'. Четырехугольник $BDCB'$ — параллелограмм, так что

$$AB'=AB+BB'=AB+CD,$$

и поэтому площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника $AB'C$.

Найдем AB'. Из прямоугольных треугольников ACH и $B'CH$ по теореме Пифагора находим $AH=\sqrt{113^2-15^2}=112$ (см), $B'H=\sqrt{17^2-15^2}=8$ (см), так что $AB'=AH+B'H=120$ (см), и искомая площадь трапеции равна 900 см^2.

В заключение мы можем дать такой общий совет: чтобы получить правильное решение геометрической задачи, решите ее для одного случая, а затем проверьте, годится ли найденное решение для всех других возможных случаев. Не забывайте, что треугольник может быть не только остроугольным, что центр описанной около треугольника окружности не всегда лежит внутри треугольника, что угол при большем основании трапеции может быть тупым и т. д. Иногда удается найти и такой подход к задаче, который, обладая общностью, позволяет получить решение, охватывающее все возможные случаи. Решение одной и той же задачи разными способами не только позволяет отыскивать наиболее простое и красивое решение задачи, но и служит эффективным средством контроля и проверки.

Из истории дробей

(Начало см. на с. 34)

числами. С дробями они предоставляли возиться купцам, ремесленникам, а также землемерам, астрономам и механикам. Но старая пословица говорит: «Гони природу в дверь, она влетит в окно». Поэтому и в строго научные сочинения греков дроби проникали, так сказать, «с заднего хода». Кроме арифметики и геометрии, в греческую математику входила ... музыка. Музыкой греки называли ту часть нашей арифметики, в которой говорится об отношениях и пропорциях.

Почему такое странное название? Дело в том, что греки создали и научную теорию музыки. Они знали: чем длиннее натянутая струна, тем ниже, «толще» получается звук, который она издает. Они знали, что короткая струна издает высокий звук. Но у всякого музыкального инструмента не одна, а несколько струн. Для того чтобы все струны при игре звучали «согласно», приятно для уха, длина звучащих частей их должна быть в определенном отношении. Например, чтобы высоты звуков, издаваемых двумя струнами, различались на *октаву*, нужно, чтобы их длины относились как 1:2. Подобным же образом *квинте* соответствует отношение 2:3, *кварте* — отношение 3:4 и т. д. Поэтому учение об отношениях, о дробях и связывалось у греков с музыкой.

Современную систему записи дробей с числителем и знаменателем создали в Индии. Только там писали знаменатель сверху, а числитель снизу и не писали дробной черты. А записывать дроби в точности, как сейчас, стали арабы.

Варианты вступительных экзаменов

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а ее боковое ребро наклонено к плоскости основания пирамиды под углом φ. Найдите объем пирамиды.

2. Решите неравенство

$$\log_3 x+1\geqslant 3\log_x 9.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1+\sin x}{6}}+\sin x=0.$$

4. Сторона ромба $ABCD$ равна a. Точки M и N являются соответственно серединами его сторон AB и CD, E — внутренняя точка стороны BC, а отрезки AE и MN пересекаются в точке O. Отношение площади четырехугольника $OECN$ к площади ромба $ABCD$ равно k и $\cos A=\frac{4k-1}{3}$. Найдите отрезок ED. При каких значениях k ромб, удовлетворяющий условиям задачи, существует?

5. Найдите сумму всех тех семизначных чисел, которые делятся на 15 и записываются лишь цифрами 0,1.

Вариант 2

(радиофизический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{25}(6-x)\log_x 5<1.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-x/2\right).$$

3. Два сосуда наполняются жидкостями, плотности которых равны d и D. При этом они весят соответственно q и Q кг включая и вес самих сосудов. Найдите отношение объемов сосудов, если вес каждого из них составляет одинаковую часть веса жидкости, в нем находящейся.

4. Шар радиусом 2 касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте и расположен на расстоянии $2\sqrt{3}$ от вершины. Докажите, что пирамида правильная. Найдите высоту пирамиды.

5. Материальная точка M_1 движется со скоростью 2 м/с вдоль оси Ox в отрицательном направлении, а материальная точка M_2 движется со скоростью 3 м/с вдоль прямой $y=\sqrt{3}x$ в направлении вектора $(1, \sqrt{3})$. В начальный момент времени точка M_1 имела координаты $(5; 0)$, а точка M_2 — координаты $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. В какой момент времени расстояние между точками будет минимальным?

Вариант 3

(химический факультет)

1. Из 40 т руды выплавляют 20 т металла, содержащего 6 % примесей. Какой процент примесей содержится в руде, если в шлаки, образующиеся при выплавке, металл не попадает?

2. Решите уравнение

$$\sin 2x-\cos 2x=1-2(\cos x-\sin x).$$

3. Решите неравенство

$$2\log_2^2|x-1|+\log^2\frac{(x-1)^2}{8}\leqslant 9.$$

4. Сумма одиннадцати начальных членов геометрической прогрессии составляет 20 % суммы ее последующих одиннадцати членов. Во сколько раз первый член прогрессии меньше ее одиннадцатого члена?

5. Даны две правильные пирамиды с равными основаниями. Угол наклона бокового ребра к плоскости основания в первой из них в два раза больше угла наклона бокового ребра к плоскости основания во второй, а объем первой пирамиды в 4 раза больше объема второй. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания в первой пирамиде.

Вариант 4

(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin\frac{x}{2}+\cos x=1.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{0,5}\frac{x-4}{2x+5}>1.$$

3. Основание треугольника равно a. Найдите длину отрезка, делящего площадь треугольника пополам и параллельного основанию.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(x+y)(x+y+z)=18,\\(y+z)(x+y+z)=30,\\(z+x)(x+y+z)=24.\end{cases}$$

5. Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен α, а объем пирамиды равен v. Найдите площадь боковой грани пирамиды.

Задачи устного экзамена

1. Найдите все целые решения системы неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{3}{x-2}\geqslant x,\\ \cos\pi x/2<0.\end{cases}$$

2. Если $|a|<1$, то $1+\frac{a}{2}$ является приближенным значением $\sqrt{1+a}$ с избытком, причем погрешность не превышает $\frac{a^2}{8}$. Докажите это.

3. Натуральные числа разбиты на группы следующим образом:

(1) (2,4) (3,5,7) (6,8,10,12) (9,11,13,15,17) ...

Сформулируйте правило построения групп. Найдите сумму всех чисел в n-й группе.

4. При каких значениях a, b функция

$$y=\frac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}$$

является постоянной?

5. При каких значениях n функция

$$y=\frac{\sin nx}{\sin x/n}$$

имеет период 4π?

6. Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt[4]{x+a}+\log_5(x-5a)=0$$

в зависимости от значений параметра a?

7. Шестизначное число начинается с цифры 1. Если эту цифру переставить в конец числа, то новое число будет в три раза больше первоначального. Найдите число.

8. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Проведите через них три параллельные прямые, которые ограничивали бы две полосы одинаковой ширины.

9. Даны три точки A, B, C. Постройте окружность наименьшего радиуса так, чтобы точки A, B, C лежали на ней или внутри круга, ею ограниченного.

10. Постройте равносторонний треугольник по двум точкам, одна из которых — его вершина, а другая — центр.

11. Постройте квадрат по серединам двух смежных сторон.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Небольшое тело скользит со скоростью $v=10$ м/с по горизонтальной поверхности, приближаясь к щели, образованной двумя отвесными вертикальными стенками, которые расположены на расстоянии $d=5$ см друг от друга. Скорость тела перпендикулярна стенкам, глубина щели $h=1$ м. Сколько раз упруго столкнется тело со стенками до момента падения на дно щели?

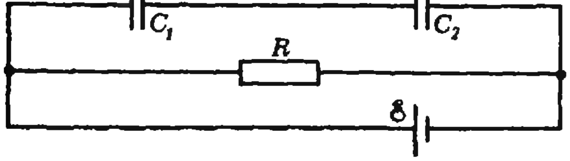
2. Цирковой гимнаст падает с высоты $H=1{,}5$ м на туго натянутую предохранительную сетку. Каков будет максимальный прогиб сетки, если покоящийся на ней гимнаст вдавливает ее на $h=0{,}1$ м?

3. Плотность нейтронной звезды $\rho=10^{17}$ кг/м^3. Вычислите минимальный период вращения ее спутника при его движении по окружности.

4. Посередине запаянной с двух концов трубки длиной $l=1$ м находится столбик ртути длиной $h=20$ см. При изменении положения трубки с горизонтального на вертикальное столбик смещается на $a=20$ см. До какого давления была откачана трубка? Плотность ртути $\rho=13600$ кг/м^3.

5. На электроплитке мощностью $N=1$ кВт кипит чайник с водой. Вычислите скорость истечения пара из его носика, если площадь сечения носика $S=1$ см^2, давление на выходе из носика равно нормальному атмосферному, все количество теплоты, выделяемое плиткой, передается воде без потерь, удельная теплота парообразования воды $r=2{,}26$ МДж/кг.

6. Сопротивление кольца из проволоки равно $R=160$ Ом. Концами двух проводников касаются кольца в двух точках A и B. Какую дугу отделяют эти точки, если общее сопротивление двух частей кольца оказалось равным $r=3$ Ом?



7. Найдите напряжения на конденсаторах емкостью C_1 и C_2 в приведенной на рисунке схеме, если известно, что при замыкании резистора сопротивлением R накоротко ток через батарею возрастает в $n=3$ раза. ЭДС батареи равна $\mathscr{E}$.

8. Изображение диапозитива на экране получают с помощью объектива с фокусным расстоянием $F=20$ см. Смещение диапозитива на $l=1/19$ см от его начального положения привело к потере четкости изображения, и для его восстановления пришлось на $L=20$ см увеличить расстояние от объектива до экрана. Вычислите начальное расстояние от объектива до экрана.

Радиофизический факультет

1. За какое время тело массой m соскользнет с наклонной плоскости высотой H и углом наклона α, если при угле наклона β тело соскальзывает равномерно?

2. Сила $F=20$ Н, действовавшая на покоящееся в начальный момент тело в течение $t=10^{-2}$ с, сообщила ему кинетическую энергию $E_1=3$ Дж. Какой окажется энергия тела по прошествии того же времени, если начальная скорость тела $v_0=10$ м/с, а сила действует в направлении этой скорости?

3. Куб с ребром $l=1$ м плавает в воде так, что его нижняя грань погружена на $H=25$ см. При нагружении его камнем с объемом $V=10$ дм^3 глубина погружения куба возросла на $h=2$ см. Вычислите плотности куба и камня.

4. Масса $m=0{,}716$ г органического соединения $(C_3H_6O)_n$ при давлении $p=10^5$ Па и температуре $t=200$ °C занимает в газообразном состоянии объем $V=243$ см^3. Вычислите значение n.

5. Два заряда $q_1=+1$ нКл и $q_2=-10$ нКл удалены на расстояние $l=55$ см. Вычислите напряженность электрического поля на линии, соединяющей заряды, в той точке, где потенциал поля равен нулю.

6. Какой ток пойдет по подводящим проводам при коротком замыкании, если на двух электроплитках с сопротивлениями $R_1=200$ Ом и $R_2=500$ Ом при их поочередном включении выделяется одинаковая мощность $N=200$ Вт?

7. Один и тот же предмет фотографируют с расстояний $d_1=90$ см и $d_2=165$ см. Высота изображений на снимках получилась равной $h_1=4$ см и $h_2=2$ см соответственно. Вычислите фокусное расстояние объектива фотоаппарата.

Публикацию подготовили *А. Ф. Гуменюк, К. В. Корсак, В. И. Сущанский*

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\left[\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{8}{x^2+2x}\right)\cdot\frac{x^2-2x}{4-x}+\frac{x+8}{x+2}\right]\cdot(x+2).$$

2. Решите графически систему неравенств

$$\begin{cases}x+y\leqslant 1,\\ y+x^2\geqslant 0,\\ x-x^2\geqslant 0.\end{cases}$$

3. Имеются два сплава золота и серебра. В первом сплаве количества этих металлов находится в отношении 3:2, в другом — в отношении 2:3. Сколько граммов нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 24 г нового сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 5:7?

4. Найдите все корни уравнения

$$\cos 2x-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0,$$

лежащие на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

5. В конус вписан шар. Найдите объем конуса, если радиус шара равен R, а угол между высотой и образующей конуса равен α.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{3}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{3}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{3}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{3}}+\frac{\sqrt[3]{9\sqrt{a}}-\sqrt[3]{a^2\sqrt{3}}}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}\right)^3\times$$

$$\times(0,1)^{3\lg 3}.$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{(x-1)(x+2)}{\lg 0,8}}.$$

3. В 12 часов из городов A и B выехали навстречу друг другу с постоянными скоростями, соответственно, легковая и грузовая машины. В пути от B до A грузовая машина остановилась более чем на час для нагрузки, после чего, продолжив движение с прежней скоростью, встретилась с легковой машиной в 14 ч 12 мин. Определите время прибытия грузовой машины в город A, если известно, что скорость грузовой машины меньше, чем скорость легковой машины, и что каждая машина на путь от A до B затрачивает целое число часов.

4. Найдите все корни уравнения

$$\left(\frac{\cos\frac{9\pi}{4}}{\cos x}\right)^{-2}-\cos(\pi-4x)=0,$$

лежащие на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{2\pi}{3}\right]$.

5. В прямоугольной трапеции длины оснований равны 5 см и 15 см, а острый угол равен α. Найдите площадь трапеции.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Напряженность поля точечного заряда. Однородное электрическое поле. Работа перемещения заряда в электрическом поле.

2. Почему при включении электронагревательного прибора величина тока в первый момент больше величины, которая установится спустя некоторое время?

3. На каком расстоянии от тонкой рассеивающей линзы надо поместить предмет, чтобы получить изображение, уменьшенное в $n=2$ раза? Фокусное расстояние линзы $F=40$ см.

4. С обрыва высотой $H=15$ м вертикально вниз бросают камень со скоростью $v_0=3$ м/с. Через какое время камень ударится о землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Виток проволоки площадью $S=0,4$ см^2 равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B=0,7$ Тл. Определите амплитудное значение ЭДС индукции, если частота вращения витка $n=100$ об/с. Ось вращения находится в плоскости витка и составляет угол $\alpha=45°$ с направлением вектора магнитной индукции.

Вариант 2

1. Взаимодействие тел. Второй закон Ньютона. Применение второго закона Ньютона к движению тела по наклонной плоскости при наличии трения.

2. Почему человека в лесу легче услышать, чем увидеть?

3. При температуре $t_1=27$ °С давление газа в замкнутом сосуде было равно $p_1=3\cdot10^5$ Па. Какой будет температура при давлении $p_2=2,5\cdot10^5$ Па?

4. Сила тока в первичной обмотке трансформатора $I_1=0,5$ А, напряжение на ее концах $U_1=220$ В. Напряжение на концах вторичной обмотки $U_2=40$ В. Определите коэффициент трансформации и ток во вторичной обмотке. Потерями в трансформаторе пренебречь.

5. В каком диапазоне длин волн может работать радиоприемник, если индуктивность катушки в его колебательном контуре плавно изменяется в пределах от $L_1=0,2\cdot10^{-5}$ Гн до $L_2=2\cdot10^{-5}$ Гн, а емкость конденсатора постоянна и равна $C=50$ пФ?

Публикацию подготовили
А. А. Болотов, Ф. Е. Пашуканис

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Бассейн, содержавший 30 м^3 воды, сначала был опорожнен, а затем снова заполнен до прежнего уровня. На все это потребовалось 8 часов. Сколько времени шло заполнение бассейна, если при заполнении насос перекачивает в час на 4 м^3 воды меньше, чем при опорожнении?

2. Решите уравнение

$$\sin 3x+\sin 2x+\sin x=0.$$

3. Решите уравнение

$$16^{\frac{1}{x}}-20\cdot2^{\frac{2-2x}{x}}+4=0.$$

4. Решите неравенство

$$x\log_2(x+2)>0.$$

5. Середина бокового ребра правильной треугольной пирамиды находится на расстоянии d от высоты основания, не пересекающей это боковое ребро. При какой длине стороны основания пирамиды она будет иметь наибольшую площадь боковой поверхности? Найдите это значение площади.

Вариант 2

1. Вычислите площадь треугольника, ограниченного касательными, проведенными к графику функции

$$y=5+2x-x^2$$

в точках с абсциссами $x_1=1$ и $x_2=3$, и прямой, соединяющей эти точки касания.

2. Решите уравнение

$$\sin^2 2x+\sin^2 x=1.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{3}{5^x-2}=5^{x-1}.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{1-\lg x}<\frac{2\lg x-5}{1+\lg x}.$$

5. Одно основание правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны h, принадлежит основанию правильной шестиугольной пирамиды, а вершины другого основания лежат на боковых ребрах пирамиды. При какой высоте пирамиды объем вписанного в нее шара будет наибольшим? Найдите это значение объема шара. Определите также отношение объемов пирамиды и шара.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Снаряд разрывается в верхней точке своей траектории на высоте $h=320$ м на две части, массы которых относятся, как 1:2. Через $\tau=4$ с после разрыва более тяжелая часть падает на землю под тем местом, где произошел взрыв. На каком расстоянии от места выстрела упадет более легкая часть снаряда, если тяжелая упала на расстоянии $s=1200$ м? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. В водоеме укреплена вертикальная труба с поршнем так, что нижний конец ее погружен в воду. Поршень, лежавший вначале на поверхности воды, медленно поднимают специальным устройством на высоту $H=15$ м. Какую работу при этом совершает устройство? Площадь поршня $S=10^{-2}$ см^2; атмосферное давление $p_0=10^5$ Па; плотность воды $\rho=10^3$ кг/м^3; массой поршня можно пренебречь.

3. Два одинаковых шарика связаны невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок, причем один из шариков погружен в сосуд с жидкостью. С какой установившейся скоростью будут двигаться шарики, если известно, что установившаяся скорость падения одиночного шарика в той же жидкости равна v_0? Считать, что сила сопротивления движению шарика в жидкости пропорциональна его скорости; плотность жидкости ρ_0; плотность материала шариков ρ; трение в блоке можно не учитывать.

4. Газ, занимающий при давлении $p=10^5$ Па объем $V=0{,}1$ м^3, изобарно расширяется. При этом его абсолютная температура увеличилась в 2 раза, а внутренняя энергия изменилась на $\Delta U=26$ кДж. Какую массу угля необходимо было сжечь для этого, если на нагревание газа было затрачено $\eta=20\,\%$ количества теплоты, выделившегося при сгорании? Удельная теплота сгорания угля $q=30$ МДж/кг.

5. Шарик массой $m=2$ г и зарядом $q=10^{-6}$ Кл, подвешенный на диэлектрической нити длиной $l=1$ м, совершает колебания в вертикальной плоскости. В плоскости колебаний создано однородное горизонтальное электростатическое поле. Угол, образуемый крайними положениями нити при колебаниях, составляет $2\alpha=90°$, а угол между вертикалью и нитью в момент прохождения шариком положения равновесия $\beta=15°$. Определите разность потенциалов между крайними точками траектории шарика.

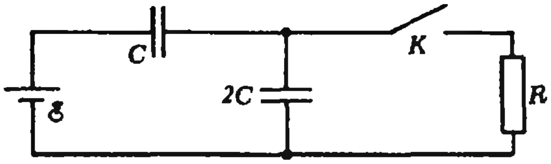


Рис. 1.

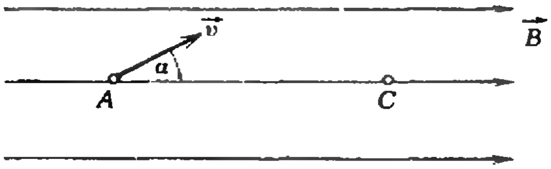


Рис. 2.

6. Какое количество теплоты выделится на резисторе после замыкания ключа (рис. 1)? Внутренним сопротивлением источника, сопротивлением проводов и потерями, связанными с электромагнитным излучением, пренебречь.

7. Электрон влетает в однородное магнитное поле (рис. 2). В точке A он имеет скорость $\vec{v}$, которая составляет с направлением поля угол α. При каком наименьшем значении индукции магнитного поля электрон сможет оказаться в точке C? Заряд электрона e, его масса m, расстояние $AC=L$, вектор $\vec{v}$ и отрезок AC лежат в плоскости, параллельной полю.

8. На плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом α падает параллельный пучок света шириной l, содержащий две спектральные компоненты с длинами волн λ_1 и λ_2. Показатели преломления стекла для этих длин волн различны и равны n_1 и n_2 соответственно. Определите минимальную толщину пластинки, при которой свет, пройдя пластинку, будет распространяться в виде двух отдельных пучков, каждый из которых содержит только одну спектральную компоненту.

9. На расстоянии $d=80$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см на ее главной оптической оси находится точечный источник света. Линзу передвинули в направлении, перпендикулярном оптической оси. Определите, куда и на сколько надо передвинуть источник, чтобы его изображение оказалось на прежнем месте.

10. В результате реакции слияния ядер дейтерия и трития образуется новое ядро и нейтрон. Пренебрегая различием масс покоя протона и нейтрона, определите, какую часть выделившейся при реакции энергии уносит нейтрон? Кинетическую энергию ядер дейтерия и трития до реакции не учитывать.

Публикацию подготовили *А. Г. Андреев,*
Л. П. Паршев

Московский институт электронной техники

Математика

Письменный экзамен

1. Вычислите

$$\frac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-2{,}5.$$

2. Упростите

$$(\sqrt[3]{a^2}+b\sqrt[3]{a}+b^2)\frac{\sqrt[3]{a^4}-b^3+b^2\sqrt[3]{a}-ab}{ab^{-1}+b-b^4a^{-1}-b^2}.$$

3. Найдите $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$.

4. Найдите сумму двадцати первых нечетных натуральных чисел.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}.$$

6. Решите уравнение

$$\sin(x+30^\circ)-\sin(x+210^\circ)=2\sin 495^\circ,$$

если $90^\circ<x<180^\circ$.

7. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}=-\log_x 5.$$

8. Третий член геометрической прогрессии равен 9/16, а второй больше пятого в 64 раза. Найдите ее знаменатель.

9. Решите неравенство

$$3^{2x-3}-9^{x-1}+27^{2x/3}<675.$$

10. На плоскости даны две окружности радиусов 12 см и 7 см с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по одну сторону от этой прямой. Известно, что $O_1O_2:M_1M_2=\sqrt{5}/2$. Найдите M_1M_2.

11. Решите неравенство

$$|x|>2\sqrt{x^2-2x+1}.$$

12. Найдите величину $A=\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{y_1y_2}$, где (x_k, y_k), $k=1, 2$ — решения системы

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{41}{20},\\ x+y=41.\end{cases}$$

13. Решите неравенство

$$\sqrt{\log^2_{1/2}x+4\log_2\sqrt{x}}<\sqrt{2}\,(4-\log_{16}x^4).$$

14. Объем конуса равен 7π. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в конус.

15. Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости.

16. Сформулируйте теорему Пифагора.

17. Выведите формулу синуса половинного аргумента.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В некоторой области пространства созданы однородные постоянные магнитное и электрическое поля ($B=0{,}3$ Тл, $E=300$ кВ/м). Перпендикулярно обоим полям движется протон, не отклоняясь от прямолинейной траектории. Найдите скорость его движения.

2. Дальнозоркий человек начинает резко различать очертания предметов с расстояния один метр. Какой оптической силы очки ему нужны?

3. На расстоянии l от края стола лежит брусок. Коэффициент трения между бруском и столом равен μ. На брусок со скоростью v налетает точно такой же второй брусок и толкает его к краю стола. На каком расстоянии от края стола брусок упадет на пол, если высота стола H? При какой минимальной скорости налетающего бруска он упадет со стола? Размерами бруска по сравнению с l пренебречь. Удар считать абсолютно упругим.

4. В цилиндрическом сосуде под очень легким поршнем находится $m=3$ кг воды при $t=20$ °C. При нагревании воде было сообщено количество теплоты $Q=1017$ кДж. На какую высоту поднимется поршень, если атмосферное давление $p=10^5$ Па, а площадь сечения сосуда $S=3$ дм^2? Удельная теплоемкость воды $c=4190$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $r=2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К). Изменением объема воды при испарении, а также ее тепловым расширением пренебречь.

5. Конденсатор емкостью C заряжен и отсоединен от батареи. К этому конденсатору подключают другой конденсатор емкостью C_1 ($C_1\neq C$), затем конденсаторы разъединяют. После этого исходный конденсатор (без его подзарядки) присоединяют к следующему незаряженному конденсатору емкостью C_1 и т. д. Сколько раз нужно повторить эту операцию, чтобы напряжение на исходном конденсаторе упало в два раза?

Вариант 2

1. Вычислите КПД энергетической установки атомного ледокола, если ее мощность $P=3{,}2\cdot10^4$ кВт, а атомный реактор расходует $m=200$ г топлива (U-235) в сутки. При делении одного ядра атома урана выделяется энергия $w=200$ Мэв. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, число Авогадро $N_A=6\times10^{23}$ моль$^{-1}$.

2. Три шарика соединены между собой одинаковыми нитями так, что образовался правильный треугольник. Система лежит на гладком горизонтальном столе. Какие одинаковые по величине и знаку заряды надо поместить на шарики, чтобы площадь треугольника увеличилась в два раза? Жесткость нитей k, начальная длина l.

3. Присоединение к амперметру некоторого шунтирующего сопротивления увеличивает пределы измерения тока в 3 раза. Другое шунтирующее сопротивление увеличивает пределы измерения в 7 раз. Во сколько раз увеличится предел амперметра, если в качестве шунта использовать оба эти сопротивления, предварительно соединенные между собой последовательно?

4. Источник света расположен на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=30$ см. Расстояние от источника до линзы $d=90$ см. За линзой перпендикулярно оптической оси помещено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы нужно его поместить для того, чтобы лучи, отраженные от зеркала, пройдя вторично через линзу, образовали параллельный пучок?

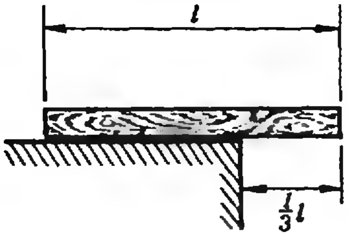


Рис. 1.

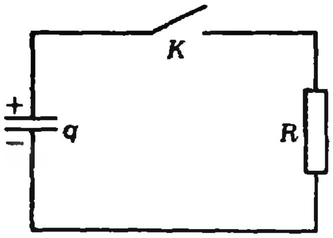


Рис. 2.

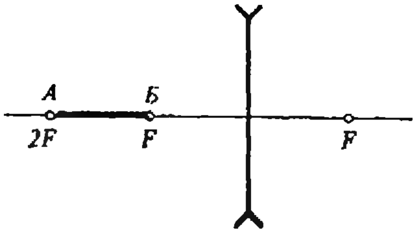


Рис. 3.

5. При скоростном спуске с горы с углом наклона $\alpha=30^\circ$ лыжник набрал скорость $v=72$ км/ч. Коэффициент трения лыж о снег $\mu=0{,}1$. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. С какой максимальной скоростью будет двигаться тот же лыжник по склону с углом наклона $\beta=45^\circ$? Длину каждого склона считать достаточно большой.

Публикацию подготовили *А. В. Ефимов, Б. М. Орлов, А. С. Поспелов, А. Ю. Хренников*

Московский станкоинструментальный институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=\log_5 0{,}2.$$

2. Определите значения k, при которых корни уравнения

$$x^2-(3k+2)x+k^2=0$$

удовлетворяют соотношению $x_1=9x_2$.

3. Решите уравнение

$$6\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x=2.$$

4. Колонна войск протяжением 2 км движется по шоссе маршем со скоростью 3 км/ч. Конный вестовой выезжает из конца колонны в ее начало, передает приказание и тотчас же отправляется обратно. На проезд туда и обратно вестовой тратит 30 мин. Определите скорость вестового, если она на всем пути была одинакова.

5. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник, площадь которого равна S, а угол при вершине равен α. Боковые ребра пирамиды образуют с высотой один и тот же угол β. Найдите объем пирамиды и радиус шара, описанного около нее.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\lg\frac{5^x\cdot 2+20^x\cdot 2}{5}=x.$$

2. Найдите все значения a, для которых неравенство

$$(a-1)x^2-(a+1)x+a+1>0$$

выполняется при всех действительных значениях x.

3. Решите уравнение

$$1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0.$$

4. Произведение цифр двузначного числа в три раза меньше самого числа. Если к искомому прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды и тангенс угла наклона боковой грани, противолежащей углу α, к основанию.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой в два раза больше радиуса Земли. Определите скорость движения спутника, если первая космическая скорость у поверхности Земли равна $v_1=8$ км/с.

2. Однородная доска массой $M=1$ кг лежит на столе так, как показано на рисунке 1. Груз какой массы надо положить на правый конец доски, чтобы левый ее конец начал подниматься?

3. В герметичном сосуде объемом $V=20$ л находится смесь насыщенного водяного пара с гелием. Давление смеси $p=2\cdot10^5$ Па, температура $T=373$ К. Определите количество гелия в сосуде. Молярная масса гелия $M_{He}=4$ г/моль.

4. При адиабатическом расширении один моль идеального одноатомного газа совершил работу $A=1{,}25$ кДж. Найдите изменение температуры газа.

5. В калориметре смешали $m_1=1$ кг льда, имеющего начальную температуру $t_1=-10$ °C, и $m_2=100$ г воды при температуре $t_2=0$ °C. Определите температуру смеси и ее агрегатное состояние после установления теплового равновесия. Теплообменом с калориметром и с окружающей средой пренебречь. Удельная теплота плавления льда $\lambda=336$ кДж/кг, удельная теплоемкость льда $c_1=2{,}1$ кДж/(кг·К).

6. Какое количество теплоты выделится на резисторе сопротивлением R после замыкания ключа (рис. 2)? Заряд конденсатора q, площади пластин S, расстояние между пластинами d, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon=1$.

7. Проволочный виток площадью S и сопротивлением R находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Линии индукции поля образуют угол α с нормалью к поверхности витка. Какой заряд протечет по витку, если поле выключить?

8. Найдите увеличение изображения отрезка AB, даваемого тонкой рассеивающей линзой с фокусным расстоянием F (рис. 3).

9. Для выжигания по дереву используют лупу с четырехкратным увеличением, фокусируя с ее помощью солнечный свет. На каком оптимальном расстоянии от поверхности дерева надо держать лупу?

10. В планетарной модели атома водорода электрон вращается вокруг ядра по круговой орбите. Какой кинетической энергией обладает электрон на орбите радиусом $r = 5 \cdot 10^{-11}$ м? Заряд электрона $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

Публикацию подготовили
Л. Н. Дагаева, Д. В. Подлесный

Ответы, указания, решения

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $v = \frac{\sqrt{3}}{4} h^3 \operatorname{ctg}^2 \varphi$.
2. $x \in \left[\frac{1}{27}; 1\right[\cup \left]9; \infty\right[$.
3. $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$.
4. $ED = \frac{2\sqrt{2}}{3} a \sqrt{k+1},\ 1/4 \leqslant k < \frac{1}{2}$.
5. 11 555 550. Указание. Просуммируйте сначала все числа, отличные от 1 111 110.

Вариант 2

1. $x \in]0; 1[\cup]2; 6[$.
2. $x = (-1)^{k-1} \arcsin \frac{1}{3} + k\pi,\ k \in Z$.
3. $\frac{v_1}{v_2} = \frac{qD}{Qd}$.
4. $h = r\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
5. $t = \frac{59}{38}$ с.

Вариант 3

1. 53 %.
2. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z,\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi,\ l \in Z$.
3. $\left[-3; \frac{7}{8}\right] \cup \left[\frac{9}{8}; 5\right]$.
4. $5\frac{10}{11}$.
5. $\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Вариант 4

1. $x = 2\pi k,\ k \in Z,\ x = (-1)^l \frac{\pi}{3} + 2l\pi,\ l \in Z$.
2. $x \in]-\infty; 2[\cup]4; 8[$.
3. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
4. $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$; б) $x = -1,\ y = -2,\ z = -3$.
5. $Q = \sqrt[3]{\frac{9v^2}{16 \sin^2 \alpha}}$.

Задачи устного экзамена

1. $x = 4k + 2,\ k = -2, -3, \ldots$

3. n-я группа состоит из n последовательных четных или нечетных чисел. $S_n = \left(\frac{n^2}{2} + 1\right) n$ при $n = 2k$, $S_n = \frac{n^2+1}{2} \cdot n$ при $n = 2k+1$.

4. $a = 1,\ |b| < 2$.

5. $n = \pm 1,\ \pm 2$.

6. $a \geqslant -\frac{1}{6}$ — одно решение; $a < -\frac{1}{6}$ — нет решений.

7. 142 827.

8. Указание. Точки A и B лежат на одинаковом расстоянии от прямой, которая содержит медиану CM треугольника ABC. Задача имеет 3 решения.

9. Окружность, проходящая через точки A, B, C, если они являются вершинами остроугольного треугольника. Во всех других случаях — окружность, построенная на самом длинном из отрезков AB, BC, AC, как на диаметре.

10. Указание. Воспользуйтесь тем, что сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной вокруг него окружности.

11. Указание. Воспользуйтесь тем, что отрезок, соединяющий середины смежных сторон квадрата, пересекается с одной из его диагоналей в точке, являющейся серединой этого отрезка и делящей диагональ в отношении 3:1.

Физика

Физический факультет

1. $n = \sqrt{2h/g}\, v/d = 90$.
2. $x = 0{,}66$ м (x является положительным корнем квадратного уравнения $x^2 - 2hx - 2hH = 0$).
3. $T_{\min} = \sqrt{3\pi/(G\rho)} = 0{,}0012$ с ($G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ м³/(кг·с²) — гравитационная постоянная).
4. $p = \frac{\rho g h \left((l-h)^2/4 - a^2\right)}{a(l-h)} = 20000$ Па.
5. $v = NRT/(pSMr) = 7{,}6$ м/с ($p = 10^5$ Па — нормальное атмосферное давление, $M = 18 \times 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды).
6. $\varphi = 6{,}9°$ (φ является корнем квадратного уравнения $\varphi^2 - 2\pi\varphi + 4\pi^2 r/R = 0$).
7. $U_1 = \frac{\mathscr{E}(n-1)C_2}{n(C_1 + C_2)}$; $U_2 = \frac{\mathscr{E}(n-1)C_1}{n(C_1 + C_2)}$.
8. $f \approx 4$ м (f является решением системы двух уравнений — формул линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ и $\frac{1}{d-l} + \frac{1}{f+L} = \frac{1}{F}$).

Радиофизический факультет

1. $t = \sqrt{\frac{2H}{g \sin\alpha (\sin\alpha - \operatorname{tg}\beta \cos\alpha)}}$.
2. $E_2 = \frac{F^2 t^2}{4E_1}\left(v_0 + \frac{2E_1}{Ft}\right)^2 = 5{,}3$ Дж.
3. Плотность куба в 4 раза меньше плотности воды, а плотность камня в 2 раза больше плотности воды.
4. $n = (mRT)/(pVM_0) = 2$ ($M_0 = 58$ г/моль — молярная масса группы C_3H_6O).

5. $E=\dfrac{(q_1+|q_2|)^3}{4\pi\varepsilon_0 q_1|q_2|l^2}=3{,}96\cdot10^3$ В/м.

6. $I_0=\sqrt{N/R_1}\,(\sqrt{R_1/R_2}+1)=1{,}6$ А.

7. $F=(d_1h_1-d_2h_2)/(h_1-h_2)=15$ см.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. 12 при $x\neq\pm2$; $x\neq0$; $x\neq4$.
2. См. рис. 1.

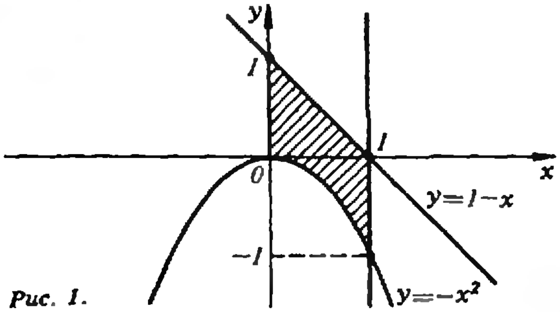


Рис. 1.

3. 2 г; 22 г. 4. $\{\pi/4\}$.

5. $\dfrac{\pi R^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}$.

Вариант 2

1. $-\sqrt{3a}$; $a\geqslant0$, $a\neq3$.
2. $[-2;\,1]$. 3. 17 ч 8 мин.
4. $\{-\pi/4;\ \pi/4;\ -\pi/3;\ \pi/3;\ 2\pi/3\}$.
5. $100\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Физика

Вариант 1

2. Сопротивление холодного проводника (в момент включения электронагревательного прибора) больше сопротивления нагретого проводника (когда установится температурный режим).

3. $d=(n-1)F=40$ см.

4. $t=-\dfrac{v_0}{g}+\sqrt{\left(\dfrac{v_0}{g}\right)^2+\dfrac{2H}{g}}\approx1{,}4$ с.

5. $\mathscr{E}_м=2\pi nBS\sin\alpha\approx12{,}5\cdot10^{-3}$ В.

Вариант 2

2. В условиях леса дифракция звука гораздо заметнее, чем дифракция света.

3. $T_2=250$ К; $t_2=-23$ °С.

4. $k=U_1/U_2=5{,}5$; $I_2=I_1U_1/U_2=2{,}75$ А.

5. $\lambda_1=2\pi c\sqrt{L_1C}\approx19$ м (здесь $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света в вакууме); $\lambda_2=2\pi c\sqrt{L_2C}\approx$ ≈60 м.

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. 5 ч. 2. $x_1=\dfrac{k\pi}{2}$, $x_2=\pm\dfrac{2}{3}\pi+2\pi l$ $(k,\,l\in\mathbf{Z})$.

3. $\{1\}$. 4. $]-2;\,-1[\,\cup\,]0;\,+\infty[$.

5. $2\sqrt{3}\,d$; $3d^2\sqrt{6}$. **Указание.** Пусть $SABC$ — треугольная пирамида, $AB=a$. Докажите, что $S_{бок}=\dfrac{\sqrt6}{4}\sqrt{24a^2d^2-a^4}$, и исследуйте на максимум функцию $f(a)=24a^2d^2-a^4$.

Вариант 2

1. 2. 2. $x_1=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $x_2=\pm\pi/6+\pi l$ $(k,\,l\in\mathbf{Z})$.

3. $\{1\}$. 4. $\left]0;\,\dfrac{1}{10}\right[\,\cup\,]10;\,+\infty[$.

5. $7h$; $\dfrac{343}{384}\pi h^3$; $16/\pi\sqrt{3}$. **Указание.** Вписанный шар имеет наибольший радиус, когда середины ребер верхнего основания призмы лежат на поверхности шара (докажите это).

Физика

1. $l\approx13{,}1\cdot10^3$ м $\approx13{,}1$ км.
2. $A=p_0S\,(H-p_0/(2\rho g))=10^4$ Дж $=10$ кДж.
3. $v=v_0\rho_0/(\rho-\rho_0)$.
4. $m=(pV+\Delta U)/(\eta q)=6\cdot10^{-3}$ кг (здесь $\eta=0{,}2$).
5. $\varphi_1-\varphi_2\approx0{,}7\cdot10^4$ В.
6. $Q=C\mathscr{E}^2/6$.
7. $B=2\pi mv\cos\alpha/(eL)$.
8. $d_{\min}=\dfrac{2l\sqrt{(n_1^2-\sin^2\alpha)(n_2^2-\sin^2\alpha)}}{\sin2\alpha\,(\sqrt{n_1^2-\sin^2\alpha}-\sqrt{n_2^2-\sin^2\alpha})}$.
9. Источник нужно передвинуть в противоположную сторону на расстояние, превышающее смещение линзы в 4 раза.
10. Нейтрон уносит 4/5 выделившейся при реакции энергии.

Московский институт электронной техники

Математика

1. 60. 2. ab. 3. 0,5. 4. 400. 5. 4. 6. 105°. 7. 0,04.

8. 1/4. 9. $x<3$. 10. 10. 11. $\dfrac{2}{3}<x<2$. 12. 40.

13. $\left]0;\,\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[1;\,4\right[$. 14. 14.

Физика

Вариант 1

1. $v=E/B=10^6$ м/с.
2. $D=(d-d_0)/(dd_0)=+3$ дптр ($d=1$ м, $d_0=$ $=25$ см — расстояние наилучшего зрения).
3. $s=\sqrt{2H(v^2-2\mu gl)/g}$; $v_{\min}=\sqrt{2\mu gl}$.
4. $h=\dfrac{Q-cm(T_к-T)}{pSMr/(RT_к)}\approx0{,}29$ м

($T_к=373$ К — температура кипения воды).

5. $n=\dfrac{\lg2}{\lg(1+C_1/C)}$.

Вариант 2

1. $\eta=(P\tau M)/(N_A mw)=0{,}17=17\,\%$ ($\tau=1$ сутки $=24\cdot60\cdot60$ с, $M=235\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса урана, $w=200\cdot10^6\cdot1{,}6\times$ $\times10^{-19}$ Дж).
2. $q=\sqrt{8\pi\varepsilon_0 kl^3}\,(\sqrt2-1)$ (ε_0 — электрическая постоянная).
3. $n=2{,}5$ раза.
4. $l=F(2d-F)/(2(d-F))=37{,}5$ см.
5. $v'=v\sqrt{(\sin\beta-\mu\cos\beta)/(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}=$ $=89{,}5$ км/ч.

Московский станкоинструментальный институт

Математика

Вариант 1

1. $[3;\,10]$. 2. $k_1=-\dfrac{9}{16}$, $k_2=6$.

3. $x_1=-\pi/4+\pi k$; $x_2=\mathrm{arctg}\,3/4+\pi l$ $(k,\,l\ \ Z)$.
4. 9 км/ч.

5. $R=\dfrac{\sqrt{2S}\sin\alpha}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin2\beta}$;

$$V=\frac{S\sqrt{2S\sin\alpha}}{6\cos\alpha/2\sin\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Вариант 2

1. $[-1;\,1]$. 2. $a\in\,]5/3;\,+\infty[$.

3. $x_1=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k$; $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi l$ $(k,l\in Z)$.

4. 24. 5. $V=(a^3\sin\alpha/2\cdot\operatorname{tg}\beta)/6$; $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\beta\times(\cos\alpha)^{-1}$.

Физика

1. $v=v_1/\sqrt{2}\approx5{,}7$ км/с.
2. $m\geqslant M/2=0{,}5$ кг.
3. $\nu=(p-p_н)V/(RT)=0{,}6$ моль (здесь $p_н=10^5$ Па — давление насыщенных водяных паров при данной температуре).
4. $\Delta T=-2A/(3R)=-100$ К.
5. После установления теплового равновесия в калориметре будет смесь льда и воды при температуре 0 °С, причем воды будет $m_в=m_0-(c_1m_1\Delta t_1)/\lambda=0{,}04$ кг$=40$ г.
6. $Q=q^2d/(2\varepsilon_0S)$ (здесь ε_0 — электрическая постоянная).
7. $q=(BS\cos\alpha)/R$.
8. $\Gamma=1/6$.
9. $l=F=d_0/4=6{,}25$ см (здесь F — фокусное расстояние лупы, $d_0=25$ см — расстояние наилучшего зрения).
10. $E_k=e^2/(8\pi\varepsilon_0r)=2{,}3\cdot10$[illegible] Дж.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 4)

1.
$$\begin{array}{r}\times\,292\\211\\\hline 292\\292\\584\\\hline 61612\end{array}$$

2. Старший брат родился в 1962 году, а младший в 1969 году.

3. Цепь на рисунке не замкнута, поэтому ток по ней не потечет.

4. Если заменить каждую цифру «счастливого» билета ее дополнением до 9, т. е. 0 на 9, 1 на 8 и т. д., то полученный билет тоже будет «счастливым», причем если билет был из первой катушки, то полученный билет будет из второй катушки. Отсюда следует, что в каждой катушке одно и то же количество «счастливых» билетов.

5. Соединим одну из середин сторон с вершинами противоположной стороны отрезками (рис. 2). Синий и красный треугольники равновелики, значит, равновелики и белые треугольники. Но в этом случае их высоты, опущенные на нижние стороны, равны, следовательно, верхняя сторона четырехугольника параллельна нижней.

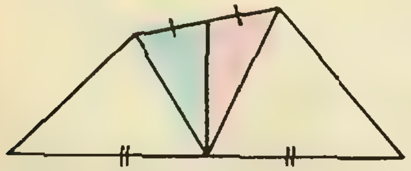


Рис. 2.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 3)

1. В обоих случаях кубик опустится на 3 см.

2. Задача имеет два решения. Первое решение: 1 кошка, 1 собака и 1 попугай, при этом нет тараканов; второе решение: 2 таракана — и больше нет никаких других домашних животных.

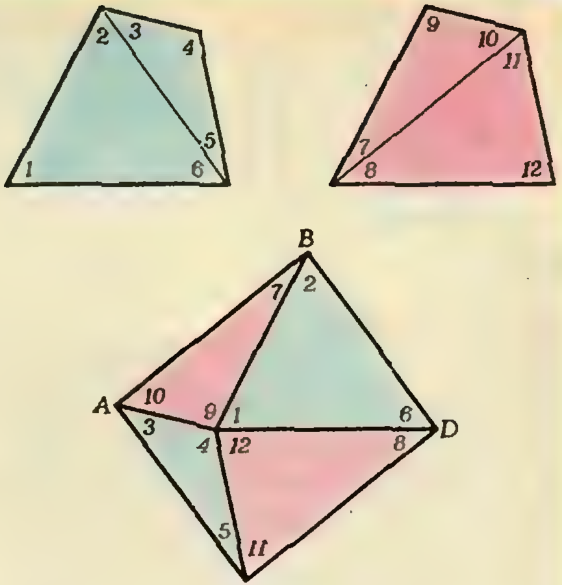


Рис. 3.

3. Сложим из четырех полученных треугольников четырехугольник так, как показано на рисунке 3. Это можно сделать в силу равенства соответствующих сторон треугольников и того факта, что сумма углов 1, 4, 9 и 12 равна 360°, как сумма внутренних углов четырехугольника. Параллельность сторон полученного четырехугольника нетрудно проверить. Из того, что сумма углов 10 и 11 равна углу 1, следует, что сумма углов 10, 3, 5, 11 равна 180°. Поэтому стороны AB и CD параллельны. Параллельность сторон AC и BD доказывается аналогично.

4. Положим на левую чашку монету в 5 коп., а на правую чашку монеты в 2 и 3 коп. Если весы будут в равновесии, то бракованная монета — в 1 коп. Если перевесит одна из чашек, то положим на левую чашку монету в 3 коп., а на правую — 2 и 1 коп. Если сейчас весы окажутся в равновесии, то бракованная монета — в 5 коп. Если при втором взвешивании будет легче та же чашка, что и при первом взвешивании, то бракованная монета — 2 коп., в противном случае — монета в 3 коп.

5. Н=0, А=1, В=2, О=3, Е=4, К=5, Т=6, И=7, Р=8, П=9.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 4)

Головоломки

1. См. рис. 4.
2. См. рис. 5.
3. $18{,}75\cdot10^{-4}\pi$ см.

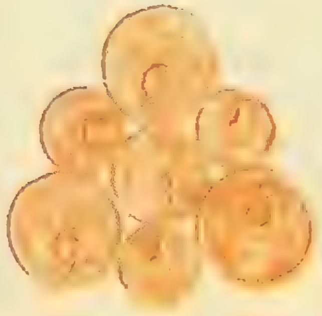


Рис. 4.

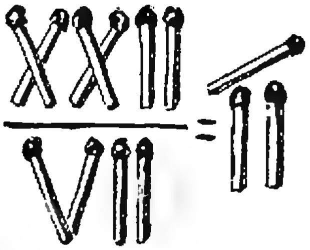


Рис. 5.

Наша обложка

(см. «Квант» № 4, 4-ю с. обложки)

Занумеруем пирамидки из шариков так, как показано на рисунке 6. Последовательно перекатим пирамидки 7, 2, 2, 1, 1, 4, 4, 6, 6, 10, 11, 11, 8, 8, 2, 2, 1, 4, 6, 10, 10, 11, 11, 8, 2, 7, соблюдая общее направление движения по часовой стрелке вокруг кружка, отмеченного звездочкой. Получим циклическую перестановку 1→2→8→11→10→6→4→1. Аналогично можно получить симметричный «цикл» 2→3→5→→9→12→11→7→2. Эти два цикла позволяют получить любое распределение цветов пирамидок.

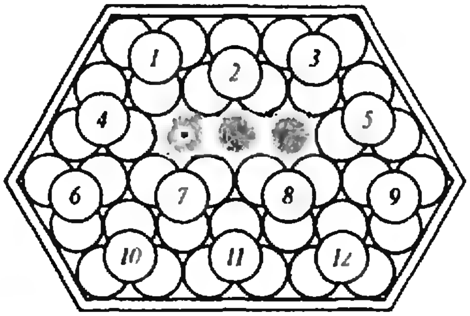


Рис. 6.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 2)

Задание 3 (Г. Ринк, 1937 г.). 1. Ке5+ Кре8 2. Крb8! Фh7 3. Фе6+ Крf8 (3... Фе7 4. Фс6+ Крf8 5. Кg6+ с выигрышем ферзя) 4. Кd7+ Крg7 5. Фf6+ Крg8 6. Фf8×.

Задание 4 (К. Манн, 1922 г.). 1. Фа8+ Фg8 2. Фа7 Фg7 3. Фb8+ Фg8 4. Фе5+ Фg7 5. Фе8+ Фg8 6. Фd7 Фf7 7. Фd4+ Фg7 8. Фd8+ Фg8 9. Фf6+ Фg7 10. Фh4+ Крg8 11. Сd5+ Крf8 12. Фd8×.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук,
В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин,
Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант
Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев,
Е. П. Велихов, И. Я. Верченко,
Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев,
Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов,
В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин,
А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов,
Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин,
А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. В. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов,
Т. Н. Кольченко, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров,
И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. И. Чернуский,
В. В. Юдин

Фото представили:
Фотохроника ТАСС

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор Т. С. Вайсберг

Сдано в набор 18.03.87. Подписано к печати 27.04.87.
Т-09765. Бумага 70×108/16. Печать офсетная.
Усл. кр.-от. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,02.
Тираж 208 234 экз. Цена 40 коп. Заказ 721.

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский
полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЧЕМПИОНАТЫ КОМПЬЮТЕРОВ

В конце прошлого года состоялись сразу два первенства мира по шахматам среди ЭВМ. В ФРГ прошел пятый чемпионат среди больших, универсальных компьютеров, а в США — шестой чемпионат среди шахматных микрокомпьютеров. Предыдущие чемпионы сохранили свое звание: «Крэй блитц» (США) и «Мефисто» (ФРГ) вновь завоевали «шахматную корону» соответственно среди больших и малых ЭВМ. В состязании «универсалов» участвовали 23 компьютера, разыгравших первенство по швейцарской системе в пять туров. Первое место разделили «Крэй блитц», «Хитеч», «Бебе» и «Феникс», набравшие по 4 очка. По коэффициенту победа досталась предыдущему чемпиону. Программа «Крэй блитц», разработанная в Южно-Миссисипском университете (США), написана на языках фортран и ассемблер и реализована на машине «Крэй-Х-МП».

По мнению мастеров и гроссмейстеров, присутствовавших на чемпионате в ФРГ, на нем был сыгран самый увлекательный поединок за всю историю компьютерных шахмат. Вот он.

«Хитеч» — «Шах»

Сицилианская защита

1. e4 c5 2. Kf3 d6 3. Cc4 e6 4. d4 cd 5. K:d4 Kf6 6. Kc3 Ce7 7. Ce3 Kbd7 8. Фd2 Ke5 9. Ce2 0—0 10. b3 Cd7 11. Kf3 K:f3+ 12. gf. Соперники быстро отошли от теории, и возникшее положение можно оценить как примерно равное. Последний ход белых довольно неожиданный — в «сицилианке» редко сдваивают пешки подобным образом. Почему же машина побила на f3 пешкой? Известно, что сдвоенные пешки уменьшают значение оценочной функции, которой руководствуется машина при выборе хода, однако наличие открытой или полуоткрытой линии увеличивает значение оценочной функции. Видно, для «Хитеча» второй фактор оказался важнее.

12...Фa5 13. 0—0—0 Лac8.

Белые собираются атаковать на королевском фланге, черные стремятся к контригре на ферзевом. Но обе стороны не должны забывать и о защите. Поэтому черным лучше было сейчас отправить на c8 другую ладью, освобождая поле f8 для слона.

14. Лhg1 Лfe8 15. Ch6 g6 16. Cg5 Фc5. Серьезная ошибка. Потеря темпа, а за ним и второго ставит черных в щекотливое положение. Дальнейшую часть партии белые проводят безукоризненно. В духе позиции было b7—b5, немедленно затевая схватку на «своем» участке доски (16... b5 17. Фf4 b4!). Возможно, черного ферзя прельстила пешка f2.

17. Фf4 Kh5 18. Фh4. Во всех современных программах заложен метод, называемый ФВ («форсированый вариант») — после обрыва обычного варианта на заданной глубине дальше исследуются только взятия и шахи. Поэтому в игре, которая носит форсированный характер, компьютер ориентируется вполне уверенно. Не исключено, что дальнейшие тактические нюансы видели обе машины.

18...f6. Эффектно завершался поединок после напрашивающегося 18...Cf8 (18... C:g5 19. Л:g5 и 20. Ф:h5 с выигрышем фигуры): 19. Ф:h5!! gh 20. Cf6+ Cg7 21. Л:g7+ Kpf8 (21...Kph8 22. Лg6×) 22. Лdg1 с матом.

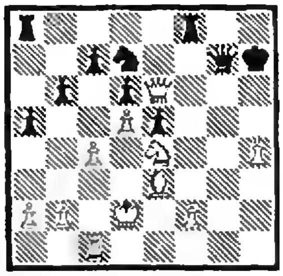
19. Ce3 Фa5. На первый взгляд черный король в безопасности благодаря поддержке ферзя, но белые находят чисто задачную идею перерезать ему дорогу. **20. Cb5!!** Блестящий тактический удар. **20...C:b5 21. Ф:h5 g5.** Другой способ не потерять фигуру состоял в 21...Л:c3!? После 22. Л:g6+ Kph8 23. Лdg1 уже черные объявляли мат: 23...Л:c2+!! 24. Kpb1 (24. Kp:c2 Cd3+ и 25...Ф:h5) 24... Л:b2+! 25. Kp:b2 Фb4+ и т. д. Почему же «Шах», видевший эту комбинацию, отказался от нее? Дело в том, что машина обнаружила матовую комбинацию не только за себя, но и за соперника: 23. Ф:h7+!! (вместо 23. Лdg1) 23...Kp:h7 24. Лh6+ Kpg8 25. Лg1+ Kpf8 26. Лh8+ Kpf7 27. Лh7+ Kpf8 28. Ch6×.

22. C:g5!! fg 23. Л:g5+! Белые ведут атаку, что называется, на одном дыхании. Сейчас после 23...C:g5 24. Ф:g5+ Kpf7 (24...Kph8 25. Фf6+ Kpg8 26. Лg1×) 25. Фh5+ Kpe7 26. Ф:h7+ Kpf6 черный король получал красивый мат в центре доски: 27. e5+! Kp:e5 (27...de 28. Ke4×) 28. Фg7+ Kpf5 29. Фf7+ Kpe5 (29...Kpg5 30. Лg1+) 30. f4×!

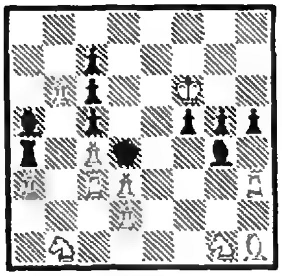
23...Kph8 24. Лdg1. Здесь партия закончилась, потому что у черных нет спасения от 25. Ф:h7+ и 26. Лh5×. Эффектный поединок!

После такой яркой победы все были уверены, что «Хитеч» станет чемпионом мира, однако в последнем туре в позиционной борьбе он уступил своему главному сопернику.

Конкурсные задания



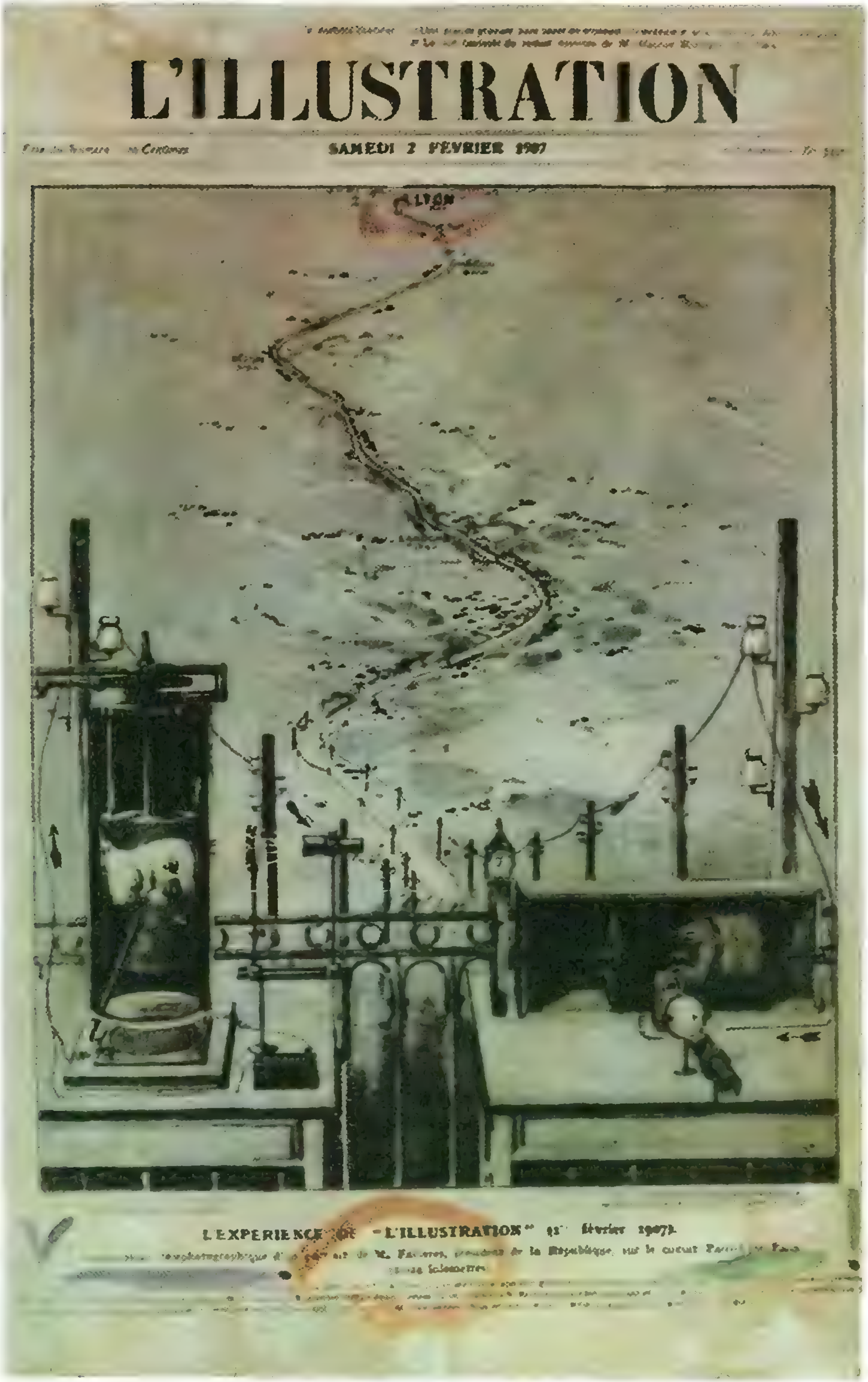
9. Белые начинают и выигрывают.



10. Белые начинают и дают мат в 3 хода.

В первой позиции «Мефисто» разобрался менее чем за две минуты, на вторую «уважающий себя компьютер» тратит не более пяти минут. Вам дается более месяца.

Срок отправки решений — 20 июля 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 9, 10».



[illegible]

L'ILLUSTRATION

[illegible] Centimes — SAMEDI 2 FÉVRIER 1907 — [illegible]

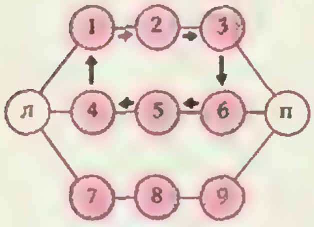
L'EXPÉRIENCE DE « L'ILLUSTRATION » (1er février 1907).

[illegible] téléphotographique d'un portrait de M. Fallières, président de la République, sur le circuit Paris-[illegible] [illegible] kilomètres.

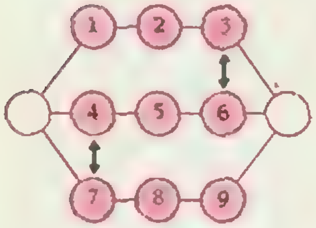
Цена 40 коп.
Индекс 70465

Когда подготовка материалов этого номера журнала уже заканчивалась, на прилавках московского «Детского мира» появилась новая комбинаторная головоломка. И хотя она не столь эффектна, как ее сородичи, представленные в предыдущих номерах, именно ей — последней новинке — решили мы отдать эту страницу. В ней имеется 9 нумерованных шашечек, размещенных тремя рядами на «каретке», которая свободно скользит внутри прямоугольной рамки; в бортах рамки сделаны ниши, благодаря которым шашечки можно переставлять — все это видно на центральном рисунке. Задача в том, чтобы научиться расставлять шашки по порядку номеров, исходя из произвольной расстановки. Найти решение помогает граф головоломки (рис. 1). Каждому из 11 возможных мест для шашек на нем отвечает кружок; если два места непосредственно сообщаются друг с другом, то соответствующие кружки соединены линией. Например, с места 1 (см. рис. 1) можно попасть на место Л (в левую нишу — для этого нужно сначала установить верхний ряд каретки посередине рамки) или на место 2 и т. д. Линии графа образуют 3 замкнутых 8-звенных кольца, вдоль которых можно циклически переставлять шашки. Такие циклические перестановки (или просто «циклы») служат кирпичиками, из которых можно составить любую перестановку. Обозначим через A цикл $1\to 2\to 3\to 6\to 5\to 4\to 1$ (сдвиг шашек в кольце, образованном верхним и средним рядами, по часовой стрелке на одно место, не считая пустых мест Л и П: рис. 1), через B — цикл в среднем и нижнем ряду: $4\to 5\to 6\to 9\to 8\to 7\to 4$, через C — в верхнем и нижнем: $1\to 2\to 3\to 9\to 8\to 7\to 1$. Выполним последовательно циклы A, B, A^{-1} и B^{-1} (A^{-1} — операция, обратная к A: $1\to 4\to 5\to 6\to 3\to 2\to 1$, B^{-1} — обратная к B). В результате две пары шашек меняются местами: $3\to 6$, $4\to 7$ (рис. 2). Составленная таким образом из A и B операция $K=ABA^{-1}B^{-1}$ называется коммутатором A и B. Выясните, как «работают» коммутаторы циклов A и C, A и B^{-1}, B и C^2 и т. д. Операция, показанная на рисунке 3, — $K_1=FKF^{-1}$, где $F=B^2A$, — действует так же, как K, но на других шашках — на тех, которые попадают на места 3, 4, 6 и 7 под действием F. Говорят, что K_1 получено из K сопряжением. Рассмотрите операции вида $A^nK_1A^{-n}$ ($n=1, 2, \ldots, 5$), сопряженные с K_1, — они переставляют шашки 7 и 9 и любые две соседние шашки верхнего и среднего ряда, поэтому с их помощью можно получить любую перестановку шашек этих двух рядов. На рисунке 4 показано, как из двух коммутаторов составляется еще одна полезная перестановка — тройной цикл.

Рис. 1.



A



$K = ABA^{-1}B^{-1}$

Рис. 2.

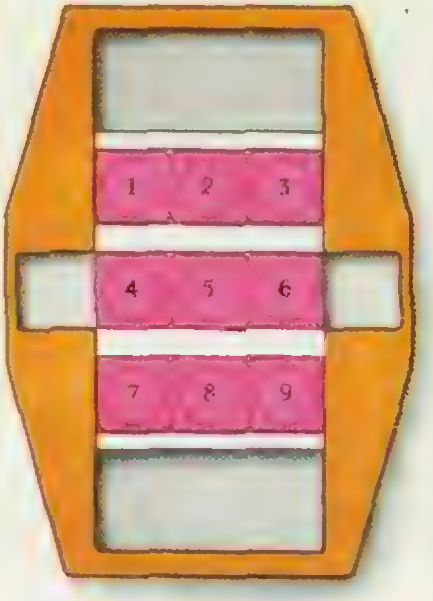
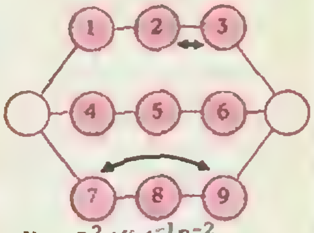
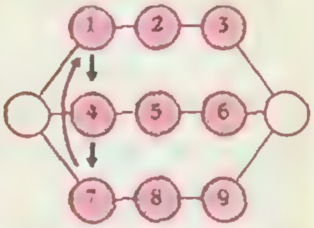


Рис. 3.



$K_1 = B^2AKA^{-1}B^{-2}$



$A^{-1}CAC^{-1}ABA^{-1}B^{-1}$

Рис. 4.

Приведенные нами операции иллюстрируют основные приемы решения всех комбинаторных головоломок — использование графа, циклов, коммутаторов, сопряжений. Попробуйте довести начатое нами до конца и доказать, что в нашей игре любую из $9!=362880$ перестановок шашек можно упорядочить по номерам. Предлагаем, в частности, найти операцию, переставляющую только две шашки 1 и 2. Интересно отметить, что если в одну из ниш вставить дополнительную шашку № 10, то последняя задача уже будет неразрешима; в этой игре можно будет получить только половину всех возможных перестановок. Почему?

В. Н.

НОМЕР
6

Квант
Основан в 1970 году

1987
6

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *В. Е. Корепин.* Узоры Пенроуза и квазикристаллы
8 *Ю. М. Брук, Б. И. Геллер.* Белые карлики — кристаллические звезды
15 *П. Б. Бернштейн.* Несколько дополнений к уроку литературы, или Еще раз о научном предвидении

Новости науки

7 Антипротон в ловушке

Задачник «Кванта»

19 Задачи М1046—М1050, Ф1058—Ф1062
21 Решения задач М1026—М1030, Ф1038—Ф1042
42 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

27 Задачи
28 *Б. С. Ашавский.* И один в поле воин

32 **Калейдоскоп «Кванта»**

Математический кружок

34 *Д. Б. Фукс.* Построения одним циркулем
37 *В. Я. Саннинский.* Размышляя об одной олимпиадной задаче

Лаборатория «Кванта»

39 *А. И. Буздин, В. В. Сорокин.* Кипение жидкостей

Искусство программирования

43 *В. А. Каймин.* Проверка правильности алгоритмов

Практикум абитуриента

47 *С. М. Козел.* Задачи на газовые смеси

Варианты вступительных экзаменов

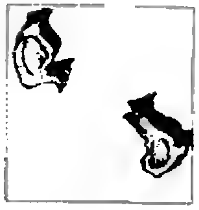
50 Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1986 году

Информация

57 VIII Московская олимпиада по программированию
57 Летняя школа «Юный программист»
58 Итоги шахматного конкурса 1986 года

58 **Ответы, указания, решения**
«Квант» улыбается (*14, 18*)
Шахматная страничка
Чемпионат микрокомпьютеров (*3-я с. обложки*)

Наша обложка



На первой и второй страницах обложки показаны квазикристаллические замощения плоскости двумя цыплятами, придуманные Роджером Пенроузом.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1987

УЗОРЫ ПЕНРОУЗА И КВАЗИКРИСТАЛЛЫ

Доктор физико-математических наук
В. Е. КОРЕПИН

В этой статье рассказано о математике квазикристаллов — материалах нового типа, открытых в 1984 г. Их физическому открытию предшествовало создание занятных (и совершенно элементарных!) математических моделей — узоров Пенроуза — двумерных аналогов квазикристаллических структур. Поначалу эти конструкции воспринимались как изящные безделушки, но в настоящее время уже опубликовано несколько сот серьезных научных статей по физике и математике квазикристаллов. Так что читателям «Кванта» здесь представляется редкая в наши дни возможность: изучив вполне элементарный, почти развлекательный материал, приобщиться к стремительно развивающейся новой области науки.

Речь пойдет о замощении плоскости. *Замощение* — это покрытие всей плоскости неперекрывающимися фигурами. Вероятно, впервые интерес к замощению возник в связи с построением мозаик, орнаментов и других узоров. Известно много орнаментов, составленных из повторяющихся мотивов.

Одно из простейших замощений приведено на рисунке 1. Плоскость покрыта параллелограммами, причем все параллелограммы одинаковы. Любой параллелограмм этого замощения можно получить из розового параллелограмма, сдвигая последний на вектор $n\vec{u}+m\vec{v}$ (векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ определяются ребрами выделенного параллелограмма, n и m — целые числа). Следует отметить, что все замощение как целое переходит в себя при сдвиге на вектор $\vec{u}$ (или $\vec{v}$). Это свойство можно взять в качестве определения: именно, *периодическим замощением с периодами* $\vec{u}$ *и* $\vec{v}$ назовем такое замощение, которое переходит в себя при сдвиге на вектор $\vec{u}$ и на вектор $\vec{v}$. Периодические замощения могут быть и весьма замысловатыми, некоторые из них очень красивы. Примером может служить периодическое замощение, придуманное голландским художником М. Эшером (см. рис. 5 на с. 4)

Квазипериодические замощения плоскости

Существуют и интересные непериодические замощения плоскости. В 1974 г. английский математик Роджер Пенроуз открыл *квазипериодические* замощения плоскости. Свойства этих замощений естественным образом обобщают свойства периодических.

Пример такого замощения приведен на рисунке 2. Вся плоскость покрыта ромбами. Между ромбами нет промежутков. Любой ромб замощения с помощью сдвигов и поворотов можно получить всего из двух. Это *узкий ромб* (36°, 144°) и *широкий ромб* (72°, 108°), показанные отдельно на рисунке 3. Длина сторон каждого из ромбов рав-

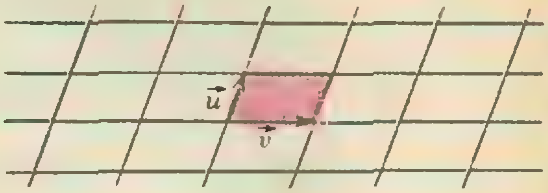


Рис. 1.

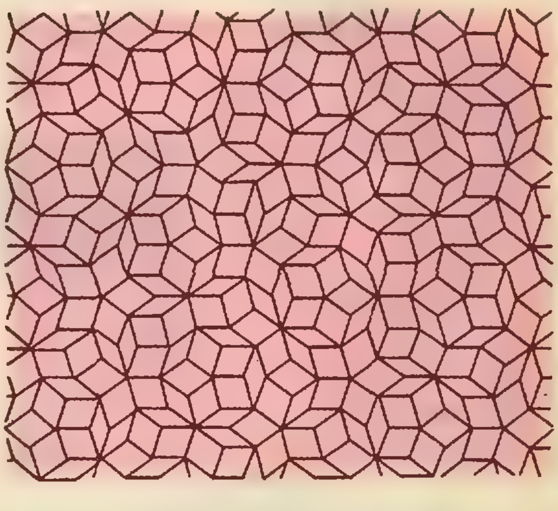


Рис. 2. Пример Р. Пенроуза квазипериодического замощения плоскости ромбами двух типов.

на 1. Это замощение не является периодическим — оно очевидно не переходит в себя ни при каких сдвигах. Однако оно обладает неким важным свойством, которое приближает его к периодическим замощениям и заставляет называть его *квазипериодическим*. Дело в том, что *любая конечная часть квазипериодического замощения встречается во всем замощении бесчисленное множество раз.*

Любопытно отметить, что это замощение обладает осью пятого порядка (переходит в себя при повороте на угол 72° вокруг некоторой точки), в то время как таких осей у периодических замощений не существует (не очень простое доказательство последнего факта мы опускаем).

Другое квазипериодическое замощение плоскости, построенное Пенроузом, приведено на рисунке 4. Вся плоскость покрыта четырьмя многоугольниками специального вида. Это звезда, ромб, правильный пятиугольник и «бумажный кораблик». Самый известный пример квазипериодического замощения приведен на первой и на второй страницах обложки. Пенроузу удалось покрыть всю плоскость цыплятами двух типов.

Преобразование инфляции и дефляции

Каждый из показанных выше трех примеров квазипериодического замощения — это покрытие плоскости с помощью сдвигов и поворотов конечного количества фигур. Это покрытие не переходит в себя ни при каких сдвигах, любая конечная часть покрытия встречается во всем покрытии бесчисленное множество раз, притом, «одинаково часто» по всей плоскости.

Замощения, описанные выше, обладают некоторым специальным свойством, которое Пенроуз назвал *инфляцией*. Изучение этого свойства позволяет разобраться в структуре этих покрытий. Более того, инфляцию можно использовать для построения узоров Пенроуза.

Наиболее наглядным образом можно проиллюстрировать инфляцию на примере *треугольников Робинсона*. Треугольники Робинсона — это два равнобедренных треугольника P, Q с углами (36°, 72°, 72°) и (108°, 36°, 36°) соответственно и длинами сторон, как на рисунке 6 (с. 4). Здесь τ — золотое сечение: $\tau=(1+\sqrt{5})/2$.

Эти треугольники можно разрезать на меньшие, так, чтобы каждый из новых (меньших) треугольников был подобен одному из исходных. Разрезание показано на рисунке 7: прямая ac является биссектрисой угла dab, а отрезки ae, ab и ac равны. Легко видеть, что треугольники acb и ace равны между собой и подобны треугольнику P, а треугольник cde подобен треугольнику Q. Треугольник Q разрезан так. Длина отрезка gh равна длине отрезка ih (и равна 1). Треугольник igh подобен треугольнику P, а треугольник igf подобен треугольнику Q. Линейные размеры новых треугольников в τ раз меньше чем у исходных. Такое разрезание называется *дефляцией*.

Обратное преобразование — склеивание — называется *инфляцией*. Рисунок 7 показывает, что из двух P-треугольников и одного Q-треугольника можно склеить P-треугольник, а из P- и Q-треугольника можно склеить Q-треугольник. У новых (склеенных) треугольников линейные размеры в τ раз больше, чем у исходных треугольников.

Итак, мы ввели понятия преобразований инфляции и дефляции. Ясно, что преобразование инфляции можно

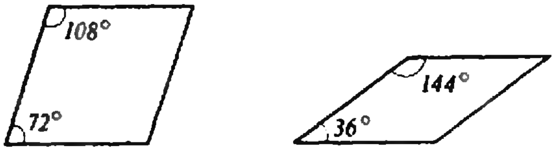


Рис. 3.

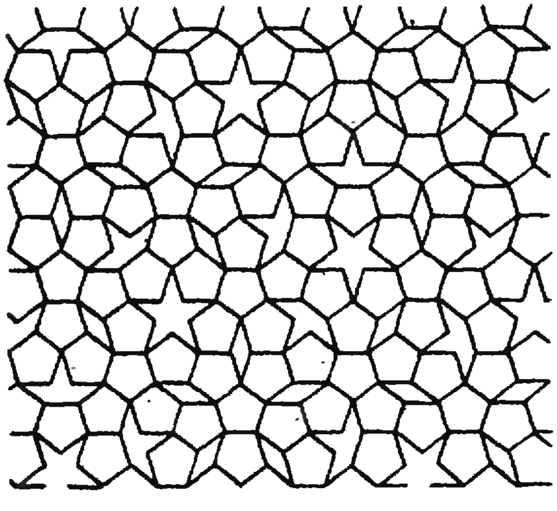


Рис. 4. Квазипериодическое замощение плоскости многоугольниками четырех типов.

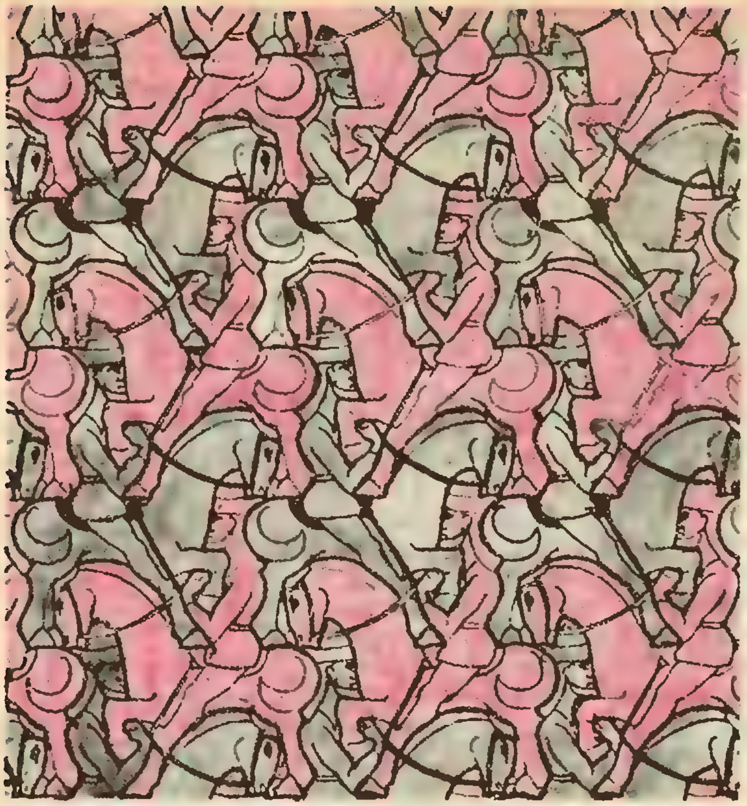


Рис. 5. «Всадники» М. Эшера — пример периодического замощения плоскости.

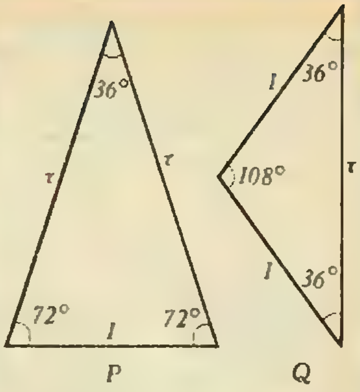


Рис. 6.

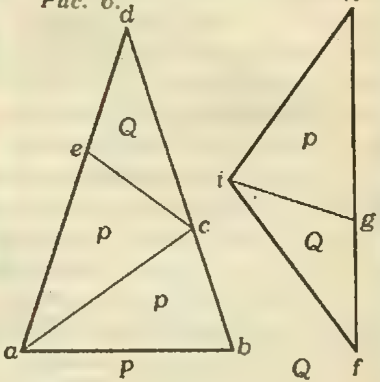


Рис. 7.

повторить; при этом получится пара треугольников, размеры которых в τ^2 раз больше исходных. Последовательно применяя преобразование инфляции, можно получить пару треугольников сколь угодно большого размера. Таким образом можно замостить всю плоскость.

Можно показать, что описанное *замощение треугольниками Робинсона не является периодическим.*

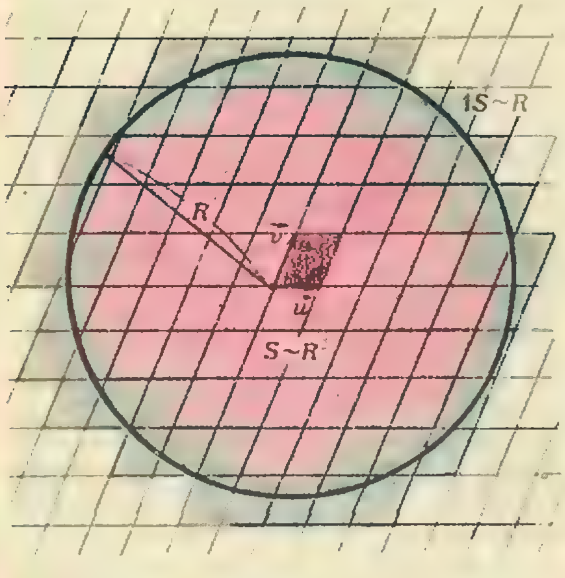


Рис. 8.

Наметим доказательство этого утверждения. Будем рассуждать от противного. Предположим, что замощение плоскости треугольниками Робинсона периодическое с периодами $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Покроем плоскость сетью параллелограммов со сторонами $\vec{u}$, $\vec{v}$ (см. рис. 1). Обозначим через p число P-треугольников, у которых левая нижняя вершина (относительно нашей сети) расположена в заштрихованном параллелограмме; аналогично определим число q. (Отобранные $p+q$ треугольники образуют так называемую *фундаментальную область* данного периодического замощения.) Рассмотрим круг радиусом R с центром O. Обозначим через p_R (соответственно q_R) число P-треугольников (соответственно — Q-треугольников), лежащих внутри этого круга.

Можно доказать, что

$$\lim_{R\to\infty}(p_R/q_R)=p/q. \qquad (1)$$

Действительно, число треугольников, пересекающих окружность радиуса R, пропорционально R, в то время как число треугольников внутри круга радиуса R пропорционально R^2. Поэтому в пределе отношение числа P-треугольников к числу Q-треугольников в круге равно этому отношению в фундаментальной области (рис. 8).

Возьмем теперь наше замощение и выполним преобразование дефляции. Тогда в исходной фундаментальной области окажется $p'=2p+q$ меньших P-треугольников и $q'=p+q$ меньших Q-треугольников (см. рис. 7). Обозначим через p'_R и q'_R число меньших треугольников в круге радиуса R. Теперь легко получить противоречие. В самом деле,

$$\frac{p}{q}=\lim_{R\to\infty}\frac{p_R}{q_R}=\lim_{R\to\infty}\frac{p'_R}{q'_R}=\frac{p'}{q'}=\frac{2p+q}{p+q},$$

откуда, решая уравнение $p/q=(2p+q)/(p+q)$, находим

$$p/q=(1+\sqrt{5})/2,$$

в то время как p и q — целые! Противоречие показывает, что замощение треугольниками Робинсона — не периодическое.

Оказывается, что это покрытие треугольниками Робинсона не единственное. Существует бесконечно много различных квазипериодических покрытий плоскости треугольниками Робинсона. Грубо говоря, причина этого явления *лежит в том, что при дефляции* биссектрису на рисунке 7 можно провести из вершины b, а не из вершины a. Используя этот произвол, можно добиться, например, чтобы покрытие треугольниками превратилось в покрытие ромбами, показанное на рисунке 2. Покрытия цыплятами также *порождается треугольниками* Робинсона.

Преобразование дуальности

Способ построения квазипериодических замощений, приведенный выше, выглядит как догадка. Однако существует регулярный способ построения квазипериодических покрытий. Это метод *преобразования дуальности*, идея которого принадлежит голландскому математику де Брауну.

Поясним этот метод на примере построения замощения плоскости ромбами (см. рис. 3). Сначала построим *сетку G*. Для этого возьмем правильный пятиугольник и пронумеруем его стороны ($j=1, 2, 3, 4, 5$; рис. 10). Рассмотрим сторону с номером j. Построим бесконечный набор прямых, параллельных этой стороне, так, чтобы расстояние между двумя ближайшими прямыми равнялось 1. Проведем аналогичное построение для каждой из сторон пятиугольника; прямые мы проведем так, чтобы они пересекались лишь попарно. Получится набор прямых, который не является периодическим (рис. 9). Прямые в этом наборе будем обозначать буквами l. Перенумеруем прямые двумя индексами: $l_j(n)$. Здесь j указывает на направление прямой (какой стороне пятиугольника она параллельна). Целое число n нумерует различные параллельные прямые, пробегает все целые значения (как положительные, так и отрицательные). Этот набор прямых делит плоскость на бесконечный набор многоугольников. Эти многоугольники называются *гранями* сетки. Стороны многоугольников будем называть *ребрами* сетки, а вершины многоугольников — *вершинами* сетки. (Аналогично для квазипериодического покрытия Q: ромбы — это грани Q, стороны ромбов — ребра Q, вершины ромбов — вершины Q.)

Таким образом, сетка G построена.

Совершим теперь преобразование *дуальности*. Каждой грани сетки G сопоставим вершину квазипериодического покрытия Q (вершину ромба). Вершины обозначим буквами $\vec{v}$ (это векторы). Сначала сопоставим каждой грани M сетки пять целых чисел $n_j(M)$, $j=1, 2, ..., 5$ по следующему правилу. Внутренние точки грани M лежат между какой-то прямой $l_j(n)$

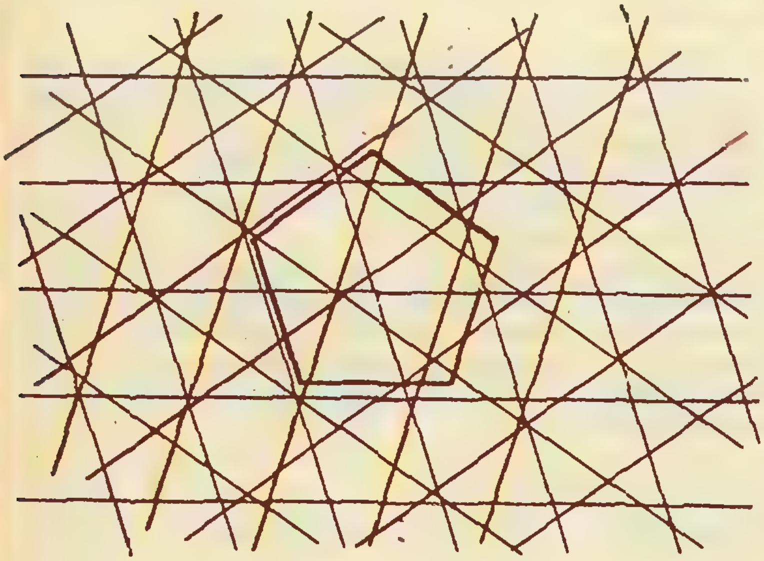


Рис. 9.

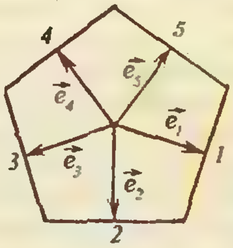


Рис. 10.

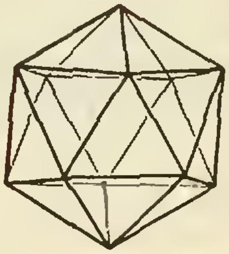


Рис. 11.

и параллельной ей прямой $l_j(n+1)$. Это целое число n мы сопоставим грани M. Поскольку в сетке есть прямые пяти направлений, то таким образом мы сопоставим пять целых чисел $n_j(M)$ каждой грани M сетки G. Вершина $\vec{v}$ квазипериодического покрытия Q, соответствующая данной грани M сетки G, строится так:

$$\vec{v}(M)=n_1(M)\vec{e}_1+n_2(M)\vec{e}_2+...+n_5(M)\vec{e}_5.$$

Здесь $\vec{e}_j$ — вектор единичной длины, направленный из центра правильного пятиугольника к середине стороны с номером j. Таким образом, каждой грани сетки мы сопоставили вершину покрытия. Так можно построить все вершины Q.

Теперь некоторые вершины соединим между собой отрезками прямых линий. Это будут ребра покрытия Q (стороны ромбов). Для этого рассмотрим пару граней M_1 и M_2, имеющих общее ребро. Вершины покрытия, соответствующие этим граням ($\vec{v}(M_1)$ и $\vec{v}(M_2)$), мы и соединим между собой отрезками.

Тогда оказывается, что разность

$$\vec{v}(M_1)-\vec{v}(M_2) \qquad (2)$$

может быть равна лишь одному из десяти векторов $\pm\vec{e}_j$. (Мы этот факт доказывать не будем.)

Таким образом, каждому ребру сетки сопоставляется ребро покрытия Q. Каждой вершине сетки сопоставляется грань покрытия Q (ромб). Действительно, к каждой вершине сетки примыкают четыре грани M_k $(k=1, 2, 3, 4)$. Рассмотрим соответствующие им четыре вершины покрытия $\vec{v}(M_k)$. Из свойства разности (2) следует, что ребра покрытия, проходящие через эти вершины, образуют границу ромба. Квазипериодическое покрытие плоскости ромбами построено.

Мы проиллюстрировали метод преобразования дуальности. Это общий способ построения квазипериодических покрытий. В этой конструкции правильный пятиугольник можно заменить на любой правильный многоугольник. Получится новое квазипериодическое покрытие.

Метод преобразования дуальности применим и для построения квазипериодических структур в пространстве.

Квазипериодическое заполнение трехмерного пространства

Существует трехмерное обобщение узоров Пенроуза. Трехмерное пространство может быть заполнено параллелепипедами специального вида. Параллелепипеды не имеют общих внутренних точек и между ними нет промежутков. Каждый параллелепипед этого заполнения с помощью сдвигов и поворотов может быть получен всего из двух параллелепипедов. Это так называемые параллелепипеды Аммана-Маккэя. Для того, чтобы задать параллелепипед, достаточно задать три ребра, выходящих из одной вершины. Для первого параллелепипеда Аммана-Маккэя эти векторы имеют вид:

$$\vec{e}_1=(0;\ 1;\ \tau),\ \vec{e}_2=(-\tau;\ 0;\ -1),$$
$$\vec{e}_3=(\tau;\ 0;\ -1),$$

а для второго параллелепипеда:

$$\vec{e}_4=(0;\ -1;\ \tau),\ \vec{e}_5=(\tau;\ 0;\ 1),$$
$$\vec{e}_6=(0;\ 1;\ \tau).$$

Заполнение этими параллелепипедами не переходит в себя ни при каких сдвигах, однако любая конечная его часть встречается во всем заполнении бесчисленное множество раз. Заполнение пространства этими параллелепипедами связано с симметриями *икосаэдра* (эти симметрии невозможны у периодического замощения пространства). Икосаэдр — это платоновское тело (правильный многогранник). Каждая из его граней является правильным треугольником. Икосаэдр имеет 12 вершин, 20 граней и 30 ребер (рис. 11).

* * *

Оказалось, что именно такими симметриями обладает быстро охлажденный алюминиево-марганцевый расплав $Al_{0.86}Mn_{0.14}$ (открытый в 1984 г.). Таким образом узоры Пенроуза помогли понять структуру вновь открытого вещества. И не только этого вещества: найдены и другие реальные квазикристаллы, их экспериментальное и теоретическое изучение находится на переднем крае современной науки.

Новости науки

Антипротон в ловушке

Еще сто лет назад многие не верили в реальность существования атомов. «То, чего нельзя увидеть, не может существовать» — примерно такой аргумент считался неоспоримым. Теперь он кажется просто нелепым, поскольку не только атомы, но даже и отдельные элементарные частицы стали сейчас реальными объектами исследований.

Счетчики в лабораториях регистрируют нейтроны, фотоны, электроны и т. п. Установки, составленные из большого числа специальных детекторов, скрытых высоко в горах, фиксируют нейтрино, прилетающие к нам из космоса. Но физики могут не только считать количество частиц, они научились их изучать, так сказать, поштучно.

Если бы вам кто-нибудь предложил посадить один электрон в банку, вы, естественно, приняли бы это за шутку. Тем не менее такая задача разрешима, и это уже умеют делать в лабораториях. Рассказывают, что как-то к Эдисону пришел изобретатель и сказал, что он может синтезировать универсальный растворитель, который способен растворять все на свете. «Это очень-очень здорово,— сказал Эдисон,— но в чем вы будете хранить Вашу замечательную жидкость?». Так и с электроном. Ясно, что он не сможет жить в сосуде, даже если там создать максимально возможный вакуум, — электрон просто «прилипнет» к стенке.

И все же электрон, а также и антиэлектрон — позитрон — хранить можно, причем хранить долго. Ловушку для электрона или позитрона можно создать с помощью электрического и магнитного полей. В магнитном поле электрон движется по окружности или спирали. Электрическое поле, созданное в конденсаторах специальной формы, не дает заряженной частице убежать по спирали. Комбинируя оба поля, можно «поймать» заряженную частицу. Такого типа устройство называют ловушкой или западней Пеннинга — по имени изобретателя*). Современный рекорд хранения электронов и позитронов в этой ловушке — около 10 месяцев. У пойманного таким способом позитрона удалось измерить массу и магнитный момент.

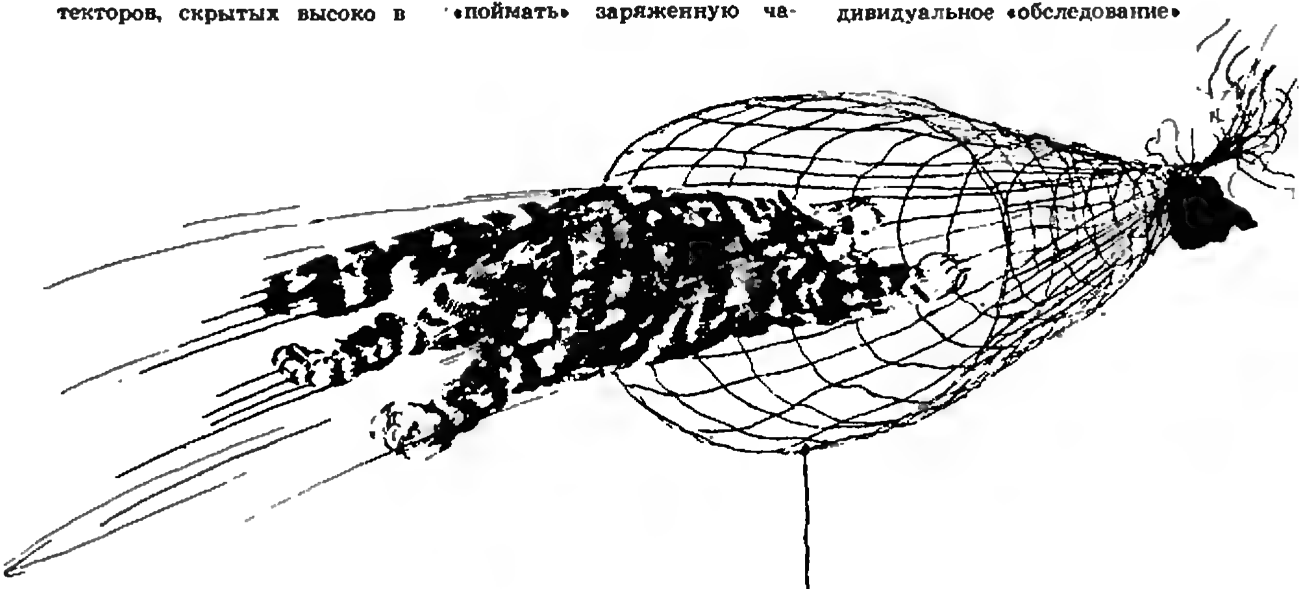
Теперь дошла очередь и до антипротона. Как и всякая античастица, антипротон исчезает (аннигилирует), столкнувшись со своим антиподом — протоном. Лишь в ловушке, где никого нет, «жизни» антипротона ничто не угрожает. Однако поймать его в ловушку не так-то просто. Дело в том, что антипротон рождается в ускорителе со скоростью, почти равной скорости света, и такую быструю частицу удержать очень трудно.

Тем не менее задача поимки антипротона разрешима. Сейчас научились тормозить его движение, снижая энергию от нескольких ГэВ (10^9 эВ) до нескольких десятков кэВ (10—30 тысяч эВ). При таких энергиях антипротон уже удается посадить в ловушку Пеннинга, в которой он совершает колебательные движения — как тигр в клетке — с большой частотой, но выскочить наружу не может.

В первых опытах антипротон удерживался в ловушке несколько часов. Физики считают, что срок «заточения» можно увеличить в сотни раз. Тогда станет возможным индивидуальное «обследование» этой частицы: точное измерение ее массы, магнитного момента и т. п. Наконец, можно будет «подсадить» в ловушку позитрон и сделать антиатом — антиводород.

Можно придумать и много других интересных опытов, надо только преодолеть трудности, которых осталось еще немало. Ученые надеются, что «антипротон в ловушке» скоро будет привычным экспонатом в физической лаборатории.

Я. С.



---

*) Пеннинг Франс Мишель (1894—1953) — нидерландский физик.

БЕЛЫЕ КАРЛИКИ — КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ ЗВЕЗДЫ

Кандидат физико-математических наук
Ю. М. БРУК,
Б. И. ГЕЛЛЕР

В бескрайней пустоте изнеможенный шар,
Охваченный тоской и горем без предела,
Уродливый, немой, давно окаменелый,
Вращался, позабыв, что раньше был не стар.

Леконт де Лиль. «Последний бог»

В этой статье мы постараемся рассказать о том, что нельзя увидеть ни в микроскоп, ни в телескоп, но что можно понять с помощью довольно простых и привычных представлений. Речь пойдет в основном о белых карликах и ... конденсаторах. Что такое конденсатор, знают, конечно, все читатели «Кванта». Про белые карлики читатели тоже, вероятно, слышали. Так называются очень плотные звезды с массой примерно такой же, как у нашего Солнца, но с радиусом в несколько сотен или даже в тысячу раз меньшим солнечного. Разглядеть, как устроены внутренности белого карлика, мы, конечно, не можем. Но, порассуждав о плоском конденсаторе, мы сможем, воспользовавшись физическими аналогиями, получить представление о том, как устроены эти далекие и мало похожие на Солнце звезды.

Немного простых вычислений

Масса типичного белого карлика $M \sim 2 \cdot 10^{30}$ кг, его радиус $R \sim 10^{-2} R_{\odot}$ ($R_{\odot} = 7 \cdot 10^{8}$ м — радиус Солнца). Среднюю плотность вещества, из которого состоит карлик, мы получим, разделив массу звезды на ее объем: ϱ оказывается $\sim 10^{9}$ кг/м^3.

Если бы мы пожелали «построить» белый карлик из отдельных атомов, мы должны были бы собрать их в большое облако вблизи той «точки» в пространстве, куда хотим «поместить» звезду, и сжать это облако до плотностей примерно в 10^{6} раз бо́льших, чем средняя плотность нашей планеты. В космическом пространстве облака из молекул или атомов сжимаются под действием сил гравитации.

Реальные белые карлики, как это вытекает из теории строения и эволюции звезд, содержат мало «тяжелых» элементов или даже совсем их не содержат. Для оценок можно считать, что белый карлик «построен» из одинаковых атомов, имеющих примерно по десятку электронов на атом. Массу m атома при этом можно принять примерно в 20 раз большей массы нуклона, т. е. считать $m \sim 10^{-26}$ кг. Разницей масс нуклонов (протона и нейтрона), а также массой электронов при грубом расчете можно, конечно, пренебречь. Это вполне разумные допущения, и они фактически не повлияют на те выводы, к которым мы придем.

Число n атомных ядер в единице объема получится, если разделить ϱ на m. Для нашего белого карлика n оказывается $\sim 10^{35}$ м$^{-3}$. Значит, средний объем пространства, приходящегося на одно ядро, $\sim 10^{-35}$ м^3, и среднее расстояние между ядрами $\sim 10^{-12}$ м. Размеры же обычных атомов порядка 10^{-10} м. Так что мы приходим к выводу, что средние расстояния между ядрами внутри белого карлика в сотню раз меньше размеров тех атомов, из которых мы «начинали строить» звезду. Понятно, что при столь больших плотностях атом как система «электроны + ядро» не существует.

В процессе сжатия все электроны в недрах белого карлика уже «отодраны» от своих ядер и образуют электронную жидкость. А как ведут себя ядра (которые можно назвать в таком случае «голодранцами»)? Для них существуют две возможности: они либо «плавают» в «электронном море», напоминая взвесь тяжелых частиц в жидкости, либо образуют кристаллическую решетку, в которую и «налита» электронная жидкость,— тогда система ядер и электронов подобна по структуре обычным металлам.

Какая же из указанных возможностей реализуется на самом деле? Белые карлики — жидкие? или кристаллические?

Наша цель — разобраться в этом вопросе. И поможет нам, как это ни удивительно на первый взгляд, плоский конденсатор.

Плоский конденсатор и плазменная частота

Совокупность электронов и ядер внутри белого карлика образует плазменную систему, которая похожа на плазму в недрах Солнца или на плазму, образующуюся при обычном газовом разряде. Общим для этих систем является сосуществование положительно и отрицательно заряженных частиц, взаимодействие между которыми обусловлено кулоновскими силами. (О том, чем существенно отличается плазма в белых карликах от классической кулоновской системы зарядов с противоположными знаками, мы поговорим позже.) В целом плазменные системы электронейтральны. А что произойдет, если в какой-то небольшой области пространства электронейтральность нарушится?

Рассмотрим элемент объема, занятого плазмой, между двумя плоскими площадками. Сначала обсудим простой случай, когда положительные и отрицательные заряды в плазме одинаковы по абсолютной величине. Пусть площадь каждой площадки S, а расстояние между ними d. Заряды частиц будем считать равными $\pm e$, а их концентрацию равной n_e. Предположим, что мы смогли разделить заряды в этом объемчике и поместить все положительные заряды на одну площадку, а все отрицательные — на другую. По существу мы создали заряженный плоский конденсатор. Очевидно, что абсолютная величина заряда пластин этого конденсатора $Q = n_e eSd$, и напряженность поля в нем $E = Q/\varepsilon_0 S = n_e ed/\varepsilon_0$.

В реальной плазме никаких площадок-пластин, конечно, не существует, но ясно, что взаимное смещение зарядов разных знаков приводит к появлению сил, стремящихся это смещение ликвидировать. Для оценки этих сил можно рассуждать так. Пусть среднее относительное смещение частиц с противоположными зарядами равно d. Появившееся при смещении электрическое поле можно оценить, пользуясь приведенной выше формулой для конденсатора. Сила, действующая на одну частицу, равна $eE = n_e e^2 d/\varepsilon_0$; разделив эту силу на массу частицы m, получим ее ускорение: $n_e e^2 d/\varepsilon_0 m$. Обратите внимание: сила и ускорение частицы пропорциональны ее смещению, а направлены они так, чтобы восстановить равновесие. Но это означает, что частица будет совершать гармонические колебания, и мы можем сразу же сказать, какова должна быть частота этих колебаний:

$$\omega_0^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}. \qquad (*)$$

Колебания с частотой ω_0 называют электростатическими, ленгмюровскими или просто плазменными.

Вероятно, читатель уже догадался, какой следующий шаг мы собираемся сделать в наших рассуждениях. Конечно, мы должны попытаться понять, нельзя ли обобщить эти рассуждения о плазменных колебаниях на электронно-ядерную плазму в белых карликах. Ответ на этот вопрос положительный, такое обобщение действительно возможно. В электронно-ядерной плазме тоже должны быть колебания, обусловленные взаимными смещениями зарядов. Но этот случай отличается от рассмотренного выше простейшего тем, что заряд ядра не равен заряду электрона. Разные у них и массы. И очень важно, что концентрация частиц в плазме белого карлика в сотни тысяч раз больше, чем, скажем, в солнечной плазме. При таких концентрациях плазму нужно описывать квантовыми законами (тогда как солнечную плазму можно считать классическим газом заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона). Оказывается к тому же, что вопрос о плазменных колебаниях в белых карликах тесно связан с вопросом о возможности существования в них кристаллических структур. Обсуждением этих вопросов мы теперь и займемся.

Ядерные кристаллы и устойчивость кристаллической решетки

Одно из самых обычных и привычных для нас фазовых превращений — это кристаллизация. Никого не удивляет, что зимой реки и озера покрываются льдом. Замерзают порой даже моря. Но разве не удивительно, что кристаллизация может происходить и в плазменном море, образуемом электронами и атомными ядрами внутри белых карликов?

В ранних теориях белых карликов считалось, что вещество при плотностях, типичных для внутренних об-

ластей этих звезд, представляет собой жидкую смесь ядер и электронов. Ядра в таком «растворе», как и частицы в обычных жидкостях, могли бы «без особых усилий» перемещаться на довольно значительные расстояния, движение их при этом могло бы быть совершенно хаотическим. Идеи о построении и устойчивости решеток из атомных ядер, погруженных в электронное море, появились немногим более двадцати лет назад.

Давайте и мы предположим, что атомные ядра с зарядами Ze действительно образуют кристаллическую решетку, т. е. «привязаны» к определенным местам в пространстве. Окружающие их электроны «вольны», конечно, «гулять» по всему этому кристаллу, но в среднем около каждого ядра находится Z электронов. Разрушение решетки было бы, очевидно, возможно, если бы ядра могли сильно смещаться из своих положений равновесия. Малые же колебания ядер к разрушению решетки не приводят.

В обычных твердых телах колебания кристаллической решетки имеют в основном температурное происхождение. Для ядерного же кристалла очень важную роль играет кулоновское взаимодействие. Колебания плазменного типа будут происходить при любых температурах, в том числе и при очень низких. Наша цель сейчас — оценить частоту и энергию этих колебаний и сравнить последнюю с потенциальной энергией ядра в кристаллической решетке и с величиной kT, характеризующей температурные колебания. Если потенциальная энергия окажется намного больше kT и характерной энергии плазменных колебаний, то мы сможем сказать, что ядро «привязано» к «своему» узлу в кристаллической решетке.

Удобно разделить всю нашу систему «ядра+электроны» на условные ячейки, имеющие сферическую форму и такие, что в каждой из них находится одно ядро с зарядом Ze и Z электронов. Если в единице объема содержится $n_я$ ядер, то радиус r ячейки можно определить из условия $\frac{4}{3}\pi r^3 n_я = 1$; отсюда $r \sim n_я{}^{1/3}$. В целом каждая такая ячейка электронейтральна. Так как число электронов $Z \gg 1$, можно для оценок считать, что электроны, образующие облако с отрицательным зарядом, равномерно «размазаны» по ячейке. Колебания же ядра в этом отрицательно заряженном облаке происходят с плазменной частотой

$$\Omega_0^2 \sim \frac{n_я (Ze)^2}{\varepsilon_0 m_я} \sim \frac{Z^2 e^2}{\varepsilon_0 m_я r^3}.$$

Это по существу та же формула (*). Но только сейчас речь идет о колебаниях ядер с зарядом Ze и массой $m_я$.

Мы уже упомянули, что из-за большой концентрации частиц плазма в белом карлике описывается квантовыми законами. Естественно, что и колебания в такой плазме должны квантоваться. Это значит, в частности, что полная энергия колебаний кристаллической решетки, построенной из атомных ядер, складывается из отдельных порций — квантов энергии. Зная частоту колебаний, легко оценить и энергию такой порции. Для этого надо частоту Ω_0 умножить на постоянную Планка $\hbar$ $\left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$. Величина $\hbar\Omega_0$ и есть характерная энергия плазменных колебаний, относящаяся к одной колеблющейся частице, в нашем случае — к одному ядру. Здесь уместно еще сказать, что для типичных условий внутри белых карликов энергия kT тепловых колебаний (опять же в расчете на одну частицу) много меньше, чем $\hbar\Omega_0$. Это позволяет нам «забыть» о температуре, говоря о колебаниях кристаллической решетки белого карлика. (Желающие могут убедиться в справедливости неравенства $kT \ll \hbar\Omega_0$, подставив в формулу для Ω_0 численные значения параметров, характерные для белых карликов, и приняв для оценки температуру T внутри белого карлика $\sim 10^6$ К.)

Итак, нам остается сравнить U_0 и $\hbar\Omega_0$. Потенциальная энергия ядра, «сидящего» в узле кристаллической решетки, $U_0 \sim \frac{Z^2e^2}{\varepsilon_0 r}$. Иногда говорят, что эта обычная «кулоновская» формула определяет «глубину потенциальной ямы», в которую «попало» колеблющееся ядро. Можно сказать еще, что U_0 определяет энергию связи ядра в системе окружающих его других частиц.

Запишем теперь отношение $\hbar\Omega_0/U_0$, используя приведенные выше формулы для Ω_0 и U_0:

$$\frac{\hbar\Omega_0}{U_0} \sim \left(\frac{\hbar^2\varepsilon_0}{Z^2e^2rm_я}\right)^{1/2} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}.$$

Здесь $r_0 = \frac{\hbar^2\varepsilon_0}{Z^2e^2m_я}$ — параметр, характеризующий ядро с заданными Z и $m_я$. Типичное значение r_0/r для белых карликов — порядка 10^{-5}. (Это число вы можете получить сами, считая плотность вещества в звезде $\sim 10^9$ кг/м^3, а $Z \sim 10$.)

Тем самым мы убеждаемся, что $(r_0/r)^{1/2} \ll 1$, а это-то и означает, что энергия колебаний ядер внутри белого карлика меньше потенциальной энергии. Другими словами, кристаллическая решетка, если она образовалась, сама по себе развалиться не должна!

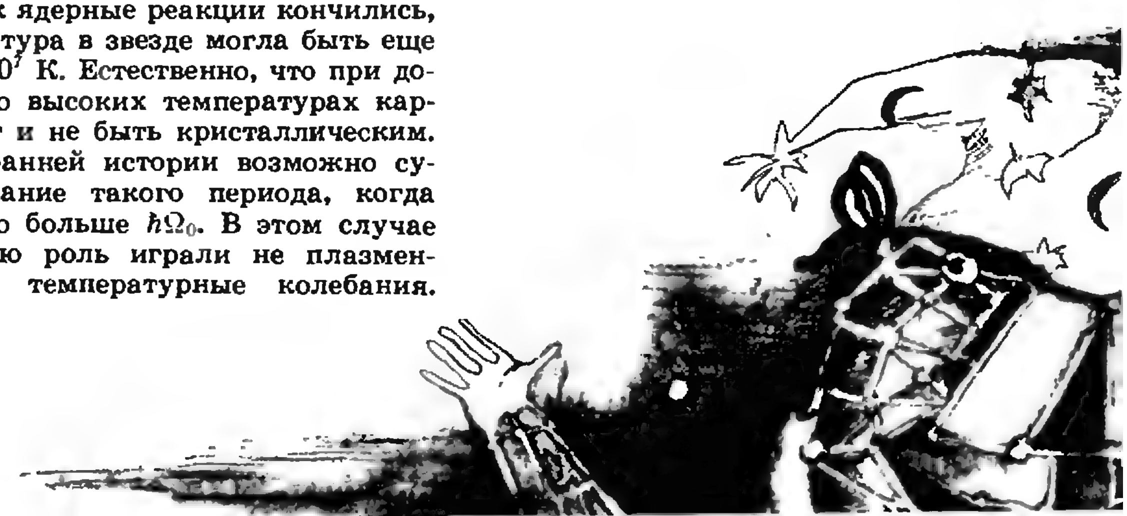
Кристаллизация в белом карлике

До сих пор мы обсуждали ситуацию, когда обусловленные температурой эффекты можно было не учитывать. В этом случае выполняется неравенство $\hbar\Omega_0 \gg kT$. Однако теория эволюции звезд предсказывает, что когда белый карлик был молодым, в его недрах шли ядерные реакции и он был довольно-таки горячим. После того как ядерные реакции кончились, температура в звезде могла быть еще около 10^7 К. Естественно, что при достаточно высоких температурах карлик мог и не быть кристаллическим. В его ранней истории возможно существование такого периода, когда kT было больше $\hbar\Omega_0$. В этом случае основную роль играли не плазменные, а температурные колебания. И для этого периода именно kT нужно сравнивать с U_0, чтобы решить вопрос о том, существовала ли тогда кристаллическая решетка.

Но, как бы то ни было, бóльшая часть жизни карлика проходит в условиях, когда $kT < \hbar\Omega_0 \ll U_0$. Поэтому по мере его остывания должна произойти кристаллизация. В кристаллизующейся звезде внутренние области все время остаются горячее наружных, поэтому кристаллическая структура — «корка» — возникает сначала именно снаружи, а уже потом «прорастает» в глубь карлика.

При кристаллизации выделяется энергия, которая в конечном счете звездой излучается. Расчеты показывают, что эта энергия не столь уж и мала. Естественно сравнить ее с полной гравитационной энергией звезды (так называется энергия, которая потребовалась бы, чтобы разрушить гравитирующий шар и «растащить» все составляющие его частицы на достаточно большие расстояния друг от друга). Сравнение позволяет утверждать, что энергия, выделяющаяся при кристаллизации, может достигать долей процента или даже несколько процентов от полной гравитационной энергии белого карлика. Другим источником энергии, излучаемой карликом, является запас его тепловой энергии. При условии близости температуры внутри звезды к температуре плавления кристаллической ядерной решетки (последняя по оценкам может быть порядка 10^7 К) запасы тепловой энергии могут оказаться сравнимыми с энергией кристаллизации. В принципе можно считать, что белый карлик после прекращения в нем ядерных реакций в состоянии излучить энергию порядка процента от его гравитационной энергии.

Гравитационная энергия звезды по



порядку величины равна GM^2/R; подставляя $M \sim 2 \cdot 10^{30}$ кг, $R = 7 \cdot 10^6$ м, получим приблизительно $4 \cdot 10^{43}$ Дж. Средняя светимость горячих и ярких белых карликов порядка $10^{-2}\ L_\odot$, где $L_\odot \approx 4 \cdot 10^{26}$ Вт — светимость нашего Солнца (светимость — это полная энергия, излучаемая за единицу времени). Зная это, легко подсчитать, что запасов энергии — тепловой и выделяющейся при кристаллизации — белому карлику должно хватить на излучение по крайней мере в течение 10^9 лет. Приведенные цифры являются, конечно же, лишь типичными значениями, для конкретных звезд они могут отличаться. Часто говорят, что конечными стадиями эволюции звезд могут быть белые карлики, нейтронные звезды или черные дыры. Оказывается, однако, что даже после «бурной молодости» звезды «не хотят умирать». Исчерпав запасы ядерной энергии, они сохраняют все же другие источники и запасы энергии, позволяющие им долго излучать и после того, как они дожили до своей «старости».

Можно теперь сформулировать и основной вывод нашего рассказа о белых карликах. Не очень горячие звезды этого типа должны быть кристаллическими; они кристаллизуются, как только их температура понижается примерно до 10^6 К.

Наблюдать белые карлики очень непросто, особенно если это холодные звезды (в астрономии их называют «красные» белые карлики). Слабый блеск и сложность их спектров требуют очень совершенных телескопов. В то же время сейчас известно несколько тысяч белых карликов, разбросанных в сфере радиусом 100 парсек (1 парсек $\approx 3 \cdot 10^{16}$ м) вокруг Солнечной системы. Всего же белые карлики составляют от 5 до 10 % всех звезд.

Состояние вещества белых карликов, несуществующее и недостижимое в земных условиях, нам очень важно знать и для физики нейтронных звезд — ведь их наружные слои состоят из вещества примерно с теми же параметрами, что и внутри белых карликов.

Приложение

О связи главных параметров белых карликов

Основными характеристиками любой звезды являются, конечно, ее масса, радиус, химический состав, температура и светимость. Разумеется, не все эти величины являются независимыми. Легко понять, например, что светимость должна быть связана с температурой — чем горячее звезда, тем больше она излучает. Мы приведем здесь пример другой связи — между массой белого карлика M, его радиусом R и отношением Z/A. Параметры Z и A — это номер в Периодической системе элементов и массовое число (т. е. число нуклонов) ядер тех атомов, из которых «построена» звезда. Для простоты будем считать, что белый карлик «построен» из одинаковых атомов (интересующую нас качественную картину это предположение не испортит).

Силы гравитации, сжимающие вещество звезды, создают внутри нее огромное гравитационное давление. Что «противостоит» этому давлению, что обеспечивает равновесие звезды? В случае звезд, подобных нашему Солнцу, гравитационному сжатию противостоит газовое давление (давление плазмы). В белых карликах гравитационное давление уравновешивается давлением электронной жидкости внутри звезды. Из условия равновесия $p_G = p_e$ можно получить формулу, связывающую интересующие нас параметры M, R, Z и A. Но сначала надо найти p_G и p_e. Мы сделаем это, воспользовавшись соображениями размерности.

Естественно предположить, что формула для гравитационного давления в центре звезды должна связать p_G с массой звезды M, ее радиусом R и гравитационной постоянной G. Выпишем размерности этих величин:

$$[p_G] = \text{кг}^1\text{м}^{-1}\text{с}^{-2},$$

$$[M] = \text{кг},\ [R] = \text{м},\ [G] = \text{кг}^{-1}\text{м}^3\text{с}^{-2}.$$

Будем искать интересующую нас зависимость $p_G(G, M, R)$ в виде $p_G \sim G^x M^y R^z$. Запишем условие равенства размерностей левой и правой частей написанного соотношения:

$$\text{кг}^1\text{м}^{-1}\text{с}^{-2} = \text{кг}^{-x}\text{м}^{3x}\text{с}^{-2x}\text{кг}^y\text{м}^z =$$

$$= \text{кг}^{-x+y}\text{м}^{3x+z}\text{с}^{-2x}.$$

Такое равенство может быть выполнено, только если

$$1 = -x + y,\ -1 = 3x + z,\ -2 = -2x.$$

Решая эту систему уравнений, получим: $x = 1$, $y = 2$, $z = -4$. Следовательно, искомая формула такова:

$$p_G \sim G\,\frac{M^2}{R^4}.$$

Теперь перейдем к определению p_e. Здесь полезно напомнить, что есть различие между классической солнечной плазмой (ее давление зависит от температуры) и электронной жидкостью в белых карликах. Для такой жидкости (иногда говорят — газа) действуют квантовые законы и давление p_e от температуры не зависит. Поэтому в формулу для электронного давления должна входить постоянная Планка $\hbar$. Естественно предположить, что p_e зависит еще от концентрации электронов n_e и массы электрона m_e. Запишем искомую формулу в таком виде: $p_e \sim \hbar^\alpha m_e^\beta n_e^\gamma$. Числа, α, β и γ определим, сравнивая размерности величин, стоящих слева и справа:

$$[p_e] = \text{кг}^1\text{м}^{-1}\text{с}^{-2},\quad [\hbar] = \text{кг}^1\text{м}^2\text{с}^{-1},$$

$$[m_e] = \text{кг},\quad [n_e] = \text{м}^{-3}.$$

Из соотношения

$$\text{кг}^1\text{м}^{-1}\text{с}^{-2} = \text{кг}^\alpha\text{м}^{2\alpha}\text{с}^{-\alpha}\text{кг}^\beta\text{м}^{-3\gamma}$$

следует система уравнений

$$1 = \alpha + \beta,\quad -1 = 2\alpha - 3\gamma,\quad -2 = -\alpha,$$

откуда $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 5/3$. Интересующее нас давление —

$$p_e \sim \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{5/3}.$$

При условии полной ионизации в плазме концентрация электронов n_e и концентрация ядер $n_я$ связаны соотношением $n_e = Zn_я$. Но $n_я \approx \approx \frac{\rho}{m_я} \sim \frac{M}{R^3 m_я} \approx \frac{M}{R^3 A m_p}$, где m_p — масса нуклона (различием масс протона и нейтрона мы пренебрегаем). Поэтому:

$$p_e \sim \frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{ZM}{R^3 A m_p}\right)^{5/3}.$$

А теперь запишем условие равновесия $p_G = p_e$:

$$G\frac{M^2}{R^4} \sim \frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{ZM}{R^3 A m_p}\right)^{5/3},$$

или, после несложных преобразований,

$$M^{1/3}R \sim \frac{\hbar^2}{G m_e m_p^{5/3}}\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}.$$

Из последней формулы явно видно, что при фиксированном значении Z/A произведение MR^3 постоянно, и, стало быть, для разных карликов с одинаковыми отношениями Z/A массы M обратно пропорциональны R^3. Результат довольно любопытный!

„Квант" улыбается

Крокодил в конверте

Ольга Иеронимовна Капица улыбалась доброй материнской улыбкой. Письмо пришло от Пети. Правда, он уже не Петя, а Петр Капица, 27-летний физик, недавно принятый на стажировку в Кембридж, в лабораторию Резерфорда. Вскрыв конверт и посмотрев на дату, 25 октября 1921 года, стала читать. Сначала спокойное описание пребывания в Кембридже. И вдруг «...отношения с Резерфордом, или, как я его называю, «крокодилом», улучшаются». Что это — озорство? Мальчишество? Ну, ладно в школе — какие только клички не дают своим учителям ребята. Но ведь Петя далеко не школьник! Ученого с мировой известностью, наставника, к которому с таким трудом удалось попасть, и вдруг назвать КРОКОДИЛОМ!! Ведь если сотрудники узнают, узнает и сам профессор! Выгонит, честное слово, выгонит!

Все знали. Знал и Резерфорд. И не выгнал. Он тоже не был лишен чувства юмора. Через год в беседе с Резерфордом Капица напомнил шефу первый день их встречи. Тогда Резерфорд сказал, что все 30 мест в лаборатории заняты. Петр Леонидович спросил, какую точность допускает профессор в научной работе? Получив ответ — 2—3 %, Капица сказал, что один сотрудник в дополнение к 30 составляет всего около 3 % и что это не выходит за рамки требуемой точности. Профессор спрятал улыбку в усы... и принял молодого физика. Вспоминая это, Резерфорд добавил, что он этому очень рад.

Так почему же «крокодил»?

Петр Леонидович объяснял это так: «Это животное никогда не поворачивает назад и потому может символизировать резерфордовскую проницательность и его стремление к продвижению вперед».

В 1931 году «Крокодил» выхлопотал 15 тысяч фунтов стерлингов на постройку и оборудование специального здания лаборатории для Капицы. В феврале 1933 года в Кембридже состоялось торжественное открытие лаборатории. На торцевой стене 2-этажного здания был высечен по камню огромный, во всю стену крокодил. Его по заказу Капицы сделал известный скульптор Эрик Гилл. Резерфорд сам объяснил, что это он. Входную дверь открыли позолоченным ключом в форме крокодила.

Прошло около 60 лет, и когда сегодня вдоль здания этой лаборатории проходит группа туристов, на вопрос о крокодиле гид отвечает: «Это мимолетная шутка одного из учеников профессора Резерфорда». А ведь это не «мимолетная шутка», а Памятник. Памятник дружбе между учителем и учеником, английским физиком Резерфордом и советским физиком — основателем и первым директором Института физических проблем Петром Леонидовичем Капицей.

Вот о чем мог бы рассказать гид в Кембридже, ведя группу мимо здания лаборатории с ползущим по стене крокодилом.

В. З. Бульванкер

НЕСКОЛЬКО ДОПОЛНЕНИЙ К УРОКУ ЛИТЕРАТУРЫ,

или Еще раз о научном предвидении

Кандидат физико-математических наук
П. Б. БЕРНШТЕЙН

Рассказывают, что когда Давида Гильберта спросили о судьбе одного из его учеников, он сказал: «Ах, этот! Он стал поэтом. Для математика у него слишком мало воображения!».

Отдадим должное остроумию великого математика. Но ... Трудно сказать, какого ученого потеряла наука в лице упомянутого ученика, но думает-

лазер
кибернетика
роботы
энергия атома

ся, что литература приобрела не такого уж хорошего поэта. Ибо богатое воображение не однажды позволяло писателям и поэтам в своих произведениях предсказывать великие открытия и технические достижения.

Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить уже ставшие хрестоматийными строки, написанные в 1921 году известным поэтом-символистом Андреем Белым:

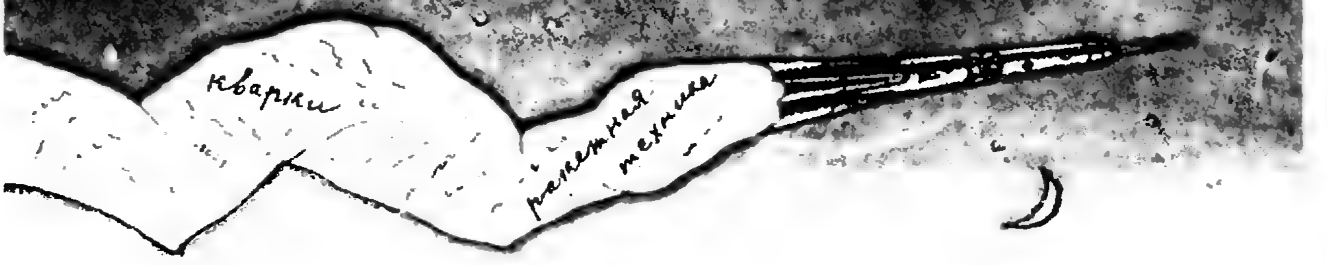
Мир — рвался в опытах Кюри
Атомной, лопнувшею бомбой
На электронные струи
Невоплощенной гекатомбой...

Вдумайтесь только — в 1921 году! За полтора десятка лет до того, как ученые-физики начали работать над созданием бомбы, и почти за четверть века до кошмара Хиросимы! Поразительно и указание пути — опыты Кюри,— и само слово «бомба», и понимание (или предчувствие?!) возможных последствий освобождения энергии атома: гекатомба — это массовое уничтожение, одновременная гибель множества людей. Так поэт провозгласил вступление в атомный век.

И этот пример не единственный.

Еще в 1623 году появился утопический роман английского философа-материалиста Фрэнсиса Бэкона «Новая Атлантида». (Если бы это произведение увидело свет два века спустя, его уже отнесли бы к жанру научно-фантастической литературы — жанру, которому «по долгу службы» свойственно заглядывать в будущее.) Говоря о научных достижениях жителей Новой Атлантиды, Бэкон пишет об изобретениях, осознанная потребность в которых могла возникнуть много позже. Зачем бы жителю XVII века понадобилось использовать «водопады, служащие для получения многих видов движения»? Уж не закон ли сохранения энергии открыли в Новой Атлантиде? Что общего (с точки зрения жителя XVII века) между падающей водой и сильными магнитами, если даже об электричестве, не говоря уж о гидроэлектростанциях, узнáют много позже? И наконец, может быть лазер имел в виду английский мыслитель, когда устами одного из жителей Атлантиды говорил: «умеем ... усиливать свет, который передаем на большие расстояния и можем делать столь ярким, что при нем различимы мельчайшие точки и линии»? Причем, заметьте, жители прекрасной страны не собираются с помощью света воевать и добираться до подземных сокровищ, как спустя триста лет сделает другой литературный герой — инженер Гарин.

Следующий пример касается кибернетики (точнее — технической кибернетики). Конечно, никому не придет в голову покушаться на авторитет Норберта Винера. Но все-таки... Издавна в различных произведениях фигурировали «механические люди». Материалы и способы изготовления этих, пользуясь современной терминологией, роботов были различными. Так, средневековый алхимик Лев бен Бецалель, по преданию, изготовил своего Голема из глины. Отражена в литературе и попытка получить гомункулуса — существо, подобное человеку,— в колбе (см., например, «Фауст» Гёте). Но давайте откроем пьесу Карела Чапека «R. U. R.». В этой пьесе впервые прозвучало столь часто используемое сейчас слово — робот. Приведем лишь пару строк из этой пьесы: «...выпускать живые, наделенные интеллектом, рабочие машины», «...компания выпускает товар нескольких сортов ...есть роботы более примитивные и более сложные». Замечательный чешский писатель предсказал очень многие аспекты технической кибернетики, в том числе возможности изготовления роботами новых роботов, создания роботов с узкой специализацией и т. д...



Так в 1920 году роботы начали свое победоносное шествие. И очень скоро это понятие перекочевало в работы ученых.

Конечно же, заслуга Карела Чапека не в том, что он ввел слово, впоследствии понравившееся ученым (как это произошло со словом «кварк», услышанным в кошмарном сне героем английского писателя Джеймса Джойса «Поминки по Финнегану»: физики назвали кварками гипотетические фундаментальные частицы, из которых, как предполагают, состоят многие элементарные частицы). Строго говоря, и не Карел Чапек придумал слово «робот». Вот как он сам это описывает: «...в один прекрасный день ...автору пришел в голову сюжет ...пьесы. И пока железо было горячо, он прибежал с новой идеей к своему брату Йозефу, художнику, который в это время стоял у мольберта... Автор изложил сюжет так коротко, как только мог... „Но я не знаю, — сказал автор, — как мне этих искусственных рабочих назвать. Я бы назвал их лаборжи [по-видимому, от английского слова labour — П. Б.], но мне кажется, что это слишком книжно“. „Так назови их роботами“, — пробормотал художник, ...продолжая грунтовать холст...» В своей пьесе Чапек поставил вопрос об общественных последствиях технического прогресса, рассмотрел многие философские проблемы будущей науки — кибернетики. В дискуссии о пьесе он сказал: «Я хотел написать комедию, отчасти комедию науки, отчасти — комедию правды... Создание гомункулуса — идея средневековья; для того, чтобы она соответствовала условиям нашего века, процесс созидания должен быть организован на основе массового производства... Замысел человеческого разума вырвался в конце концов из-под власти человеческих рук, начал жить по своим законам». Думается, понятно, почему, создав механического (или, скорее, электронного) «человека», ученые вспомнили не Голема, не какого-нибудь другого гомункулуса, а роботов Карела Чапека.

И еще один пример. Кто разработал теорию многоступенчатого ракетного движения? Ответ на этот вопрос не затруднит никого. Конечно Константин Эдуардович Циолковский! Им высказаны многие основополагающие идеи, выведены формулы, указаны пути развития ракетной техники. Его вклад в науку общепризнан и неоспорим. Но идея (только идея!) о «двигателе с несколькими ступенями» была высказана в XVII веке французским писателем, поэтом и философом Сирано де Бержераком, имя которого конечно же известно многим по драме Э. Ростана. В произведении «Иной Свет, или Государства и империи луны», опубликованном в 1657 году, описан двигатель, с помощью которого герой добирается до нашего естественного спутника: «Как только пламя уничтожало один ряд ракет,— они были расположены по шесть штук,— благодаря запалу, помещенному в конце каждого ряда, загорался другой ряд»...

Поистине, нет предела человеческой фантазии. Но справедливости ради стоит заметить, что одно только богатое воображение не позволило бы писателям и поэтам стать предсказателями в науке. Необходимы и глубокие знания.

Борис Николаевич Бугаев, взявший себе литературный псевдоним «Андрей Белый», учился на физико-математическом факультете Московского университета.

Фрэнсис Бэкон окончил Кембриджский университет. Он обладал многими специальными знаниями, состоял в переписке с выдающимися учеными своего времени. Карл Маркс охарактеризовал его как «родоначальника английского материализма и всей современной экспериментирующей науки».

Карел Чапек учился в Сорбонне и в Пражском университете и был весьма сведущ во многих инженерных проблемах.

Одним из самых образованных людей своего времени был и Сирано де Бержерак. В салоне своего друга Пьера Гассенди — философа-материалиста, астронома, математика — Сирано встречался с Пьером Ферма, Рене Декартом; он интересовался теориями Коперника и Кеплера.

И в заключение хотелось бы привести без комментариев цитату из поэмы Семена Кирсанова «Зеркала» (1969 год):

«Но путь испытателя крут, особенно если беретесь за еще не изведанный труд. Сначала — гипотеза, нить... Но не бойтесь гипотез! Лучше жить в постоянных ушибах, спотыкаясь, ища. Но однажды сквозь мусор ошибок выглянет ключ. Возможно, что луч, ложась на стекло под углом, придает составным особый уклон, и частицы встают, как иглы ежа: каждая — снимок, колючий начес световых невидимок. ⟨...⟩

Но цель еще далека, а стекло безответно и гладко. Но уже шевелится догадка! Что, если выпрямить иглы частиц, возвратить, воскресить отражение? Я на верном пути! Так идти — от решения к решению, ни за что не назад! Нити лазеров скрещиваются и скользят. Вот уже что-то мерещится!».

Простите за длинную цитату, но мне кажется, что она имеет отношение к теме заметки. Что же мерещится? Не так интересно, если голография, а может быть, машина времени?...

„Квант" улыбается

О классификации

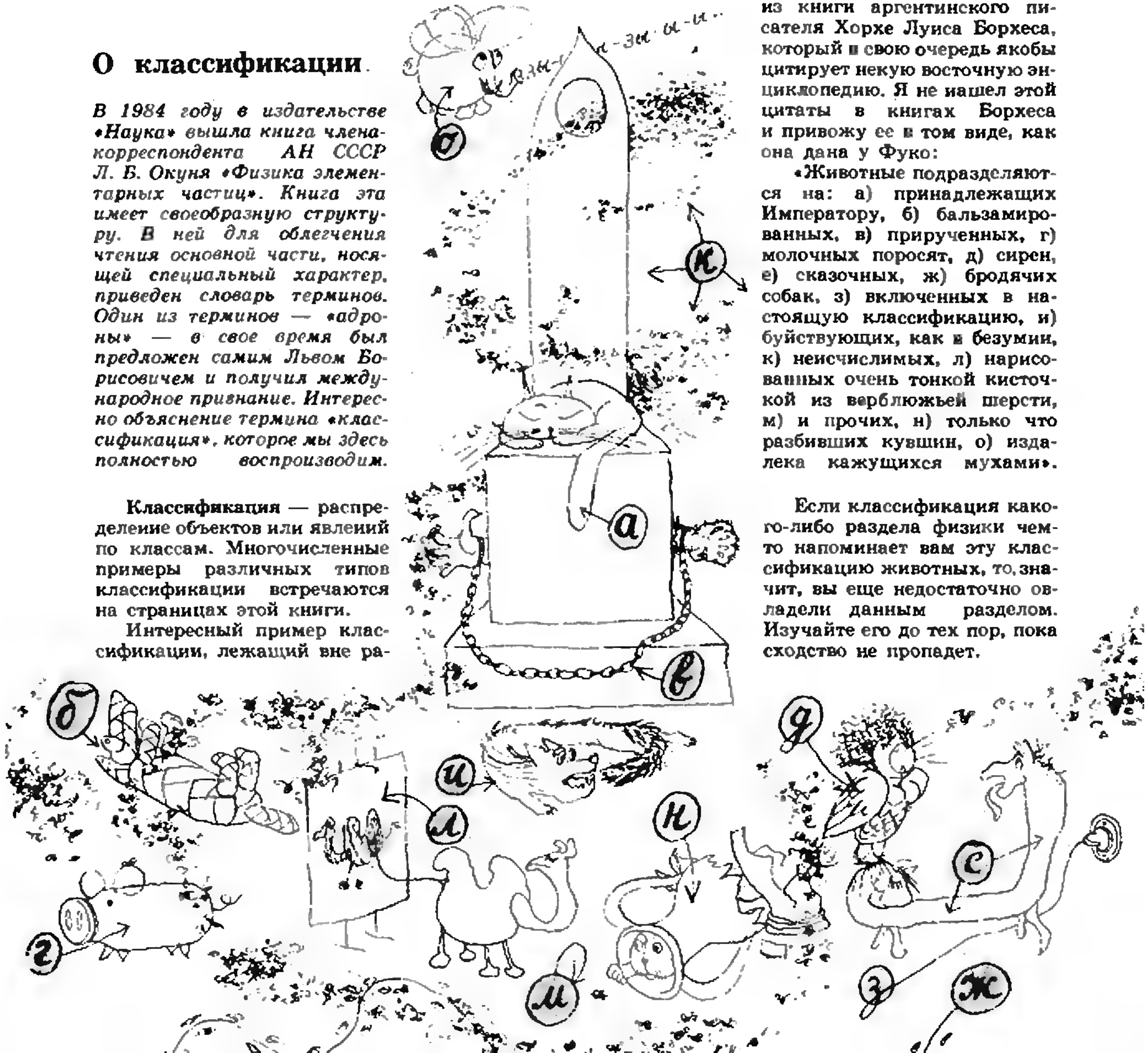
В 1984 году в издательстве «Наука» вышла книга члена-корреспондента АН СССР Л. Б. Окуня «Физика элементарных частиц». Книга эта имеет своеобразную структуру. В ней для облегчения чтения основной части, носящей специальный характер, приведен словарь терминов. Один из терминов — «адроны» — в свое время был предложен самим Львом Борисовичем и получил международное признание. Интересно объяснение термина «классификация», которое мы здесь полностью воспроизводим.

Классификация — распределение объектов или явлений по классам. Многочисленные примеры различных типов классификации встречаются на страницах этой книги.

Интересный пример классификации, лежащий вне рамок физики, приведен в книге «Слова и вещи» современного французского философа М. Фуко. По словам Фуко, эта классификация взята им из книги аргентинского писателя Хорхе Луиса Борхеса, который в свою очередь якобы цитирует некую восточную энциклопедию. Я не нашел этой цитаты в книгах Борхеса и привожу ее в том виде, как она дана у Фуко:

«Животные подразделяются на: а) принадлежащих Императору, б) бальзамированных, в) прирученных, г) молочных поросят, д) сирен, е) сказочных, ж) бродячих собак, з) включенных в настоящую классификацию, и) буйствующих, как в безумии, к) неисчислимых, л) нарисованных очень тонкой кисточкой из верблюжьей шерсти, м) и прочих, н) только что разбивших кувшин, о) издалека кажущихся мухами».

Если классификация какого-либо раздела физики чем-то напоминает вам эту классификацию животных, то, значит, вы еще недостаточно овладели данным разделом. Изучайте его до тех пор, пока сходство не пропадет.



Задачи

М1046—М1050, Ф1058—Ф1062

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 сентября 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6-87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1046» или «Ф1058». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

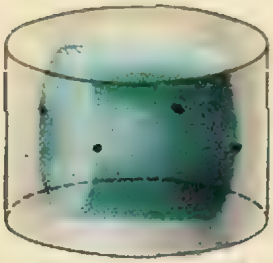


Рис. 1.

М1046. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $60°$. Докажите, что одна из биссектрис угла, образованного высотами, проведенными из вершин B и C, проходит через центр описанной окружности этого треугольника.

В. Погребняк, ученик 10 кл., Винница

М1047. В шахматном турнире, проводимом в один круг, не менее 3/4 всех сыгранных к некоторому моменту партий закончились вничью. Докажите, что в этот момент некоторые два участника набрали одинаковое число очков.

М. Бона, ученик гимназии, Венгрия

М1048*. Один из двух играющих («начинающий») ставит на некоторую клетку шахматной доски коня. Затем игроки по очереди передвигают коня по обычным правилам (буквой «Г»), при этом нельзя ставить коня на поле, где он уже побывал. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто может добиться победы (независимо от действий противника) — начинающий или его партнер а) на доске 8×8; б) на доске $m \times n$, где $m \geqslant n \geqslant 3$?

Б. Зудилин, ученик 10 кл., Бельцы

М1049. Будем говорить, что в цилиндр $Ц_1$ *вписан боком* другой цилиндр $Ц_2$, если две образующие второго цилиндра лежат на основаниях первого, а четыре точки окружностей основания второго — на боковой поверхности первого (рис. 1). Взяв цилиндр $Ц_1$, у которого отношение диаметра к высоте равно k, впишем в него боком (если это возможно) цилиндр $Ц_2$, в него впишем боком $Ц_3$, в него — $Ц_4$ и т. д. При каких значениях k
а) можно вписать $Ц_2$, но нельзя $Ц_3$;
б)* можно вписать $Ц_{10}$, но нельзя $Ц_{11}$;
в)* можно вписать бесконечную последовательность $Ц_n$ $(n = 1, 2, ...)$?

В. Столин, ученик 11 кл., Вильнюс

М1050. На отрезке $[-1, 1]$ выбрано k различных точек, для каждой посчитано произведение расстояний до остальных $k-1$ точек и через S обозначена сумма обратных величин этих k произведений. Докажите, что а) $S \geqslant 2$ при $k = 3$; б)* $S \geqslant 4$ при $k = 4$.

Л. Д. Курляндчик

Ф1058. Шарик катится вдоль ребра прямоугольного желоба ACB (рис. 2) со скоростью v без проскальзывания; расстояние AB равно радиусу шарика. Какие точки шарика обладают максимальной скоростью? Чему равна эта скорость?

С. С. Кротов

Ф1059. В некоторой точке пространства необходимо создать максимально возможную напряженность гравитационного поля (ускорение свободного падения), имея в распоряжении заданную массу вещества неизменной плотности.
а) Какую форму необходимо придать веществу?
б) Каково должно быть взаимное расположение тела и точки?

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Задачник „Кванта”

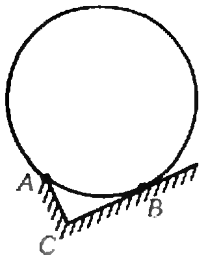


Рис. 2.

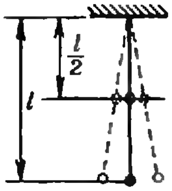


Рис. 3.

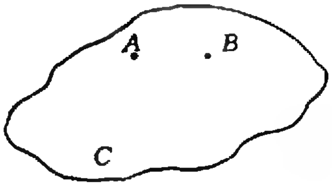


Рис. 4.

Ф1060. Математический маятник представляет собой невесомый стержень длиной l, к свободному концу которого прикреплен маленький массивный грузик. На стержень надета бусинка такой же массы, которая может свободно скользить по горизонтальной направляющей, проходящей на уровне середины стержня (рис. 3). Найти период малых колебаний такого маятника. Трение отсутствует.

Л. Г. Маркович

Ф1061. Пламя спиртовки, перед тем как погаснуть, начинает мерцать и потрескивать. Почему?

А. С. Бутов

Ф1062. Космическая частица, движущаяся со скоростью, близкой к скорости света, попадает в резервуар экспериментальной установки, наполненной жидкостью с показателем преломления $n=1{,}6$. Прохождение частицы через жидкость сопровождается свечением. Через небольшой промежуток времени после попадания частицы в резервуар был включен прибор, находящийся в точке C, который зафиксировал в момент включения две светящиеся точки A и B (схема опыта в определенном масштабе приведена на рисунке 4; дан вид сверху, точки C, A и B лежат в горизонтальной плоскости). Объясните наблюдавшееся явление и, используя рисунок, найдите скорость частицы. Торможением частицы в жидкости пренебречь.

А. И. Буздин

Problems

M1046—M1050, P1058—P1062

M1046. In the acute triangle ABC the angle A is 60°. Prove that one of the bissectors of the angle between the two altitudes drawn from the vertices B and C passes through the circumcircle of the triangle.

V. Pogrebnyak, 10th form student, Vinnitsa

M1047. In a one round chess tournament no less than 3/4 of the games concluded at some moment were drawn. Prove that at this moment at least two players had the same number of points.

Miklos Bona, gymnasium student, Hungary

M1048*. The first of two players places a knight on an empty chessboard. Then the players make ordinary moves in turn with the knight, never placing it in a position which it occupied before. The player who can't make such a move loses. Who can win (independently of his opponent's moves) — the first player or the second a) on an 8 by 8 board; b) on an m by n board, where $m \geqslant n \geqslant 3$?

V. Zudilin, 10th form student, Beltsy

M1049. We say the cylinder C_1 is *inscribed sideways* in the cylinder C_2 if two generators of the second cylinder lie on the base of the first, and four points of the base circle of the second are on the lateral surface of the first (see figure Рис. 1). Taking a cylinder C_1 whose altitude to diameter ratio is k, inscribe (if possible) a cylinder C_2 into C_1 sideways, then a cylinder C_3 into C_2 sideways, etc. For what values of k is it possible to

a) inscribe C_2, but not C_3;
b)* inscribe C_{10}, but not C_{11};
c)* inscribe an infinite sequence C_n, $n=2, 3, \ldots$?

V. Stolin, 11th form student, Vilnius

M1050. If k distinct points are chosen on the closed interval $[-1, 1]$ and the product of distances from a chosen point to the other $k-1$ points is computed for each chosen point, we denote by S the sum of inverses of these k products. Prove that a) $S \geqslant 2$ if $k=3$; b) $S \geqslant 4$ if $k=4$.

L. D. Kurlyandchik

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than 1 st september 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" adn the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant

problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

P1058. A ball bearing rolls along the side of a rectangular trough *ACB* (see figure Рис. 2) with velocity v without slipping; the distance *AB* is equal to the ball's radius. What points of the ball have maximal velocity? Find this velocity.

S. S. Krotov

P1059. At some point of space it is necessary to create the strongest possible gravitational field using a given mass of matter of constant density.
a) What shape should the matter be given?
b) How should the body be placed with respect to the point?

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

P1060. A mathematical pendulum consists of a weightless rod of length l whose free extremity is supplied with a small massive weight. There is a small bead of the same mass on the rod; this bead slides freely along a horizontal directrix on the level of the rod's midpoint (see figure Рис. 3). Find the period of small oscillations of this pendulum. Friction is negligible.

L. G. Markovich

P1061. Before going out, the flame of an alcohol lamp flickers and crackles. Why?

A. S. Butov

P1062. A cosmic particle moving with velocity near to that of light enters the reservoir of an experimental apparatus filled with a liquid of refraction index $n=1.6$. As the particle passes through the liquid, it scintilliates. In a small period of time after the particle entered the reservoir the instrument *C* was turned on and registered two scintillating points *A* and *B* (a scheme of the experiment in a certain scale is shown on figure Рис. 4; it shows the experiment from above the points *C*, *A* and *B* being in the horizontal plane, $CA:AB:BC=1.5:1:2$). Explain the observed effect and, using the picture, determine the velocity of the particle. The slowing down of the particle by the liquid is negligible.

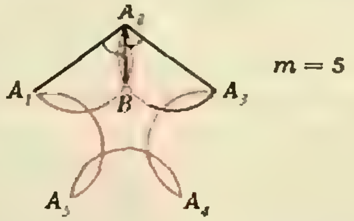
A. I. Buzdin

Решения задач

M1026—M1030, Ф1038—Ф1042

M1026. *а) Пять равных дуг AB, BC, CD, DE, EA расположены так, что каждая делится соседними на три равные части. Найдите величину каждой дуги (в градусах).*
б) Тот же вопрос для «розетки» из m равных дуг, каждая из которых делится соседними на три равные части.

Ответ: а) 54°; б) $(1-2/m)\,270°$.
Решим задачу сразу в общем случае. Концы данных m дуг образуют m-угольник $A_1A_2...A_m$ (см. рисунок). Пусть B — точка пересечения дуг A_1A_2 и A_2A_3. Если угловая величина каждой дуги равна 3α, то $\angle A_1A_2B=\alpha$ (половина величины дуги A_1B). $\angle A_3A_2B=\alpha$, следовательно, $\angle A_1A_2A_3=2\alpha$. Точно так же находим, что все



углы многоугольника $A_1A_2...A_m$ равны 2α. А поскольку их сумма равна $(m-2)180°$, получаем уравнение $2m\alpha=(m-2)180°$, откуда $\alpha=(1-2/m)90°$, т. е. величина каждой из дуг — $(1-2/m)270°$.

А. В. Швецов

M1027. *Докажите, что число 1985!!+1986!! делится на 1987. (Через n!! обозначается произведе-*

Поскольку $1986!!=(1987-1)(1987-3)(1987-5)...$ $...(1987-1985)$, остаток от деления этого числа на 1987 равен остатку от деления произведения

$$(-1)(-3)(-5)...(-1985)=(-1)^{1986/2}1985!!=-1985!!$$

ние всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих ту же четность, т. е. $n!!=n(n-2)(n-4)\dots$)

на 1987, следовательно, $1985!!+1986!!$ делится нацело на 1987.

Заметим, что согласно так называемой *теореме Вильсона* $(p-1)!+1$ делится на p при любом простом p, число $1986!=1985!!\cdot 1986!!$ при делении на 1987 дает в остатке 1, поскольку 1987 — число простое. Поэтому остаток от деления одного из чисел 1985!! или 1986!! на 1987 равен 1 (а другого — 1986). Какого именно — мы предлагаем выяснить читателям.

В. В. Произволов

М1028. *а) На плоскости заданы две пересекающиеся прямые и на них отмечено по одной точке (D и E). Постройте треугольник ABC, у которого биссектрисы AE и CD лежат на данных прямых, а их основания — данные точки E и D.*
б) Докажите, что если при этом $\angle CDE=30°$, то один из углов треугольника ABC равен 60° или 120°.*

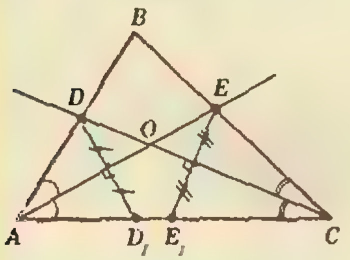


Рис. 1.

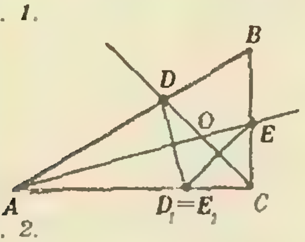


Рис. 2.

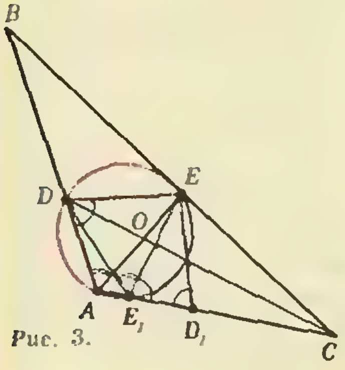


Рис. 3.

а) Заметим, что прямая AC должна проходить через точки D_1 и E_1, симметричные D и E относительно данных прямых (рис. 1). Отсюда вытекает следующее построение:

отражаем точки D и E относительно данных прямых OE и OD (O — точка их пересечения); проводим через их образы D_1 и E_1 прямую до пересечения с DO — в точке C и с EO — в точке A (если $D_1=E_1$, то прямую через D_1 проводим произвольно, но так, чтобы она пересекала лучи DO и EO, рис. 2); находим третью вершину B искомого треугольника как точку пересечения прямых AD и CE.

Это построение не всегда осуществимо: может оказаться, что $D_1E_1 \parallel DO$, $D_1E_1 \parallel EO$ или $AD \parallel CE$. Но и в том случае, когда треугольник «построится», прямые AE и CD могут оказаться биссектрисами не внутренних, а внешних его углов. Из равенств

$$\angle DOE=\angle AOC=180°-\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=90°+\frac{1}{2}\angle B \tag{1}$$

следует, что задача разрешима только при $\alpha=\angle DOE>90°$. Но это условие не является еще достаточным. Дополнительно надо гарантировать существование точек A и C, а также чтобы точки D, O и E лежали по одну сторону от прямой AC. Можно показать, что задача разрешима тогда и только тогда, когда

$$-2\cos\alpha<DO:EO<-1/2\cos\alpha \text{ при } \alpha\neq 120°$$

(в этом случае решение единственно) или когда

$$DO=EO,\ \alpha=120°$$

(в этом случае $D_1=E_1$, решений бесконечно много). Подробности исследования оставляем читателям.

б) Построим точки D_1 и E_1, как в решении задачи а). Треугольник DEE_1 — правильный ($\angle EDE_1=2\angle EDO=60°$, $DE=DE_1$). Если $D_1=E_1$ (рис. 2), то DO и EO — биссектрисы этого треугольника, следовательно, O — его центр и $\angle DOE=120°$. По равенству (1) угол B равен 60°.

Пусть теперь $D_1\neq E_1$ (рис. 3). Поскольку $EE_1=ED=ED_1$, треугольник D_1EE_1 — равнобедренный, а значит,

$$\angle EE_1A=180°-\angle ED_1A=180°-\angle EDA \tag{2}$$

(здесь мы пользуемся тем, что точки E_1 и D_1 лежат внутри угла AOC, т. е. по одну сторону от A, так как угол DOE — тупой). Из равенства (2) следует, что точки A, D, E и E_1 лежат на одной окружности (рис. 3). Поэтому $\angle EAD=\angle EE_1D=60°$, а $\angle BAC=2\angle EAD=120°$.

М. Волчкевич, В. Н. Дубровский

М1029. *Среди n членов арифметической прогрессии удалось выбрать k членов, образующих возрастающую геометрическую прогрессию. Докажи-*

Поделим все члены геометрической прогрессии на первый и выпишем их по возрастанию. Тогда она примет вид $1, q, \dots, q^{k-1}$, где $q>1$. Все эти числа входят в некоторую n-членную арифметическую прогрессию; ее будем тоже считать возрастающей (иначе поменяем знак ее разности). Члены арифметической прогрессии, *те, что*

$$n \geqslant 2^{k-1}.$$

меньшие 1 и бо́льшие q^{k-1}, отбросим; при этом ее длина не увеличится; можно считать с самого начала, что ее первый член равен 1, а последний, n-й, равен q^{k-1}; тогда $q^{k-1}=1+(n-1)d$, где d — разность арифметической прогрессии, $d>0$, так что $n=1+(q^{k-1}-1)/d$.

Поскольку каждое из чисел q^m, $m=1, \ldots, k-1$, входит в арифметическую прогрессию с первым членом 1 и разностью d, число $(q^m-1)/d$ является номером q^m как члена арифметической прогрессии, т. е. является натуральным. Отсюда следует, что отношение

$$\frac{(q^2-1)/d}{(q-1)/d}=q+1$$

рационально, а значит, q и d — рациональные числа. Представляем их в виде несократимых дробей: $q=u/v$, $d=a/b$; тогда

$$\frac{q-1}{d}=\frac{u-v}{a}\,\frac{b}{v},\quad \frac{q^{k-1}-1}{d}=\frac{u^{k-1}-v^{k-1}}{a}\,\frac{b}{v^{k-1}}.$$

Правые части этих равенств — натуральные числа, причем u и v, а также a и b взаимно просты, следовательно, $u-v$ делится на a, а b делится на v^{k-1}, т. е. $u-v\geqslant a$, $b\geqslant v^{k-1}$, причем $u>v\geqslant 1$. Теперь утверждение задачи вытекает из такой оценки:

$$n=1+\frac{u^{k-1}-v^{k-1}}{v^{k-1}}\,\frac{b}{a}\geqslant 1+\frac{u^{k-1}-v^{k-1}}{u-v}=$$

$$=1+(u^{k-2}+u^{k-3}v+\ldots+v^{k-2})\geqslant$$

$$\geqslant 1+(2^{k-2}+2^{k-3}+\ldots+1)=2^{k-1}.$$

Заметим, что при $q<0$ утверждение задачи неверно: например, числа 1, —2, 4 образуют и геометрическую, и арифметическую прогрессии.

В. Ф. Лев

М1030. *Для выпуклого многогранника M обозначим через $S(M)$ сумму площадей его граней, через $P(M)$ — сумму произведений длин всех его ребер на соответствующие им внешние углы многогранника (внешний угол при данном ребре — это угол между перпендикулярами к граням, примыкающим к ребру, и направленными во внешнюю область многогранника; он равен π минус величина соответствующего двугранного угла). Докажите, что если многогранник M_1 лежит внутри многогранника M_2,*

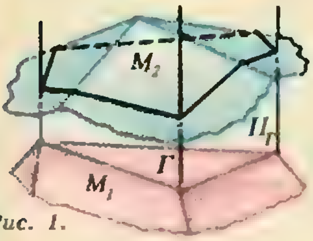


Рис. 1.

а) Для каждой грани Г меньшего многогранника M_1 рассмотрим множество Π_Γ, лежащих вне многогранника M_1, проекции которых на плоскость этой грани попадают на Г (Π_Γ — это бесконечная «прямая призма» с основанием Г, рис. 1). Поскольку многогранник M_1 — выпуклый, эти множества не пересекаются. Площадь той части поверхности многогранника M_2, которая лежит в Π_Γ, не меньше площади грани Г, поскольку площадь многоугольника не меньше площади его ортогональной проекции. Следовательно, $S(M_2)\geqslant S(M_1)$. Выпуклость большего многогранника здесь несущественна.

б) Обозначим через $V(M, r)$ объем *r-окрестности* многогранника M, т. е. множества точек, находящихся на расстоянии не более r от многогранника M. Оно состоит из самого многогранника, прямых призм высоты r, построенных на его гранях как на основаниях, частей цилиндров радиуса r, осями которых являются ребра M, и кусочков шаров радиуса r с центрами в вершинах M (рис. 2). Часть цилиндра при ребре AB — это «сектор», вырезаемый из него двугранным углом с ребром AB. По величине этот угол равен внешнему углу α многогранника при ребре AB, поэтому объем такого «цилиндрического сектора» равен $AB\cdot \alpha\cdot r^2/2$, а сумма всех объемов равна $P(M)r^2/2$. Кусочек шара $К_A$ при вершине A многогранника — это пересечение шара радиуса r с центром A и многогранного угла, который строится так: для каждой из граней многогранника, сходящихся в этой вершине, проводим из точки A перпендикулярный грани луч так, что многогранник и этот луч лежат по разные стороны от плоскости грани (*внеш-*

то

а) $S(M_1) \leqslant S(M_2)$;

б) $P(M_1) \leqslant P(M_2)$.

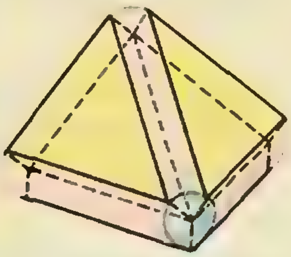


Рис. 2.

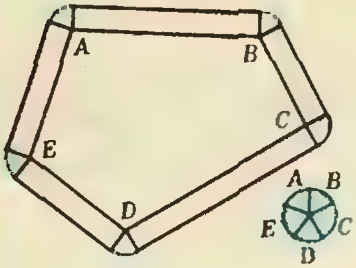


Рис. 3.

нюю нормаль) — эти лучи и задают нужный многогранный угол. Проведем из произвольной точки O лучи, сонаправленные всем внешним нормалям граней многогранника. Тогда плоские углы, образованные парами лучей, соответствующих смежным граням, разобьют пространство на несколько многогранных углов, причем каждый кусочек $К_A$ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AO}$ точно укладывается в один из этих углов. Поэтому все кусочки после переносов образуют целый шар*) и их общий объем равен $4\pi r^3/3$. На рисунке 3 показана r-окрестность многоугольника. При параллельном переносе голубые дольки составляют полный круг — сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 2π.

Таким образом,

$$V(M,r) = V(M) + S(M)r + \frac{1}{2} P(M)r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3,$$

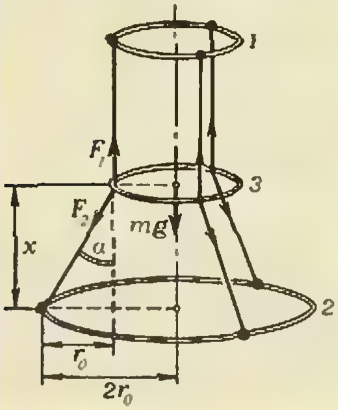
где $V(M)$ — объем многогранника M, и, следовательно, $V(M_2, r) - V(M_1, r)$ — квадратный трехчлен относительно r со старшим коэффициентом $(R(M_2) - P(M_1))/2$. А так как

$$V(M_1, r) \leqslant V(M_2, r)$$

при всех $r \geqslant 0$, этот коэффициент неотрицателен.

А. Б. Гончаров

Ф1038. *Три одинаковые нерастяжимые нити прикреплены на одинаковых расстояниях друг от друга к кольцу радиусом r_0 и аналогичным способом — к кольцу радиусом $2r_0$. Нити пропущены через третье кольцо радиусом r_0 (см. рисунок). Кольцо 1 закреплено в горизонтальной плоскости, и вся система находится в равновесии. Найти расстояние между центрами колец 2 и 3. Все кольца сделаны из одной и той же проволоки. Трением пренебречь.*



Поскольку радиус кольца *2* в два раза больше радиуса кольца *3*, его длина в два раза больше длины кольца *3*, и так как кольца сделаны из одинаковой проволоки, масса кольца *2* в два раза больше массы кольца *3*. Если m — масса кольца *3*, то полный вес, удерживаемый нитями, равен $3mg$. Следовательно, сила натяжения каждой нити между кольцами *1* и *3* —

$$F_1 = mg.$$

Так как трение отсутствует, сила натяжения каждой нити одинакова вдоль всей ее длины:

$$F_2 = F_1 = mg$$

(см. рисунок).

Запишем теперь условие равновесия кольца *3*:

$$3F_1 - mg - 3F_2 \cos\alpha = 0,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}.$$

Расстояние между центрами колец *2* и *3* (см. рисунок)

$$x = r_0 \operatorname{ctg}\alpha = r_0 \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = r_0 \frac{2}{\sqrt{5}},$$

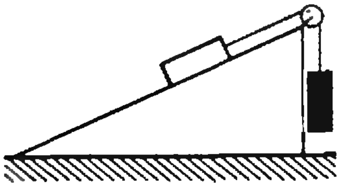
$$x = \frac{2r_0}{\sqrt{5}}.$$

В. П. Бородин

---

*) Определим величину внешнего (телесного) угла многогранника при вершине A как площадь сферической части поверхности кусочка $К_A$ при $r=1$. Из нашего рассуждения следует, что сумма внешних углов выпуклого многогранника равна 4π, т. е. не зависит от многогранника.

Ф1039. *К бруску, лежащему на наклонной плоскости, прикреплена нить, перекинутая через проволочную петлю; на другом конце нити висит грузик (см. рисунок). При этом брусок неподвижен. Когда грузик качнули, брусок начал двигаться. Объясните явление.*



Пусть масса грузика равна m, масса бруска — M, плоскость наклонена под углом α к горизонту, коэффициент трения скольжения равен μ.

В отсутствие качаний вдоль наклонной плоскости действуют сила трения покоя (ее максимальное значение равно $\mu N = \mu Mg\cos\alpha$), сила натяжения нити T и составляющая силы тяжести бруска, равная $Mg\sin\alpha$. Так как брусок неподвижен, то из условия равновесия грузика $T = mg \leqslant Mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$ (трением нити о петлю пренебрегаем).

При отклонении на небольшой угол φ_0 грузик начнет качаться. Для угла $\varphi \leqslant \varphi_0$ можно записать второй закон Ньютона для вращательного движения: $-mv^2/l = mg\cos\varphi - T$. Здесь l — расстояние от небольшого грузика до петли, v — скорость грузика в рассматриваемый момент.

Для малых углов $T \approx mg + mv^2/l$. По мере приближения к положению равновесия, т. е. с ростом скорости, натяжение нити T увеличивается, все время превышая значение mg. Наконец, эта увеличивающаяся сила превышает удерживающие брусок силы, и тогда брусок начинает движение. Это наступает при условии

$$mg + \frac{mv_1^2}{l} > Mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha),$$

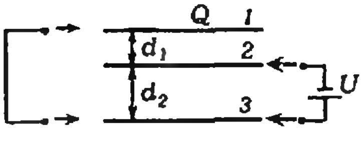
т. е. при $v_1^2 > gl(M(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) - m)/m$.

Движение бруска будет продолжаться и после прохождения положения равновесия, когда скорость и, следовательно, сила натяжения начнут уменьшаться. Даже после прохождения значения скорости грузика v_1 брусок еще некоторое время будет продолжать перемещаться по инерции, расходуя накопленную кинетическую энергию на работу против силы трения и «скатывающей силы».

После остановки бруска, когда грузик начнет после максимального отклонения при колебании опускаться, процесс пойдет в обратном направлении. Грузик опять наберет скорость, и нить снова рывком «сдернет» брусок, заставляя его пройти некоторое расстояние, меньшее по сравнению с предыдущим. Постепенно процесс затухнет.

Г. В. Меледин

Ф1040. *Три одинаковые проводящие пластины площадью S каждая расположены параллельно друг другу на расстояниях d_1 и d_2 (см. рисунок). Вначале на пластине 1 находился заряд Q, а пластины 2 и 3 были незаряжены. Затем пластины 2 и 3 присоединяют к батарее с напряжением U, пластины 1 и 3 соединяют проводником. Найти установившиеся заряды на пластинах.*



Пусть установившиеся заряды на пластинах *1*, *2* и *3* равны соответственно q_1, q_2 и q_3.

Будем считать, что поля между пластинами однородны (т. е. пренебрежем искажением поля на краях пластин). Тогда для напряженностей полей, создаваемых каждой пластиной, можно пользоваться выражением для напряженности поля бесконечной равномерно заряженной плоскости:

$$E = \frac{q}{2S\varepsilon_0}.$$

После соединения пластин *1* и *3* проводником потенциалы пластин становятся равными. Следовательно,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_2 = U$$

(так как разность потенциалов пластин *3* и *2* равна напряжению источника). С другой стороны,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E_{12}d_1, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = E_{23}d_2,$$

где E_{12}, E_{23} — проекции напряженностей полей между пластинами *1—2* и *2—3* на направление «от *1* к *3*». Согласно принципу суперпозиции

$$E_{12} = \frac{q_1 - q_2 - q_3}{2S\varepsilon_0},$$

$$E_{23}=\frac{q_1+q_2-q_3}{2S\varepsilon_0}.$$

Таким образом,

$$\frac{q_1-q_2-q_3}{2S\varepsilon_0}d_1=U, \qquad (1)$$

$$\frac{q_1+q_2-q_3}{2S\varepsilon_0}d_2=-U. \qquad (2)$$

Учитывая, что согласно закону сохранения заряда

$$q_1+q_2+q_3=Q, \qquad (3)$$

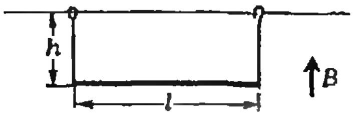
из уравнений (1)—(3) находим:

$$q_1=\frac{Q}{2}+\frac{S\varepsilon_0U}{d_1},\ q_3=\frac{Q}{2}+\frac{S\varepsilon_0U}{d_2},$$

$$q_2=-S\varepsilon_0U\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right).$$

В. Н Иванченко

Ф1041. *Проводящий стержень длиной l и массой m подвешен на двух невесомых жестких стержнях длиной h к горизонтальной оси (см. рисунок). Эта рамка находится в однородном вертикальном магнитном поле, индукция которого B. Через рамку пропускают импульс тока I_0 малой длительности τ. Определить максимальное отклонение рамки от вертикальной плоскости. Смещение рамки за время τ очень мало.*



При малом смещении рамки за время τ результирующая сила, действующая на стержень, есть

$$F=I_0Bl.$$

За это время стержень приобретает импульс

$$p=mv=F\tau=I_0Bl\tau,$$

и кинетическая энергия стержня становится равной

$$E=\frac{mv^2}{2}=\frac{p^2}{2m}=\frac{I_0^2B^2l^2\tau^2}{2m}.$$

В дальнейшем при отклонении рамки потенциальная энергия стержня увеличивается за счет уменьшения его кинетической энергии. В крайнем положении рамки при максимальном угле отклонения $\alpha_{\max}$ потенциальная энергия равна

$$U=mgh\,(1-\cos\alpha_{\max})=2mgh\sin^2\frac{\alpha_{\max}}{2}.$$

Из закона сохранения энергии —

$$\frac{I_0^2B^2l^2\tau^2}{2m}=2mgh\sin^2\frac{\alpha_{\max}}{2}$$

— находим:

$$\sin\frac{\alpha_{\max}}{2}=\frac{I_0Bl\tau}{2m\sqrt{gh}}.$$

В. В. Пай

Ф1042. *Оцените, на каком расстоянии железнодорожные рельсы кажутся слившимися. Предполагается, что вы, хорошо представляя физику наблюдаемого явления, можете сами задать числовые значения необходимых величин.*

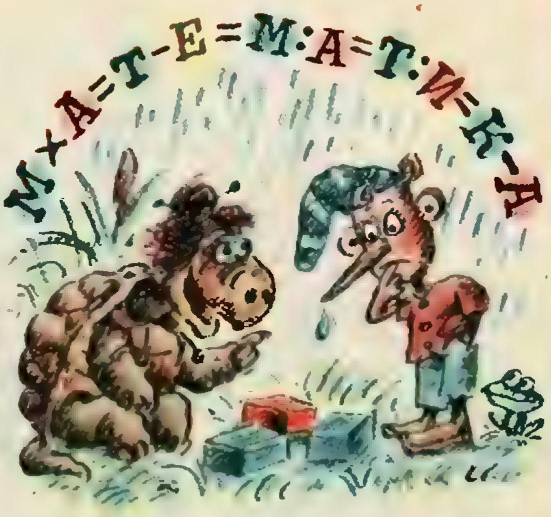
Для проведения оценки можно поступить следующим образом. Поставьте на листе бумаги две точки очень близко друг к другу — например, на расстоянии $l\approx1{,}5$ мм. Удаляя лист от глаз, оцените расстояние, на котором точки сольются в одну. Если у вас нормальное зрение, это расстояние $d\approx2$ м. Угол $\alpha\sim\frac{l}{d}$ — минимальное угловое расстояние между точками, при котором они различимы глазом как два объекта. Этот угол характеризует ваш глаз.

Рельсы будут казаться вам слившимися, когда угловое расстояние между ними будет α. Если рельсы находятся на расстоянии $L\approx1{,}5$ м один от другого, то они сольются в точку на расстоянии $D\sim\frac{L}{\alpha}\sim\frac{Ld}{l}\approx2$ км.

П. И. Зубков

„Квант" для младших школьников.

Задачи



1. Замените буквы цифрами так, чтобы получились верные равенства (см. рисунок). При этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

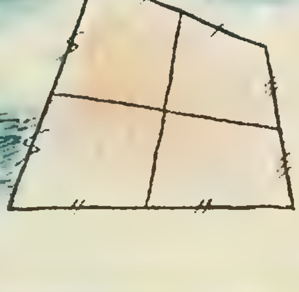
2. Говорят, что Тортила отдала золотой ключик Буратино не так просто, как рассказал А. Н. Толстой, а вынесла три коробочки: красную, синюю и зеленую. На красной коробочке было написано «Здесь лежит золотой ключик», на синей — «Зеленая коробочка пуста», а на зеленой — «Здесь сидит гадюка». Тортила прочла надписи и сказала: «Действительно, в одной коробочке лежит золотой ключик, в другой — гадюка, а третья пуста, но все надписи неверны».

Где же лежит золотой ключик?

3. У Коли, Вити и Юры было 12, 14 и 22 ореха. Когда Коля отдал Вите столько орехов, сколько было у Вити, затем Витя отдал Юре столько орехов, сколько было у Юры, а Юра отдал Коле столько орехов, сколько оставалось у Коли, у всех ребят орехов оказалось поровну. Сколько орехов было у каждого?

4. Лихие капитаны парусников, перевозивших хлопок из Австралии в Англию, не стремились полностью загружать свои корабли, хотя были заинтересованы в перевозке большего количества хлопка. Почему?

5. Выпуклый четырехугольник разрезали по двум прямым, соединяющим середины противоположных сторон. Покажите, что из полученных четырех кусков всегда можно сложить параллелограмм.



Эти задачи нам предложили: В. Н. Русанов, А. П. Савин, С. В. Дворянинов, Л. П. Мочалов, В. В. Произволов.

И ОДИН В ПОЛЕ ВОИН

Кандидат физико-математических наук Б. С. АШАВСКИЙ

...оказалось, что
критическая
концентрация
зависит
от
формы
сосуда
обратно
пропорциональ

В начале прошлого века Англию взбудоражили известия о катастрофах в угольных шахтах — страшные взрывы уносили жизни тысяч шахтеров. Они происходили из-за воспламенения газа, который шахтеры назвали «рудничным». Понять причину внезапных взрывов не удавалось почти столетие. Только в 1916 году немецкий физико-химик Вальтер Нернст высказал предположение, что они происходят в результате реакций, которые можно назвать цепными. И еще почти 50 лет понадобилось для создания теории этого явления.

...Приходилось вам видеть каменные обвалы в горах? Один маленький камешек, случайно сорвавшийся со своего места, увлекает за собой огромные массы других камней, лавиной устремляющихся вниз. Попробуем оценить, сколько камней участвует в таком камнепаде. Пусть первый камень начинает свой путь на высоте 500 м и на каждом метре своего пути вовлекает в движение еще одного соседа. Каждый новый камень в свою очередь становится инициатором движения других, другие — следующих и т. д. Движение как бы передается по цепи. После одного метра пути в потоке будет два камня, после второго метра — четыре, после третьего — восемь и т. д. Когда лавина достигнет подножия горы, в ней уже должно быть 2^{500} камней. Это огромное, более чем 150-значное число! Конечно же, в реальной ситуации количество камней оказывается гораздо меньшим. Не все камни вовлекают в движение соседей, некоторые камни наталкиваются на препятствия на своем пути и останавливаются. Тем не менее число 2^{500} дает некоторое представление о масштабах цепного процесса. По сходной схеме развиваются и некоторые химические реакции.

Одно из самых распространенных веществ в природе — вода. Для образования молекулы воды — молекулы H_2O — должны встретиться три реагирующие частицы — два атома водорода и один атом кислорода. Поэтому для такой реакции водород и кислород надо смешать в количественном соотношении 2:1. Эта смесь называется «гремучим» газом. В 1817 году английский ученый Гемфри Деви обнаружил удивительное явление — в присутствии платины смесь водорода и кислорода реаги-

на
площади
его
спичек...

рует со взрывом. Без платины реакция идет медленно и только при очень высоких температурах.

При взаимодействии водорода с кислородом происходит нечто похожее на явление каменного обвала в горах, только еще быстрее, почти мгновенно. В обычных условиях водород и кислород — это газы с химическими формулами H_2 и O_2, т. е. каждая молекула состоит из двух атомов. Это их естественное и устойчивое состояние. Чтобы разорвать молекулу H_2 на два атома, надо затратить определенную энергию. Присутствие платины в газовой смеси облегчает разрыв молекулы H_2 на атомы — на ее поверхности реакция $H_2 \rightarrow 2H$ происходит относительно легко.

Образующийся на поверхности платины атом водорода крайне неустойчив, он стремится поскорее избавиться от своего вынужденного одиночества. Время его «холостой» жизни очень мало. Не зря в природе атомы водорода, кислорода и многих других веществ объединяются в неразлучные пары — молекулы. Активный атом водорода вызывает цепь дальнейших превращений, как один маленький камешек вызывает целый обвал в горах. При его взаимодействии с молекулой O_2 происходит реакция $H+O_2=OH+O$ — образуются сразу две активные частицы: «одинокий» атом кислорода и частица OH (ведь в ней до молекулы воды не хватает одного атома водорода, к которому она стремится быстрее присоединиться). Активные частицы — O и OH — далее взаимодействуют с молекулами водорода

$$OH+H_2=H_2O+H,$$
$$O+H_2=OH+H \text{ и т. д.}$$

В этих реакциях образуются не только устойчивые молекулы H_2O, но и новые активные частицы, которые снова взаимодействуют с молекулами водорода и кислорода с образованием новых молекул воды и новых активных частиц. Все элементарные реакции не независимы друг от друга, а представляют собой цепь взаимосвязанных событий. В каждой элементарной реакции образуется не только продукт реакции, но и закладывается основа для дальнейших взаимодействий — появляются новые активные частицы. (Вспомним, как при камнепаде в горах каждый новый камень вовлекает в движение своих соседей.) Платина только помогает начать цепь превращений (разложение молекулы H_2). Дальше реакция может идти и без ее участия.

Не всегда, видно, верна пословица: «Один в поле не воин». В цепной реакции один «воинственный» атом может повести за собой десятки миллионов своих соратников.

Именно цепные реакции приводили к взрывам в каменноугольных копях Англии. Образующийся «рудничный» газ мгновенно воспламенялся при зажигании ламп, освещающих шахты. Огонь в лампе помогал началу цепной реакции в «рудничном» газе (как платина в «гремучем» газе). За изобретение безопасной лампы для работы в шахтах была объявлена специальная награда. Через год Гемфри Деви и его молодому сотруднику Майклу Фарадею — будущему первооткрывателю явления электромагнитной индукции — удалось сконструировать безопасную лампу, в которой опасный газ по трубочкам отводился из области пламени. Сделали они это, ничего не зная о цепных реакциях.

Естественно, возникают вопросы: при каких условиях может начаться цепная реакция? существует ли сила, способная остановить или хотя бы замедлить такую лавину?

Эти вопросы изучались советскими учеными — академиком Н. Н. Семеновым и его сотрудниками. В частности, увеличивая концентрацию молекул (т. е. их количество в единице объема), они обнаружили, что цепной процесс начинается при вполне определенной — критической — концентрации. Ниже этой концентрации реакция не идет, а выше — носит лавинообразный характер. Как будто неведомый полководец отдает приказ о наступлении — и десятки миллионов частиц мгновенно идут в бой.

Более того, оказалось, что критическая концентрация зависит от формы сосуда и обратно пропорциональна площади его стенок. Вот как пишет об этом сам Н. Н. Семенов: «Отсюда был лишь один шаг до предположения, что активные частицы — скажем атомы кислорода,— доходя до стенок, захватываются ими, выбывают из игры и не могут далее вызвать реакцию. Два таких атома, встречаясь на стенке, образуют вновь неактивную молекулу кислорода, которая легко слетает в объем, очищая стенку. На пути цепи — от места ее зарождения внутри сосуда до стенок — происходит то или иное число реакций, возникает столько-то частиц. Чем уже сосуд, тем короче эта цепь, тем меньше в ней элементарных реакций, тем меньше успеет возникнуть разветвлений».

С увеличением концентрации увеличивается число активных частиц. С увеличением площади стенок сосуда их количество уменьшается, так как становится больше захваченных стенками сосуда и выбывших из игры частиц. Если постепенно заполнять сосуд реагирующими газами, то до определенной концентрации цепная реакция идти не может — на стенках оседает и успокаивается больше активных частиц, чем их образуется в объеме сосуда. Продолжая дальше заполнять сосуд газами (другими словами, увеличивая концентрацию), мы дойдем до такой критической концентрации, при которой активных частиц образуется больше, чем их гибнет на стенках. Поверхность сосуда уже не в силах справиться с такой лавиной активных частиц. Их становится слишком много. В этот момент происходит переход от инертного состояния до бурной реакции. Критическая концентрация — это граница, отделяющая зону «спокойствия» реакции от зоны «взрывной» активности. Она зависит не только от того, какие газы реагируют, но и от того, в каком сосуде эти газы находятся. Не один полководец управляет цепной реакцией, а сразу два. Первый — концентрация — зовет атомы в бой, второй — поверхность сосуда — пытается их остановить. Судья им критическая концентрация. Ниже нее — сильнее второй, выше — побеждает первый.

Если мы, поддерживая ту же концентрацию, будем уменьшать сосуд, то дойдем до такого размера, когда бо́льшая часть цепей вообще не успеет разветвиться. Тогда число погибших на стенке активных атомов окажется больше, чем число вновь образующихся в результате реакции. Лавина развиваться уже не сможет, и реакция практически прекратится.

Стенки сосуда — не единственная сила, способная успокоить активные частицы. Это могут сделать и чужие молекулы примесей, сталкиваясь с которыми частицы теряют свою активность. Ничтожные количества примесей могут очень сильно влиять на скорость цепных процессов.

Результаты опытов были неожиданными, и многие ученые им просто не поверили. Например, знаменитый немецкий химик Макс Боденштейн объяснил полученные результаты ошибкой эксперимента. Недоверчиво встретили результаты опытов Семенова даже его близкие коллеги. «Мне пришлось пережить немало неприятных часов»,— вспоминает ученый.

Это сегодня академик Н. Н. Семенов — основоположник новой науки — химической физики, автор классического труда «Цепные реакции», настольной книги многих физиков и химиков. А тогда, более 50 лет назад, ему потребовалось немало мужества, чтобы в сложной ситуации не потерять уверенности в правоте своих идей.

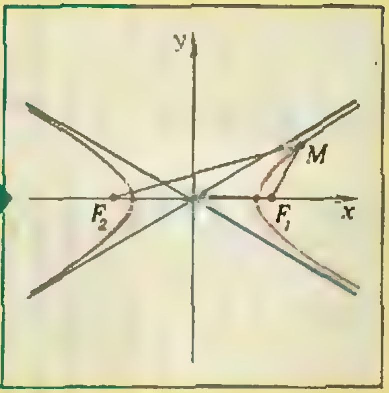
Цепные реакции лежат в основе многих важнейших промышленных технологий. Это и горение, и получение горючих материалов из нефти, и производство пластмасс. Даже взрыв атомной бомбы — это цепная реакция, только активными частицами в этом случае оказываются не атомы, а нейтроны. Когда ученики Семенова академики Ю. Б. Харитон и Я. Б. Зельдович создали в 1939 году теорию цепного распада урана, им во многом помогли представления о цепных реакциях.

Более 20 лет понадобилось миру, чтобы до конца осознать значение разветвленных цепных реакций. В 1956 году академик Н. Н. Семенов первым из советских ученых был удостоен Нобелевской премии за исследования механизмов химических реакций. В своей речи при ее получении он сказал: «Дальнейшей задачей химии является создание возможностей рационального управления скоростью и направлением химического превращения. Теория цепных реакций намечает первоначальные пути подхода к этому вопросу».

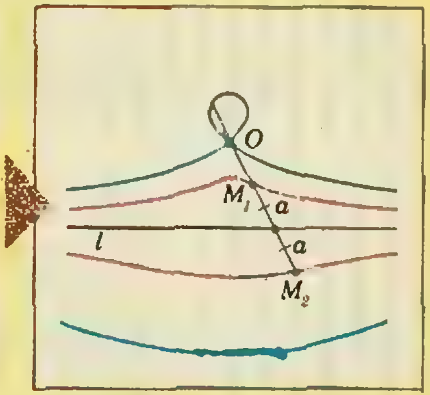
Калейдоскоп „Кванта"

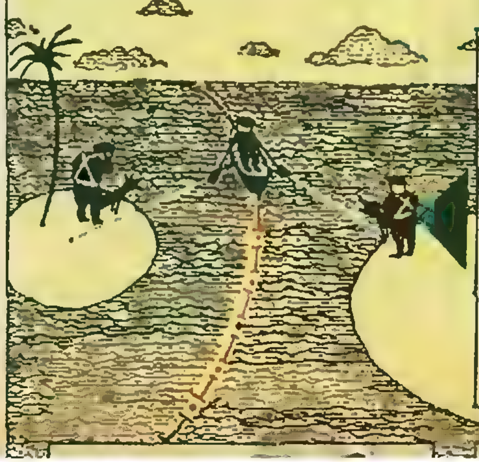
Замечательные линии и точки

Гипербола была известна еще древнегреческим математикам. Она определяется как множество точек, разность расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 постоянна. Эти точки называются *фокусами гиперболы*.

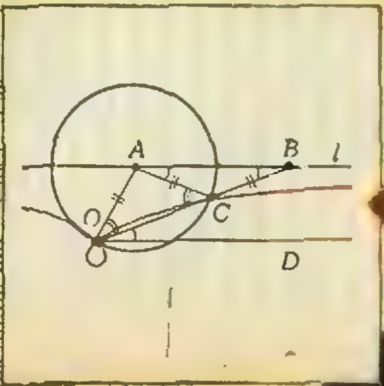


Менее известна другая кривая — *конхоида*. Она определяется так: на плоскости фиксируются прямая l и точка O и задается число a. Через точку O проводятся всевозможные прямые, на каждой из которых от точки пересечения с прямой l в обе стороны откладываются отрезки длины a. Вторые концы этих отрезков и образуют конхоиду.



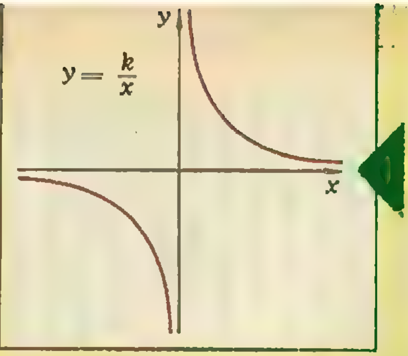


Представьте себе два круглых острова в океане и лодку, плывущую вдоль морской границы между этими островами, т. е. находящуюся во всякий момент на одинаковом расстоянии от берегов этих островов. Если размеры островов одинаковы, то путь лодки будет прямолинеен, а если нет, то лодка будет плыть по гиперболе.

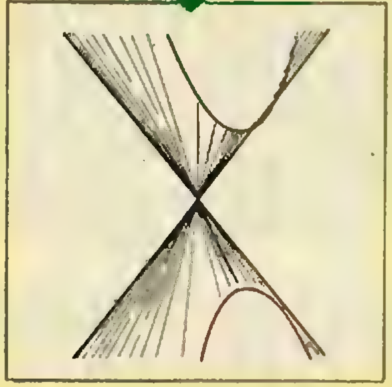


Древнегреческий математик Никомед (3 век до н. э.) решал задачу *трисекции угла* с помощью конхоиды. Проведем через точку A прямую l, параллельную прямой OD, окружность с центром в точке A и радиусом $a = AO$. Конхоида, построенная по прямой l, точке O и числу a, будет пересекаться с окружностью в точке C. Угол COD равен 1/3 угла AOD.

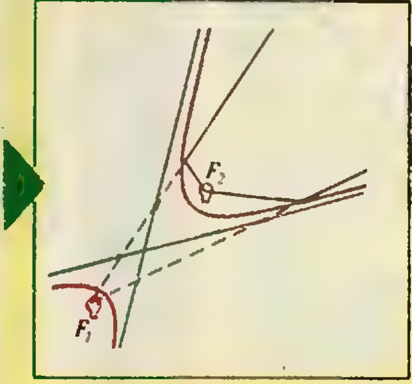
Гипербола — одно из конических сечений: ее можно получить, пересекая коническую поверхность плоскостью, не проходящей через ее вершину и пересекающей обе ее половинки. Другими коническими сечениями являются *парабола* и *эллипс*.



Гиперболой является график обратной пропорциональной зависимости: $y=k/x$. При удалении точек графика к бесконечности они прижимаются к одной из осей координат x или y. Эти прямые называются ее асимптотами. Асимптоты есть у любой гиперболы.



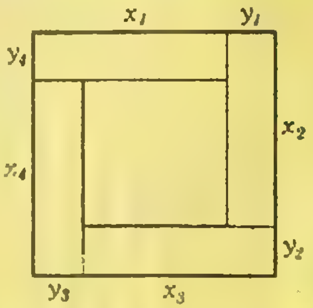
Если поместить в один из фокусов гиперболического зеркала источник света, то, отразившись в зеркале, свет будет продолжать двигаться так, как будто он исходит из второго фокуса гиперболы. Это оптическое свойство гиперболы. Его использовал Гарин в романе А. Н. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина».



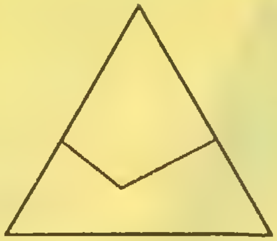
Конхоидой интересовался французский математик и философ Рене Декарт. На ней он демонстрировал, в частности, свой метод проведения касательных к кривым. В декартовых координатах уравнение гиперболы имеет вид $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, а конхоиды $(x^2+y^2)(y-h)^2=a^2y^2$ (h — расстояние от точки O до прямой l).

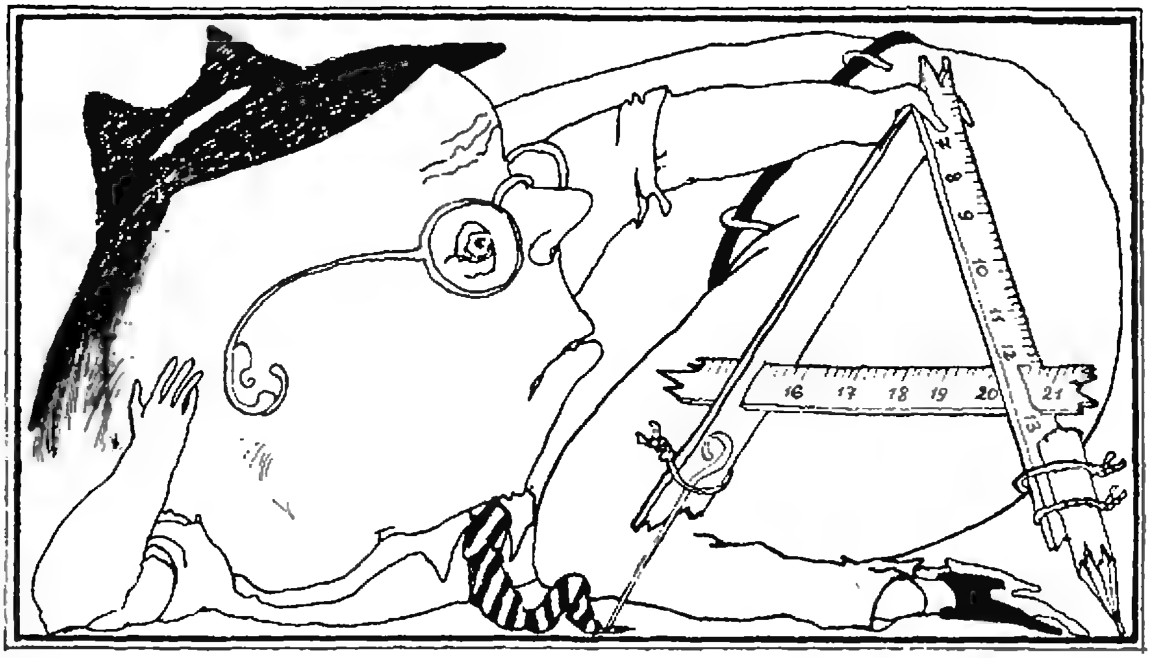
Головоломки

1. Квадрат разбит на пять прямоугольников так, как изображено на рисунке. Известно, что площади прямоугольников, примыкающих к границе квадрата, равны. Покажите, что центральный прямоугольник — это квадрат.



2. Какую наименьшую длину может иметь кривая, делящая площадь правильного треугольника со стороной а на две равные части?





Математический кружок

Построения одним циркулем

Кандидат физико-математических наук
Д. Б. ФУКС

Среди бесчисленных задач на построение встречаются такие, в которых построение требуется произвести одной линейкой или одним циркулем. Однако давно известно, что отсутствие линейки не сужает круга возможных построений: *всякое построение, выполнимое циркулем и линейкой, можно проделать одним циркулем.*

Идея о построении с помощью одного циркуля была выдвинута еще итальянским ученым Джованни Баттиста Бенедетти (1530—1590). В 1672 году появилась книга «Euclidus Danicus» датского геометра Георга Мора (1640—1697). В ней он показал, что все задачи, которые сводятся к квадратным уравнениям, можно решить геометрически с помощью одного циркуля. Более чем через 100 лет, в 1797 году, эта задача была вновь поставлена и решена итальянцем Лоренцо Маскерони (1750—1800). Соответствующее утверждение называют теперь *теоремой Мора — Маскерони.* В этой заметке мы приведем доказательство этой теоремы.

Во всех решаемых ниже задачах на построение мы ограничиваемся описанием самого построения, предоставляя читателю самостоятельно доказать, что построение приводит к желаемой цели. Впрочем, доказательства приведены в разделе «Ответы, указания, решения» на с. 58.

1. Формулировка результата. Разумеется, нельзя провести циркулем прямую, поэтому все рассматриваемые задачи на построение должны состоять в построении некоторой точки (на плоскости).

Теорема. *Предположим, что точка M может быть построена по точкам A_1, ..., A_n при помощи циркуля и линейки. Тогда точка M может быть построена по точкам A_1, ..., A_n при помощи одного циркуля.*

Чтобы доказать эту теорему, посмотрим, какие построения производятся линейкой. С помощью линейки можно провести через две данные точки прямую и найти ее точки пересечения с ранее построенными прямыми и окружностями. Но так как с самого начала нам были даны только точки, всякая ранее построенная прямая была некогда проведена через две еще ранее построенные точки, и всякая ранее построенная окружность имеет своим центром ранее построенную точку. Таким образом, в процессе построения линейка применяется только к решению одной из двух следующих задач.

Задача 1. *По данным точкам A, B, C, D найти точку пересечения прямых AB и CD.*

Задача 2. *По данной окружности S с данным центром O и данным точкам A и B найти точки пересечения окружности S с прямой AB.*

Наша теорема будет доказана, если мы установим, что обе эти задачи могут быть решены при помощи одного циркуля.

2. Вспомогательные построения. В этом и следующем пунктах, говоря «построение», мы подразумеваем построение одним циркулем. Мы начнем с решения четырех вспомогательных задач.

Задача 3. *Даны (различные) точки A и B. Построить на луче AB точку C такую, что $AC=2AB$.*

Построение (рис. 1). Проведем через точку A окружность с центром B. На этой окружности трижды отложим отрезок AB, начиная от точки A. Получившаяся при третьем откладывании точка C удовлетворяет требованиям задачи.

Задача 4. *Дана окружность с центром O и дуга AB на ней. Построить точку, делящую эту дугу пополам.*

Построение (рис. 2). Через точку O проведем окружности с центрами A и B. Проведем окружность с центром O радиусом AB. Возьмем две точки: P и Q пересечения этой окружности с двумя построенными; тогда дуги OP и OQ равны дуге AB. Затем через точки B и A проведем окружности с центрами P и Q до их пересечения в точке R. Наконец, радиусом OR проведем окружность с центром P или Q. Точка C пересечения этой окружности с дугой AB и будет искомой.

Задача 5. *Дана окружность S с центром O и точка $P\neq O$. На луче OP построить точку P' такую, что $OP\cdot OP'=r^2$, где r — радиус окружности S.*

(Такая точка P' называется симметричной точке P относительно окружности S.)

Построение. Случай 1. Точка P лежит вне окружности S (рис. 3). Проведем через точку O окружность с центром P. Пусть Q и R — точки ее пересечения с окружностью S. Проведем через точку O окружности с центрами Q и R. Отличная от O точка пересечения этих окружностей и есть искомая точка P'.

(Это построение проходит и в случае, когда точка P лежит внутри окружности S, но находится от ее центра O на расстоянии, большем $r/2$.)

Случай 2. Точка P лежит внутри окружности S. Пользуясь построением задачи 3, мы последовательно строим на луче OP точки P_2, P_3, ... такие, что $OP_2=2OP$, $OP_3=3OP$, ..., пока не дойдем до точки P_n, которая будет лежать вне S. Для точки P_n мы строим симметричную относительно окружности S точку P'_1, пользуясь предыдущим построением. Наконец, на луче OP'_1 (т. е. на луче OP) мы строим точки P'_2, P'_3, ... такие, что $OP'_2=2OP'_1$, $OP'_3=3OP'_1$, ... Точка P'_n и будет искомой.

Задача 6. *Даны окружность S с центром O и несовпадающие точки A, B. Построить окружность, проходящую через точку O и точки пересечения прямой AB с окружностью S (в предположении, что прямая AB не проходит через центр окружности S и пересекает ее в двух точках). Доказать, что эта окружность, за вычетом точки O, представляет собой геометрическое место точек, симметрич-

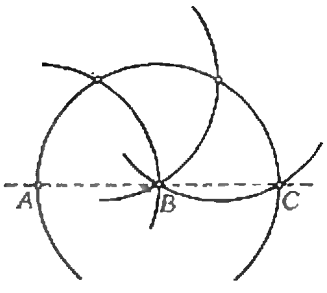


Рис. 1.

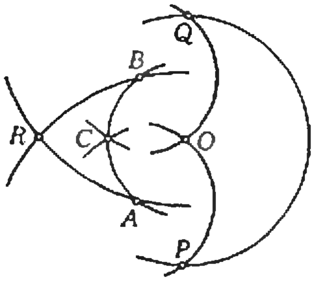


Рис. 2.

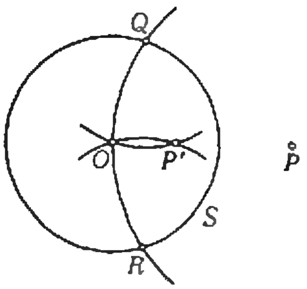


Рис. 3.

ных точкам прямой AB относительно окружности S.

Построение (рис. 4). Проведем через точку O окружности с центрами A и B. Точку их пересечения, отличную от O, обозначим через P. Построим точку P', симметричную точке P относительно окружности S (задача 5), и построим окружность с центром P', проходящую через O. Это и есть искомая окружность.

3. Основные построения. Построение к задаче 2. Если точка O не лежит на прямой AB, проходит построение задачи 6 и даже его упрощенный вариант: мы строим точку P, как в задаче 6, и затем проводим окружность с центром P радиусом, равным радиусу окружности S (зная центр окружности S, мы можем радиус окружности измерить циркулем); точки пересечения построенной окружности с данной окружностью — искомые точки. Если точка O лежит на прямой AB, то это построение не пройдет: точка P сольется с точкой O. Тогда мы применяем другое построение (рис. 5): с центром A (или с центром B, если $A=O$) проводим произвольную окружность, пересекающую окружность S в двух точках, обозначаем точки пересечения через C и D и делим дуги CD и DC окружности S пополам (задача 4). Точки деления и будут искомыми.

Построение к задаче 1 (рис. 6). Построим произвольную окружность S, внутри которой содержатся все данные точки и центр O которой не лежит ни на одной из прямых AB и CD. (Это легко сделать «на глазок», но для «строгого построения» такой рецепт не годится. Можно поступить так: построить произвольную окружность, найти, пользуясь построением задачи 2, точки ее пересечения с прямыми AB и CD и взять в качестве O точку построенной окружности, отличную от найденных точек.) Затем, пользуясь построением задачи 6, строим окружность S_1, проходящую через O и через точки пересечения окружности S с прямой AB, и окружность S_2, проходящую через O и через точки пересечения окружности S с прямой CD. Затем мы обозначаем через P точку пересечения окружностей S_1 и S_2, отличную от O, и строим точку P', симметричную точке P относительно окружности S. Это и есть искомая точка.

4. Заключительные замечания. 1°. Если данные задачи на построение включают в себя не только точки, линейка может оказаться для ее решения необходимой. Например: даны кривая c и точки A, B; найти точки пересечения кривой c с прямой AB. Это, вообще говоря, нельзя сделать без линейки. Однако бывает, что подобные задачи сводятся к задачам рассмотренного типа и решаются одним циркулем. Например: на плоскости нарисована окружность; пользуясь одним циркулем, найти ее центр. Это можно сделать так: отметим на окружности три точки A, B, C; как известно, циркулем и линейкой можно построить центр окружности, описанной около треугольника ABC; значит, это можно сделать и одним циркулем. (Впрочем, задача имеет гораздо более простое решение — найдите его!) Мы видим, кстати, что в задачах 2, 4, 5 и 6 не обязательно было указывать центр заданной окружности.

2°. Одной линейкой можно проделать не всякое построение, выполнимое циркулем и линейкой. (Доказательство см. в книге: Радемахер Г. и Теплиц О. Числа и фигуры. — М.: Наука, 1966.) Существует, однако, поразительная теорема Штейнера, согласно которой все построения, выполнимые циркулем и линейкой, могут быть проделаны одной линейкой, если на листе предварительно нарисована окружность и отмечен ее центр.

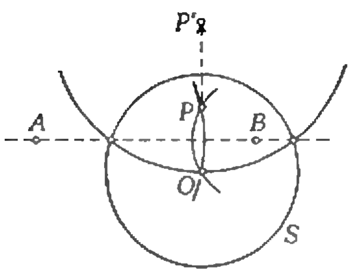


Рис. 4.

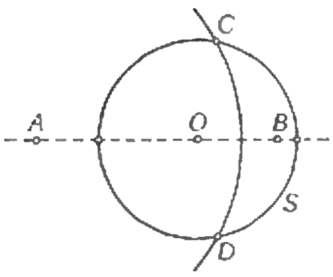


Рис. 5.

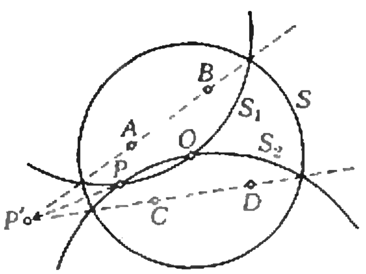


Рис. 6.

Значит, если вы собирались делать построения циркулем и линейкой и забыли дома линейку, не беда — можно обойтись одним циркулем; если же вы забыли циркуль — попросите его у товарища и нарисуйте им одну окружность, предварительно пометив ее центр; после этого вы можете построить что угодно одной линейкой. (Хуже, конечно, если вы забыли дома и циркуль, и линейку — здесь уж наука бессильна вам помочь.)

Размышляя об одной олимпиадной задаче

В. Я. САННИНСКИЙ

Олимпиадные задачи полезны не только для проверки математических способностей в жестких условиях соревнования. В более спокойной обстановке, когда есть время на размышление, конкурсная задача может стать источником небольшого самостоятельного исследования, чем-то напоминающего серьезное математическое творчество.

Я покажу это на примере следующей задачи на доказательство, встречающейся во многих конкурсных сборниках:

Если все простые числа, начиная с 5, занумерованы в порядке возрастания, то каждое занумерованное простое число будет больше своего утроенного номера.

Попробуйте доказать это самостоятельно. Это не очень трудно, я, например, придумал доказательство довольно быстро*). Однако после этого я не бросил задачу, а стал размышлять над ее формулировкой. И сразу возник вопрос: при чем здесь числа 5 и 3, нельзя ли взять другие числа? Это подсказывает обобщение задачи — вместо пары чисел (3, 5) рассмотреть произвольную пару (k, p), где k — натуральное, а p — простое. Получилось утверждение, которое я назвал

У (k, p): если все простые числа, начиная с p, занумеровать в порядке возрастания, то каждое занумерованное простое число больше чем его номер, умноженный на k.

Одна беда. Это утверждение не всегда верно (не для всех k и p). Например, У (3,3) — ложно (простое число 13 меньше, чем его утроенный номер: $13<3\times5=15$). С другой стороны, мы знаем, что У(3, 5) — верно (это утверждение нашей исходной задачи). Ну а тогда возникает задача описания всех *хороших* пар (k, p), то есть таких пар, для которых У (k, p) верно.

Чтобы решить ее, я начал пробовать различные небольшие пары, и быстро нашел несколько нехороших (например (4, 5), (6, 3)) и несколько хороших пар ((1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 7)). Советую читателю прервать чтение на этом месте и тоже попробовать несколько конкретных небольших пар.

Даже если читатель не последовал моему совету, он легко поймет, что из справедливости У (k, p) вытекает справедливость $U(k', p')$, если $k'\leqslant k$ и $p'\geqslant p$. Я тоже это быстро заметил и поэтому решил не искать все хорошие пары, а искать только *неулучшаемые* пары (k, p), то есть такие, для которых верно У(k, p), но ложно У(k', p) при $k'>k$ и ложно У(k, p') при $p'<p$. Так возникла новая задача: *найти все неулучшаемые пары.*

Упражнение 1. *Докажите, что пары (1, 2), (2, 3) и (3, 5) неулучшаемы.*

Я это доказал, как наверно и читатель, без особого труда и взялся за следующую пару — (4, 7). Она оказалась не хорошей: $7>4\cdot1$, $11>4\cdot2$, $13>4\cdot3$, $17>4\cdot4$, но неверно, что $19>4\cdot5$. Я перешел к следующей паре — (4, 11) — и начал пробовать $11>4\cdot1$, $13>4\cdot2$, ..., $29>4\cdot6$, $31>4\cdot7$, ... Вскоре мне это надоело, и я решил, что у меня есть правдоподобная гипотеза: пара (4, 11) неулучшаема. Признаюсь, мне пришлось немало повозиться, прежде чем я сумел установить справедливость этой гипотезы.

---

*) Я воспользовался тем, что среди девяти последовательных чисел $9n$, $9n+1$, ... $9n+8$, $n=1, 2, 3, \ldots$, может встретиться не более трех простых.

Рассуждал я так. Пусть $p_1=11$, $p_2=13$, ..., p_n, ... интересующая нас нумерация. Чтобы доказать $У(4, 11)$, нужно установить неравенство $p_n>4n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Возьмем число $m=210=2\cdot3\cdot5\cdot7$ (произведения всех простых чисел, меньших 11) и разобьем множество натуральных чисел $n\geqslant 11$ на m классов, в зависимости от остатка при их делении на m. Именно, к r-ому классу K_r, $r=0, 1, ..., m-1$ отнесем все числа вида $n=tm+r$, где $t\in\mathbb{N}$. Тогда каждое натуральное число n попадает ровно в один класс K_r — именно, в класс с номером r, равным остатку от деления n на $m=210$. Выбросим из списка $K_0, K_1, ..., K_{m-1}=K_{209}$ все классы, номера которых — составные числа. Другими словами, оставим в списке лишь те классы, номера которых взаимно просты с m. Заметим, что все рассматриваемые простые числа $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ находятся в оставшихся классах (почему?). Обозначим номера оставшихся классов через $a_1, a_2, a_3, ...,$ например, $a_1=11$, $a_2=13$, ..., $a_{47}=209$.

Упражнение 2. Найдите все номера (их $\varphi(m)=\varphi(210)=48$) оставшихся классов и проверьте, что для них выполняется неравенство $a_n>4n$, где $n=1, 2, ..., 48$.*)

Занумеруем теперь в порядке возрастания все числа, находящиеся в оставшихся классах. Этот список начнется с уже известных нам чисел $a_1, a_2, a_3, ...$, но не оборвется на $a_{48}=211$, а пойдет дальше: $a_{49}=217$, $a_{50}=221$, ... Тогда очевидно, что $a_n\leqslant p_n$ для всех $n=1, 2, ...$ (ведь наши простые числа $p_1, p_2, ...$ находятся среди оставшихся чисел $a_1, a_2, ...$). Поэтому нам достаточно доказать неравенство $a_n>4n$ (для всех n). Для первых 48 чисел $a_1, ..., a_{48}$ оно уже проверено (упражнение 2), для дальнейших n мы его докажем по индукции. Индукцию будет вести по вспомогательному параметру t при фиксированном r ($r=1, 2, ..., 48$), то есть проведем доказательство для всех чисел из класса с номером a_r. Любое число a_s из этого класса представляется в виде $a_s=t\cdot210+r$. Начало индукции уже есть (мы проверили, что при $t=0$ число a_r удовлетворяет неравенству $a_r>4r$). Пусть (индукционное предположение), $a_s=210\cdot t+r>4s$. Нам нужно установить неравенство $210(t+1)+r>4(s+48)$, ибо $s+48$ — номер следующего числа $210(t+1)+r$ из рассматриваемого класса (с номером a_r). Но оно сразу следует из индукционного предположения и очевидного неравенства $210>4\cdot48$. Утверждение $У(4, 11)$ доказано.

Упражнение 3. Проверьте, что при $k>5$ утверждение $У(k, 11)$ неверно.

Так как $У(4, 7)$ неверно тоже, мы установили, что пара (4, 11) действительно неулучшаема.

Попробуем продвинуться дальше — будем искать неулучшаемую пару вида (5, p).

Упражнение 4. Проверьте, что пары (5, p) не являются хорошими при $p<23$, также как и пара (6, 23).

Исследование пары (5, 23) ($23>5\cdot1$, $29>5\cdot2$, $31>5\cdot3$ и т. д.) приводит к очередной гипотезе: *пара (5, 23) неулучшаема.*

Справедливость этой гипотезы можно установить, рассуждая так же, как для пары (4, 11). То есть взять $m=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19=9699690$, рассмотреть классы вычетов по модулю m, из них выделить $\varphi(m)=1658880$ классов, взаимно простых с m, занумеровать все числа (начиная с 23) из выделенных классов в порядке возрастания ($a_1, a_2, ...$) и доказать по индукции, что неравенство $a_n>5n$ (из которого следует $p_n>5n$ для выбранной нумерации простых чисел $p_1=23$, $p_2=29$, ...) верно для любого числа a_n из данного класса, если оно верно для номера a_n этого класса. Тогда остается «только» проверить, что неравенство $a_n>5n$ выполняется для всех n от 1 до $\varphi(m)=1658880$. Конечно, эта проверка непосильна для человека. Пришлось ее поручить машине; ЭВМ ЕС — 1045 за 6 минут дала ответ: действительно, $a_n>5n$ при $n=1, 2, ..., \varphi(m)$. Гипотеза о неулучшаемости пары (5, 23) установлена.

В современной математике такое встречается часто: логическими рассуждениями математик сводит задачу проверки бесконечного набора утверждений (у нас — неравенств) к конечному (но большому) набору, а уже утверждения этого набора проверяет ЭВМ.

Каковы дальнейшие перспективы? Поиск следующей неулучшаемой пары (вида (6, p)) приводит к числам, на пределе возможности ЭВМ ЕС — 1045, а пары вида (7, p) — заведомо не поддаются нашему подходу. Поэтому я пробовал иначе обобщить исходную задачу и пришел к следующей формулировке:

Теорема. *Простые числа растут быстрее любой линейной функции от их номера; иначе говоря, если $p_1=2$, $p_2=3$, ..., p_n, ... последовательность всех простых чисел в порядке возрастания, то для любых k и b неравенство*

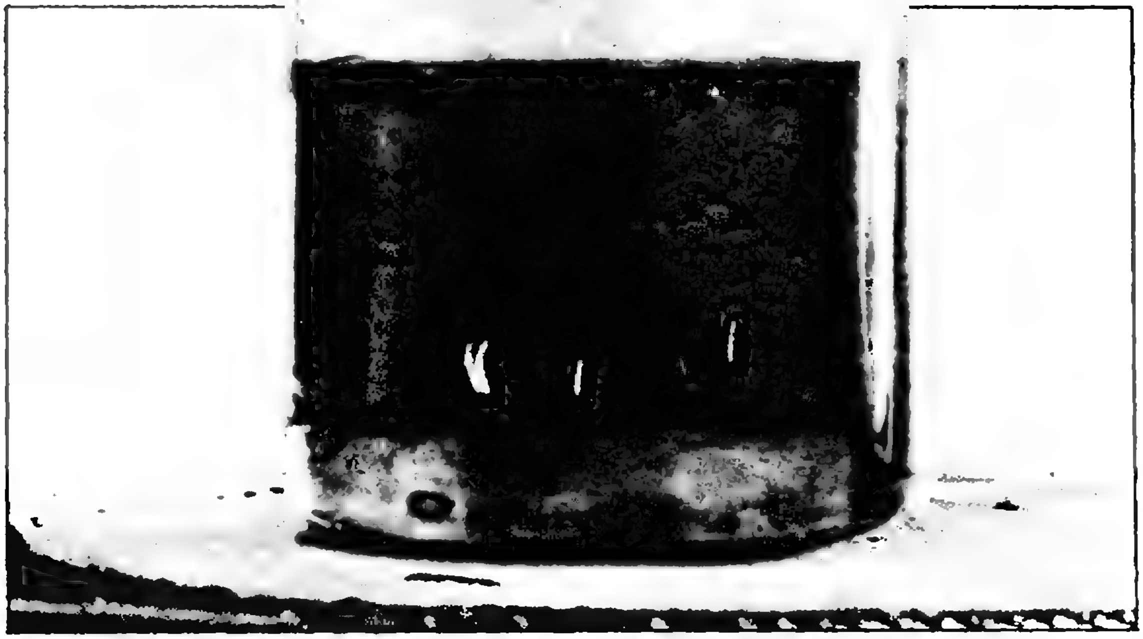
$$p_n>kn+b$$

выполняется для всех n, больших некоторого n_0 (зависящего от k и b).

Попробуйте и вы доказать эту известную теорему. Стоит ли двигаться дальше? Например, можно было бы попробовать доказать, что *простые числа растут медленнее, чем многочлен второй степени от их номера.* Но это уже трудная задача: мы приближаемся к переднему краю науки, и двигаться дальше можно только изучив труды наших великих предшественников — Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Римана, Чебышева.

---

*) Классы $K_0, K_1, ..., K_{m-1}$ называются *классами вычетов по модулю m*. Число этих классов с номерами взаимно простыми с m обозначается $\varphi(m)$; функция φ называется *функцией Эйлера*.



Лаборатория „Кванта“

Кипение жидкостей

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат химических наук
В. В. СОРОКИН

Процесс кипения жидкостей всем нам хорошо знаком. Мы говорим, что вода в чайнике кипит, когда интенсивное образование пара происходит по всему объему жидкости. В этом заключается отличие кипения от испарения, при котором процесс парообразования идет лишь с открытой поверхности.

Кипение начинается тогда, когда давление насыщенного пара в пузырьках становится равным внешнему атмосферному давлению.*) Если же давление насыщенного пара меньше атмосферного, случайно образовавшийся в жидкости пузырек пара должен схлопнуться и исчезнуть.

Пограничное кипение жидкостей

Хорошо известно, что каждая жидкость характеризуется вполне определенной температурой кипения при определенном атмосферном давлении. Например, вода при нормальном атмосферном давлении ($p_0 = 760$ мм рт. ст.) кипит при 100 °C, а толуол (C_7H_8) — при 111 °C.

А при какой температуре будет кипеть «смесь» толуола и воды, двух не смешивающихся друг с другом жидкостей? Казалось бы, температура кипения должна лежать между 100 °C и 111 °C. Однако, если в пробирку с водой осторожно налить немного толуола (он окажется над водой, так как его плотность меньше, чем плотность воды) и нагревать ее в водяной бане, то окажется, что кипение начинается примерно при 95 °C! Отметим, что при проведении этого опыта необходимо пользоваться довольно точным термометром.

В чем же дело? Ответ подсказывает эксперимент. При внимательном наблюдении видно, что кипение начинается на границе раздела жидкостей — толуола и воды, и мы имеем дело с так называемым пограничным кипением жидкостей. В этом случае и образующийся на границе газовый пузырек испаряется как вода, так и толуол, и пузырек содержит насыщенные пары воды и толуола. При кипении полное давление паров в пузырьке, равное атмосферному давлению p_0, представляет собой, согласно закону Дальтона, сумму парциальных давлений насыщенных паров толуола $p_т(T_к)$ и воды $p_в(T_к)$: $p_0 = p_т(T_к) + p_в(T_к)$. Таким образом, давление насыщенного пара воды и толуола, каждого в отдельности, меньше атмосферного, а значит, и температура пограничного кипения $T_к$ должна быть меньше температуры кипения как воды, так и толуола.

---

*) На самом деле для роста образовавшихся пузырьков необходимо, чтобы давление пара в них несколько превышало сумму атмосферного давления, давления столба вышележащей жидкости и давления, обусловленного поверхностным натяжением жидкости. Однако в большинстве случаев два последних давления много меньше атмосферного, и их можно не учитывать.

Особенно удачным получается аналогичный демонстрационный опыт, если в пробирку налить немного четыреххлористого углерода (CCl_4), который кипит при 76,7 °C, а поверх него налить воду. С тем чтобы граница раздела жидкостей была заметнее, четыреххлористый углерод можно предварительно подкрасить раствором йода (рис. 1). Нагревание пробирки в водяной бане показывает, что пограничное кипение начинается при температуре всего 65 °C. При проведении опыта обратите внимание на постепенность нагревания, чтобы не вызвать объемного кипения жидкостей.

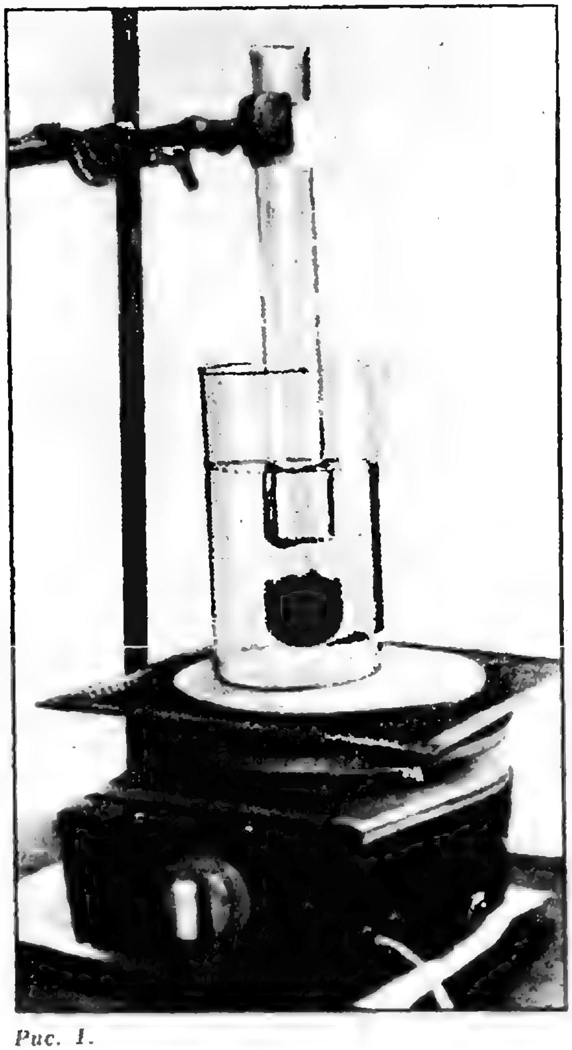


Рис. 1.

Любопытно отметить, что пузырьки, образующиеся при кипении, выходят на поверхность воды и лопаются. Пары четыреххлористого углерода конденсируются, и образовавшиеся капли снова опускаются вниз.

Четыреххлористый углерод и толуол входят в перечень реактивов, имеющихся в школьном кабинете химии. Но не следует забывать, что они являются достаточно вредными веществами, поэтому экспериментировать с ними необходимо с соблюдением всех мер предосторожности — пользуясь небольшими количествами реактивов, проводя опыты в вытяжном шкафу.

Доступным и легко выполнимым экспериментом по наблюдению пограничного кипения является опыт с керосином, налитым поверх воды в пробирку (керосин тоже можно подкрасить капелькой раствора йода). Хорошо видно, что кипение начинается именно на границе раздела жидкостей, однако температура пограничного кипения при этом близка к температуре кипения воды, что вносит в эксперимент определенные трудности.

Заметим, что при нагревании водяной бани во всех опытах следует пользоваться только электронагревателем (электроплиткой) и ни в коем случае не использовать открытый огонь (газовую горелку, спиртовку).

А можно ли заранее предсказать температуру пограничного кипения? Для четыреххлористого углерода и воды, например, сделать это нетрудно, если располагать данными о зависимости давления насыщенных паров этих жидкостей от температуры. На рисунке 2 сплошными линиями представлены графики температурной зависимости давления насыщенных паров воды и четыреххлористого углерода, а штриховой линией показан суммарный график $p_к(T) = p_{н\,H_2O}(T) + p_{н\,CCl_4}(T)$. Точка пересечения последнего графика с прямой $p = p_0 = 760$ мм рт. ст. и дает температуру кипения на границе вода — четырех-

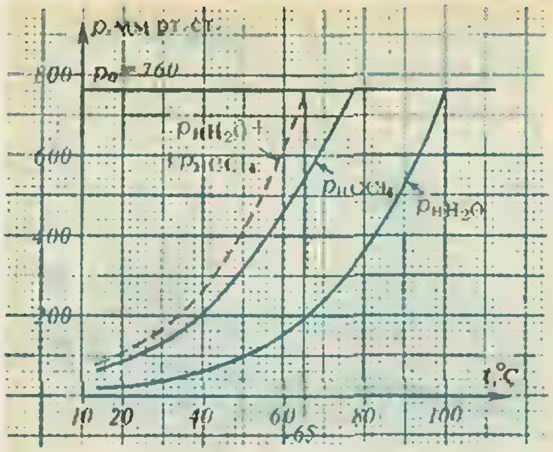


Рис. 2.

хлористый углерод: $T_к=65$ °С. При этом давление паров H_2O равно 190 мм рт. ст., а давление паров CCl_4 составляет 570 мм рт. ст., что в сумме дает нормальное атмосферное давление, т. е. 760 мм рт. ст.

К сожалению, такой простой расчет приводит к достоверному результату не всегда — зачастую следует принимать во внимание взаимную растворяемость компонентов.

Любопытно, что если поддерживать пограничное кипение в течение некоторого времени, то можно заметить, что четыреххлористый углерод выкипает значительно быстрее, чем вода. Как вы думаете, с чем это связано? Попробуйте оценить, во сколько раз быстрее выкипает CCl_4 по сравнению с водой (плотность четыреххлористого углерода $\rho=1600$ кг/м^3).

Давление насыщенных паров

Мы привыкли к тому, что для определения давления насыщенных паров воды при данной температуре надо воспользоваться справочными таблицами. А нельзя ли попробовать самим получить температурную зависимость давления насыщенного пара, т. е. выступить в роли экспериментатора — составителя таблицы?

Рассмотрим один из простых методов получения такой зависимости, которым вы сможете воспользоваться. Установка для проведения опыта представляет собой наполненный холодной водой химический стакан, в который погружена перевернутая вверх дном пробирка с нанесенными на ее стенки делениями. Пробирку и термометр можно укрепить в стоящем на столе лабораторном штативе с лапками.

Частично заполним пробирку водой, установим стакан с перевернутой пробиркой и термометром на электрической плитке и начнем нагревание. По мере увеличения температуры воды будем записывать данные об изменении объема газа в пробирке, т. е. фиксировать нанесенные на стенки пробирки деления.

Газ в пробирке представляет собой смесь воздуха и насыщенных паров воды. Суммарное давление, естественно, равно атмосферному давлению (давлением водяного столба в стакане можно пренебречь, поскольку оно составляет лишь несколько мм рт. ст.):

$$p_0=p_в(T)+p_н(T).$$

Здесь $p_в(T)$ — давление воздуха в пробирке и $p_н(T)$ — давление насыщенных паров при температуре T. В начале опыта давлением паров воды можно пренебречь — при 20 °С оно составляет всего лишь 17 мм рт. ст. Однако с ростом температуры водяной пар дает все более заметный вклад.

Используя уравнение Менделеева — Клапейрона, для воздуха в пробирке запишем

$$\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{p_вV}{T}, \text{ и } p_в=p_0\frac{V_0}{V}\frac{T}{T_0},$$

где p_0 — начальное давление (равное атмосферному), V_0 и T_0 — соответственно начальные объем и температура воздуха. Теперь, зная, как меняются объем и температура, мы можем найти давление насыщенного пара при данной температуре:

$$p_н=p_0\left(1-\frac{T}{T_0}\frac{V_0}{V}\right).$$

Полученная таким образом экспериментальная зависимость давления насыщенного пара от температуры хорошо согласуется со справочными данными. Особенно хорошее согласие наблюдается при температурах выше 80 °С — ошибка составляет менее 5 %. При низких температурах точность этого метода падает. Подумайте, с чем это связано, каковы основные источники ошибок и как можно было бы повысить точность предлагаемого метода. Попробуйте поставить лабораторную работу по определению температурной зависимости давления насыщенного пара в вашем школьном кабинете физики.

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1001—М1015, Ф1013—Ф1027, справились с задачами М1001, М1003—М1005, М1007, М1009, М1011, М1015, Ф1013—Ф1015, Ф1020, Ф1023, Ф1024. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

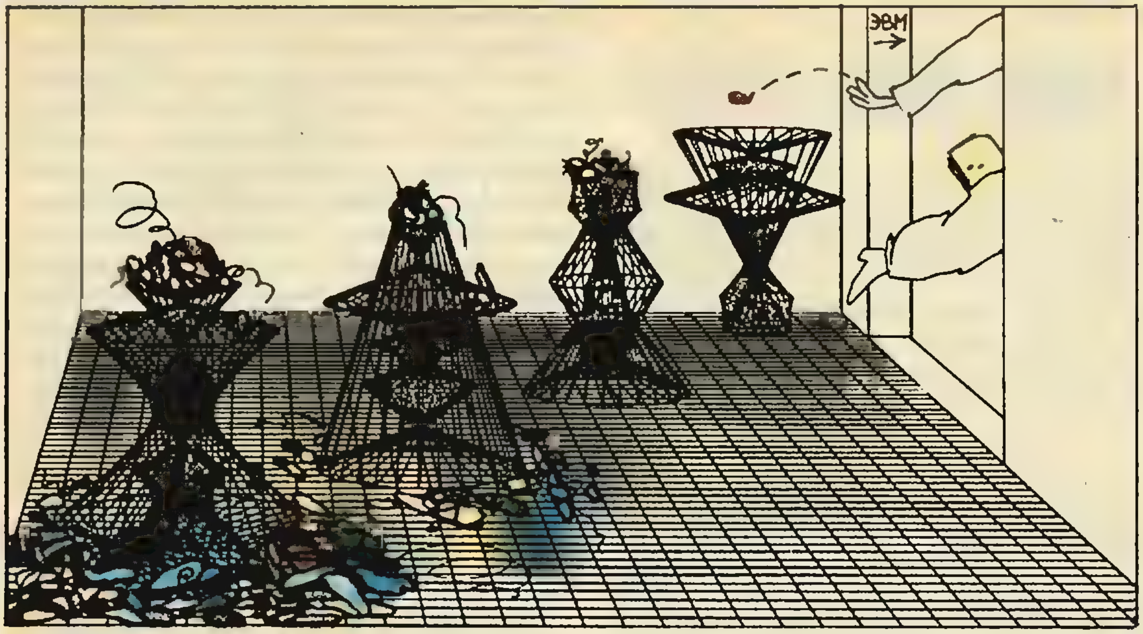
Математика

А. Абдрахманов (Алма-Ата) 02, 14; *В. Акопян* (Ереван) 13, 14; *Д. Алиевский* (Свердловск) 12—14; *Д. Арoцкер* (Киев) 02, 06; *С. Аршава* (Северодонецк) 02, 06, 13, 14; *Р. Асадуллаев* (Масаллы) 06; *В. Базуткин* (Кривой Рог) 06, 08; *З. Бандик* (СФРЮ) 06; *А. Барабанов* (Киев) 02, 06; *С. Безека* (Москва) 06; *Р. Безрукавников* (Калуга) 02; *А. Бейянку* (СРР) 06; *И. Белозеров* (Серпухов) 02, 13, 14; *В. Бергман* (Баку) 06, 08, 14; *Д. Берзин* (Калуга) 02, 06, 08; *Э. Бесаев* (Тбилиси) 06, 13; *В. Бугайко* (Киев) 06, 08; *А. Бурштейн* (Москва) 02, 06; *П. Бучин* (Киев) 06, 12—14; *Я. Варшавский* (Харьков) 02, 06, 08; *А. Винцюк* (Киев) 02, 06, 13; *А. Витяев* (Новосибирск) 06, 08, 13; *В. Вологодский* (Омск) 02, 08, 12—14; *Я. Второв* (Киев) 06; *Ю. Выменец* (Ленинград) 02; *Т. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) 06; *О. Геворков* (Тбилиси) 13, 14; *И. Георгиева* (София, НРБ) 06; *О. Геупель* (Дрезден, ГДР) 08, 13, 14; *А. Глуцюк* (Харьков) 06, 08; *В. Голованов* (Киев) 06, 08; *М. Гольдшейд* (Челябинск) 06, 08, 10, 13, 14; *А. Гороховский* (Киев) 06; *В. Гравит* (Северодвинск) 02; *Р. Гринив* (Львов) 08, 13, 14; *Д. Грънчаров* (София, НРБ) 06; *А. Гусев* (Белорецк) 06; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 06; *Т. Данелия* (Тбилиси) 06, 08; *О. Джавадов* (п. Борадыгях АзССР) 06; *А. Донченко* (Киев) 02; *Н. Дохоян* (Тбилиси) 13; *С. Дронов* (Пущино) 06; *А. Дубинский* (Москва) 13, 14; *И. Дынников* (Жуковский) 06, 08; *Р. Ельчиев* (с. Арчуг АрмССР) 13; *В. Емец* (Киев) 08; *Д. Зайцев* (Киев) 02, 06, 08; *И. Зефиров* (Химки) 06, 08; *В. Иванов* (Тбилиси) 14; *И. Илиев* (НРБ) 06, 08, 14; *В. Кальницкий* (Калининград) 08, 14; *Б. и М. Каримовы* (Алма-Ата) 06; *Т. Касумов* (Баку) 06, 08, 13, 14; *О. Кирнасовский* (Винница) 14; *О. Коврижкин* (Майкоп) 14; *А. Козинский* (Гайворон) 06, 08; *Г. Коленицкий* (Тбилиси) 14; *М. Колесницкий* (Тбилиси) 06, 13; *А. Константин* (СРР) 06, 08; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 14; *А. Коршиков* (Мозырь) 02, 06, 08, 12—14; *П. Кострикин* (Караганда) 06, 08, 12—14; *В. Крепец* (Новосибирск) 06; *А. Кривенко* (Киев) 06; *Б. Кругликов* (Харьков) 06, 08, 13, 14; *В. Крушкаль* (Новосибирск) 13; *В. Куватбекова* (Фрунзе) 06; *Д. Куцемако* (Саратов) 14; *И. Кучугурин* (Новый Уренгой) 02; *С. Лаусмаа* (Кохтла-Ярве) 13; *О. Лимешко* (Куйбышев) 06, 08, 12—14; *М. Литвинов* (Киев) 02, 08; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 06, 08, 13, 14; *В. Ляндин* (Белорецк) 02, 06, 08, 14; *А. Малюр* (Киев) 06; *М. Макичян* (Ереван) 13, 14; *А. Макогон* (Киев) 02, 06, 08; *Р. Малендевич* (Болехов) 02, 06, 08; *А. Мельник* (Гайворон) 06, 08; *А. Мельцер* (Ленинград) 08, 12—14; *А. Мигло* (Ленинград) 06; *В. Мильто* (Киев) 06, 08; *Г. Минасянц* (Ереван) 06, 08; *З. Мустафаев* (Баку) 06; *Я. Мустафаев* (Баку) 12—14; *С. Мушинский* (Новосибирск) 02, 06; *А. Назарян* (Тбилиси) 06, 08, 12—14; *И. Нарский* (Воронеж) 06, 14; *Ю. Ним* (п. Черноголовка Московской обл.) 06; *А. Новиченек* (Вильнюс) 14; *С. Павлов* (Черновцы) 13, 14; *П. Пасманик* (Москва) 06, 08, 14; *М. Пасуманский* (Ленинград) 08, 14; *О. Пелевин* (Кострома) 06, 13, 14; *З. Петренко* (Херсон) 14; *А. Петрова* (Ленинград) 06; *А. Петрова* (Пермь) 14; *А. Покровский* (Киев) 02, 06; *В. Полинов* (Магнитогорск) 06, 13, 14; *А. Полищук* (Москва) 12, 13; *В. Помаз* (Семеновка) 06; *И. Портной* (Одесса) 02; *Д. Прокофьев* (п. Сертолово Ленинградской обл.) 13, 14; *В. Пушня* (Харьков) 02, 08, 13, 14; *Ш. Рагимов* (Ульяновск) 13; *В. Рагулин* (Челябинск) 12—14; *С. Резнов* (Киев) 02, 08; *А. Ройтерштейн* (Ленинград) 06; *Д. Румынин* (Красноярск) 08, 14; *Э. Сайдаматов* (п. Кук-Терек Ташкентской обл.) 13; *Б. Сайнбаяр* (МНР) 06, 14; *И. Самовол* (Гайворон) 06, 08; *С. Сефибеков* (Кашкент) 06; *С. Сильвестров* (Киев) 02, 06, 08; *В. Слитинский* (Киев) 02, 06, 08, 12—14; *А. Смирнова* (Киров) 12—14; *В. Соловьев* (п. Купавна Московской обл.) 02; *И. Соловьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 02; *В. Столин* (Вильнюс) 08, 12—14; *Д. Тамаркин* (Горький) 08, 10, 13, 14; *А. Тарасенко* (Днепропетровск) 06, 08; *А. Терехов* (Алма-Ата) 12—14; *Д. Туляков* (Жданов) 13, 14; *И. Устиловский* (Москва) 06, 08; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 06, 13, 14; *Ф. Фот* (Томск) 06; *А. Френкель* (Магнитогорск) 13, 14; *М. Хараба* (с. Надречное Тернопольской обл.) 06, 08; *К. Хриневски* (ПНР) 06, 08; *О. Христенко* (Караганда) 06, 08, 13, 14; *Е. Черная* (Днепродзержинск) 02, 06, 08, 13, 14; *Р. Чижек* (ЧССР) 14; *Т. Чудиновских* (Целиноград) 06, 14; *Е. Чурикова* (Целиноград) 06; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 06, 08; *И. Шехтман* (Киев) 06; *Я. Эфендиев* (Баку) 06, 13; *А. Яврян* (Ереван) 06, 14; *М. Ямпольский* (Харьков) 06.

Физика

Х. Акимов (к/х «Москва» Хорезмской обл.) 16—19, 21, 22; *А. Андрианов* (Кузнецовск) 17; *А. Анисимов* (Киев) 16, 17; *А. Антонов* (Москва) 16, 18, 26; *У. Аскаров* (Хорезмская обл.) 21; *Ф. Асмандьярова* (Целиноград) 17, 18, 22, 25; *Х. Атабаев* (к/х «Москва» Хорезмской обл.) 22; *Г. Ахмедов* (Сумгаит) 16—18, 26; *Т. Ахметов* (Новосибирск) 26, 27; *С. Беловолов* (Новосибирск) 26; *С. Белоусов* (Петродворец) 16—18, 26; *Д. Берадзе* (Тбилиси) 18; *Д. Берзин* (Калуга) 16—18, 22; *А. Бесолов* (Кишинев) 16; *А. Билибин* (Боровичи) 18; *С. Бобылев* (Березники) 18, 21, 26, 27; *А. Болотников* (Кузнецовск) 17; *Д. Будько* (Белгород) 16—19, 21, 22; *А. Быцко* (Ленинград) 26; *М. Ваганов* (п. Черноголовка Московской обл.) 18, 19; *В. Вергелес* (Винница) 18; *Р. Вергелес* (Винница) 18, 26; *А. Винцюк* (Киев) 16, 25; *П. Вольфбейн* (Киев) 17, 18, 22, 25; *А. Гаек* (Днепропетровск) 18; *А. Гамаюнов* (Полтава) 26, 27; *С. Герасимов* (Харьков) 17, 18, 27; *А. Гольдин* (с. Водяное Львовской обл.) 16—18, 22; *В. Горбовец* (Свердловск) 26; *Д. Горелик* (Электросталь) 16, 18; *К. Горячев* (Тула) 26; *Г. Гриднев* (Тбилиси) 18; *В. Гурарий* (п. Черноголовка Московской обл.) 16—19, 22; *Д. Гуторов* (Кузнецовск) 17, 18, 26, 27; *С. Дикий* (Черкассы) 26, 27; *С. Дронов* (Пущино) 18; *Л. Евсеев* (Димитровград) 18; *Д. Евтушенко* (Донецк) 16, 18; *Д. Ежиков* (Минск) 16, 18; *А. Езерский* (Минск) 18, 26; *Д. Жильцов* (Краматорск) 21;

(Окончание см. на с. 46)



Искусство программирования

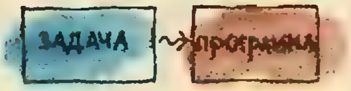
Проверка правильности алгоритмов

Кандидат технических наук
В. А. КАЙМИН

Составление программ — это искусство, наука или ремесло? Можно ли составлять программы и гарантировать, что в них нет ошибок? Эти два вопроса — предмет жарких научных дискуссий, столкновения мнений и серьезных исследований. Попробуем разобраться.

Можно выделить три подхода к составлению программ для вычислительных машин.

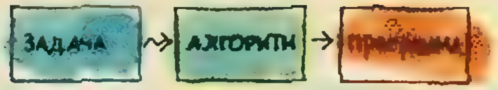
Первый подход — назовем его *традиционным* — состоит в написании программ на некотором языке программирования (бейсик, фортран, ПЛ/1, кобол и т. п.) сразу по содержательным формулировкам задач:



Языки программирования, как правило, имеют английскую лексику, и программы на этих языках трудно читать, понимать и изучать людям, для которых английский язык не является родным. При составлении программ при традиционной практике почти всегда в них вносится большое число ошибок, и составитель программы как можно скорее стремится выйти на ЭВМ и начать отладку программы.

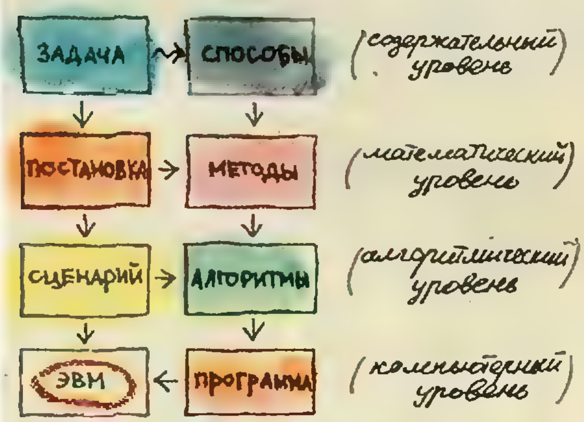
Количество ошибок в программе заранее никому не известно, а потому никому не известно, когда закончится отладка программы. Более того, когда авторы программ заявляют, что их программы полностью отлажены, в этих программах обычно еще имеются ошибки.

Второй подход к составлению программ, который принято называть *структурным программированием*, состоит в тщательном продумывании логики решения задач и создании структурированных алгоритмов. Эти алгоритмы мы советуем записывать на школьном алгоритмическом языке из вашего учебника и только после этого переводить запись программы на один из языков программирования. Схему составления программ можно изобразить так:



При таком подходе легко разделить синтаксические и алгоритмические ошибки. *Синтаксические ошибки* (нарушения правил языка программирования) могут появиться только при неправильном кодировании программ по алгоритмам. *Алгоритмические ошибки* (нарушения в логике решения задач) возникают при составлении алгоритмов; их поиск и исправление может проводиться по описаниям алгоритмов до написания и испытания программ на ЭВМ.

Третий подход, который мы называем *систематическим конструированием программ*, является развитием второго. Схематически его можно изобразить следующей диаграммой:



Более подробно об этом подходе рассказано в «Кванте» (1986, № 10, с. 47 и № 11, с. 40).

Проверка программы на ЭВМ включает тщательно спланированные испытания на соответствие работы машины сценарию программы. Проверка состоит в апробации всех основных частных случаев постановок задач, проверке граничных условий, проверке реакций программы на недопустимые данные и недопустимые действия со стороны человека. На этой стороне — связанной со сценарием диалоговых программ (см. «Квант», 1986, № 11, с. 40) — мы здесь подробнее останавливаться не будем.

Выявление ошибок и обоснование правильности программ при таком подходе проводится путем логических рассуждений, целью которых являются доказательства — будет или не будет программа давать требуемые результаты и сообщения? Полная гарантия отсутствия ошибок возможна только при наличии *математических постановок решаемых задач* и детальном *описании сценария* работы с ЭВМ. В этой ситуации программу мы назовем *правильной*, если при любых допустимых исходных данных она формирует результаты, строго соответствующие требованиям постановок задач, и ее работа полностью соответствует сценарию при любых действиях пользователя. Программа содержит ошибки, если можно указать такие данные, при которых машина даст результаты, противоречащие требованиям постановок решаемых задач, либо ее работа не будет соответствовать описанию сценария программы.

Мы рассмотрим здесь несколько примеров обоснования правильности отдельных фрагментов программ, написанных на школьном алгоритмическом языке (часть заголовка программ мы для краткости опускаем).

Пример 1 (задача на вычисление).

```
алг «вычисление $x^5$»
нач $v := x \cdot x$
    $v := v \cdot v$
    $y := v \cdot x$
кон
```

результаты

$$\begin{cases} v_1 = x \cdot x, \\ v_2 = v_1 \cdot v_1, \\ y = v_2 \cdot x. \end{cases}$$

Обратите внимание, что переменной v в процессе работы алгоритма присваивается несколько значений, поэтому в записи результатов мы снабжаем букву v числовыми индексами. На основании этой программы мы делаем следующее

Утверждение. $y = x^5$.

Доказательство. Из описания результатов выполнения операций имеем

$$y = v_2 \cdot x = (v_1 \cdot v_1) \cdot x = \\ = ((x \cdot x) \cdot (x \cdot x)) \cdot x = x^5.$$

Пример 2 (алгоритм с участием ветвления).

```
алг «вычисление $|x|$»
нач если $x > 0$
      то $y := x$
      иначе $y := -x$
    все
кон
```

результаты

$$y = \begin{cases} x \text{ при } x > 0, \\ -x \text{ при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Утверждение. Эта программа всегда дает $y = |x|$.

Доказательство проводится разбором случаев. При $x > 0$ выполняется первая альтернатива. В результате присваивания величина станет равной $y = x$, что соответствует определению модуля для положительных чисел. При $x \leqslant 0$ выполняется вторая альтернатива, и в результате присваивания величина y получит значение $y = -x$, что также соответствует определению модуля, но для отрицательных чисел. Таким образом, в обоих случаях величина y будет равна абсолютному значению числа x.

Пример 3 (алгоритм с участием «цикла для»).

```
алг «суммирование массива»                результаты
арг вещ $x[1:n]$
рез вещ $y$
нач $s := 0$
    для $k$ от 1 до $n$                  $s_0 = 0$,
    нц $s := s + x[k]$                    $s_k = s_{k-1} + x[k]$
    кц                                    $(k = 1, 2, ..., n)$,
      $y := s$                            $y = s_n$.
кон
```

Утверждение. Эта программа дает $y = x[1] + ... + x[n]$.

Доказательство проводится, конечно же, по индукции. Начало индукции ($s_0 = 0$) есть (см. описание результатов); нам нужно из индуктивного предположения

$$s_{k-1} = x[1] + ... + x[k-1]$$

получить аналогичную формулу для s_k. Но из описания результатов следует

$$s_k = s_{k-1} + x[k] = \\ = (x[1] + ... + x[k-1]) + x[k] = \\ = x[1] + ... + x[k].$$

Поэтому по индукции получаем $s_n = x[1] + ... + x[n]$. А последнее присваивание дает для y значение s_n, так что

$$y = x[1] + ... + x[n].$$

Пример 4 (задача с использованием вспомогательного алгоритма).

Для доказательства правильности вспомогательных алгоритмов необходимы математические постановки решаемых ими подзадач. Соответствующие доказательства проводятся независимо от обоснования правильности алгоритмов в целом, а доказательства правильности алгоритмов в целом опираются на утверждения о правильности работы соответствующих вспомогательных алгоритмов.

```
алг площадь треугольника
арг вещ $x[1:n]$, $y[1:n]$
рез вещ $S$
нач
$a := dl(x[1], y[1], x[2], y[2])$
$b := dl(x[2], y[2], x[3], y[3])$
$c := dl(x[3], y[3], x[1], y[1])$
$p := (a + b + c)/2$
$S := \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
кон
```

```
алг длина вектора                         результаты
арг вещ $v1$, $u1$, $v2$, $u2$
рез вещ $dl$
нач $dv := v1 - v2$                      $dv = v1 - v2$,
    $du := u1 - u2$                      $du = u1 - u2$,
    $dl := \sqrt{dv^2 + du^2}$           $dl = \sqrt{dv^2 + du^2}$.
кон
```

Учитывая результаты вспомогательного алгоритма, легко выписать результаты для основного алгоритма:

$$a = \sqrt{(x[1] - x[2])^2 + (y[1] - y[2])^2},$$
$$b = \sqrt{(x[2] - x[3])^2 + (y[2] - y[3])^2},$$
$$c = \sqrt{(x[3] - x[1])^2 + (y(3) - y[1])^2},$$
$$p = (a + b + c)/2,$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Воспользовавшись этими результатами, нетрудно доказать (мы это оставляем читателю), что для любых пар чисел $(x[i]; y[i]) = A_i$, $i = 1, 2, 3$, алгоритм выдает значение S, равное площади треугольника $A_1A_2A_3$.

Большие и сложные программы — это, как правило, большое количество небольших вспомогательных алгоритмов (подпрограмм), предназначенных для решения вспомогательных подзадач. Анализ правильности больших программ такого вида состоит из доказательств правильности целой серии утверждений о правильности каждого вспомогательного алгоритма, а уже затем о правильности подпрограмм и программ в целом.

Единственный принципиально сложный тип проверки связан с анализом завершимости и обоснованием правильности построения циклов вида «пока — цикл». Для всех алгоритмов и программ, не использующих этих циклов, как мы видели, доказательства правильности могут производиться с помощью элементарных логических рассуждений. В простейших ситуациях обоснование завершимости циклов «пока» тоже получается элементарно.

Пример 5 (алгоритм с участием цикла «пока»).

```
алг «вычисление $(1-x)$»                  результаты
арг вещ $x$, eps
рез вещ $y$
нач
  $s := 1 + x$                 $s_1 = 1 + x$,
  $v := x$                     $v_1 = x$,
  пока $|v| \geqslant$ eps     $v_k = v_{k-1} \cdot x$,
    нц                         $v_k = v_{k-1} + v_k$
      $v := v \cdot x$         $(k = 2, 3, ...,$ если $|v_k| \geqslant$ eps$)$.
      $s := s + v$
                               $y = \begin{cases} s_k \text{ при } |v_k| < \text{eps}, \\ ? \text{ при } |v_k| \geqslant \text{eps}. \end{cases}$
    кц
  $y := s$
кон
```

Утверждение. Описанный алгоритм при $\text{eps}>0$ и $|x|<1$ всегда завершает свою работу и получает такое значение y, что

$$|y-(1-x)^{-1}|<\text{eps}/(1-x).$$

Доказательство строится из двух индуктивных утверждений:

а) $v_k=x^k$ при $k=1,\ 2,\ \dots$; б) $s_k=1+x+x^2+\dots+x^k$. Оба утверждения а) и б) легко доказываются по индукции, если воспользоваться описанием результатов. Из б) и формулы суммы геометрической прогрессии

$$s_k=1+x+\dots+x^k=\frac{1-x^{k+1}}{1-x}. \qquad (1)$$

По условию цикла **пока**, работа цикла завершится при $|v|<\text{eps}$, т. е. (в силу условия а)) при $|x^k|<\text{eps}$. Значит, при выполнении условия $|x^k|<\text{eps}$ (которое обязательно наступит, ибо $|x|<1$ и $\text{eps}>0$) произойдет присваивание $y:=s$, и в силу формулы (1)

$$\left|y-\frac{1}{1-x}\right|=\left|\frac{1-x^{k+1}}{1-x}-\frac{1}{1-x}\right|=$$

$$=\frac{|x^{k+1}|}{1-x}<\frac{\text{eps}}{1-x}.$$

В заключение заметим, что мы рассматривали здесь лишь простейшие примеры доказательства правильности программ. В более сложных случаях проверка становится более трудоемкой, но эта работа окупает себя, позволяя с карандашом и бумагой, до выхода на машину, избежать нескончаемой отладки за пультом ЭВМ. Можно сказать, что составление и проверка программ на ЭВМ — это ремесло, конструирование, обоснование правильности и улучшение алгоритмов — это наука, а составление сценария — пока искусство. Желающим более глубоко познакомиться с принципами доказательного программирования рекомендуем прочитать следующие книги:

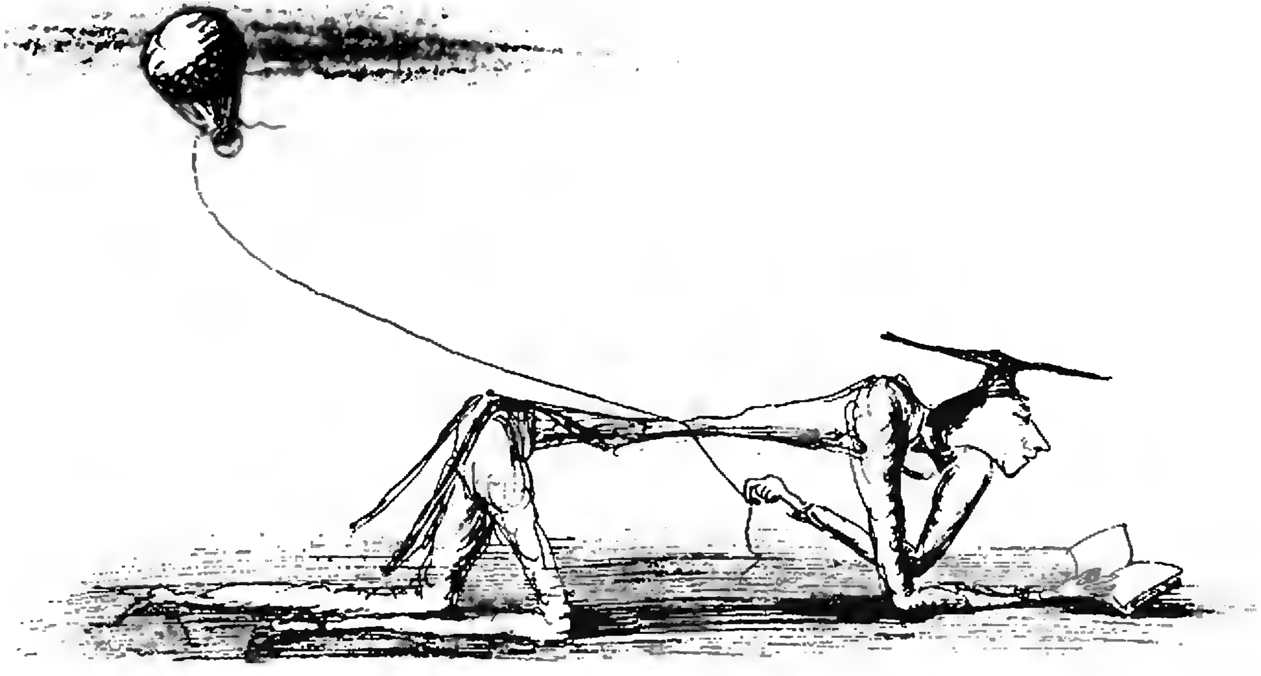
1. Дийкстра Э. *Дисциплина программирования.* — М.: Мир, 1979.

2. Грис Д. *Наука программирования.* — М.: Мир, 1984.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 42)

И. Жуманиезов (Хива) 19; *П. Задорожный* (Киев) 16—19, 21, 25, 26; *Е. Зельцер* (Киев) 17; *А. Зискинд* (Винница) 16, 18, 26; *С. Иванов* (Киев) 26; *Д. Изотов* (Ногинск) 17, 18; *А. Ильенков* (Киев) 17, 18; *Д. Исильманова* (Целиноград) 17, 18, 22; *Б. Исмагилов* (Москва) 18; *А. Калашников* (Киев) 18; *С. Канатов* (Кузнецовск) 17, 18, 26, 27; *В. Каневский* (Киев) 18; *В. Кирюхин* (п. Черноголовка Московской обл.) 16—19; *В. Клименко* (Первомайск Николаевской обл.) 18; *И. Климчук* (Кузнецовск) 17, 18, 26, 27; *А. Кобылинский* (Киев) 18; *И. Коваленко* (с. Термаховка Киевской обл.) 18; *Е. Корсунский* (Харьков) 18; *А. Корытько* (Киев) 18; *П. Кострикин* (Караганда) 18, 19; *Г. Кравченко* (Кузнецовск) 17; *Ю. Кравченко* (Москва) 17, 18, 27; *М. Куанышева* (Рудный) 26; *С. Курдюков* (Москва) 16, 17, 25, 26; *А. Кусаинов* (Алма-Ата) 18, 19, 21, 26; *Д. Кучулория* (Тбилиси) 16; *К. Литвиненко* (Херсон) 18, 26; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 17; *Е. Лойченко* (Киев) 18; *И. Лугач* (Винница) 16—19, 21, 22, 26, 27; *Р. Малендевич* (Болехов) 18, 19; *Л. Митосериу* (СРР) 18; *А. Мищенко* (Киев) 18, 26; *В. Мороз* (Ленинград) 26, 27; *А. Муравьев* (Рига) 27; *А. Недачин* (Киев) 16—19, 21, 22, 26, 27; *А. Никитин* (Ленинград) 26, 27; *Д. и П. Николаевы* (п. Черноголовка Московской обл.) 17; *Д. Ноготков* (Алма-Ата) 18, 19, 26; *А. Носенко* (Коммунарск) 18; *Д. Орел* (Воркута) 26, 27; *С. Павлов* (Дно) 26; *О. Паруш* (Выборг) 16, 18; *Д. Пастухов* (Витебск) 26, 27; *А. Петров* (Калуга) 26; *Д. Плотник* (Алма-Ата) 18, 19; *А. Подольский* (Киев) 18; *А. Португалов* (Киев) 16, 17; *С. Примазон* (Ломоносов) 18; *Д. Пучкин* (Севастополь) 26; *У. Рахманов* (Ташкент) 18; *Г. Рекуц* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) 18; *В. Родин* (Сасово) 17, 22, 25—27; *А. Розенберг* (Уфа) 16—19, 22; *Е. Рознощик* (Киев) 16, 17, 19; *А. Романов* (Загорск) 26; *Р. Сагайдак* (с. Матусов Черкасской обл.) 16—18, 22; *С. Сазонов* (Климовск) 18; *Д. Самборский* (Истра) 18, 19, 21; *В. Сафонов* (Челябинск) 18, 19, 21; *М. Сергазин* (Алма-Ата) 18, 19, 21; *В. Синенко* (Канев) 17; *В. Служаев* (Димитровград) 18, 19; *В. Смирнов* (Тихвин) 26; *А. Ставицкий* (Баку) 16, 17; *А. Стародубов* (Алма-Ата) 18, 19, 21; *В. Старцев* (Алма-Ата) 26; *А. Степура* (Ивано-Франковск) 16—18, 22, 26; *И. Стригунов* (Брест) 17, 18, 26; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 16—19; *В. Суворов* (Свердловск) 18, 26; *А. Суходуб* (Харьков) 26; *З. Таварткиладзе* (Тбилиси) 26; *А. Ткаченко* (Киев) 16—18, 22; *М. Турлаков* (Фрунзе) 18; *А. Турсунбеков* (Ташкент) 18; *В. Тягнирядно* (Минск) 26, 27; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 18; *В. Ушаков* (Магадан) 18; *Г. Фейгин* (Тула) 26; *А. Фурс* (п/о Дричин Минской обл.) 16—19, 21, 22, 26; *М. Хараба* (с. Надречное Тернопольской обл.) 26; *Г. Хачатрян* (п. Берд АрмССР) 18; *П. Хиль* (п. Овидиополь Одесской обл.) 18, 26, 27; *И. Химони* (Днепропетровск) 18; *А. Цветков* (Златоуст) 18; *И. Чайка* (Кузнецовск) 17, 18, 26, 27; *М. Чекушина* (Алма-Ата) 18, 19, 21; *О. Чепиков* (Могилев) 16, 18; *А. Чернышев* (Сочи) 26; *Р. Чмырь* (Фрунзе) 18; *Т. Шапаева* (Москва) 18; *А. Шишкин* (Новый Уренгой) 26; *А. Шуляк* (с. Молодецкое Черкасской обл.) 18, 26; *И. Юдина* (п. Майна Ульяновской обл.) 18; *Ю. Яровой* (Канев) 16, 18, 26.



Практикум абитуриента

Задачи на газовые смеси

Доктор физико-математических наук
С. М. КОЗЕЛ

На приемных экзаменах в вузы абитуриентам нередко предлагают задачи, в которых рассматриваются не чистые газы (водород, кислород и т. д.), а смеси нескольких газов. Эти задачи важны потому, что на практике чаще приходится иметь дело именно с газовыми смесями. Так, например, воздух состоит из смеси азота, кислорода, углекислого газа с примесью других газов. Влажный воздух содержит также и водяной пар.

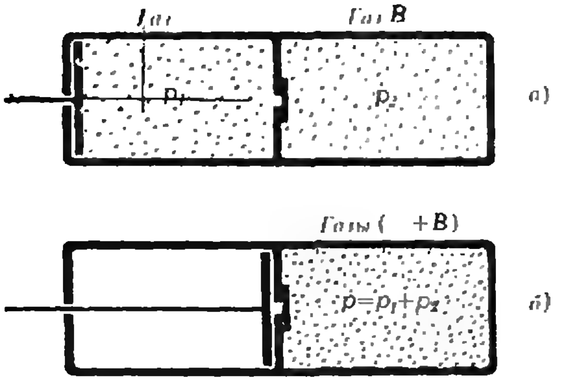
Задачи на газовые смеси по существу мало отличаются от задач на законы идеальных газов. Если по условию задачи состав газовой смеси не изменяется, можно рассматривать смесь как один идеальный газ с некоторым усредненным значением молярной массы. Так, сухому воздуху часто приписывают молярную массу $M_в = 29$ г/моль, усредненную по его основным компонентам. Однако, если состав смеси изменяется, понятие усредненной молярной массы теряет смысл, и с использованием уравнения газового состояния возникают некоторые затруднения. В этом случае полезно ввести понятие парциального давления — так принято называть давление, оказываемое каким-либо чистым газом из состава смеси, когда все другие газы из сосуда удалены.

Если газы достаточно разрежены (так что их можно считать идеальными) и химически не взаимодействуют друг с другом, молекулы разных газов не оказывают влияния друг на друга, и каждый газ в смеси ведет себя так, как если бы других газов не было вовсе. Отсюда следует, что общее давление смеси равно сумме парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

Этот закон был экспериментально установлен английским физиком Дальтоном и был назван его именем. Поясним закон Дальтона и понятие парциального давления на примере.

Два разных газа A и B помещены в две камеры одинакового объема и создают давления p_1 и p_2 (см. с. 48). При помощи поршня газ из одной камеры через клапан выталкивается в другую камеру. Температура при этом поддерживается неизменной и одинаковой во всей системе. В результате во второй камере устанавливается



давление $p=p_1+p_2$. Давления p_1 и p_2 в данном случае и есть парциальные давления разных газов, а в соответствии с законом Дальтона они складываются в общее давление p.

Отметим еще раз, что закон Дальтона справедлив только для идеальных газов с невзаимодействующими молекулами. Как показывает опыт, при достаточно высоких давлениях (порядка десятков атмосфер) наблюдаются отклонения от этого закона.

Если для каждого газа записать уравнение Менделеева — Клапейрона, то из закона Дальтона для смеси газов получим

$$pV=\left(\frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}+\ldots+\frac{m_n}{M_n}\right)RT,$$

или

$$pV=(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n)RT,$$

где $\nu_i=m_i/M_i$ — число молей данного газа в смеси. Это соотношение называют уравнением состояния газовой смеси. Учитывая закон Авогадро, согласно которому моль любого вещества содержит $N_A=6{,}02\cdot 10^{23}$ молекул (N_A — число Авогадро), последнее равенство можно переписать в виде

$$pV=(\nu_1 N_A+\nu_2 N_A+\ldots+\nu_n N_A)\frac{R}{N_A}T=$$

$$=(N_1+N_2+\ldots+N_n)kT=NkT.$$

Здесь $N_i=\nu_i N_A$ — число молекул соответствующего газа, $k=R/N_A=1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Таким образом, оказывается, что давление смеси газов при заданной температуре зависит только от полного числа молекул и не зависит от их сорта. Это одно из основных следствий молекулярно-кинетической теории идеальных газов.

Рассмотрим ряд задач на применение закона Дальтона и уравнения состояния газовой смеси. Все эти задачи в разные годы предлагались абитуриентам на письменном приемном экзамене в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *В сосуд объемом $V=10$ л, наполненный сухим воздухом при давлении $p_1=10^5$ Па и температуре $T_1=273$ К, вводят $m=3$ г воды. Сосуд нагревают до температуры $T_2=373$ К. Каково давление влажного воздуха при этой температуре?*

Давление влажного воздуха в сосуде складывается из парциальных давлений сухого воздуха и водяного пара:

$$p=p_в+p_п.$$

При этом

$$p_в=p_1\frac{T_2}{T_1}=1{,}37\cdot 10^5\ \text{Па}.$$

Считая пар идеальным газом с молярной массой $M=18$ г/моль и предполагая, что вся вода испарится, найдем

$$p_п=\frac{m}{M}\frac{RT_2}{V}=0{,}52\cdot 10^5\ \text{Па}.$$

Это давление меньше давления насыщенного пара при температуре 373 К, которое равно $p_н=10^5$ Па. Следовательно, пар ненасыщен, и наше предположение было правильным.

Таким образом,

$$p=p_в+p_п=1{,}89\cdot 10^5\ \text{Па}.$$

Задача 2. *В сосуде постоянного объема при температуре $T_1=300$ К находится $\nu_1=1$ моль неона и $\nu_2=2$ моля водорода. Давление в сосуде $p_1=10^5$ Па. Когда температуру повысили до $T_2=2400$ К, давление возросло до $p_2=8{,}8\cdot 10^5$ Па. Какая часть молекул водорода диссоциировала при этом на атомы?*

При температуре T_1 для смеси неона и молекулярного водорода можно записать уравнение

$$p_1V=(\nu_1+\nu_2)RT_1,$$

где V — объем сосуда.

Если обозначить степень диссоциации водорода, т. е. отношение числа распавшихся молекул к общему числу молекул до диссоциации, через α, то при температуре T_2 в сосуде окажется ν_1 молей неона, $(1-\alpha)\nu_2$ молей молекулярного водорода и $2\alpha\nu_2$ молей атомарного водорода. Уравнение состояния газовой смеси примет вид

$$p_2V=(\nu_1+\nu_2(1+\alpha))RT_2.$$

Из этих уравнений найдем

$$\alpha=\left(\frac{p_2T_1}{p_1T_2}-1\right)\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}+1\right)=0{,}15.$$

Задача 3. *Сосуд объемом $2V=20$ л разделен на две равные части полупроницаемой неподвижной перегородкой из палладия. В одну половину сосуда введено $m_а=20$ г аргона, во вторую — $m_в=2$ г водорода. Известно, что через палладиевые перегородки может проникать (диффундировать) только водород. Какое давление установится в обеих половинах сосуда после окончания процесса диффузии? Температура в первой половине сосуда равна $T_1=300$ К, во второй — $T_2=600$ К. Молярная масса аргона $М_а=40$ г/моль, водорода $М_в=2$ г/моль.*

Если два сосуда с газом соединены трубкой, через которую газ может свободно перетекать, то при равновесии давления в обоих сосудах оказываются одинаковыми независимо от температур газов в каждом сосуде. В данной задаче речь идет не о перетекании газа из одной части сосуда в другую, а о диффузии водорода через проницаемую для него перегородку. В этом случае равновесие наступает при равенстве диффузионных потоков, которые пропорциональны среднему числу ударов молекул водорода о перегородку с той и другой стороны. Вспомним (см., например, «Физику 9», §7), что среднее число ударов пропорционально числу молекул в единице объема и средней тепловой скорости, которая в свою очередь пропорциональна корню квадратному из температуры.

Пусть через перегородку продиффундировало ν молей водорода. Тогда во второй половине сосуда осталось $(1-\nu)$ молей и условие равенства диффузионных потоков водорода запишется в виде

$$\nu\sqrt{T_1}=(1-\nu)\sqrt{T_2},$$

откуда

$$\nu=\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}}=0{,}6.$$

После установления равновесия давление смеси аргона и водорода в первой половине будет равно

$$p_1=\left(\nu+\frac{m_а}{М_а}\right)\frac{RT_1}{V}=2{,}7\cdot10^5\ \text{Па},$$

а давление водорода во второй половине —

$$p_2=(1-\nu)\frac{RT_2}{V}=2{,}0\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Задача 4. *В толстостенном стальном баллоне объемом $V=10$ л находится $m_в=2$ г водорода и $m_к=32$ г кислорода при температуре $T_1=273$ К. В баллоне происходит взрыв, и водород соединяется с кислородом. Во сколько раз изменится давление, если после окончания реакции в баллоне установилась температура $T_2=373$ К?*

В начальном состоянии в баллоне находилось по одному молю водорода и кислорода. Давление p_1 смеси этих газов до реакции определяется из уравнения $p_1V=2RT_1$:

$$p_1=\frac{2RT_1}{V}=4{,}5\cdot10^5\ \text{Па}.$$

В реакцию образования воды вступает весь водород — 1 моль и половина кислорода — 1/2 моля; следовательно, после реакции в баллоне будет находиться 1 моль воды и 1/2 моля кислорода. Установившееся давление при температуре $T_2=373$ К зависит, прежде всего, от того, в каком состоянии находится вода — только в парообразном или частично и в жидком тоже. Как известно, при температуре 373 К (точка кипения воды) давление насыщенных водяных паров равно $p_н=10^5$ Па. Если бы вся образовавшаяся вода испарилась, ее парциальное давление не должно было бы превышать $p_н$. С другой стороны, из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что давление паров (если вся вода испарится)

$$p_п=\frac{RT_2}{V}=3\cdot10^5\ \text{Па}>p_н.$$

Таким образом, часть воды будет находиться в жидком состоянии, а парциальное давление паров будет равно $p_н$. Парциальное давление оставшегося в баллоне кислорода

$$p_к=\frac{1}{2}\frac{RT_2}{V}=1{,}5\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Следовательно, полное давление после окончания реакции

$$p_2=p_к+p_н=2{,}5\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Отсюда

$$\frac{p_2}{p_1}=0{,}55.$$

Задача 5. *Два теплоизолированных баллона соединены трубкой, перекрытой вентилем. В первом баллоне* *объемом* $V_1=100$ *л находится* $m_2=1{,}4$ *кг азота под давлением* $p_1=1{,}5\cdot 10^6$ *Па, во втором баллоне объемом* $V_2=250$ *л находится* $m_2=1{,}2$ *кг аргона под давлением* $p_2=5\cdot 10^5$ *Па. Какие давления и температуры установятся в баллонах, если открыть вентиль? Теплоемкость моля азота при постоянном объеме равна* $C_1=(5/2)R$*, теплоемкость моля аргона —* $C_2=(3/2)R$*. Молярные массы азота и аргона равны соответственно* $M_1=28$ *г/моль и* $M_2=40$ *г/моль.*

Первоначальные температуры азота и аргона найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$T_1=\frac{p_1V_1}{\nu_1R}=360\ \text{К},\quad T_2=\frac{p_2V_2}{\nu_2R}=500\ \text{К},$$

где $\nu_1=m_1/M_1=50$ моль и $\nu_2=m_2/M_2=30$ моль — количество молей азота и аргона.

Температура смеси T, установившаяся после открытия вентиля, определяется из первого закона термодинамики — внутренняя энергия системы при смешивании газов остается неизменной (теплообмен с окружающими телами отсутствует, система работы не совершает):

$$\nu_1C_1(T-T_1)-\nu_2C_2(T_2-T)=0,$$

откуда

$$T=\frac{\nu_1C_1T_1+\nu_2C_2T_2}{\nu_1C_1+\nu_2C_2}=400\ \text{К}.$$

Установившееся давление найдем из уравнения газового состояния смеси:

$$p=\frac{(\nu_1+\nu_2)RT}{V_1+V_2}=7{,}6\cdot 10^5\ \text{Па}.$$

Упражнения

1. В сосуде объемом $V=1$ л находится $m=0{,}28$ г азота при температуре $T=1800$ К. При этой температуре часть молекул $\alpha=30\%$ диссоциировала на атомы. Определите давление в сосуде.

2. В стальном баллоне объемом $V=60$ л содержится смесь водорода и кислорода общей массой $m=60$ г. Давление в баллоне при температуре $T=300$ К равно $p=3{,}28\cdot 10^5$ Па. Какая масса воды образуется из этой смеси, если водород и кислород вступят в реакцию?

3. Одинаковые массы водорода и гелия поместили в сосуд объемом V_1, который отделен от откачанного сосуда объема V_2 полупроницаемой перегородкой, через которую могут диффундировать только молекулы водорода. После окончания процесса диффузии давление в первом сосуде уменьшилось в 2 раза. Определите отношение V_2/V_1, если во время процесса температура поддерживалась постоянной.

Варианты вступительных экзаменов

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1986 году

Предлагаем подборку задач вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Белорусский (1), Горьковский (2), Омский (3), Саратовский (4), Уральский (5) и институты — Киевский педагогический (6), Московский архитектурный (7), Московский областной педагогический (8), Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта (9), Рижский политехнический (10), Томский политехнический (11), Московский авиационный технологический (12).

Математика

Алгебра

1(1). Из города A в город B, находящийся на расстоянии 105 км от A, с постоянной скоростью v км/ч выходит автобус. Через 30 минут вслед за ним из A со скоростью 40 км/ч выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определите все те значения v, при которых автомобиль возвращается в A позже, чем автобус приходит в B.

2(1). Два скрепера разной мощности, работая вместе, могут выполнить работу за 6 часов. Если бы первый проработал 4 часа, а затем второй — 6 часов, то они выполнили бы 80 % всей рвботы. За сколько часов каждый скрепер, работая отдельно, может выполнить всю работу?

3(1). При подведении итогов соревнования вычислено, что процент числа членов бригады, перевыполнивших план, заключен в пределах от 92,5 % до 93,5 %. Определите минимально возможное число членов такой бригады.

4(4). Два велосипедиста выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Первый из них едет со скоростью 15 км/ч, второй — 12 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехал третий велосипедист, который через некоторое время догнал второго, а еще через 1 ч 30 мин догнал и первого. Найдите скорость третьего велосипедиста.

5(4). Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе вспахивают за 6 дней, а первая и третья вместе — за 8 дней. Во сколько раз больше площадь, вспахиваемая за день второй бригадой, по сравнению с площадью, вспахиваемой за день третьей бригадой?

6(4). 40 кг раствора соли разлили в два сосуда так, что во втором сосуде чистой соли оказалось на 2 кг больше, чем в первом сосуде. Если во второй сосуд добавить 1 кг соли, то количество соли в нем будет в 2 раза больше, чем в первом. Найдите вес раствора, находящегося в первом сосуде.

7(6). Смешали 30 %-ный раствор соляной кислоты с 10 %-ным и получили 600 г 15 %-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

8(6). К раствору, который содержит 40 г соли, добавили 200 г воды, после чего его концентрация уменьшилась на 10 %. Сколько воды содержал раствор и какая была его концентрация?

9(9). Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 26, их произведение — 216. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

10(12). Найдите четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 112, а сумма средних членов равна 48.

11. Вычислите:

а) (10) $\frac{1}{16}\sqrt{192}-2{,}5\sqrt{\frac{4}{75}}-\frac{1}{234}\sqrt{98^2-71^2}$;

б) (10) $\frac{\sqrt[8]{3^{11}}\cdot\sqrt[8]{3^{21}}}{\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}}$;

в) (10) $\frac{(2-\sqrt{3})(\cos 750^\circ+\cos 420^\circ)}{\sin 330^\circ+\cos(-390^\circ)}$;

г) (10) $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$;

д) (9) $\frac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$ при $\alpha=15^\circ$;

е) (11) $\sin(2\alpha-\pi)$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$;

ж) (8) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=a$;

з) (11) $\operatorname{tg}_{\sqrt{6}} 3\cdot\log_3 36$.

12. Выполните действия:

а) (11) $\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{x}\right)\cdot\frac{x^3}{a^3-x^3}$;

б) (11) $\left(\frac{a+3b}{(a-b)^2}+\frac{a-3b}{a^2-b^2}\right):\frac{a^2+3b^2}{(a-b)^2}$ и вычислите при $a=0{,}3$; $b=1{,}7$;

в) (11) $\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}$ и вычислите, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=2$;

г) (11) $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)\times\times\sin(\pi+\alpha)$;

д) (10) $\sqrt{10}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

13(6). Докажите тождество

$$\sin^3 x(1+\operatorname{ctg}x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg}x)=\sin x+\cos x.$$

14(6). При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2+x-a(1+a)=0$ имеют разные знаки?

15(10). При каком целом значении b один из корней уравнения

$$4x^2-(3b+2)x+(b^2-1)=0$$

втрое меньше другого?

16(8). При каком значении q сумма кубов корней уравнения $x^2-x-q=0$ равна 19?

17(3). Корни x_1, x_2 уравнения $x^2+ax+12=0$ обладают свойством $x_1-x_2=1$. Найдите a.

18. Решите уравнения:

а) (1) $|2x-3|=3-2x$;

б (10) $x-\sqrt{x}=6$;

в) (1) $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}=0{,}5$;

г) (1) $(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=(a-1)(a+2)$;

д) (10) $\sqrt{2-x}+\frac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$;

е) (3) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{\lg 4}{\lg 8}$;

ж) (11) $4^x-10\cdot 2^{x-1}=24$;

з) (1) $\frac{3}{2^{1-x}}=4^{x-1}-7$;

и) (1) $\log_3\frac{x+1}{3}=\log_3\frac{x}{2-x}$;

к) (10) $1-\frac{1}{2}\lg(2x-1)=\frac{1}{2}\lg(x-9)$;

л) (3) $\log_x 2\cdot\log_{2x} 2=\log_{4x} 2$;

м) (7) $\log_2 x+\log_3 x=1$;

н) (6) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$;

о) (2) $1+\log_6\frac{x+3}{x+7}=\frac{1}{4}\log_{\sqrt{6}}(x-1)^2$;

п) (3) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\log_3(x^2-1)}=\sqrt{2(x-1)}$;

р) (10) $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8$;

с) (6) $4^{\log_2\lg x}=\lg x-\lg^2 x+1$.

19 (10). Найдите больший корень уравнения

$$\lg(x+6)-2=\frac{1}{2}\lg(2x-3)-\lg 25.$$

20. Решите тригонометрические уравнения:

а) (7) $\cos 2x+\cos^2 x=0$;

б) (7) $\sin 2x+2\cos x-\sin x-1=0$;

в) (1) $\cos^2 x-\sin^2 3x=0$;

г) (3) $1-\cos x=\sin x\sin\frac{x}{2}$;

д) (8) $\sin 3x-4\sin x\cdot\cos 2x=0$;

е) (3) $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}$;

ж) (4) $\sin^2 x+\cos^2 2x=\sin^2 3x+\cos^2 4x$;

з) (2) $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x=\frac{2\sqrt{3}\cos 2x}{1+\cos 2x}$;

и) (2) $(\sin x+\cos x)^2=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\times\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

к) (3) $2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos 2x}{1+\sin x}$;

л) (4) $(\sin 2x+\sin 4x)\operatorname{tg}x=0$;

м) (2) $5\sin x\cdot\operatorname{tg}x-\sin x-5\operatorname{tg}x+1=0$;

и) (8) $3^{1+\sin x}+2\cdot 3^{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=21$.

21. Решите системы уравнений:

а) (2) $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=3,\\ x^2+2xy-2y^2=6;\end{cases}$

б) (6) $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81,\\ \lg(x+y)^2-\lg x=2\lg 3;\end{cases}$

в) (2) $\begin{cases}2\lg\sqrt{x}+2^y+1=0,\\ \lg x^3+4^y-1=0;\end{cases}$

г) (2) $\begin{cases}9^{x-y}+2\cdot 3^{x-y}=\log_2 8,\\ (1-y)\lg 3=\lg(4-3^x);\end{cases}$

д) (7) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=576, \\ \log_{\sqrt2}(y-x)=4; \end{cases}$

е) (7) $\begin{cases} 7^x-3\cdot y=43, \\ 4y+2\cdot 7^x=106; \end{cases}$

ж) (6) $\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)}=48, \\ 2\log_5(2y-x-12)-\log_5(y-x)= \\ =\log_5(x+y); \end{cases}$

з) (4) $\begin{cases} \cos 2y\sqrt{\sin x}=0, \\ \cos 2y+4\sin^2 x-3=0. \end{cases}$

22. Решите неравенства:

а) (3) $\frac{4-3x}{3-2x}<1$;

б) (3) $|x|+|2x+1|-x>1$;

в) (8) $x^2-|5x+8|>0$;

г) (8) $\sqrt{5-x^2}>x-1$;

д) (12) $\sqrt{2x+4}<4$;

е) (1) $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x+7}\geqslant\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x+5}$;

ж) (2) $3\sqrt{6+x-x^2}+2>4x$;

з) (1) $\sqrt{2x^2-6x+1}-x+2>0$;

и) (1) $\log_2(x-1)+\log_2 x\geqslant 1$;

к) (2) $\frac{1}{3^x-1}>\frac{1}{1-9^{x-1}}$;

л (4) $\sqrt{\log_2\frac{3-2x}{1-x}}<1$;

м) (4) $\log_2 x-2\log_x 2+1\geqslant 0$;

н) (1) $\frac{1}{\log_{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2}10}<\lg 2$;

о) (4) $\log_{3x-5}(3x^2+8x+9)>2$.

23(2). Найдите область определения функции

$$y=\lg\left(\frac{x^2+6}{8+2x-x^2}-1\right).$$

24(6). При каких значениях параметра a система

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$

удовлетворяется для всех действительных значений x?

25(1). При каких a уравнение

$$\cos^2 ax+\cos x=2(\cos ax+\cos x-1)$$

имеет единственное решение?

Анализ

1(11). Найдите число точек пересечения графиков функций

$$y=\frac{x^2-1}{x-1} \text{ и } y=2^x.$$

2(10). Найдите значения функции $y=x^3-3x^2-9x+15$ в точке минимума.

3(11). Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=\operatorname{tg} x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{4}$.

4(6). Пусть x_1 и x_2 — точки экстремумов функции

$$f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-6(a+1)x+2.$$

При каких a выражение $x_1^2+x_2^2$ имеет наименьшее значение?

5(1). Пусть x_1 и x_2 — соответственно точка минимума и точка максимума функции $y=-2x^3+3(1-2a)x^2+12ax-1$. При каком значении a выполняется $x_1^2=x_2$?

6(8). Найдите экстремальные точки функции

$$y=5|x|-x^2-4.$$

7(12). Найдите точки экстремума функции

$$y=-3\sin(6x+1)+9x.$$

8(1). Проектируется оросительный канал с поперечным сечением в виде равнобедренной трапеции с определенной площадью и высотой. Каким должен быть острый угол трапеции, чтобы для облицовки боковых стенок и дна пошло наименьшее количество материала?

9(4). Из круга вырезан сектор с центральным углом α. Из оставшейся части круга свернута воронка. При каком значении α вместимость воронки будет наибольшей?

10(11). Найдите больший корень уравнения

$$f'(x)=2, \text{ если } f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2-3x.$$

11(4). В правильной четырехугольной призме длина диагонали равна $\sqrt3$; угол, образованный этой диагональю с основанием призмы, равен α. Найдите объем призмы и выясните, при каком значении α объем призмы будет наибольшим.

Геометрия

1(1). В равносторонний треугольник вписана окружность радиусом r. Найдите площадь треугольника.

2(11). Катеты прямоугольного треугольника 12 и 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

3(3). Найдите площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной a.

4(7). В треугольник, в котором известны длины двух сторон a и b, вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол C. Найдите длину стороны ромба.

5(6). Периметр прямоугольного треугольника равен 84, а длина его гипотенузы равна37. Вычислите площадь этого треугольника.

6(12). В треугольнике заданы две стороны $a=5$ см, $b=4$ см и угол между ними $\alpha=30°$. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

7(1). В треугольнике ABC с периметром $2p$ длина стороны AC равна a и величина острого угла ABC равна α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK.

8(11). Около круга описана равнобочная трапеция, периметр которой равен 80, а острый угол — 30°. Найдите площадь трапеции.

9(7). Большим основанием равнобедренной трапеции является диаметр описанной вокруг нее окружности с радиусом R. Найдите отношение площади круга к площади трапеции, если ее меньшее основание равно a, а угол при большем основании — α.

10(4). В треугольник постоянного периметра $2p$ вписана окружность. К этой окружности проведена касательная, параллельная стороне треугольника. Найдите наибольшую возможную длину отрезка касательной, концы которого принадлежат сторонам треугольника.

11(3). Определите угол ромба, зная его площадь Q и площадь вписанного в него круга S

12(1). Дана окружность с диаметром KL. Вторая окружность с центром в точке K пересекает первую окружность в точках M и N, а диаметр KL — в точке A. На дуге AN, не содержащей точки M, взята точка B, отличная от точек A и N. Луч LB пересекает первую окружность в точке C. Известно, что $CN = c$, $CM = d$. Найдите BC.

13(2). В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектрисы BD и AF пересекаются в точке O. Отношение площади треугольника DOA и площади треугольника BOF равно $\frac{3}{8}$. Докажите, что $AC : AB = 1 : 2$.

14(8). Отношение площади диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды к площади ее основания равно $\sqrt{3}$. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.

15(6). Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом 60°. Найдите объем параллелепипеда.

16(6). Основание наклонного параллелепипеда — квадрат, сторона которого равна 1. Одно из боковых ребер равно 2 и образует с каждой из прилежащих сторон основания угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.

17(6). В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Каждая боковая грань образует с плоскостью основания угол β. Определите объем пирамиды.

18(10). В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, площадь которого равна 60. Площади диагональных сечений параллелепипеда равны 72 и 60. Найдите объем параллелепипеда.

19(2). Боковые грани пирамиды, в основании которой равнобедренная трапеция с высотой h, одинаково наклонены к плоскости основания. Из вершины пирамиды опущены перпендикуляры на боковые стороны трапеции и основания их соединены. В полученном треугольном сечении угол при вершине равен α, а площадь сечения равна S. Найдите объем пирамиды.

20(3). Площадь боковой поверхности конуса равна S, а полной поверхности — P. Определите угол между высотой и образующей.

21(2). В цилиндр вписана правильная треугольная пирамида так, что одно из ее боковых ребер есть образующая цилиндра. Найдите объем пирамиды по радиусу R основания цилиндра и двугранному углу α при боковом ребре пирамиды.

Физика

Механика

1(10). Расстояние между точками A и B — $l = 3$ км. Из этих точек навстречу друг другу выезжают два велосипедиста. Скорости их равномерного движения $v_1 = 18$ км/ч и $v_2 = 9$ км/ч. Через какое время (в секундах) они встретятся?

2(4). Автомобиль проехал половину пути со скоростью $v_1 = 60$ км/ч. Оставшуюся часть пути он половину времени ехал со скоростью $v_2 = 15$ км/ч, а последний участок — со скоростью $v_3 = 45$ км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

3(9). Тело начало двигаться равноускоренно и в течение пятой секунды от начала движения прошло путь $l = 45$ м. С каким ускорением оно двигалось?

4(11). Тело, покоящееся на высоте $H = 45$ м над поверхностью Земли, начало свободно падать. Какой путь оно пройдет за последнюю секунду своего движения? Результат представьте в единицах СИ. Принять $g = 10$ м/с^2.

5(5). Тело падает с некоторой высоты H и последнюю часть пути $h = 200$ м проходит за время $\tau = 4$ с. Сколько времени падало тело? Как велика высота H? Сопротивление воздуха не учитывать.

6(2). Вверх по горке, профиль которой показан на рисунке 1, толкнули льдинку, сообщив ей скорость $v_0 = 10$ м/с. На какую максимальную высоту поднимется льдинка? Трением пренебречь.

7(4). В лифте, опускающемся с ускорением $a = 0{,}1$ м/с^2, падает тело с высоты $h = 1$ м над полом без начальной скорости. Через какой промежуток времени после начала падения тело коснется пола лифта?

8(9). Радиус рабочего колеса гидротурбины в 8 раз больше, а частота вращения в 40 раз меньше, чем у паровой турбины. Чему равно отношение центростремительных ускорений концов лопаток паровой турбины и концов лопастей гидротурбины?

9(9). Автомобиль массой $m = 5$ т трогается с места с ускорением $a = 0{,}6$ м/с^2. Найдите силу тяги, если сила трения $F_{тр} = 2$ кН. Ответ выразите в килоньютонах (кН).

10(9). При каком ускорении разорвется трос, прочность которого на разрыв $T = 15$ кН, при вертикальном подъеме груза массой $m = 500$ кг?

11(3). По горизонтальной дороге тянут сани с грузом общей массой $m = 80$ кг за веревку, составляющую угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Сила тяги $F = 250$ Н. Определите коэффициент трения, если ускорение, с которым движутся сани, $a = 0{,}15$ м/с^2.

12(10). Две гири массой $m_1 = 7$ кг и $m_2 = 11$ кг висят на концах нити, которая перекинута через блок. Гири вначале находятся на одной высоте. Через какое время после начала движения более легкая гиря окажется на $h = 20$ см выше тяжелой? Массой блока и нити, а также трением в блоке пренебречь; нить нерастяжима; $g = 10$ м/с^2.

13(3). Самолет делает мертвую петлю. Найдите вес летчика в верхней и нижней точках петли, если радиус петли $R = 200$ м, масса летчика $m = 80$ кг, скорость самолета $v = 360$ км/ч.

14(3). Шар массой $m = 0{,}5$ кг, падая с высоты $h_1 = 10$ м, попадает в снег и пробивает в нем яму глубиной $h_2 = 80$ см. Считая движение в воздухе и в снегу равнопеременным

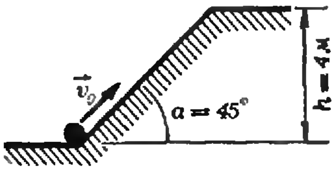


Рис. 1.

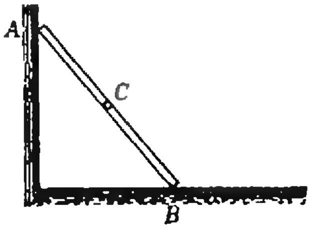


Рис. 2.

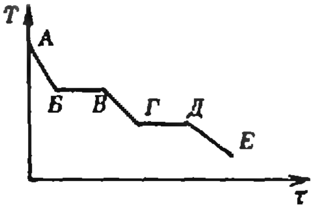


Рис. 3.

и силу сопротивления в воздухе $F_{c1}=0{,}8$ Н, найдите силу сопротивления в снегу.

15(11). Человек находится на краю круглой горизонтальной платформы радиусом $R = 3$ м. Какое наименьшее число оборотов в минуту должна делать платформа вокруг вертикальной оси, чтобы человек не мог удержаться на ней при коэффициенте трения $\mu = 0{,}2$? Результат округлите до десятых долей. Принять $g = 10$ м/с^2.

16(10). Полый цилиндр плавает в керосине. Чтобы цилиндр плавал с той же осадкой (глубиной погружения) в воде, в него требуется поместить груз массой $m = 100$ кг. Определите массу цилиндра. Плотность керосина $\varrho_к = 800$ кг/м^3, воды $\varrho_в = 1000$ кг/м^3.

17(2). Верхний конец лестницы упирается в гладкую вертикальную стену, а нижний находится на шероховатом полу (рис. 2). При каком наклоне лестница будет находиться в равновесии? Коэффициент трения $\mu = 0{,}5$, центр тяжести лестницы находится в ее середине.

18(9). На чашках рычажных весов стоят два одинаковых сосуда, до краев заполненные водой. В сосуде, стоящем на левой чашке, плавает кусок дерева. В каком положении будут находиться чашки весов? Выберите ответ: 1) левая чашка опущена; 2) правая чашка опущена; 3) весы в равновесии.

19(10). Какую работу совершит сила $F = 20$ Н, подняв по наклонной плоскости груз массой $m = 2$ кг на высоту $h = 2{,}5$ м с ускорением $a=5$ м/с^2? Сила действует параллельно наклонной плоскости. Трением пренебречь.

20(5). Резиновый мяч массой m и радиусом R погружают в воду на глубину h и отпускают. На какую высоту, считая от поверхности воды, подпрыгнет мяч? Сопротивление воды и воздуха при движении не учитывать. Плотность воды ϱ.

21(11). Пуля массой $m = 8$ г, летящая со скоростью $v_1 = 400$ м/с, пробивает бревно толщиной $d = 20$ см и вылетает из него со скоростью $v_2 = 100$ м/с. Определите среднюю силу сопротивления движению пули в бревне. Результат представьте в килоньютонах (кН).

22(2). Пуля, летящая со скоростью v_0, пробивает несколько одинаковых досок, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. В какой по счету доске застрянет пуля, если ее скорость после прохождения первой доски равна v_1 и $v_0 = 1{,}2v_1$?

23(2). Ядро, летящее со скоростью $v = 20$ м/с, разорвалось на две части с массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 5$ кг. Скорость меньшей части равна $v_2 = 90$ м/с и направлена так же, как скорость ядра до разрыва. Определите скорость первой части ядра.

24(1). Альфа-частица после столкновения с неподвижным ядром гелия движется в направлении, образующем угол $\beta = 30°$ с первоначальным направлением. Определите угол, под которым разлетаются частицы после столкновения, и отношение их кинетических энергий.

25(12). Направленная горизонтально струя воды из брандспойта бьет в вертикальную стенку. Расход воды $Q=60$ л/мин. Площадь поперечного сечения струи $S=1{,}5$ см^2. Определите силу давления струи на стенку, считая удар о стенку абсолютно неупругим. Плотность воды $\varrho=10^3$ кг/м^3.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1(10). На сколько градусов надо нагреть газ, поддерживая постоянным его объем, чтобы давление увеличилось в два раза по сравнению с давлением при температуре $t = 0$ °С (0 °С = 273 К, $\alpha = (1/273)$ К$^{-1}$)?

2(5). Газ, масса которого $m=1{,}2\cdot10^{-3}$ кг, занимает объем $V_1=4\cdot10^{-3}$ м^3 при температуре $T_1 = 280$ К. При изменении температуры газа при постоянном давлении его плотность стала $\varrho_2 = 0{,}6$ кг/м^3. Определите конечную температуру газа.

3(11). Два сосуда соединены тонкой трубкой с краном. В одном сосуде находится $V_1 = 1{,}5$ л азота при давлении $p_1 = 4{,}0$ Па, в другом — $V_2 = 3{,}0$ л кислорода при давлении $p_2 = 2{,}5$ Па. Какое давление установится в сосудах, если открыть кран? Температура газов постоянна. Результат представьте в единицах СИ.

4(3). Вычислите работу, которую совершит газ при изобарическом нагревании от $t_1 = 20$ °С до $t_2 = 100$ °С, если он находится в сосуде с подвижным поршнем. Начальный объем газа $V_1 = 5$ дм^3, давление нормальное атмосферное.

5(3). Один моль кислорода нагревается при постоянном давлении от температуры $t_0 = 0$ °С. Какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы его объем удвоился? Удельная теплоемкость кислорода при этих условиях $c=915{,}6$ Дж/(кг· К).

6(2). Один моль идеального газа имел температуру T, затем был охлажден изохорически так, что давление упало в n раз. Далее газ расширялся при постоянном давлении так, что его температура оказалась снова равной T. Какую работу совершил газ?

7(9). Какое количество теплоты нужно затратить, чтобы получить $m = 5$ кг воды при температуре $t_0 = 0$ °С из льда, взятого при $t = -20$ °С? Удельная теплоемкость льда $c = 2{,}1$ кДж/(кг· К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Ответ выразите в мегаджоулях (МДж).

8(5). Чтобы измерить температуру воды, имеющей массу $m = 0{,}05$ кг, в нее погрузили термометр, который показал $t_1 = 80$ °С. Определите начальную температуру воды, если термометр перед погружением в воду показывал температуру помещения $t_2 = 20$ °С. Теплоемкость термометра $C = 3$ Дж/К, удельная теплоемкость воды $c_в=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

9(9). В процессе охлаждения вещество переходит из газообразного состояния в жидкое, а затем — в твердое. Какой участок графика зависимости температуры T вещества от времени τ (рис. 3) соответствует переходу пара в жидкость? Выберите ответ: 1) А — Б; 2) Б — В; 3) В — Г; 4) Г — Д; 5) Д — Е.

10(12). Сосуд с водой нагревают на электроплитке от $t=20$ °С до кипения за $\tau=20$ мин. Сколько нужно времени, чтобы при тех же условиях работы плитки 20 % воды обратилось в пар? Удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(моль· К), удельная теплота парообразования $r=2{,}2\cdot 10^6$ Дж/кг.

11(12). Смешали $V_1=2$ м^3 воздуха с относительной влажностью $\varphi_1=30$ % и $V_2=1$ м^3 с относительной влажностью $\varphi_2=20$ %. Обе порции были взяты при одинаковых температурах. Смесь занимает объем $V=3$ м^3. Определите ее относительную влажность.

Основы электродинамики

1(11). В двух лежащих на одной из диагоналей вершинах квадрата со стороной $a = 30$ см расположены одинаковые по модулю и знаку точечные заряды $q = 2\cdot 10^{-8}$ Кл. Заряды находятся в вакууме. Определите напряженность электрического поля в одной из других вершин квадрата. Результат представьте в вольтах на сантиметр (1 В/см = 100 В/м) и округлите до целого числа. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

2(9). Радиус водяной капли $r = 1$ мм. Найдите модуль потенциала капли, если ее заряд образован избыточными электронами в количестве $n = 10^2$. Принять $4\pi\varepsilon_0 = 10^{-10}$ Ф/м.

3(9). Проводники, заряженные одинаковыми зарядами, имеют потенциалы $\varphi_1 = 40$ В и $\varphi_2 = 60$ В. Каким будет потенциал этих проводников, если их соединить проволокой?

4(9). Два проводящих шара радиусами $R_1 = 8$ см и $R_2 = 20$ см находятся на большом расстоянии друг от друга и имеют заряды $q_1 = +14 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = -7 \cdot 10^{-9}$ Кл. Каким станет заряд второго шара, если шары соединить проводником? Ответ выразите в нанокулонах (нКл).

5(4). Два одинаковых металлических шарика, имеющие положительные заряды $q_1 = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл, расположены на расстоянии $l = 30$ см друг от друга, значительно большем их диаметра. Изменится ли сила взаимодействия между шариками после того, как они будут на короткое время соединены проводником? Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

6(10). Электрическое поле переместило частицу с зарядом $q = 0{,}2$ Кл из точки A с потенциалом $\varphi_A = 600$ В в точку B, потенциал которой неизвестен. При этом кинетическая энергия частицы изменилась на $\Delta W = 100$ Дж. Определите потенциал точки B.

7(10). Маленький шарик массой $m = 0{,}2$ г, имеющий заряд $q = 10^{-6}$ Кл, скользит с высоты $h = 3$ м по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 36{,}5°$. В вершине прямого угла, образованного высотой h и горизонтом, находится неподвижный точечный заряд $Q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл. Определите скорость шарика у основания наклонной плоскости, если начальная скорость шарика равна нулю. Трением пренебречь.

8(2). Найдите заряд конденсатора в схеме, приведенной на рисунке 4.

9(10). Какое сопротивление R_x надо включить между точками A и B (рис. 5), чтобы сопротивление всей цепи было равно $R = 10$ Ом, если $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 3$ Ом?

10(1). Напряжение между точками B и A (рис. 6) равно $U_1 = 120$ В. Определите отношение сопротивлений R_1/R_2, если $R_3/R_4 = 2$, а разность потенциалов между точками C и D равна $U_2 = 20$ В.

11(5). Через аккумулятор с внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом и электродвижущей силой $\mathscr{E} = 12$ В течет ток силой $I = 1$ А. Чему будет равна разность потенциалов на клеммах аккумулятора, если сопротивление внешней цепи увеличить на $\Delta R = 8$ Ом?

12(9). Батарея аккумуляторов с внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом питает десять параллельно соединенных ламп сопротивлением $R = 250$ Ом каждая. Определите ЭДС батареи, если ток в каждой лампе $I = 0{,}5$ А.

13(2). Некоторая цепь с сопротивлением R питается от батареи, составленной из N одинаковых элементов. При каком значении внутреннего сопротивления элемента сила тока в цепи будет одинаковой при соединении этих элементов в батарею последовательно и параллельно?

14(3). Источник тока замыкается проволокой: один раз с сопротивлением $R_1 = 4$ Ом, а другой — $R_2 = 9$ Ом. В обоих случаях количество теплоты, выделяющееся в проволоках за одно и то же время, оказывается одинаковым. Каково внутреннее сопротивление источника?

15(11). Подъемный кран равномерно поднимает груз массой $m = 8{,}8$ т на высоту $h = 10$ м в течение $t = 49$ с. Определите силу тока, потребляемую краном, если напряжение $U = 220$ В, а КПД крана $\eta = 80\,\%$. Результат представьте в единицах СИ. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

16(11). В однородном магнитном поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл кусок провода длиной $l = 2$ м и сопротивлением $R = 1$ Ом складывают вдвое и концы соединяют. Затем провод растягивают в квадрат так, что плоскость квадрата перпендикулярна линиям индукции магнитного поля. Какой заряд протекает при этом через сечение проводника? Результат представьте в микрокулонах (1 мкКл = 10^{-6} Кл).

17(10). Под влиянием однородного магнитного поля в нем движется с ускорением $a = 2$ м/с^2 прямолинейный проводник поперечным сечением $S = 1$ мм^2. Направление проводника перпендикулярно линиям индукции, и по проводнику течет ток $I = 1$ А. Плотность материала проводника $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3. Определите индукцию магнитного поля.

18(12). Прямоугольная рамка из проводника с сопротивлением $R = 1$ Ом, двигаясь поступательно с постоянной скоростью $v = 4$ м/с, пересекает полосу однородного магнитного поля с индукцией $B = 0{,}5$ Тл. Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рамки. Стороны рамки $l_1 = 10$ см, $l_2 = 5$ см, ширина полосы $l_3 > l_2$, рамка движется вдоль стороны l_2. Определите количество теплоты, которое выделится в рамке к моменту, когда она пересечет полосу.

Колебания и волны

1(3). Два маятника одновременно начинают колебаться. За один и тот же промежуток времени первый делает $n_1 = 20$, а второй — $n_2 = 10$ колебаний. Определите отношение длин этих маятников.

2(1). Математический маятник длиной $l = 1$ м отклонили на угол α_0 ($\alpha_0 \ll 1$) и отпустили с нулевой начальной скоростью. Через

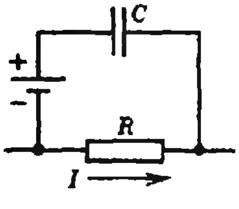


Рис. 4.

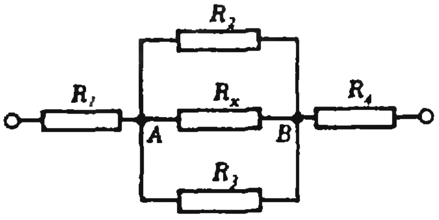


Рис. 5.

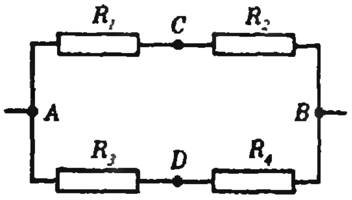


Рис. 6.

какое минимальное время угол отклонения маятника станет равным $\alpha_0/2$? Ускорение силы тяжести считать равным $g = 10$ м/с^2.

3(11). Лифт движется по вертикали вверх вначале с ускорением $a_1 = 6$ м/с^2 в течение времени $t_1 = 5$ с, затем с ускорением $a_2 = -6$ м/с^2 в течение времени $t_2 = 10$ с. В лифте находится математический маятник длиной $l = 0{,}25$ м. Сколько колебаний совершит маятник за время движения лифта? Принять $g = 10$ м/с^2. Результат округлите до целого числа.

4(4). Заряженный шарик прыгает в поле плоского конденсатора на тонкой изолирующей подложке. Обкладки конденсатора расположены горизонтально. Масса шарика $m = 10^{-3}$ кг, его заряд $q = 10^{-5}$ Кл. Максимальная скорость шарика $v = 0{,}8$ м/с, высота подъема $h = 5$ см. Определите разность потенциалов между наивысшей и наинизшей точками траектории шарика.

5(5). Колебательный контур настроен на частоту $\nu = 1{,}5 \cdot 10^7$ Гц. Как надо изменить емкость конденсатора для перестройки контура на длину волны $\lambda = 40$ м? Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

6(10). Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 10^{-3}$ Гн и конденсатора емкостью $C = 10^{-5}$ Ф. Конденсатор заряжен до максимального напряжения $U_m = 100$ В. Определите максимальную силу тока в контуре при свободных колебаниях в нем.

7(11). Скорость звука в воде $v = 1450$ м/с. На каком расстоянии находятся ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний $\nu = 725$ Гц? Результат представьте в единицах СИ.

8(12). Емкость конденсатора переменной емкости в контуре радиоприемника изменяется в пределах от C до $9C$. Определите диапазон длин волн контура радиоприемника, если емкости C конденсатора соответствует длина волны, равная 3 м.

Оптика

1(2). Луч света падает на границу раздела двух сред под углом $\gamma = 30°$ к границе. Показатель преломления первой среды $n_1 = 2{,}4$. Определите показатель преломления второй среды, если известно, что отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу.

2(11). Аквалангист, находящийся под водой, видит Солнце под углом $\gamma = 52°$ к горизонту. Определите угол падения лучей солнечного света на поверхность воды. Результат представьте в градусах и округлите до целого числа. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

3(11). Пучок параллельных лучей падает на толстую стеклянную пластину под углом $\alpha = 60°$ и, преломляясь, переходит в стекло. Ширина пучка в воздухе $a = 10$ см. Определите ширину пучка в стекле. Результат представьте в сантиметрах (см) и округлите до десятых долей. Показатель преломления стекла $n = 1{,}51$.

4(10). Предмет находится на расстоянии $d = 0{,}25$ м от двояковыпуклой линзы. Изображение получается действительным, обратным, увеличенным. Высота изображения в $\Gamma = 4$ раза больше высоты предмета. Определите фокусное расстояние линзы.

5(3). На каком расстоянии от выпуклой линзы с фокусным расстоянием $F = 60$ см следует поместить предмет, чтобы получить действительное изображение, увеличенное в $\Gamma = 2$ раза?

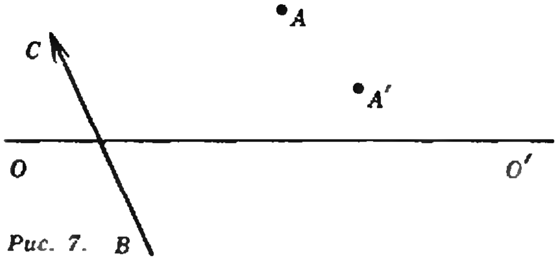


Рис. 7.

6(5). Собирающая линза дает действительное изображение с увеличением $\Gamma = 2$ раза. Определите фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением $f = 0{,}3$ м.

7(4). Две линзы с одинаковыми фокусными расстояниями находятся на одной оси на расстоянии $l = 1$ м друг от друга. Изображение предмета, помещенного на расстоянии $d = 1$ м от одной линзы, получилось на таком же расстоянии от другой линзы. Найдите фокусное расстояние линз.

8(1). На рисунке 7 показаны положения главной оптической оси OO' линзы, точечного источника A и его изображения A' в линзе. Постройте изображение предмета BC, определив, собирающей или рассеивающей является линза, а также ее положение.

9(11). Атом ртути, получив при соударении с электроном энергию $W = 7{,}84 \cdot 10^{-19}$ Дж, излучает квант света. Определите частоту излучения. Результат представьте в петагерцах (1 ПГц $= 10^{15}$ Гц) и округлите до сотых долей. Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

10(5). Определите работу выхода электрона из металла при внешнем фотоэффекте, если при освещении металла светом с длиной волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ м фотоэлектроны приобретают скорость $v = 10^6$ м/с ($m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с).

11(1). При увеличении частоты падающего на металл света в α раз задерживающее напряжение для фотоэлектронов увеличивается в β раз. Считая частоту ν падающего света известной, определите по этим данным «красную» границу для металла.

12(1). Масса ядра ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ равна $m_1 = 16{,}00$ а. е. м. Определите его дефект масс и энергию связи, если известно, что масса ядра ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ равна $m_2 = 4{,}00$ а. е. м., а его дефект масс $\Delta m_2 = 0{,}03$ а. е. м. (Дефект масс $\Delta m = 1$ а. е. м. соответствует энергии связи $E_{св} = 931$ МэВ.)

13(11). Третий блок Белоярской атомной электростанции им. И. В. Курчатова имеет электрическую мощность $P = 6 \cdot 10^6$ Вт при КПД $\eta = 40$ %. Определите массу урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, расходуемого в течение суток, если известно, что при делении одного ядра этого элемента выделяется энергия, в среднем равная $w = 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж. Результат представьте в единицах СИ и округлите до сотых долей. Постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

14(12). Какая минимальная энергия (в МэВ) необходима для расщепления ядра изотопа лития ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$ на протоны и нейтроны? Массы ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$, ${}^{1}_{1}p$, ${}^{1}_{0}n$ соответственно равны $m_1 = 7{,}01601$ а. е. м., $m_2 = 1{,}00783$ а. е. м., $m_3 = 1{,}00866$ а. е. м. Массе $m_0 = 1$ а. е. м. соответствует энергия $E_0 = 931$ МэВ.

Публикацию подготовили
А. А. Егоров, В. А. Тихомирова

Информация

VIII Московская олимпиада по программированию

Московскую городскую олимпиаду по программированию для школьников провели 1 февраля 1987 Учебно-производственный центр с институтами ИНЭУМ Минприбора и ИПИ АН СССР. В ней приняло участие 320 учеников из 21 района г. Москвы. Ниже приводятся задачи этой олимпиады. (Участникам предлагалось выбрать и решить только две задачи.)

1. Рюкзак. *Из заданных n предметов выбрать такие, чтобы их суммарный вес был менее 30 кг, а стоимость — наибольшей. Напечатать суммарную стоимость выбранных предметов.*

Точнее. Задано число $n < 100$ и два массива положительных чисел $A[1:n]$, $B[1:n]$. Выбрать такие попарно различные числа $i_1, i_2, \ldots, i_k$, чтобы

$$A[i_1]+A[i_2]+\ldots+A[i_k]<30,$$

а

$$B[i_1]+B[i_2]+\ldots+B[i_k]=\max.$$

Напечатать только величину max.

2. Полукратные. *Множество чисел A задано условиями:*

а) $1 \in A$,

б) *если $k \in A$, то $2*k+1 \in A$ и $3*k+1 \in A$, и других чисел множество A не содержит.*

Напечатать первые $n < 1000$ чисел множества A в порядке возрастания.

Вот начало этой распечатки: 1, 3, 4, 7, 9, 10, 13, 15, 19, ...

3. Пары кубов. *Каким числом способов заданное натуральное число n представляется суммой двух кубов натуральных чисел:*

$$n = i^3 + j^3?$$

Перестановка слагаемых нового способа не дает. Программой извлечения корня пользоваться не следует.

4. Перевертыши. *Заданы число $n < 1000$ и числовой массив $A[1:n]$. Найти отрезок массива максимальной длины, в котором первое число равно последнему, второе — предпоследнему, и т. д. Напечатать длину этого отрезка.*

5. Индексы порядка. *Задано число $n < 1000$ и числовой массив $A[1:n]$. Найти и отпечатать такую последовательность всех его индексов*

$$i_1, i_2, \ldots, i_n,$$

в которой элементы массива не убывают:

$$A[i_1] \leqslant A[i_2] \leqslant \ldots \leqslant A[i_n].$$

Пояснения.

а) Через $A[1:n]$ обозначается массив чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$; через $A[i]$ — его элемент.

б) Числа, задающие число элементов массива или обозначающие индексы элементов, — натуральные. Все остальные числа — с плавающей точкой (если не сказано иначе).

в) Все заданные числа и массивы следует в решениях вводить извне и печатать, а найденные ответы выводить на печать.

г) В задаче 1 можете предполагать, что предметы уже расположены в порядке возрастания или убывания веса $A[i]$, стоимости $B[i]$, цены $B[i]/A[i]$, или какого-либо иного признака.

д) Хорошие решения должны укладываться в задаче 2 в n действий, в задаче 3 — в $\sqrt[3]{n}$ действий, в задачах 4 и 5 — в n^2 действий (с точностью до постоянного множителя).

А. Л. Брудно

Летняя школа «Юный программист»

Два с половиной года назад в г. Переславле-Залесском, на берегу Плещеева озера появился Институт программных систем АН СССР. Институт очень молод, средний возраст сотрудников — 27 лет, желания работать, энергии и энтузиазма им не занимать. Не случайно поэтому с первых дней существования института начались работы по пропаганде компьютерной грамотности. В одной из школ г. Переславля был оборудован класс ПЭВМ «Правец», в котором стали проводиться занятия групп УПК и факультативы по курсу информатики. В январе 1986 года в зимние каникулы прошли занятия в лагере «Юный программист». Накопленный опыт и был использован летом 1986 года при проведении Школы «Юный программист».

Главной целью, стоявшей перед организаторами Школы, являлось ознакомление детей с современными ПЭВМ. Для преподавателей было важно создать у школьников представление о возможностях компьютеров, продемонстрировать стили профессиональной работы с ним и, по возможности, предотвратить возникновение как компьютеромании, так и компьютерофобии. Решению последней задачи, в частности, служило и оформление Школы: яркие рисунки и указатели в аудиториях и на зданиях иллюстрировали тему «Дружелюбный компьютер».

5 августа при участии вице-президента АН СССР академика Е. П. Велихова состоялось торжественное открытие Школы. Три недели 80 мальчишек и девчонок учились и отдыхали в живописном местечке «Ботик» на берегу Плещеева озера. Они собрались из разных уголков страны — из Москвы и Горького, Литвы и Белоруссии, были здесь и юные переславцы.

Работа Школы была построена следующим образом. Школьники 1—6 классов составили отдельный поток и занимались на компьютерах Tandy TRS-80 Color Computer 2. Главная тема занятий — компьютерная графика. Программирование велось на языке Бейсик. Остальные учащиеся были разбиты на группы по 5—10 человек, к каждой из групп были прикреплены преподаватели-кураторы. Они проводили практические занятия по одной или нескольким темам, таким, как компьютерная графика, музыка, язык ЛИСП, архитектура ЭВМ, электронные таблицы. Программирование велось на языке Паскаль на ПЭВМ «Правец».

Помимо практических занятий велись и теоретические: школьникам был прочитан курс лекций по языку программирования Паскаль, читались также небольшие курсы по математической логике, теории чисел, языку логического программирования Пролог.

Велико было желание участников Школы успеть все увидеть и узнать! Ни солнечная погода, ни близость озера не могли оторвать школьников от компьютеров. На научной конференции, состоявшейся перед закрытием Школы, ребята рассказали о наиболее интересных своих работах. Младшие школьники продемонстрировали на компьютерах свои программы-мультфильмы «Лето кота Леопольда», «Про кота и песика» и др.

Но не только учебным занятиям были посвящены дни, проведенные ребятами в Школе. Спортивные соревнования и КВН, экскурсия в Ростов-Великий и встреча с редакцией журнала «Юный техник», турниры по «бою в памяти», посвящение в юные программисты и прощальный вечер надолго останутся в памяти школьников и их старших товарищей. В. П. Руденко, Л. А. Гайдар, Е. В. Грязнова, М. В. Нестерова, С. В. Дужин и др.— каждый из 20 преподавателей, работавших в Школе, старался передать детям не только знания, но и частицу своей души.

С 1987 года в г. Переславле-Залесском будет работать ежегодная региональная Школа юных программистов. Впереди у сотрудников ИПС АН СССР большая работа. Пожелаем им успехов.

С. М. Гукова,
А. К. Волков

Итоги шахматного конкурса 1986 года

Шахматный конкурс 1986 года неожиданно побил все рекорды — в редакцию поступило более 3000 писем на первые же задания. Видно, после матчей на первенство мира между Каспаровым и Карповым интерес к шахматам возрос, и среди читателей «Кванта» появилось больше шахматистов. По мере движения конкурса задания усложнялись и число его участников, конечно, сокращалось. Но все же сотни читателей выдержали испытание до конца! Первоначально планировалось присуждать за лучшие решения II и I разряд, однако, как выяснилось, большинство решивших правильно более 16 заданий уже имеют второй разряд, а то и первый. Поэтому решено всем 40 победителям конкурса присвоить I разряд (некоторым из них вторично!).

Среди участников конкурса немало таких, чьи конверты можно даже не вскрывать — решения почти наверняка правильные. Это такие опытные решатели как А. Рябов, И. Кваша, В. Медведев, В. Москаленко, М. Германов, Д. Красиков, А. Бойко и др. Они неоднократно побеждали в конкурсе, соответственно получали и дипломы журнала, и призы, и первый разряд. На сей раз в состав победителей мы включили тех участников, которые не так избалованы славой.

Итак, вот 40 победителей конкурса: В. Алферов (Кемерово), М. Андрухив (Донецк), Х. Анимица (с. Кременевка Донецкой обл.), Д. Борисенко (Москва), С. Булатов (с. Раменье Московской обл.), Ю. Великанов (Горький), В. Гасников (Калининград Московской обл.), О. Глауберман (Донецк), А. Гончаренко (Иваново), М. Гумберидзе (с. Мукеди ГССР), А. Давыдов (с. Елфимово Горьковской обл.), А. Жолковер (Люберцы), В. Иванов (Тула), С. Катаргин (Омутнинск), М. Куперман (Москва), Я. Лавренюк (Киев), Ю. Литвиненко (Одесса), Н. Лобжанидзе (Тбилиси), Р. Малык (Ворошиловград), И. Мамедов (Ханлык АзССР, А. Мельников (Москва), В. Моисеев (Москва), Д. Моисеев (Москва), А. Молчанов (Жданов), Э. Мусажаров (Караганда), В. и Т. Оджагвердневы (Белокан), Д. Попадиус (Невинномысск), И. Потехин (Москва), В. Пшеничный (Демянск), В. Расторгуев (Москва), И. Савченко (Ленинград), А. Сергушев (Минск), М. Сидоренко (Калининград Московской обл.), С. Тасмуратов (Астрахань), Р. Торговицкий (Москва), В. Чебкасов (Куйбышев), А. Чернявский (Москва), Е. Чуглазова (Зарафшан), Н. Язданов (дер. Кильчирово Баш. АССР), В. Якубовский (пос. Садовый Владимирской обл.). Вместе с поздравлениями от редакции мы посылаем им дипломы и значки журнала, шахматную литературу с автографами А. Карпова и Е. Гика и документ о присвоении I разряда.

Ответы, указания, решения

Построения одним циркулем

1. Окружность S_1 (за вычетом точки O) есть геометрическое место точек, симметричных относительно окружности S точкам прямой AB; окружность S_2 — геометрическое место точек, симметричных относительно окружности S точкам прямой CD. Поэтому точка P симметрична относительно окружности S как точке прямой AB, так и точке прямой CD, т. е. P' — общая точка прямых AB и CD. Заметим, что прямые AB и CD параллельны тогда и только тогда, когда окружности S_1 и S_2 имеют единственную общую точку O, т. е. касаются в точке O, и прямые AB и CD совпадают тогда и только тогда, когда совпадают окружности S_1 и S_2.

2. См. решение задач 5 и 4.

3. Сторону, равную радиусу окружности, имеет вписанный в нее правильный шестиугольник. Поэтому A и C — противоположные вершины вписанного правильного шестиугольника, т. е. диаметрально противоположные точки окружности. Значит, AC — диаметр, т. е. точка C лежит на луче AB, и $AC=2AB$.

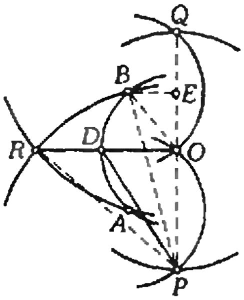


Рис. 1.

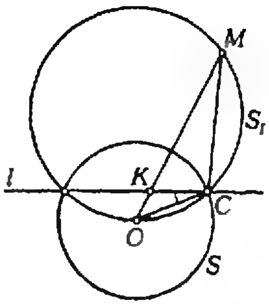


Рис. 2.

4. Обозначим через D середину дуги AB и через E середину отрезка OQ (рис. 1). Мы должны доказать, что $PD=OR$. Заметим, что $RO\perp PQ$, $BE\perp OQ$, точка D лежит на RO, точка O лежит на PQ и $OB=OD$, $PR=PB$, и воспользуемся теоремой Пифагора:

$$OR^2=PR^2-PO^2=PB^2-PO^2=(PE^2+BE^2)-$$
$$-PO^2=PE^2+OB^2-OE^2-PO^2=$$
$$=\frac{9}{4}PO^2+OB^2-\frac{1}{4}PO^2-PO^2=PO^2+OB^2=$$
$$=PO^2+OB^2=PO^2+OD^2=PD^2.$$

5. Очевидно, точка P' лежит на прямой OP (вся картина симметрична относительно прямой OP). Треугольники ORP' и OPR — равнобедренные и имеют общий угол при основании; значит, они подобны и $OP':OR=OR:OP$, т. е. $OP\cdot OP'=OR^2$.

6. Будем строить точку, симметричную точке P' относительно окружности S, по способу задачи 5. Должна получиться точка P. Значит, точки O и P симметричны относительно прямой, проходящей через точки пересечения окружности S с окружностью с центром P', проходящей через O. Но точки O и P симметричны относительно прямой AB. Значит, эти прямые совпадают.

Покажем, что окружность S_1, проходящая через точку O и точки пересечения окружности S с некоторой прямой l (рис. 2), состоит из точек, симметричных точкам прямой l относительно окружности S. Возьмем на прямой l точку K и обозначим через M точку пересечения луча OK с окружностью S_1. Пусть C — одна из точек пересечения окружности S с прямой l (и с окружностью S_1). Треугольники OKC и OCM подобны (углы O у них одинаковы, углы OMC и OCK равны, поскольку они опираются на равные дуги окружности S_1. Значит, $OK:OC=OC:OM$, т. е. $OK\cdot OM=OC^2$. (*Если* точка K *лежит* вне окружности S, чертеж меняется, но рассуждение остается точно таким же.)

Задачи на газовые смеси

1. $p=(1+\alpha)\frac{m}{\text{M}}\,\frac{RT}{V}=1{,}94\cdot10^5$ Па, где $\text{M}=28$ г/моль — молярная масса азота.

2. $m_1=\frac{\text{M}_1\text{M}_2}{\text{M}_2-\text{M}_1}\left(\frac{pV}{RT}-\frac{m}{\text{M}_2}\right)=13{,}1$ г,

$m_2=m-m_1=46{,}9$ г, $m_3=2m_2\text{M}_3/\text{M}_2=52{,}8$ г, где m_1, m_2, m_3, $\text{M}_1=2$ г/моль, $\text{M}_2=32$ г/моль, $\text{M}_3=18$ г/моль — массы и молярные массы водорода, кислорода и воды соответственно.

3. $V_2/V_1=3$.

Калейдоскоп «Кванта»

Головоломки

1. Пусть $x_1>x_2$; тогда $y_1<y_2$. Поскольку $S_2=S_3$, т. е. $x_2y_3=x_3y_2$, мы получаем, что $x_2>x_3$. Тогда $y_2<y_3$. Опять из равенства $x_4y_3=x_3y_2$ получаем $x_3>x_4$; тогда $y_3<y_4$. Снова, поскольку $x_1y_4=x_4y_3$, получаем $x_4>x_1$ — противоречие с цепочкой неравенств $x_1>x_2>x_3>x_4$.

2. $\frac{a}{6}\sqrt{3\pi\sqrt{3}}$. Указание. Рассмотрите шесть одинаковых правильных треугольников, составляющих правильный шестиугольник. Теперь ясно, что искомая кривая является шестой частью окружности, делящей пополам площадь этого правильного шестиугольника.

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1986 году

Математика

Алгебра

1. $30<v<33{,}6$. 2. 10 ч., 15 ч. 3. 14. Указание. Пусть N — число членов бригады. Из условия следует, что существует целое число k такое, что $\frac{65}{1000}N<k<\frac{75}{1000}N$. При $k=1$ получим $\frac{1000}{75}<N<\frac{1000}{65}$, т. е. $13\frac{1}{3}<N<15\frac{5}{13}$. Наименьшее $N=14$.

4. 18 км/ч. 5. 3. 6. 15 кг. 7. 150 г, 450 г. 8. 160 г, 20 %. 9. 2; 3. 10. 4, 12, 36, 108 или 108, 36, 12, 4. 11. а) 0; б) 27; в) 1; г) 1; д) $\sqrt{3}/4$; е) $-3/5$; ж) a^2-1; з) 4. 12. а) -1; б) $2/a+b$; 1; в) $\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)$; г) 1; д) 2. 14. $a\in(-\infty;\ -1)\cup(0;\ \infty)$. 15. 2. 16. 6. 17. $a=\pm7$.

18. а) $(-\infty;\ 3/2]$; б) $\{9\}$; в) $\left\{1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right\}$;
г) $\{1+\sqrt{a^2+4a+8};\ 1-\sqrt{a^2-2a+5}\}$ при $a<-2$; $\{1-\sqrt{a^2-2a+5};\ 1-\sqrt{a^2+4a+8}\}$ при $-2\leqslant a<-1/2$; $\{-3/2\}$ при $a=-1/2$; $\{1-\sqrt{a^2-2a+5};\ 1-\sqrt{a^2+4a+8}\}$ при $-1/2<a\leqslant1$; $\{1+\sqrt{a^2-2a+5};\ 1-\sqrt{a^2+4a+8}\}$ при $a>1$; единственный корень при $a=-1/2$.
Указание. При $x>3$ левая часть уравнения равна $(x-3)(x+1)+3\sqrt{(x+1)(x-3)}$; при $x<3$ она равна $(x-3)(x+1)-3\sqrt{(x-3)(x+1)}$. Выполните замену $y=\sqrt{(x+1)(x-3)}$.
д) $\{1\}$; е) 2; ж) $\{3\}$; з) $\{4+\log_2 7\}$; и) $\{\sqrt{3}-1\}$; к) $\{13\}$; л) $\{2^{-\sqrt{2}};\ 2^{\sqrt{2}}\}$; м) $\{2^{\log 6}\}$; н) $[1/9;\ 9]$; о) $\{-11;\ -1{,}5\}$; п) $\{3\}$; р) $\{37\}$; с) $\{10\}$. 19. $\{14\}$.

20. а) $x=\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos(-1/3)$ $(k\in\mathbf{Z})$;
б) $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1)$; $x_2=\frac{\pi}{3}(6l\pm1)$ $(k,l\in\mathbf{Z})$;
в) $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}(2l+1)$ $(k,l\in\mathbf{Z})$;
г) $x=2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$;
д) $x_1=\pi k$; $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+l\pi$ $(k,l\in\mathbf{Z})$;
е) $x=\frac{\pi}{2}(3k\pm1)$ $(k\in\mathbf{Z})$;
ж) $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$; $x_2=\pi l/2$ $(k,l\in\mathbf{Z})$;
з) $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{6}(6l+1)$ $(k,l\in\mathbf{Z})$;
и) $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4l-1)$ $(k,l\in\mathbf{Z})$;
к) $x_1=2\pi k$; $x_2=2\operatorname{arctg}2+2\pi l$ $(k,l\in\mathbf{Z})$;
л) $x=\pi k/3$ $(k\in\mathbf{Z})$; м) $x=\operatorname{arctg}1/5+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$;
н) $x=\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. 21. а) $\{(2;\ 1);\ (-2;\ -1)\}$;
б) $\{(1;\ 2);\ (16;\ -28)\}$; в) $\{(10^{-5};\ 2)\}$;
г) $\{(0;\ 0);\ (1;\ 1)\}$; д) $\{(2;\ 6)\}$; е) $\{2;\ 2\}$;

ж) $\{(16; 20)\}$; з) $\left\{\left(\frac{\pi}{3}(3k+1);\ \frac{\pi}{4}(2l+1)\right)\right\}$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

22. а) $(1; 3/2)$; б) $(-\infty; -1/2)\cup(0; \infty)$;
в) $\left(-\infty; \frac{5-\sqrt{57}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{57}}{2}; \infty\right)$;
г) $[-\sqrt{5}; -2)$; д) $[-2; 6)$; е) $[-3; 2]\cup\{4\}$;
ж) $[-2; 2)$; з) $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right]\cup(3; \infty)$;
и) $(2; \infty)$; к) $\left(0; \log_3\frac{3\sqrt{17}-9}{2}\right)\cup(1; \infty)$;
л) $[2; \infty)$; м) $[1/4; 1)\cup(2; \infty)$;
н) $(-\infty; -1)\cup(-1; 0{,}5)\cup(0{,}5; 5-3\sqrt{2})\cup\cup(5+3\sqrt{2}; \infty)$; о) $(-4/3; -1)$.

23. $\left(-2; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 4\right)$.

24. $a\in(-1; 2)$. **25.** При любом иррациональном a. Указание. Если $a=p/q$, $p\in\mathbf{Z}$, $q\in N$, — рациональное число, то уравнеиию удовлетворяют все $x=2\pi qk$ при $k\in\mathbf{Z}$. Если же a иррационально, то $x=0$ является единственным корнем уравиения.

Анализ

1. 1. **2.** -12. **3.** 2. **4.** $a=1$. **5.** $a=1/2$.
6. $x=0$ — точка минимума; $x=\pm 5/2$ — точки максимума.
7. Точки минимума $x=-\frac{1}{6}-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$; точки максимума $x=-\frac{1}{6}+\frac{\pi}{18}+\frac{l\pi}{3}$ $(l\in\mathbf{Z})$.
8. 60°. Указание. Пусть S — площадь поперечного сечения, h — высота трапеции (глубина канала), a — длина нижнего основания (рис. 3). Площадь боковых стенок и дна канала пропорциональна сумме $2a+b=\frac{S}{h}+h\left(\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$. Осталось исследовать на минимум функцию $f(\alpha)=\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.
9. $\alpha_{\max}=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. Указание. Пусть R — радиус данного круга. Длина дуги сектора с центральным углом α равна αR, поэтому радиус основания воронки равен $r=\frac{\alpha R}{2\pi}$. Высота воронки равна $\sqrt{R^2-\frac{\alpha^2R^2}{(2\pi)^2}}$, а ее объем $V(\alpha)=\frac{1}{6}\pi R^3\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}$. Осталось исследовать на экстремум функцию $f(\alpha)=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}$ при $0<\alpha<2\pi$. Для этого достаточно исследовать функцию $f(\alpha)=g(t)=t^2(1-t)$, где $t=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2$, $0<t<1$.
10. 5. **11.** $V(\alpha)=\frac{1}{2}d^3\cos^2\alpha\sin\alpha$; $\max V(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{9}d^3=V(\arcsin 1/\sqrt{3})$.

Геометрия

1. $3r^2\sqrt{3}$. **2.** 2. **3.** $3a^2(7-4\sqrt{3})$. **4.** $\frac{ab}{a+b}$. **5.** 210.
6. $r=10/(9+\sqrt{41-20\sqrt{3}})$. **7.** $\frac{1}{2}(p-q)^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

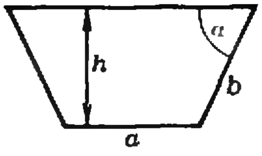


Рис. 3.

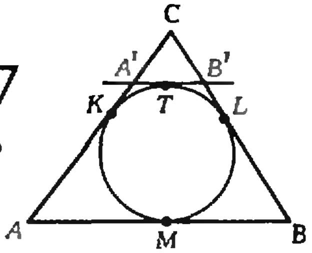


Рис. 4.

8. 200. **9.** $\frac{4\pi R^2\operatorname{ctg}\alpha}{4R^2-a^2}=\pi\operatorname{ctg}\alpha/\sin^2 2\alpha$.
10. $p/4$. Указание. Пусть ABC — треугольник периметра $2p$ со стороной $AB=c$ (рис. 4), отрезок $A'B'$ параллелен AB, касается вписанной окружности и $A'B'=x$. Из подобия треугольников $A'B'C$ и ABC следует, что $\frac{P_{A'B'C}}{P_{ABC}}=\frac{x}{c}$. С другой стороны,

$$P_{A'B'C}=CA'+A'T+TB'+B'C=\\=CA'+A'K+B'L+B'C=CK+CL=\\=AC-AM+BC-BM=AC+BC-AB=\\=2p-2c.$$

Поэтому $\frac{p-c}{p}=\frac{x}{c}$, откуда $x=\frac{1}{p}c(p-c)$. Функция $f(c)=c(p-c)$ достигает максимума при $c=\frac{p}{2}$.
11. $\arcsin\frac{4S}{\pi Q}$. **12.** $\sqrt{cd}$. Указание. Докажите подобие треугольников MCB и BNC.
13. Указание. Можно считать, что $S_{ABC}=1$. Пусть $S_{AOD}=3u$, $S_{BOF}=8u$. Тогда, по свойству биссектрисы угла треугольника, получим соотношение

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{FC}=\frac{S_{ABF}}{S_{AFC}}=\frac{\frac{1}{2}+5u}{\frac{1}{2}-5u}.$$

Аналогично, $\frac{AD}{AB}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}}=\frac{\frac{1}{2}-3u}{3u}$. Получаем уравнение $\frac{1+10u}{1-10u}=\frac{1-6u}{12u}$, откуда $u=\frac{1}{30}$ и $AB=2AC$.
14. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$. **15.** $a^3/\sqrt{2}$. **16.** $\sqrt[3]{2}$.
17. $\frac{1}{2u}\frac{c^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$. **18.** 360.
19. $\frac{h^3}{12\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{4-\frac{h^2\sin\alpha}{2S}}$.
20. $\arcsin\left(\frac{P}{S}-1\right)$.
21. $\frac{R^3\sin^4\alpha}{3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-2\cos\alpha}}$ $\left(0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

Физика

Механика

1. $t= /(v_1+v_2)=400$ с.
2. $v_{\text{ср}}=2v_1(v_2+v_3)/(2v_1+v_2+v_3)=40$ км/ч.
3. $a=l/(4{,}5\tau)=10$ м/с^2 (здесь $\tau=1$ с).

4. $l=\sqrt{2gH}\,\tau-g\tau^2/2=25$ м (здесь $\tau=1$ с).
5. $t=\tau/2+h/(g\tau)=7$ с; $H=gt^2/2=245$ м.
6. $H_{max}=h\cos^2\alpha+(v_0^2\sin^2\alpha)/(2g)=4{,}5$ м (здесь $h=4$ м).
7. $t=\sqrt{2h/(g-a)}=0{,}45$ с.
8. $a_2/a_1=200$.
9. $F_т=ma+F_{тр}=5$ кН.
10. $a=T/m-g=20$ м/с^2.
11. $\mu=(F\cos\alpha-ma)/(mg-F\sin\alpha)=0{,}3$.
12. $t=\sqrt{h(m_1+m_2)/(g)m_2-m_1))}=0{,}3$ с.
13. $P_в=m(v^2/R-g)=3{,}2$ кН; $P_н=m(v^2/R+g)=$ $=4{,}8$ кН.
14. $F_{c2}=(mg(h_1+h_2)-F_{c1}h_1)/h_2=57.5$ Н.
15. $n=60\sqrt{\mu g/(4\pi^2R)}=7{,}8$ мин$^{-1}$.
16. $M=m\rho_к/(\rho_в-\rho_к)=400$ кг.
17. $\alpha\geqslant\operatorname{arctg}(1/(2\mu))=\pi/4$.
18. Правильный ответ 2).
19. $A=Fmgh/(F-ma)=100$ Дж.
20. $H=h(4/3\pi R^3\rho-m)/m$.

21. $F_c=m(v_1^2-v_2^2)/(2d)=3$ кН.
22. Пуля застрянет в 4-й доске.
23. $v_1=((m_1+m_2)v-m_2v_2)/m_1=-15$ м/с.
24. $\gamma=\pi/2$; $E_к/E_н=3$.
25. $F=\rho Q^2/S=6{,}7$ Н.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $\Delta T=273$ К ($\Delta t=273$ °С).
2. $T_2=T_1m/(\rho_2V_1)=140$ К.
3. $p=(p_1V_1+p_2V_2)/(V_1+V_2)=3$ Па.
4. $A=pV_1(T_2-T_1)/T_1=136{,}5$ Дж (здесь $p=10^5$ Па).
5. $Q=c\nu MT_0\approx8000$ Дж (здесь $M=32\times10^{-3}$ кг/моль — молярная масса кислорода).
6. $A=RT(n-1)/n$.
7. $Q=m(\lambda+c(t_0-t))=1{,}86$ МДж.
8. $t_0=t_1+C(t_1-t_2)/(c_вm)=80{,}86$ °С.
9. Правильный ответ 2).
10. $\tau'=\tau\alpha r/(c(t_к-t))=26{,}2$ мин (здесь $\alpha=0{,}2$, $t_к=100$ °С — температура кипения воды).
11. $\varphi=(\varphi_1V_1+\varphi_2V_2)/V=27$ %.

Основы электродинамики

1. $E=\sqrt{2}q/(4\pi\varepsilon_0a^2)=28$ В/см.
2. $\varphi=ne/(4\pi\varepsilon_0r)=160$ В (здесь $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл — заряд электрона).
3. $\varphi=2\varphi_1\varphi_2/(\varphi_1+\varphi_2)=48$ В.
4. $q_2'=(q_1+q_2)R_2/(R_1+R_2)=5$ нКл.
5. Сила взаимодействия увеличивается в $\alpha=(q_1+q_2)^2/(4q_1q_2)=1{,}2$ раза.
6. $\varphi_B=\varphi_A-\Delta W/q=100$ В.
7. $v=\sqrt{2\left(gh+\dfrac{qQ(1-\operatorname{tg}\alpha)}{4\pi\varepsilon_0mh}\right)}=8{,}7$ м/с.
8. $q=C(IR+\mathscr{E})$.
9. $R_x=\dfrac{R_2R_3(R-R_1-R_4)}{R_2R_3-(R_2+R_3)(R-R_1-R_4)}=20$ Ом.
10. $R_1/R_2=(3U_2+2U_1)/(U_1-3U_2)=5$.
11. $U=\mathscr{E}(\mathscr{E}+I(\Delta R-r))/(\mathscr{E}+I\Delta R)=10{,}8$ В.
12. $\mathscr{E}=I(R/10+r)=12{,}6$ В.
13. $r=R$.
14. $r=\sqrt{R_1R_2}=6$ Ом.
15. $I=mgh/(\eta Ut)=102$ А.
16. $q=Bl^2/(16R)=5$ мкКл.
17. $B=\rho Sa/I=5\cdot10^{-3}$ Тл.
18. $Q=2B^2l_1l_2v/R=10^{-3}$ Дж (тепло выделяется при входе и при выходе рамки из полосы магнитного поля).

Колебания и волны

1. $l_1/l_2=(n_2/n_1)^2=1/4$.
2. $t=(\pi/3)\sqrt{l/g}=0{,}33$ с.
3. $n=(t_1\sqrt{g+a_1}+t_2\sqrt{g+a_2})/(2\pi\sqrt{l})=13$.
4. $U=m(v^2/2-gh)/q=-18$ В.

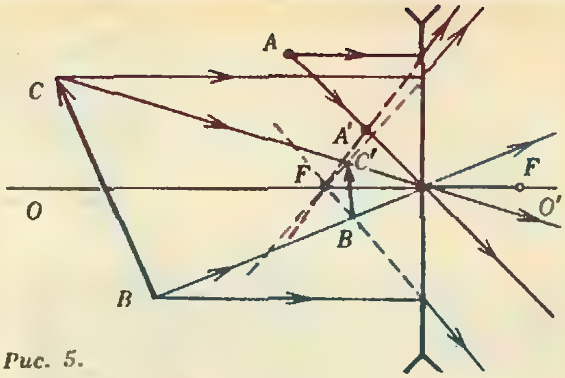


Рис. 5.

5. Емкость конденсатора надо увеличить в $\alpha=(\nu\lambda/c)^2=4$ раза.
6. $I_m=U_m\sqrt{C/L}=10$ А.
7. $l=v/(2\nu)=1$ м.
8. От 3 до 9 метров.

Оптика

1. $n_2=n_1\operatorname{ctg}\gamma=4{,}1$.
2. $\delta=\arcsin(n\cos\gamma)=55°$.
3. $b=a\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}/(n\cos\alpha)=16{,}4$ см.
4. $F=d\Gamma/(\Gamma+1)=0{,}2$ м.
5. $d=F(\Gamma+1)/\Gamma=0{,}9$ м.
6. $F=f/(\Gamma+1)=0{,}1$ м.
7. $F=1$ м или $F=0{,}33$ м.
8. См. рис. 5.
9. $\nu=W/h=1{,}18$ ПГц.
10. $A=hc/\lambda-mv^2/2=5{,}38\cdot10^{-19}$ Дж.
11. $\lambda_m=c(\beta-1)/(\nu(\beta-\alpha))$.
12. $\Delta m_1=m_1-4m_2+4\Delta m_2=0{,}12$ а. е. м.; $E_{св1}=E_{св}\Delta m_1/\Delta m=112$ МэВ.
13. $m=Pt\mathrm{M}/(\eta wN_A)=1{,}58$ кг (здесь $t=1$ сутки $=24\cdot60\cdot60$ с; $\mathrm{M}=235\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса урана).
14. $E_{min}=E_n(3m_2+4m_3-m_1)/m_0=39{,}2$ МэВ.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 5)

1. Сумма длин полуокружностей в обоих случаях будет одинаковой и равной $\pi\cdot AB/2$, где AB — длина отрезка, на котором построены полуокружности.
2. Капли воды, преломляя свет как линзы, концентрируют его в отдельных точках, что может привести к ожогам растения.
3. ПУТЕШЕСТВИЕ=62314153871.
4. Наименьшая сумма равна 102. Она достигается *в трех расположениях, изображенных* на рисунке 6

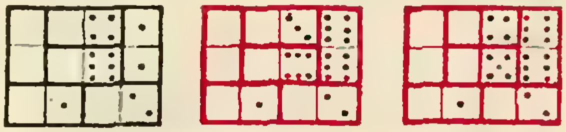


Рис. 6.

5. В случае квадратного стола и круглых салфеток отметим на столе пять точек: четыре угла и центр (рис. 7, *а*). Так как салфеток четыре, хотя бы одна салфетка покрывает сразу две из этих точек. Из попарных расстояний между этими точками наименьшее — между центром и одним из углов. Это — половина диагонали, поэтому диаметр круглой салфетки не меньше этого расстояния.

Если квадратные салфетки покрывают круглый стол (рис. 7, *б*), то они покрывают и его край — *о*кружность. Среди салфеток найдется такая, которая покрывает не меньше четверти

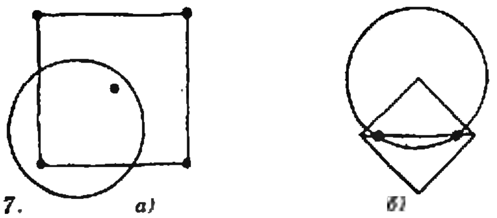


Рис. 7. а) б)

этой окружности. Возьмем на этой дуге две точки, отстоящие друг от друга ровно на четверть окружности. Расстояние между ними равно $R\sqrt{2}$, а расстояния между точками салфетки не больше диагонали этой салфетки, т. е. $a\sqrt{2}$, где a — сторона салфетки. Следовательно, $a \geqslant R$.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 5)

Вопросы и задачи

1. Нет, не может.

2. Может, если равнодействующая, отличная от нуля, составляет угол 90° с направлением перемещения тела.

3. В том случае, когда начальная и конечная точки находятся на эквипотенциальной поверхности.

4. В потенциальную энергию системы «тело+ +электроны» и в кинетическую энергию электронов.

5. Один из способов — отбросить какой-либо предмет в сторону, строго противоположную кораблю; тогда космонавт приобретет скорость, направленную к кораблю.

6. Векторная сумма импульсов любой пары симметричных элементов маховика равна нулю (рис. 8). Следовательно, и суммарный импульс всего маховика тоже равен нулю.

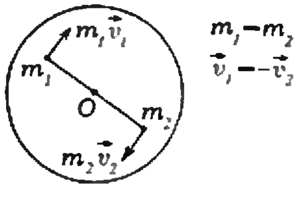


Рис. 8.

7. Импульс вращающегося цилиндра равен нулю (см. задачу 6). Значит, скорость тележки будет такой, как если бы цилиндр был неподвижно закреплен.

8. Система «атом газа+фотон» — замкнутая, а фотон обладает импульсом.

9. Закон сохранения импульса.

10. Поскольку рентгеновские лучи «выбивают» из пластинки электроны, она зарядится положительно.

11. Закон сохранения заряда.

Микроопыт

Поскольку вы приобрели скорость относительно воды, то, в соответствии с законом сохранения импульса, лодка должна приобрести скорость противоположного направлеиия.

Избранные школьные задачи
(см. «Квант» № 5)

1. $(\sqrt{7},\ 0,\ -2\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7},\ 0,\ 2\sqrt{7})$, $(1, 2, 4)$, $(-1, -2, -4)$. Указание. Умножим первое уравнение на $x-y$, второе на $z-x$, третье на $y-z$ и сложим. Получится $7(x-y)+21(z-x)+ +28(y-z)=0$, откуда $z=3y-2x$. Подставляя это значение z во второе и третье уравнения, получаем, что либо $y=0$, либо $y=2x$.

2. Пусть точка M внутри четырехугольника $ABCD$ не покрыта кругами. Тогда углы AMB, BMC, CMD, DMA меньше 90°, чего не может быть.

3. Нет. Решение. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — наша прогрессия и a_n кончается цифрой 3. Пусть, далее, a_m кончается цифрой 7. Если $m>n$, скажем, $m=n+k$, $k>0$, то a_{n+2k} кончается цифрой 1, a_{n+3k} кончается цифрой 5 — противоречие. Если $m<n$, скажем, $n=m+l$, $l>0$, то a_{m+2l} кончается цифрой 9, a_{m+3l} кончается цифрой 5 — снова противоречие.

4. Будем грузить глыбы, не выбирая, на первую платформу, пока их вес не превысит 58 т. Последнюю глыбу снимем и положим рядом с платформой. Точно так же будем грузить глыбы на 2-ю, 3-ю, ..., 14-ю платформу. Вес глыб, лежащих на 14 платформах и рядом с ними, будет более $58\cdot 14=812$ т. Оставшиеся глыбы весят менее 58 т, и их можно погрузить на 15-ю платформу. В нашем распоряжении еще 2 платформы, на которые нужно погрузить 14 глыб. Но 7 глыб весят не более 56 т, так что это наверняка можно сделать.

5. Мы должны построить бесконечно много пар (m, k) натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению $10m^2+1=k^2$. Первую такую пару просто подбираем: $m=6$, $k=19$ $(6^2=36$, $19^2=361)$. Далее мы замечаем, что если $10m^2+1=k^2$, то $10(2mk)^2+1= =40m^2(10m^2+1)+1=400m^4+40m^2+1= =(20m^2+1)^2$, поэтому по паре (m, k), удовлетворяющей нашему условию, мы можем построить пару $(2mk,\ 20m+1)$ заведомо бо́льших чисел, также удовлетворяющих нашему условию. Это позволяет найти бесчисленное множество таких пар.

6. Из наших соотношений следует, что

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1,$$

откуда

$$(x+y+z)(yz+xz+xy)=xyz,$$

$$0=(x+y+z)(yz+xz+xy)-xyz= \\ =(x+y)(x+z)(y+z).$$

Следовательно, либо $x+y=0$, либо $x+z=0$, либо $y+z=0$, и, значит, либо z, либо y, либо x равно $x+y+z=a$.

7. 661 тройка и 2 двойки (или 661 тройка и 1 четверка). Доказательство. В искомом разложении не могут присутствовать числа, бо́льшие 4, потому что такое число n можно заменить числами 2, $n-2$, и произведение увеличится. Если в разложении присутствуют четверки, мы можем заменить каждую из них парой двоек, не изменив произведения. Единиц тоже быть не может: мы приплюсуем единицу к любому другому числу, и произведение увеличится. Значит, в одном из искомых наборов стоят только тройки и двойки. Если есть 3 двойки, мы заменим их двумя тройками, и произведение опять увеличится. Итак, наш набор содержит не более двух двоек, остальные числа набора — тройки.

8. 1/7. Решение (см. рис. 9). Ясно, что $S_{AA_1B}=S_{BB_1C}=S_{CC_1A}=S_{ABC}/3$. Найдем площадь треугольника AC_1Y. Для этого проведем отрезок A_1C_2, параллельный отрезку CC_1. Так как $BC_2:BC_1=1:3$, то $BC_2=2AB/9$, и поэтому $AY:AA_1=AC_1:AC_2=3/7$. Следовательно, $S_{AC_1Y}/S_{AA_1B}=(AY/AA_1)(AC_1/AB)=1/7$ и, значит, $S_{AC_1Y}=S_{ABC}/21$. Аналогично, $S_{BA_1X}=$

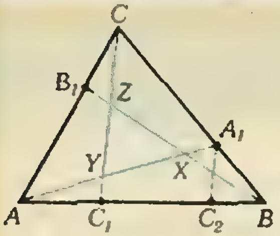


Рис. 9.

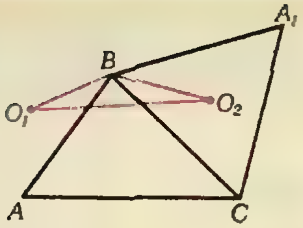


Рис. 10.

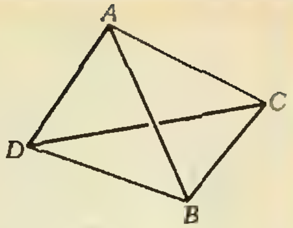


Рис. 11.

$=S_{CBZ}=S_{ABC}/21$. Поэтому $S_{AYZB_1}=S_{CZXA_1}=$ $=S_{BXYC_1}=5S_{ABC}/21$ и $S_{XYZ}=S_{ABC}-\frac{3}{21}S_{ABC}-$ $-\frac{15}{21}S_{ABC}=\frac{1}{7}S_{ABC}$.

9. Доказательство (см. рис. 10). Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры равносторонних треугольников ABC_1, BCA_1 и ACB_1, построенных на сторонах AB, BC и CA. Треугольники O_1BO_2 и ABA_1 подобны, поскольку $O_1B/AB=$ $=O_2B/A_1B=1/\sqrt{3}$ и $\angle O_1BO_2=\angle ABA_1=\angle B+$ $+60°$. Из подобия следует, что $O_1O_2=AA_1/\sqrt{3}$. Аналогично, из подобия треугольников O_2CO_3 и ACA_1 выводим, что $O_2O_3=AA_1/\sqrt{3}$. Значит, $O_1O_2=O_2O_3$. Точно так же доказывается, что $O_1O_2=O_1O_3$.

10. а) c — целое, a и b — либо оба целые, либо оба имеют вид: *целое плюс* 1/2. Доказательство. Подставляя в наш многочлен 0 и ± 1, мы находим, что c и $a\pm b$ — целые числа. Следовательно, целыми являются числа c, $2a$, $2b$ и $a+b$, что и утверждается. Обратно, если указанные числа — целые, то многочлен имеет вид

$$m\frac{x(x-1)}{2}+nx+p$$

с целыми m, n и p и принимает при целых x целые значения.

б) Числа $6a$, $2b$, $a+b+c$ и d должны быть целыми, т. е. многочлен должен иметь вид

$$m\frac{x(x-1)(x-2)}{6}+n\frac{x(x-1)}{2}+px+q$$

с целыми m, n, p и q.

Замечание. Многочлен k-й степени, принимающий при целых x целые значения, всегда имеет вид

$$m\frac{x(x-1)\ldots(x-(k-1))}{k!}+$$
$$+n\frac{x(x-1)\ldots(x-(k-2))}{(k-1)!}+\ldots+px+q$$

с целыми m, n, ..., p, q.

11. (u_1, u_1), (u_2, u_2), (u_3, u_4), (u_4, u_3), где u_1, u_2 — корни уравнения $u^2+(a-1)u+b=0$, u_3, u_4 — корни уравнения $u^2+(a+1)u+(a+b+1)=0$; если одно (или оба) из этих уравнений имеет совпадающие решения или вовсе не имеет решений, то наша система имеет соответственно меньшее число решений; таким образом, число решений нашей системы равно суммарному числу решений указанных двух квадратных уравнений. Указание. Вычитая уравнения системы одно из другого, мы получаем уравнение $x-y=$ $=(y^2-x^2)+a(y-x)$, из которого либо $x=y$, либо $x+y+a+1=0$.

12. Обозначим левую часть доказываемого равенства через x и возведем ее в куб, воспользовавшись формулой $(a+b)^3=a^3+b^3+$ $+3ab(a+b)$. Получим

$$x^3=20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3x\sqrt[3]{20^2-2\cdot 14^2}=$$
$$=6x+40.$$

Очевидно, $x=4$ есть решение уравнения $x^3=6x+40$; других решений это уравнение не имеет, ибо $x^3-6x-40=(x-4)(x^2+4x+10)$.

13. Правильный. Доказательство. Если радиус нашей окружности равен 1, то полупериметр равен

$$p=\sin x+\sin y+\sin z=\sin x+\sin y+$$
$$+\sin(x+y)=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\sin(x+y),$$

где x, y, z — углы треугольника. При фиксированном z, т. е. при фиксированном $x+y$, p принимает, очевидно, наибольшее значение при $x=y$. Значит, треугольник с наибольшим периметром следует искать среди равнобедренных треугольников. Ограничиваясь же случаем $x=y$, мы имеем

$$p=2\sin x+\sin 2x,\ p'=2\cos x+2\cos 2x,$$

$p'=0$ на интервале $0<x<\frac{\pi}{2}$ только при $x=\frac{\pi}{3}$.

14. Пусть $x_1\geqslant x_2\geqslant\ldots\geqslant x_n$ — наши числа. Тогда

$$x_1+x_2+x_3\geqslant x_1+x_2+x_3-(x_1-x_3)(1-x_1)-$$
$$-(x_2-x_3)(1-x_2)=x_1^2+x_2^2+x_3(3-x_1-x_2)=$$
$$=x_1^2+x_2^2+x_3(x_3+\ldots+x_n)\geqslant$$
$$\geqslant x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2=1.$$

15. Пусть $ABCD$ — произвольный пространственный неплоский четырехугольник. Достроим его до тетраэдра (рис. 11) и воспользуемся тем, что сумма любых двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла: $\angle DAB+\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA<$ $<(\angle BAC+\angle DAC)+\angle ABC+(\angle BCA+$ $+\angle DCA)+\angle CDA=(\angle BAC+\angle ABC+$ $+\angle BCA)+(\angle DAC+\angle DCA+\angle CDA)=$ $=180°+180°=360°$.

Правильное решение геометрической задачи
(см. «Квант» № 5)

1. Построим треугольник $A'B'C'$ так же, как и решении задачи 1, и построим окружность с центром C', радиус которой равен данному значению d. Эта окружность пересекает отрезок $A'B'$ в 0, 1 или 2 точках. Берем одну из этих точек N', строим прямоугольник $K'N'M'C'$ и переносим его в треугольник ABC. Поскольку с самого начала вместо стороны BC можно

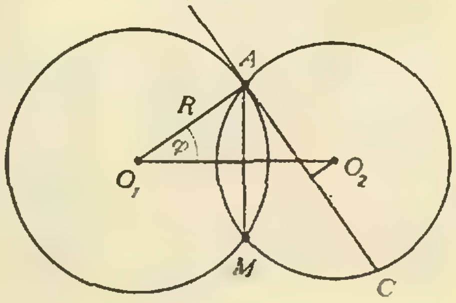


Рис. 12.

было взять любую другую сторону, возможно любое число решений от 0 до 6.

2. Если $AC<AB$, то искомая сумма расстояний будет наименьшей, когда прямая l совпадает с прямой AB. Если $AC=AB$, то наименьшее значение достигается для двух прямых: AC и AB.

3. Пусть AC — отрезок касательной к большей окружности, заключенный внутри меньшей окружности (рис. 12). Тогда

$$AC=2O_1O_2\sin\varphi,\quad AM=2R\sin\varphi,$$

где φ — это угол AO_1O_2, R — радиус бóльшей окружности. Если $O_1O_2>R$, то AM — искомая прямая; если $O_1O_2<R$, то AC — искомая прямая; если $O_1O_2=R$, то обе прямые AM и AC удовлетворяют условию задачи.

4. Решение верно лишь в том случае, если угол A треугольника острый. Если этот угол прямой, то длина медианы равна $\frac{1}{2}BC$ и не зависит от формы треугольника. Если же угол A тупой, то решения не существует: длина медианы всегда меньше $\frac{1}{2}BC$ и может быть сделана сколь угодно близкой к $\frac{1}{2}BC$ (когда AB или AC стремится к нулю).

5. Полученный результат верен лишь в том случае, когда $\angle A=90°$, т. е. $AH\geqslant\frac{1}{2}BC$. Если же этот угол тупой, то наименьший радиус имеет окружность, построенная на BC, как на диаметре, и ответом служит прямоугольный треугольник с гипотенузой BC и данной высотой. Иными словами, если $AH\geqslant\frac{1}{2}BC$, то искомый треугольник равнобедренный; если же $AH<\frac{1}{2}BC$, то искомый треугольник прямоугольный с гипотенузой BC.

6. 45° или 135°. В решении не рассмотрен случай, когда точка пересечения высот расположена вне треугольника.

7. 900 см^2 или 780 см^2. В решении не рассмотрен случай, когда угол $CB'A$ тупой.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 3)

Задание 5 (А. Мандлер, 1929 г.). 1. Лg1! С:a4 2. Лa1 c2 3. Крc5 c1Ф+ 4. Л:c1 и 5. Лa1; 1... Сh7 2. Лg5+ Кр:a4 3. Лg7, выигрывая слона ввиду угрозы мата.

Задание 6 (Р. Люнгман, 1945 г.). 1. Лb1+ Крa7 2. Крc7 Крa6 3. Крc6 Крa5 4. Крc5 Крa4 5. Крc4 Крa5 (5... Крa3 6. Лb3+ Крa2 7. Крc3 Кg6 8. Лb2+ Крa1 9. Крc2 с быстрым матом) 6. Лb5+ Крa6 7. Л:f5 Крb7 8. Лf6 e3 9. Крd3 Крc7 10. Лh6 Кf7 11. Лh7, забирая коня.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов,
Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев,
Е. П. Велихов, И. Я. Верченко,
Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев,
Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов,
В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин,
А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов,
Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. В. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. А. Жигалкин, С. В. Иванов,
Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назарова,
А. М. Пономарева, Е. К. Тенчурина, Л. А. Тишков,
П. И. Чернуский, В. В. Юдин

Фото представил А. Н. Виленкин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор О. М. Верезина

Сдано в набор 16.04.87. Подписано к печати 27.05.87.
Т-12139. Бумага 70×108/16. Печать офсетная.
Усл. кр.-от. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,9.
Тираж 208 355 экз. Цена 40 коп. Заказ 1012.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЧЕМПИОНАТ МИКРОКОМПЬЮТЕРОВ

В прошлом номере рассказывалось о пятом чемпионате мира по шахматам среди больших ЭВМ. Шестое первенство микрокомпьютеров также разыгрывалось по швейцарской системе: 14 машин разыграли «корону» в семь туров. Третий раз подряд победил «Мефисто», набравший 6 очков. На сей раз чемпионат, можно сказать, носил лично-командный характер. В спор вступили три «Мефисто» (ФРГ), три «Фиделити» (США) — победитель первых трех чемпионатов, три «Реком» (Голландия), три «Цирус» (Англия) и по одной «Шахматный монстр» (США) и «Кемпелен Атари» (Венгрия). Представители одной фирмы не встречались между собой. В командном первенстве, как и в личном, победили «Мефисто» (первое, третье и пятое места).

Какие машины играют сильнее — большие или маленькие? Универсальные компьютеры, способные решать самые разнообразные задачи, превосходят своих микросоперников объемом памяти и быстродействием. Шахматные микрокомпьютеры являются специализированными — их аппаратные средства предназначены специально для игры в шахматы, и ничего другого эти машины делать не умеют. Однако в последнее время к большим машинам подключаются дополнительные микропроцессоры и аппаратные модули, реализующие определенные шахматные функции, а параметры малых ЭВМ улучшаются за счет использования более совершенных микросхем. В результате разница в классе игры машин уменьшается, и микрокомпьютеры на равных сражаются с более мощными ЭВМ. В пятом чемпионате мира среди «универсалов» играли их маленькие коллеги, причем микрочемпион «Мефисто» отстал от суперчемпиона «Крэй блитц» всего на очко.

Приведем несколько партий микрокомпьютеров в последнем чемпионате мира.

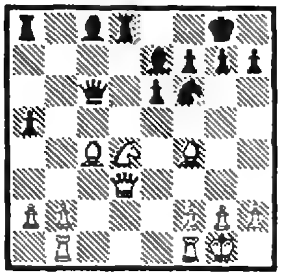
«Фиделити» — «Мефисто»
Защита Алехина

1. e4 Kf6 2. e5 Kd5 3. Kc3 K:c3 4. dc d6 5. Kf3 Kc6 6. Cf4 (обычное продолжение 6. Cb5) **6...Фd7!?** Дебютный сюрприз компьютера! Теория рассматривает 6...g6, 6...Cg4 или 6...de. Черный ферзь намерен выскочить на f5, воспрепятствовать этому можно было путем 7. Cd3. **7. Cb5 a6 8. Ca4 b5 9. Cb3 Фf5 10. Cd5 Cb7 11. g3?** Кто же так ослабляет большую диагональ? Непростительно для трехкратного чемпиона мира. **11...de 12. K:e5 0—0—0! 13. 0—0.** После 13. Фf3 немедленно проявлялись последствия хода g2 — g3: 13...Л:d5! 14. Ф:d5 K:e5 15. Ф:e5 Ф:e5 16. C:e5 C:h1. **13...g5?** Проще 13...e6, видно, компьютер счел, что марш коневой пешки принесет ему больше материальных завоеваний. **14. c4?** Да, многовато ошибок. Сейчас упорнее было 14. C:c6 (14. Фf3 Л:d5 15. Ф:d5 gf 16. Ф:f7 Ф:e5 17. Фe8+ Kd8 18. Лad1 Cd5) 14...Л:d1 15. Лf:d1 C:c6 16. K:c6 gf 17. Лd8+ Kpb7 18. Ka5+ с надеждой на 18...Kpb6?? 19. Лb8+ Kpa7 20. Kc6× или 19...Kp:a5 20.a4!!, 19...Kpc5 20.Лd1. Правда, после правильного 18...Kpa7! 19.Kc6+ Kpb6 20.Kd4 Фf6 белые беззащитны.

14...bc 15. K:f7 Л:d5 16. Фh5 gf 17. Ф:f5 Л:f5 18. K:h8 Cg7, и черные выиграли.

«Мефисто» — «Реком»
Ферзевый гамбит

1. c4 e6 2. Kc3 d5 3. d4 c5 4. cd ed 5. Kf3 Kc6 6. g3 Kf6 7. Cg2 Ce7 8. 0—0 0—0 9. Cg5 cd 10. K:d4 h6 11. Ce3 Cg4. Разыграна защита Тарраша, популярная в мировых чемпионатах не только среди машин, но и среди людей. Напомним, что Каспаров в своих претендентских матчах, а затем и в первом поединке против Карпова продолжал здесь 11...Лe8. Скорее всего, создатели «Рекома» не успели обновить дебютную библиотеку компьютера. **12. Фb3 Ka5 13. Фc2 Лc8 14. b3 Cd7 15. Kf5 Cc5 16. C:c5 Л:c5 17. Лad1 b5 18. Фd3 Kc4 19. K:d5 K:b2 20. Kfe7+ Kph8 21. Фd4 Л:d5 22. K:d5 K:d1 23. Л:d1 Ce6 24. K:f6?** После многочисленных разменов позиция сильно упростилась, но, продолжая сейчас 24. e4, белые сохраняли небольшой перевес за счет превосходства в центре. **24...Ф:f6 25. Ф:a7 Фb2 26. e3 C:a2 27. Фc5 Лe8.** Уже шансы черных выше благодаря проходной пешке «b». Надежнее было 27...Kpg8. **28. Cc6 Лe5??** Не с лучшей стороны характеризует «Реком», неужели в его программе не заложен метод «ФВ»? **29. Лd8+ Kph7 30. Ce4+! Л:e4.** Может быть, издалека машина рассматривала ход 30...g6 и оборвала вариант, не заметив тихого хода 31. Фf8 с неизбежным матом. **31. Фf5+ g6 32. Ф:e4,** и черные сдались.



«Цирус» — «Мефисто»

В данной партии черными играл тот экземпляр «Мефисто», который занял пятое место в чемпионате. Но тактическая зоркость, очевидно, у всех представителей фирмы одинакова.

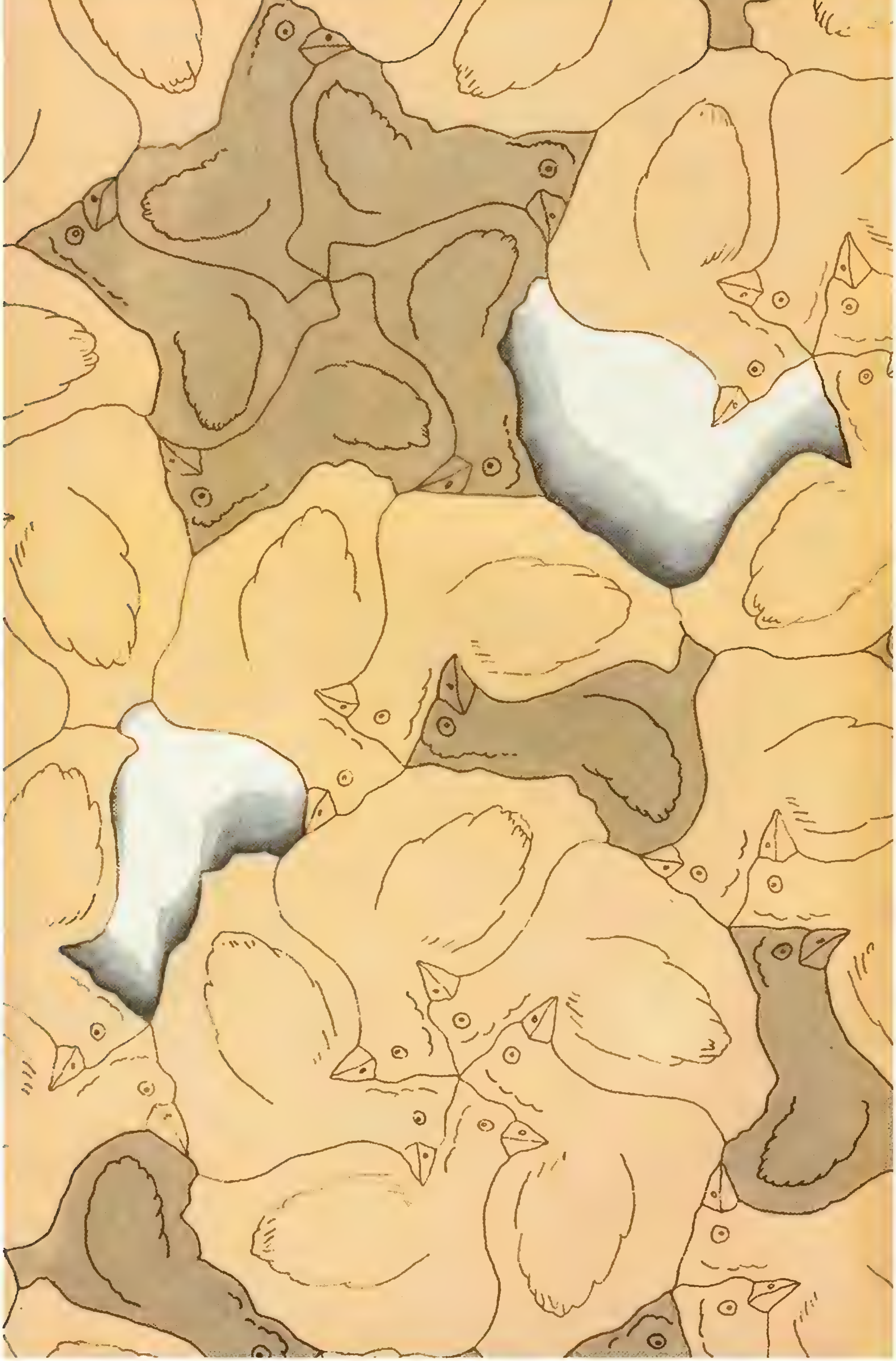
17...Л:d4! Несложный, но эффектный удар, сразу ставящий все точки над «i». **18. Ф:d4 Cb7 19. f3.** Не лучше и 19. Cd5 K:d5 20. Cg3 (или 20. Лdc1) 20...Kc3! и т. д. **19...Cc5 20. Лfd1 C:d4+,** и все кончено.

Конкурсные задания

11. Белые: Kph6, Ce3, п. c2; черные: Kpe2, п. a3. Белые начинают и выигрывают.

12. Белые: Kpc8, пп. a2, f4; черные: Kph6, Kh3. Белые начинают и выигрывают.

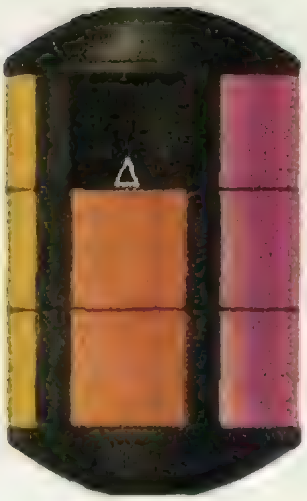
Срок отправки решений — 20 августа 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 11, 12».



Цена 40 коп.

Индекс 70465

Головоломки, которые вы видите на этой обложке, довольно широко распространены в нашей стране. Это «башни» с вращающимися этажами, которые населены цветными шариками или изогнутыми пластинками. Одна из «квартир» либо свободна с самого начала, как в «фонарике» или в «вариконе», где эта пустая «квартира» одна на весь «чердак», либо, как в «вавилонской башне», освобождается утапливанием одного шарика (можно утопить любой из двух противоположных шариков нижнего этажа, но не оба сразу). Пустое место создает возможность переселений вдоль вертикальных «подъездов». Во всех головоломках стандартным считается расположение, при котором все «жители» каждого «подъезда» одного цвета, причем в «вавилонской башне» их надо еще расположить по оттенкам — от темных внизу до светлых вверху. Составить такое расположение совсем несложно благодаря большому числу связей между «квартирами» — из любой из них можно попасть в любую «квартиру» на соседних этажах (после соответствующего поворота). Поэтому на этот раз мы не будем касаться алгоритма решения головоломок, но предложим читателям несколько более сложных вопросов.


Фонарик

Вавилонская башня

Варикон

1) Любую ли расцветку (комбинацию цветов) можно получить? Ответ во всех трех случаях положительный. Впрочем, если бы шарики «варикона» были все разными, как в «вавилонской башне», то достижима была бы только половина возможных расцветок. Это связано с числом «подъездов» — у «варикона» их 5, у «башни» — 6. Попробуйте это объяснить.

2) Будем считать две расцветки разными, если их нельзя совместить вращением головоломки вокруг вертикальной оси (положение «чердака» у «варикона» учитывать не будем). Сколько существует разных расцветок?

3) За какое наименьшее число ходов вам удастся переставить шарики во всех «подъездах» «вавилонской башни» в обратном порядке (темные вверху, светлые внизу)? Тот же вопрос для перестановки ровно двух соседних элементов (по горизонтали или по вертикали). Нам было бы интересно познакомиться с вашими решениями.

4) Головоломку-башню можно усложнить, если провести вдоль нее вертикальную черту и требовать, чтобы после преобразований все ее кусочки соединились. Ответьте на вопрос 1 для этого случая.

НОМЕР
7

Квант
1987 7
Основан в 1970 году

В номере:

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

2 *Ю. П. Соловьев.* Арифметика эллиптических кривых
8 *А. А. Панов.* Генеалогические деревья
14 *Б. С. Ашавский.* Поверхность кристалла
20 *С. И. Валянский.* Единицы: от системы к системе
26 *С. С. Хилькевич, О. А. Зайцева.* Как построить траекторию?

Новости науки

19 Туннельный микроскоп

32 **Калейдоскоп «Кванта»**

Наш календарь

34 Ван-дер-Ваальс и его уравнение

Задачник «Кванта»

36 Задачи М1051—М1055, Ф1063—Ф1067
38 Решения задач М1031—М1035, Ф1043—Ф1045, Ф1047

«Квант» для младших школьников

43 Задачи
44 *А. П. Савин.* Задачи на разрезание

Математический кружок

48 *О. Т. Ижболдин, Л. Д. Курляндчик.* Разбиение единицы

Игры и головоломки

54 *В. Н. Дубровский.* Перевертыши

Информация

59 Компьютеры на берегу Оби
61 Юные программисты в Ленинграде
62 Заочная школа при НГУ

64 **Ответы, указания, решения**
Наша обложка (*с. 53*)
«Квант» улыбается (*с. 58*)

Шахматная страничка

Фигуры возвращаются домой (*3-я с. обложки*)

Наша обложка

На первой странице обложки воспроизведена одна из лунных карт выдающегося польского астронома Яна Гевелия, опубликованных в его знаменитом труде «Селенография» в 1647 году. Рассказ о Гевелии вы найдете в разделе «Наша обложка».

На второй странице обложки представлен фрагмент современной карты Луны, составленной Государственным астрономическим институтом им. П. К. Штернберга и Топогеодезической службой СССР.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1987.

АРИФМЕТИКА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ

Античная математика оставила в наследство несколько великих сочинений. Одно из них — «Арифметика» Диофанта Александрийского. Удивительна судьба этой книги. Написанная в III веке н. э., она исчезла более чем на тысячелетие и считалась утраченной. Лишь в 1464 г. немецкий ученый Региомонтан случайно обнаружил 6 из 13 книг «Арифметики». В первый раз она была напечатана в латинском переводе в 1575 г. После ее издания 1621 г., подготовленного Баше де Мезириаком, она стала настольной книгой многих математиков, например, П. Ферма (1601—1665) и Р. Декарта (1596—1650).

За тысячелетие книга совсем не устарела — она сильно опережала уровень лучших алгебраических исследований XVI века. Посудите сами: в отличие от европейских алгебраистов этого времени, Диофант свободно оперировал отрицательными и рациональными числами, владел буквенной нотацией для уравнений, а самое главное — умел находить решение в целых и рациональных числах линейных, квадратных, кубических уравнений и систем с двумя и более неизвестными с целыми коэффициентами. Решение таких уравнений — они теперь называются *диофантовыми* — с тех пор находится в центре внимания математиков.

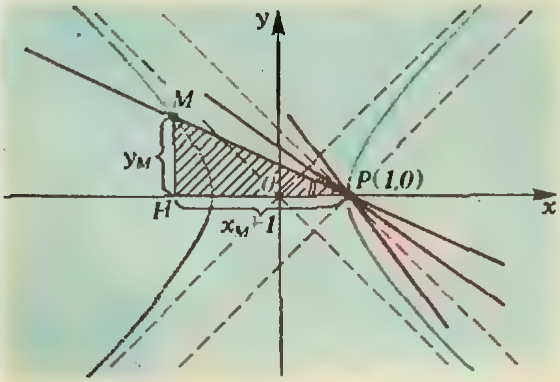


Рис. 1.

О решении некоторых диофантовых уравнений — по-моему, самых красивых — я и собираюсь рассказать вам. Для этого придется не только бросить пристальный взгляд на сочинения великого Диофанта, но и коснуться самых последних событий современной математической жизни.

Метод секущих Диофанта

Проиллюстрируем этот метод на конкретном примере — частном случае одного из тех, которые Диофант разбирает в своей «Арифметике». Пусть дано уравнение

$$x^2-y^2=1 \qquad (1)$$

и требуется найти все его рациональные решения, т. е. найти все пары

$$(x;\, y)=\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

обращающие уравнение (1) в числовое тождество.

Уравнение (1), как и любое уравнение от переменных x, y, можно рассматривать как кривую на плоскости Oxy. В данном случае это гипербола (рис. 1). Сразу бросается в глаза решение (1; 0) — точка пересечения P кривой с осью Ox. Проведем через эту точку секущую

$$y=k(x-1) \qquad (2)$$

и найдем ее вторую точку пересечения с кривой (1). Для этого подставим выражение (2) для y в уравнение (1) и решим получившееся квадратное уравнение относительно x. Получим

$$x_{1,2}=\frac{-k^2\pm 1}{1-k^2}.$$

Корень $x_1=1$ нам и так известен (он относится к точке (1; 0)), а второй корень $x_2=(k^2+1)/(k^2-1)$ дает нам искомую вторую точку

$$(x_2;\, y_2)=\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right). \qquad (3)$$

Для любого рационального k ($k \neq \pm 1$ эта формула определяет точку на нашей кривой, а значит и рациональное решение данного уравнения. (При $k = \pm 1$ секущая пересекает кривую только в точке P (см. рис. 1).) Обратно, для любого рационального решения, т. е. рациональной точки M на кривой, секущая PM задается уравнением (2) с рациональным k (ибо тогда катеты прямоугольного треугольника PMH рациональны).

Таким образом, *формула* (3) *при всевозможных рациональных* $k \neq \pm 1$ *дает все решения в рациональных числах уравнения* (1).

Сам Диофант, конечно, не вводил в рассмотрение систему координат Oxy, не рассматривал кривую данного уравнения — метод координат появился лишь в работах Декарта в XVII веке. Диофант делал подстановку (1) чисто алгебраически и получил — разумеется, в другой записи — формулу (3). Более того, он понимал, что продемонстрированный метод с успехом применим не только к многочлену $x^2 - y^2 - 1$, но и вообще к многочлену второй степени от двух переменных общего вида:

$$p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

где a, b, ..., f целые (или рациональные) числа, при условии, что у многочлена удалось найти хотя бы один рациональный корень.

Не на всякой кривой второй степени имеются рациональные точки; например, их нет на окружности $x^2 + y^2 = 3$ или на эллипсе $x^2 + 82y^2 = 3$ *). Задача о существовании хотя бы одной рациональной точки на кривой второй степени оказалась очень трудной. Первые нетривиальные продвижения в ее решении получили индийские математики Брахмагупта (VII век) и Бхаскара (XII век), а окончательный ответ был найден лишь в 1768 г. французским математиком Ж.-Л. Лагранжем (1736—1813).

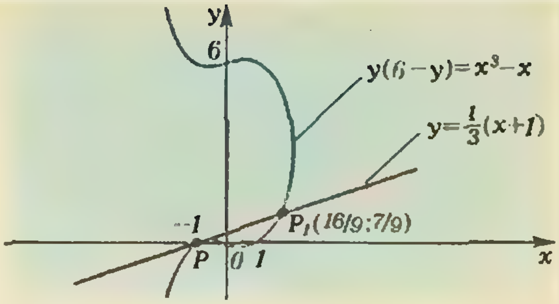


Рис. 2.

Диофант не ограничился уравнениями второй степени. Он с успехом берется и за третью степень, демонстрируя общий прием в одной конкретной задаче. Это

Одна задача «Арифметики» Диофанта. Касательная

В этой задаче требуется найти рациональное решение уравнения

$$y(6 - y) = x^3 - x. \qquad (4)$$

Короткое решение, содержащее в зародыше замечательную идею, Диофант излагает с незаурядным мастерством. Попробуем, пишет он, замену $x = 2y - 1$ (разумеется, его обозначения совсем другие). Тогда получим

$$6y - 6y^2 = 8y^3 - 12y^2 + 4y.$$

Если бы 6 равнялось 4, как хорошо бы сократились члены с y в первой степени! Но число 4 взялось из двойки в замене $x = 2y - 1$. Так, заменим его тройкой, т. е. возьмем $x = 3y - 1$. Тогда линейные члены сокращаются, и мы находим

$$y^2(9y - 7) = 0, \qquad (5)$$

откуда $y = 7/9$ и $x = 16/9$. Получено рациональное решение (16/9; 7/9) кубического уравнения (4).

На первый взгляд здесь нет ничего особенного — просто удачная замена $x = 3y - 1$ позволила найти решение. В чем же «глубокая идея»? Чтобы ответить на этот вопрос, вновь воспользуемся методом координат и построим график кривой (4) — см. рис. 2 *). На этом рисунке красным показана прямая $x - 3y + 1 = 0$. Она касается нашей кривой в точке $P(-1; 0)$ (действительно, уравнение (5) имеет, кроме корня $y = 7/9$, еще и «два слившихся корня» $y^2 = 0$).

По этому пути можно было бы пойти дальше: через полученную рацио-

---

*) Рациональные точки $(a/b;\ b/c)$ имеются, однако, на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Для таких точек тройка целых чисел (a, b, c) называется *пифагоровой* — она удовлетворяет соотношению $a^2 + b^2 = c^2$. Все пифагоровы тройки могут быть найдены методом секущих («Квант», 1987, № 1, с. 12), а также другими приемами (см. статью А. А. Панова в этом номере).

*) О том, как строить графики подобных кривых, мы подробно расскажем ниже.

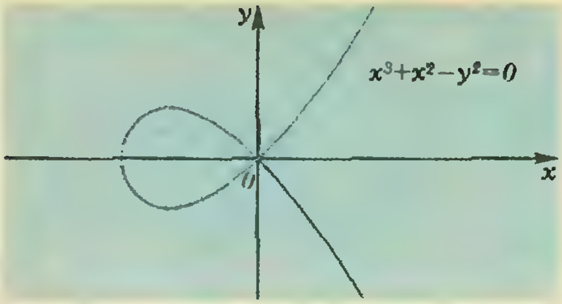


Рис. 3.

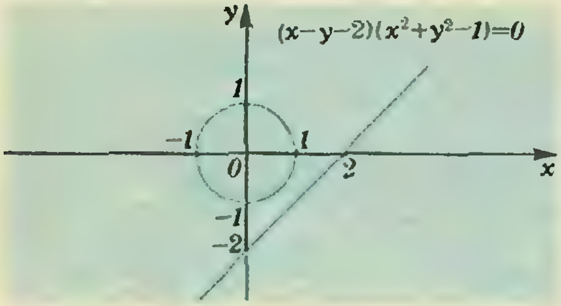


Рис. 4.

нальную точку (16/9; 7/9) построить еще одну касательную к кривой (4) до пересечения с ней в третьей рациональной точке и т. д. Но Диофант не сделал этого шага. И потребовалось более 1500 лет, прежде чем математики сумели до конца воспользоваться идеями Диофанта.

Кривые третьей степени

Оставаясь верными геометрическому подходу, рассмотренному выше, мы сосредоточим наше внимание не на решении уравнений третьей степени, а на следующем эквивалентном вопросе: *каковы рациональные точки кривой на плоскости, задаваемой уравнением третьей степени*

$$f(x,\ y)=ax^3+bx^2y+\ldots+hx+iy+j=0$$

с целочисленными коэффициентами?

Все такие кривые можно разбить на два больших класса. К первому классу отнесем те кривые, у которых имеются точки заострения (как точка (0; 0) кривой $y^2=x^3$), самопересечения (рис. 3), а также кривые, для которых $f(x, y)$ представляется в виде

$$f(x,\ y)=f_1(x,\ y)\cdot f_2(x,\ y),$$

где $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ — многочлены меньших степеней (рис. 4). Назовем такие кривые *вырожденными*. Второй класс образуют невырожденные кривые третьей степени с целочисленными коэффициентами — такие кривые называются *эллиптическими*. Именно этот (наиболее общий) класс и будет нас интересовать. Мы будем рассматривать эллиптические кривые, заданные в так называемой *канонической форме*, т. е. уравнением

$$y^2=x^3+ax^2+bx+c \qquad (6)$$

с целыми коэффициентами a, b и c, в котором многочлен $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ не имеет кратных корней.

Это не нарушает общности: любую неособую кривую $f(x, y)=0$ третьей степени можно некоторым преобразованием привести к виду (6); при этом, если коэффициенты $f(x, y)$ были целыми, задачу отыскания рациональных точек на кривой $f(x, y)=0$ можно свести к аналогичной задаче для кривой (6) с целыми a, b и c.

Графическое изображение эллиптических кривых

Прежде всего выясним, как выглядит кривая (6). Чтобы получить ее графическое изображение, нужно нарисовать график функции $y=\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}$ и симметрично отразить его на оси Ox. Для построения графика $y=\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}$ построим вначале график функции $y=x^3+ax^2+bx+c$. Известно, что у многочлена третьей степени (без кратных корней) могут быть либо один, либо три вещественных корня. По предположению все эти корни различны. Поэтому график $y=x^3+ax^2+bx+c$ выглядит так, как показано на рисунке 5, *а* и *б*. А теперь уже нетрудно получить график функции

$$y=\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}$$

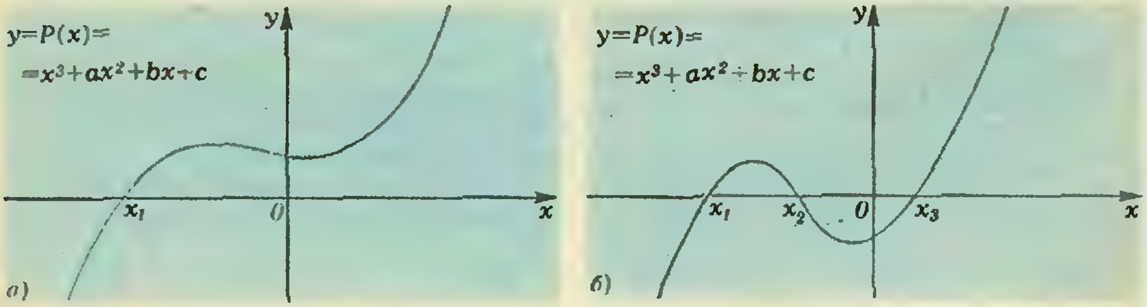


Рис. 5.

(рис. 6, *а*) и, тем самым, вид эллиптической кривой $y^2=x^3+ax^2+bx+c$ (рис. 6, *б*) для случая кривой 5, *а*. Случай кривой 5, *б* мы оставляем читателю; результирующая кривая состоит из двух кусков (см. рис. 9).

Отметим следующее обстоятельство. Графики функций $y=\sqrt{P(x)}$ и $y=-\sqrt{P(x)}$ «склеиваются» в точках x_1, x_2, x_3 «гладко», т. е. без углов. Это происходит потому, что касательная к графику $y=\sqrt{P(x)}$ в точках x_1, x_2, x_3 вертикальная; другими словами, ее угловой коэффициент обращается в бесконечность. Это легко доказать подсчетом производной функции $y=\sqrt{P(x)}$.

Сложение точек на эллиптической кривой

Метод секущих, примененный к эллиптической кривой *C*, приводит к неожиданному результату: оказывается, точки на ней можно «складывать». Мы определим операцию сложения точек на *C*, отправляясь от ее графического изображения (см. рисунок 7). Возьмем на *C* две точки *P* и *Q* и проведем через них прямую. Эта прямая имеет третью точку пересечения с кривой *C*. Отразим эту точку от оси *Ox* и назовем получившуюся точку *суммой P* и *Q* (обозначение $P+Q$, рис. 7). Не всегда прямая, проходящая через две точки, пересекает кривую *C* в третьей — например, вертикальная прямая. Далее мы более подробно рассмотрим эту ситуацию.

Исследуем свойства сложения точек на эллиптической кривой. За образец примем свойства операции сложения чисел. Эта операция *коммутативна*, т. е. $a+b=b+a$, и *ассоциативна*, т. е. $(a+b)+c=a+(b+c)$. Кроме того, у этой операции существует *нуль*, т. е. такое число *O*, что $a+O=a$ для любого *a*, и, наконец, для каждого числа *a* имеется *противоположное* ему, т. е. такое число $(-a)$, что $a+(-a)=0$.

А как обстоит дело на эллиптической кривой? Прежде всего, *операция сложения точек коммутативна.* В самом деле, для вычисления $Q+P$ мы используем ту же самую прямую, что и для $P+Q$. Следовательно, $Q+P=P+Q$.

Ассоциативность для сложения точек на эллиптической кривой также выполняется, но доказать это непросто. Этот замечательный факт — попробуйте его осмыслить геометрически, сделав чертеж — будет доказан в одном из следующих номеров «Кванта».

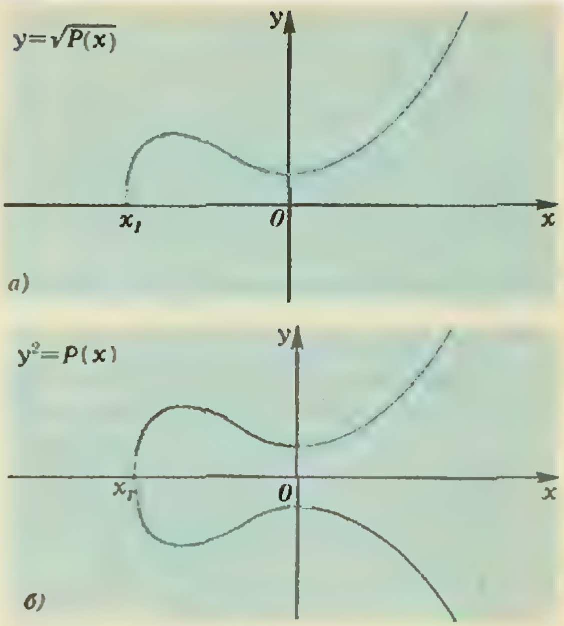


Рис. 6.

Займемся теперь существованием нуля. Нуль — это такая точка *E* на кривой, что $P+E=P$. Как ее найти? Посмотрим на рисунок 8. Пусть на кривой дана точка *P*. Мы хотим найти что-то такое, что если провести прямую через *P* и это «что-то такое», пересечь получившуюся прямую с кривой, а потом отразить точку пересечения от оси *Ox*, то вновь получится *P*. Обозначим через *R* точку, симметричную *P* относительно оси *Ox*. Из сказанного вытекает, что прямая должна проходить через точки *P* и *R*, т. е. должна быть вертикальной. Следовательно, если имеется точка *E*, для которой $P+E=P$, то эта точка не может находиться в плоскости, поскольку она должна лежать и на кривой и на вертикальной прямой.

Раз точки *E* в плоскости нет, а она нам очень нужна, то мы добавим ее

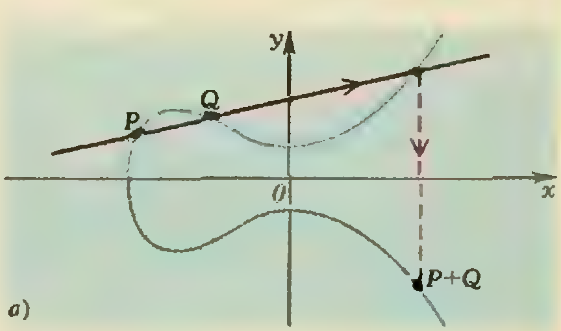


Рис. 7.

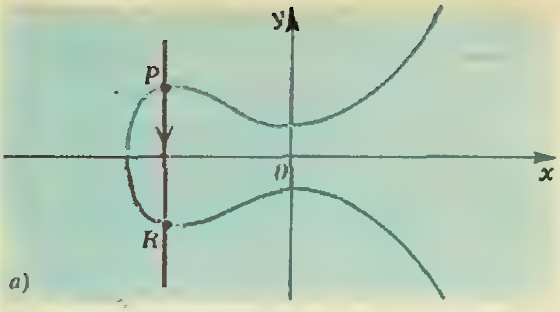


Рис. 8.

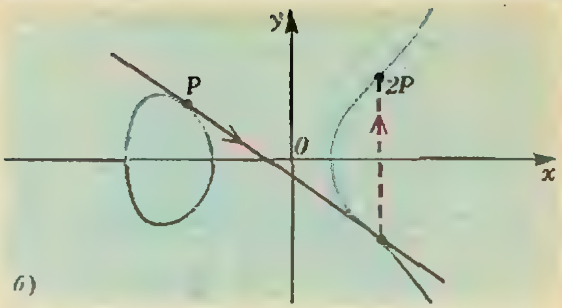


Рис. 9.

к плоскости и назовем *бесконечно удаленной точкой*. Каким требованиям она должна удовлетворять? Любая вертикальная прямая стремится к бесконечности сверху и снизу. Потребуем, чтобы все эти бесконечности были одной и той же точкой E, т. е. будем считать, что *E есть точка пересечения всех вертикалей*. Это требование корректно определяет точку E — нулевую точку относительно нашей операции сложения. В силу нашего соглашения вертикальная прямая, проходящая через точку P, проходит через P и E. Поэтому точка R пересечения этой прямой с эллиптической кривой удовлетворяет соотношению $P+R=E$, т. е. является противоположной к P. А с другой стороны, R — это точка, симметричная к P относительно оси Ox. Значит, любая точка P имеет противоположную — $P=R$. Тем самым мы убедились, что *сложение точек на эллиптической кривой обладает теми же свойствами, что и сложение чисел.*

Как вычислить точку $P+P$? Когда точки были различны, мы проводили секущую. Раз они слились, понятно, что нужно провести касательную (рис. 9).

А что делать, чтобы найти $3P$? Очень просто, берем сумму $2P$ и P. Подобно этому $4P=3P+P$, $5P=4P+P$ и т. д.

Поиск рациональных точек

Вооружившись операцией сложения, займемся теперь рациональными точками. Пусть $P=(x_1, y_1)$, $Q=(x_2, y_2)$ — две рациональные точки на эллиптической кривой $y^2=x^3+ax^2+bx+c$, где a, b, c — целые числа, и прямая, проходящая через P и Q, пересекает эту кривую еще в одной точке $R=(x_3; y_3)$. Тогда R также является рациональной точкой.

Доказывается это утверждение довольно просто. Если

$$y=kx+d \qquad (7)$$

— уравнение прямой, проходящей через точки P и Q, то k и d — рациональные числа, поскольку их можно выразить через координаты $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ точек P и Q по формулам

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}, \quad d=y_1-kx_1=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}.$$

Подставив (7) в уравнение эллиптической кривой, получим для x уравнение третьей степени с рациональными коэффициентами

$$(kx+d)^2=x^3+ax^2+bx+c,$$

т. е.

$$x^3+(a-k^2)x^2+(b-2kd)x+c-d^2=0.$$

По теореме Виета

$$x_1+x_2+x_3=k^2-a.$$

Так как x_1 и x_2 рациональны, то рациональным будет x_3, а значит, и $y_3=kx_3+d$.

Из этого доказательства сразу же следует формула для вычисления координат точки $P+Q$. По определению $P+Q$ получается из R отражением от оси Ox, значит, координаты $(u; v)$ точки $P+Q$ могут быть найдены по формулам

$$u=k^2-a-x_1-x_2,$$
$$v=-ku-d=-[k(u-x_1)+y_1].$$

Подставив сюда значения k и d, получим

$$u=\frac{(y_1-y_2)^2}{(x_1-x_2)^2}-(a_1+x_1+x_2),$$
$$v=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x_1-u)-y_1. \qquad (8)$$

Ясно, что если $x_1=x_2$, эти формулы не имеют смысла. В этом случае уравнение секущей (7) нужно заменить уравнением касательной и действовать по прежней схеме. В результате получим

$$u=-2x_1+a-\left(\frac{3x_1^2+2ax_1+b}{2y_1}\right)^2,$$
$$v=y_1+\frac{3x_1^2+2ax_1^2+b}{2y_1}(u-x_1). \qquad (9)$$

Таким образом, зная хотя бы одну рациональную точку P на эллиптической кривой, мы можем найти по указанным формулам точки $2P$, $3P$ и т. д. Рассмотрим пример. Пусть кривая задана уравнением $y^2=x^3-2$ и $P=(3;\,5)$. Тогда $2P=\left(\frac{129}{100};\,-\frac{383}{1000}\right)$ — новая рациональная точка. Теперь можно вычислить $3P$, $4P$ и т. д. Заметим, что объем вычислений с каждым шагом стремительно растет. Если обозначить через u_n первую координату точки nP, то

$$u_1=3,\quad u_2=\frac{129}{100},\quad u_3=\frac{164323}{29241},$$

$$u_4=\frac{2340922881}{58675600},\quad u_5=\frac{307326105747363}{160280942564521}.$$

Далее еще быстрее. Например, у u_{11} в числителе 71 знак.

В настоящее время неизвестно никакой общей процедуры для нахождения всех рациональных решений уравнения $y=x^3+ax^2+bx+c$. В разобранном примере $y^2=x^3-2$ одно решение (3; 5) мы просто подобрали; в общем же случае наизвестно никакого метода, который позволил бы найти это первое решение. Нахождение рационального решения эллиптического уравнения с помощью эффективной процедуры является одной из крупнейших проблем теории чисел. Однако, если одно решение есть, можно найти другие по формулам (8) и (9).

Порядок точек на эллиптической кривой

При получении точек nP из данной точки P возможны два случая. В первом случае на шаге n получается нуль, т. е. существует такое число n, что $nP=E$. Если для всех $m<n$ $mP\neq E$, то говорят, что точка P имеет *конечный порядок n*. Например, на кривой $y^2=x^3+4$ точка $P=(0;\,2)$ имеет порядок 3, на кривой $y^2=x^3+1$ точка $P=(2;\,3)$ имеет порядок 6, на кривой $y^2=x^3-43x+166$ точка $P=(3;\,8)$ имеет порядок 7. Можно поставить вопрос: сколько существует рациональных точек конечного порядка и каковы эти порядки?

В 1976 году американский математик Б. Мазур получил выдающийся результат, показав, что *если P — рациональная точка порядка n, то $n\leqslant 10$ или $n=12$*; с другой стороны, *на эллиптической кривой существует самое большее 16 рациональных точек конечного порядка.*

Второй случай — это когда все точки $2P$, $3P$, $4P$ и т. д. различны. В 1901 году французский математик А. Пуанкаре (1854—1912) высказал гипотезу о том, что *всегда можно найти такое конечное число рациональных точек $P_1, \ldots, P_r$, что всякая рациональная точка P выражается через них, т. е. представляется в виде*

$$P=n_1P_1+\ldots+n_rP_r+Q,$$

где $n_1, \ldots, n_r$ — целые числа, однозначно определяемые точкой P, а Q — точка конечного порядка. Сами же точки $P_1, \ldots, P_r$ не выражаются друг через друга. Число r называется *рангом* кривой.

Гипотезу Пуанкаре в 1922 году доказал англичанин Л. Морделл, но его доказательство не дает никакого способа для вычисления ранга. До сих пор неясно, существуют ли эллиптические кривые сколь угодно большого ранга. Известно лишь, что ранг оценивается через коэффициенты a, b, c уравнения $y^2=x^3+ax^2+bx+c$, поэтому кривые большого ранга должны иметь большие коэффициенты. Например, к числу кривых ранга $r\geqslant 8$ относится недавно найденная кривая, у которой

$$a=-3^2\cdot 1487\cdot 1873,$$

$$b=2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot 151\cdot 14551\cdot 33353,$$

$$c=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 151^2\cdot 193\cdot 273\cdot 156307.$$

Заключение: кривые произвольных степеней

Мы здесь ограничились кривыми (а значит, диофантовыми уравнениями) степеней 2 и 3. А как обстоит дело со степенями $n\geqslant 4$? В этом случае тоже естественно выделить класс «невырожденных» кривых степени n (типичный представитель — кривая $x^n+y^n=1$). При $n>3$ картина разительно меняется. Еще в 1931 году английский математик Л. Морделл выдвинул гипотезу — на таких кривых *число рациональных точек всегда конечно.* Гипотеза Морделла более полувека была в центре внимания ведущих математиков всего мира. Существенный вклад в ее решение внесли советские математики И. Р. Шафаревич, Ю. И. Манин, С. Ю. Аракелов, А. Н. Паршин, Ю. Г. Зархин, но честь ее решения в 1983 г. выпала молодому ученому из ФРГ Герду Фальтингсу. За это в 1986 г. на Конгрессе математиков в Беркли (США) он был награжден медалью Филдса — высшей наградой для математиков.

ГЕНЕАЛОГИЧЕСКИЕ ДЕРЕВЬЯ

А. А. ПАНОВ

В этой статье пойдет речь о математической классике — алгоритме Евклида и пифагоровых тройках. Алгоритм Евклида описан в евклидовых «Началах» (около 300 г. до н. э.) и наверняка был известен задолго до этого. История пифагоровых троек прослеживается еще дальше. Замечательным памятником человеческой культуры является древневавилонская глиняная табличка, содержащая пятнадцать пифагоровых троек. Она датируется 1700 годом до н. э.

Мы здесь попытаемся стряхнуть пыль с этих древних понятий, поговорить о них на наглядном «языке деревьев». Этот язык оказывается полезным при решении некоторых уравнений и укажет, какая связь существует между алгоритмом Евклида и методом построения пифагоровых троек, недавно предложенным английским математиком А. Холлом.

Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида служит для нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух натуральных чисел.

> Пусть (m, n) — пара положительных целых чисел:
>
> 1) если $m=n$, то число $d=m=n$ и есть наибольший общий делитель исходной пары чисел, если $m\neq n$, то перейти к 2);
>
> 2) большее число заменить на его разность с меньшим и перейти к 1).

Возможно, вы больше привыкли к следующему варианту шага 2:

> 2′) большее число заменить на его остаток от деления на меньшее и перейти к 1),

но это дело вкуса.

Задача 0. Докажите, что оба алгоритма 1), 2) и 1), 2′) приводят к одному и тому же результату.

Указание. Вспомните, что деление — это многократное вычитание.

Во всяком случае, сам Евклид говорит о своем алгоритме как о «постоянном отнятии меньшего от большего» («Начала», Книга 7, Предложение II, перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского). Именно этот алгоритм, основанный на многократном вычитании, и будет объектом нашего исследования.

Продемонстрируем работу алгоритма на конкретном примере. Пусть $(m, n)=(20, 12)$. Тогда, записывая действия алгоритма справа налево, получим следующую цепочку:

$$(4, 4)\leftarrow(8, 4)\leftarrow(8, 12)\leftarrow(20, 12).$$

Значит, НОД $(20, 12)=4$. Проделав то же самое для пары $(5, 3)$, получим цепочку

$$(1, 1)\leftarrow(2, 1)\leftarrow(2, 3)\leftarrow(5, 3).$$

Ясно, что каждое число во второй цепочке получается из соответствующего числа в первой цепочке делением на 4.

Разобравшись с этим примером, ответьте на следующий вопрос.

Задача 1. Пусть $d=$НОД (M, N). Положим $m=M/d$, $n=N/d$. Чему равен НОД (m, n) и в чем сходство между действием алгоритма Евклида на пару (M, N) и на пару (m, n)?

В дальнейшем мы ограничимся только парами (m, n), для которых НОД $(m, n)=1$. Такие пары будем называть *простыми* парами.

Генеалогия простых пар

Рассмотрим еще один пример. Применим алгоритм Евклида к простой паре $(3, 4)$:

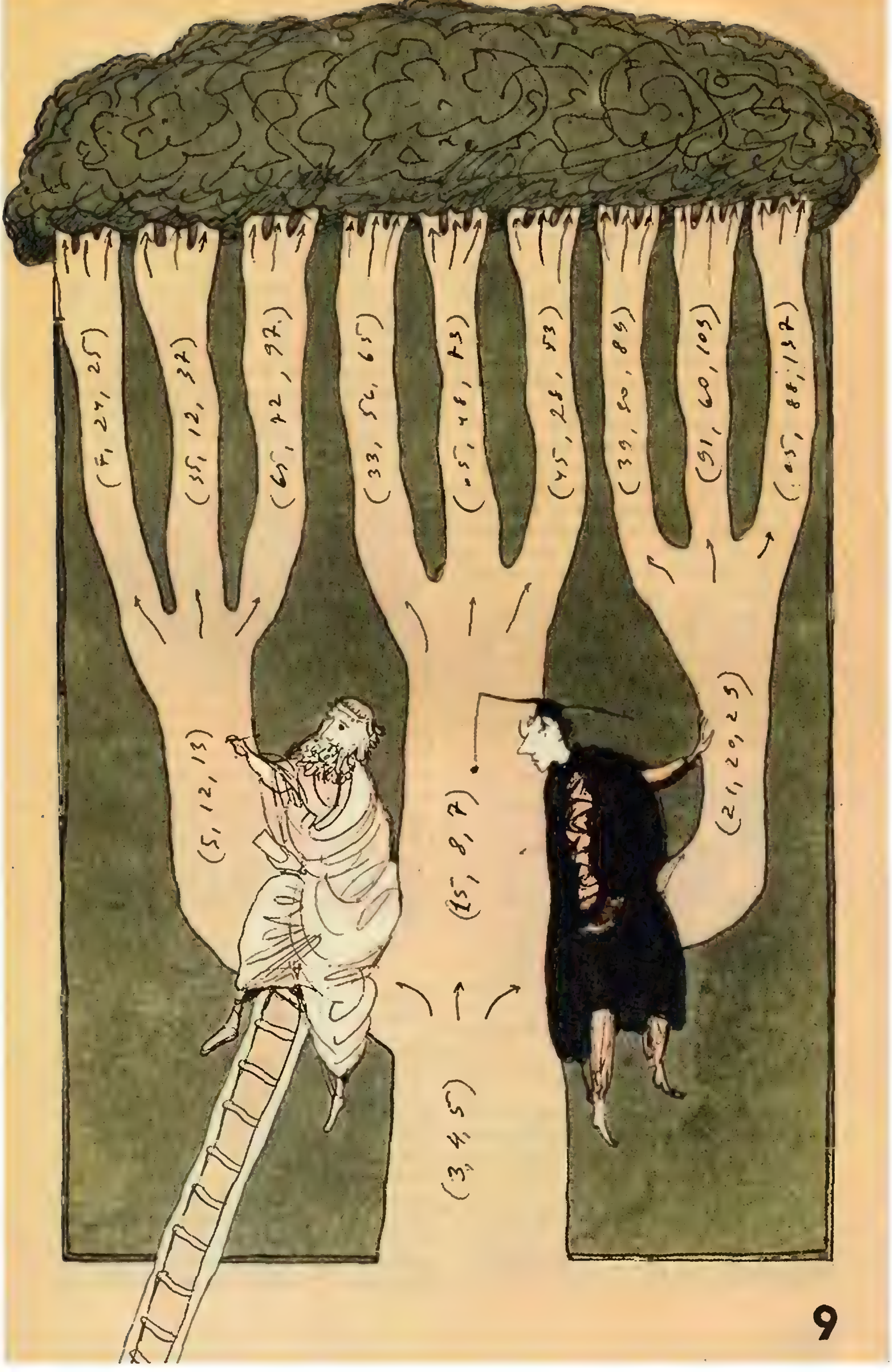
$$(1, 1)\leftarrow(2, 1)\leftarrow(3, 1)\leftarrow(3, 4).$$

Эта цепочка имеет общую часть с цепочкой для пары $(5, 3)$, и потому их можно объединить:

$$\begin{tikzcd}
 & & (3, 1) \arrow[dl] & (3, 4) \arrow[l] \\
(1, 1) & (2, 1) \arrow[l] & & \\
 & & (2, 3) \arrow[ul] & (5, 3) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Можно добавить еще одну простую пару $(3, 2)$, и картинка усложнится:

$$\begin{tikzcd}
 & & (3, 1) \arrow[dl] & (3, 4) \arrow[l] \\
 & (2, 1) \arrow[dl] & & \\
(1, 1) & & (2, 3) \arrow[ul] & (5, 3) \arrow[l] \\
 & (1, 2) \arrow[ul] & (3, 2) \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$


(3, 4, 5)
(5, 12, 13)
(15, 8, 17)
(21, 20, 29)
(7, 24, 25)
(35, 12, 37)
(65, 72, 97)
(33, 56, 65)
(55, 48, 73)
(45, 28, 53)
(39, 80, 89)
(91, 60, 109)
(105, 88, 137)

Создается впечатление, что должна существовать общая картина, объединяющая все простые пары. Чтобы выяснить ее строение, можно было бы добавить еще несколько простых пар. Так или иначе, в какой-то момент времени нам должен прийти в голову правильный вопрос: пусть имеется простая пара (m, n); от каких пар к ней могут идти стрелки?

Задача 2. Докажите, что если от пары (M, N) в алгоритме Евклида идет стрелка к паре (m, n), то либо $M=m+n$, $N=n$, либо $M=m$, $N=m+n$.

Эта задача подсказывает, что нужно ввести два преобразования t_1 и t_2, переводящих пару (m, n) в пары

$$t_1(m, n)=(m+n, n),$$
$$t_2(m, n)=(m, m+n). \qquad (1).$$

Теперь мы можем двигаться в обратном порядке. Начнем с пары $(1, 1)$ и применим к ней оба преобразования t_1 и t_2 (t_1 действует по стрелке, идущей вверх, t_2 — по стрелке, идущей вниз). Получим две новые пары — $(2, 1)$ и $(1, 2)$. К каждой из них снова применим t_1 и t_2 и т. д.

Каждая пара здесь порождает две новые пары, и этот процесс продолжается вправо до бесконечности. Как и следовало ожидать, рисунок 1 содержит в качестве фрагментов все предыдущие картинки, только стрелки здесь обращены в другую сторону.

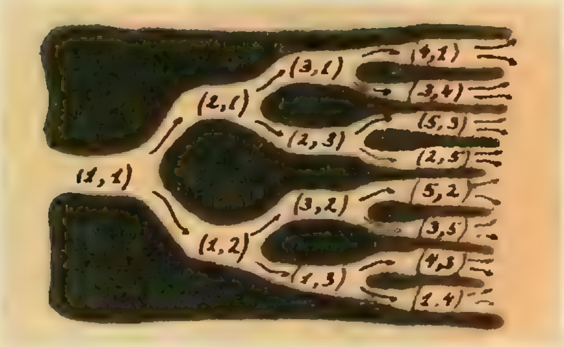


Рис. 1.

Задача 3. Докажите, что любая пара (m, n) на рисунке 1 простая.

Задача 4. Докажите, что каждая простая пара содержится на рисунке 1 и притом только один раз.

После этих задач то, что изображено на рисунке 1, естественно назвать генеалогическим деревом простых пар.

Задача 5. Пусть пара (m, n) лежит на генеалогическом дереве на рисунке 1. Существует единственный путь, соединяющий ее с начальной парой $(1, 1)$. Покажите, что движение по этому пути против стрелок соответствует применению к паре (m, n) алгоритма Евклида.

Итак, генеалогическое дерево на рисунке 1 содержит все простые пары. Применение алгоритма Евклида к паре (m, n) эквивалентно движению по дереву против стрелок.

Уравнение $XY=Z^2$

Изменим теперь тему разговора и попытаемся найти все целочисленные решения (X, Y, Z) уравнения

$$XY=Z^2. \qquad (2)$$

Ограничимся лишь положительными X, Y, Z. Пример: $X=3$, $Y=12$, $Z=6$.

Казалось бы, о чем говорить? Для заданного Z отыскание решений уравнения сводится к разложению числа Z^2 на два сомножителя, и для каждого Z можно даже подсчитать число решений.

Задача 6. Зафиксируем Z и пусть $Z=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_l^{\alpha_l}$ — разложение Z на простые сомножители. Докажите, что число решений уравнения (2) равно $(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\dots(2\alpha_l+1)$.

Однако я хочу предложить другую точку зрения.

Задача 7. Пусть (X, Y, Z) — решение уравнения (2); докажите, что при $d>0$ тройка (dX, dY, dZ) — тоже решение. Пусть (X, Y, Z) — решение уравнения (2) и НОД $(X, Y)=d$; докажите, что $(X/d, Y/d, Z/d)$ тоже решение уравнения (2) и при этом НОД $(X/d, Y/d)=1$.

Таким образом, при отыскании всех решений (X, Y, Z) уравнения (2) мы можем ограничиться только теми, для которых НОД $(X, Y)=1$; будем называть их *примитивными*. Все остальные получаются из примитивных простым умножением.

Задача 8. Пусть (X, Y, Z) — примитивное решение уравнения (2). Докажите, что найдется такая простая пара (m, n), что $X=m^2$, $Y=n^2$, $Z=mn$.

Теперь ясно, что соотношения

$$X=m^2,\ Y=n^2,\ Z=mn \qquad (3)$$

осуществляют взаимно однозначное соответствие между простыми парами (m, n) и примитивными решениями (X, Y, Z) уравнения (2).

Это значит, что мы в полной мере можем воспользоваться нашими предыдущими результатами о простых парах. Например, используя соотношения (3), заменим на рисунке 1 каждую простую пару (m, n) соответствующим ей примитивным решением (X, Y, Z). Получившееся дерево естественно назвать генеалогическим деревом примитивных решений уравнения (2). Оно содержит все без исключения примитивные решения. Можно предложить более прямой и удобный путь построения этого дерева.

Задача 9. Пусть пара (m, n) порождает при помощи (3) решение (X, Y, Z). Обозначим решение, порожденное парой $t_1(m, n)=(m+n, n)$, через $T_1(X, Y, Z)$ и решение, порожденное $t_2(m, n)=(m, m+n)$,— через $T_2(X, Y, Z)$. Докажите, что

$$T_1(X, Y, Z)=(X+Y+2Z, Y, Y+Z),$$
$$T_2(X, Y, Z)=(X, X+Y+2Z, X+Z).$$

Все это означает, что генеалогическое дерево на рисунке 2 возникает непосредственно при помощи преобразований T_1 и T_2. Мы исходим из очевидного решения (1, 1, 1) и начинаем действовать на него преобразованиями T_1 и T_2. Стрелка, идущая вверх, соответствует действию T_1, стрелка, идущая вниз,— действию T_2.

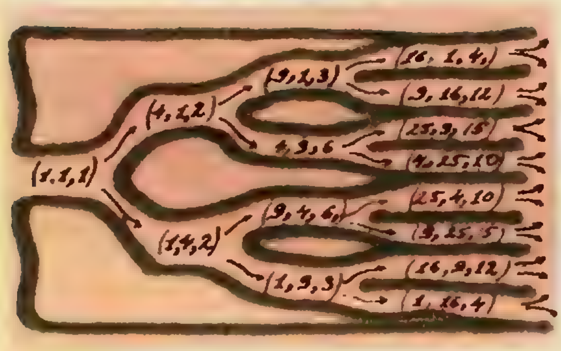


Рис. 2.

Рисунок 2 выглядит весьма привлекательным и позволяет получить ясное представление об устройстве множества всех примитивных решений уравнения (2). Но все-таки уравнение $XY=Z^2$, как мы уже говорили, допускает *и более простой подход*. Поэтому перейдем к рассмотрению более содержательного примера.

Пифагоровы тройки

Итак, уравнение

$$X^2+Y^2=Z^2.$$

Его целочисленные положительные решения (X, Y, Z) называются *пифагоровыми тройками*. Самый первый пример пифагоровой тройки — это, конечно, тройка (3, 4, 5). Нам бы хотелось и для этого уравнения построить дерево решений — генеалогическое дерево пифагоровых троек, подобное тому, что на рисунке 2. Как это сделать? Если следовать тому, что было сделано для уравнения $XY=Z^2$, то необходимо:

(I) среди всех пифагоровых троек выделить примитивные;

(II) для примитивных пифагоровых троек (X, Y, Z) выписать подходящие соотношения $X=X(m, n)$, $Y=Y(m, n)$, $Z=Z(m, n)$ наподобие соотношений (3);

(III) построить генеалогическое дерево для пар (m, n) и заменить на нем каждую пару (m, n) на порожденную ею тройку $(X(m, n), Y(m, n), Z(m, n))$.

То, что связано с пунктами (I) и (II), уже давно известно. Мы сообщим необходимые факты без каких бы то ни было комментариев и доказательств, отсылая читателя в случае необходимости к статье С. М. Воронина и А. Г. Кулагина («Квант», 1987, № 1, с. 11).

Пифагорова тройка (X, Y, Z) называется *примитивной*, если НОД $(X, Y)=1$ и при этом X нечетно, а Y четно. Тройка (3, 4, 5), например, примитивна.

Известно, что для любой пифагоровой тройки (x, y, z) существует такая единственная примитивная пифагорова тройка (X, Y, Z) и такое единственное натуральное число d, что либо $(x, y, z)=(dX, dY, dZ)$, либо $(x, y, z)=(dY, dX, dZ)$. Тем самым, перечислив все примитивные пифагоровы тройки, мы получаем возможность перечислить и все вообще пифагоровы тройки.

Целочисленная пара (m, n) называется *примитивной*, если $m>n$, $n>0$, НОД $(m, n)=1$ и числа m, n имеют разную четность. Пара (2, 1), например, примитивна.

Известно, что соотношения

$$X=m^2-n^2,\ Y=2mn,\ Z=m^2+n^2 \qquad (4)$$

осуществляют взаимно однозначное соответствие между множеством всех примитивных пар и множеством всех примитивных пифагоровых троек. Пара (2, 1), например, при помощи соотношений (4) порождает тройку (3, 4, 5).

Что касается пункта (III) нашей программы построения генеалогического дерева, то он был реализован английским математиком А. Холлом.

Генеалогия пифагоровых троек

В небольшой заметке, опубликованной в 1970 году в журнале «Mathematical Gazette», А. Холл предлагает следующий способ построения генеалогического дерева для примитивных пар и примитивных пифагоровых троек. Вводятся три преобразования t_1, t_2 и t_3:

$$t_1(m, n)=(2m-n, m),$$
$$t_2(m, n)=(2m+n, m),$$
$$t_3(m, n)=(m+2n, n).$$

При помощи этих преобразований, начиная с пары (2, 1), строится генеалогическое дерево. Здесь направление вверх соответствует преобразованию t_1, горизонтальное направление — преобразованию t_2, направление вниз — преобразованию t_3.

Задача 10. Пусть пара (m, n) порождает при помощи соотношений (4) пифагорову тройку (X, Y, Z). Пифагорову тройку, порожденную парой $t_1(m, n)$, обозначим через $T_1(X, Y, Z)$; тройку, порожденную парой $t_2(m, n)$,— через $T_2(X, Y, Z)$; наконец, тройку, порожденную парой $t_3(m, n)$,— через $T_3(X, Y, Z)$. Докажите, что

$$T_1(X, Y, Z)=(X-2Y+2Z, 2X-Y+2Z, 2X-2Y+3Z),$$
$$T_2(X, Y, Z)=(X+2Y+2Z, 2X+Y+2Z, 2X+2Y+3Z),$$
$$T_3(X, Y, Z)=(-X+2Y+2Z, -2X+Y+2Z, -2X+2Y+3Z).$$

Теперь при помощи преобразований T_1, T_2, T_3 построим еще одно генеалогическое дерево, но уже начинающееся с тройки (3, 4, 5).

Замечательный результат Холла заключается в том, что генеалогическое дерево на рисунке 3 содержит все без исключения примитивные пары; значит, генеалогическое дерево на рисунке 4 содержит все без исключения примитивные пифагоровы тройки.

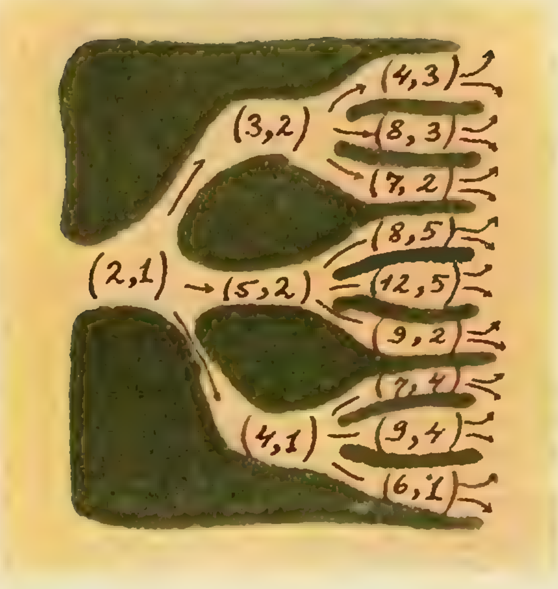


Рис. 3.

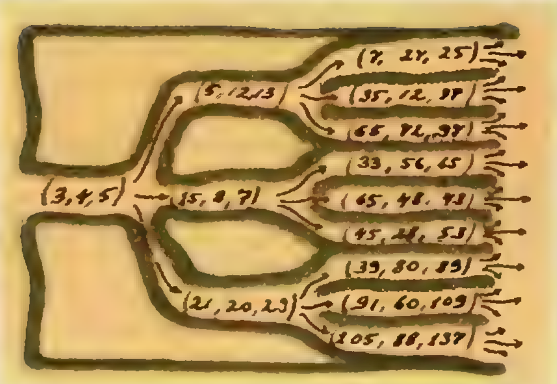


Рис. 4.

В следующей серии задач проводится доказательство этого факта.

Задача 11. Докажите, что все пары на рисунке 3 примитивны. Эта задача показывает, в частности, что все тройки на рисунке 4 являются примитивными пифагоровыми тройками.

Преобразования t_1, t_2, t_3 позволяют двигаться на рисунке 3 по стрелкам. Сейчас мы выясним, как осуществлять движение против стрелок.

Задача 12. Пусть $(M, N)=t_i(m, n)$, где t_i — одно из преобразований t_1, t_2, t_3. Докажите, что тогда $(m, n)=u_i(M, N)$, где u_i — соответствующее из преобразований

$$u_1(M, N)=(N, -M+2N),$$
$$u_2(M, N)=(N, M-2N),$$
$$u_3(M, N)=(M-2N, N).$$

Преобразования u_1, u_2, u_3 позволяют двигаться по рисунку 3 против стрелок. Они осуществляют своеобразный алгоритм Евклида для примитивных пар, позволяя спуститься от произвольной примитивной пары (m, n) к начальной паре (2, 1).

К каждой паре (m, n) на рисунке 3 подходит ровно одна стрелка. Для преобразований u_1, u_2, u_3 это соответствует следующему факту.

Задача 13. Пусть пара (M, N) примитивна и $(M, N)\neq(2, 1)$. Докажите, что тогда только одна из трех пар $(m, n)=u_i(M, N)$, $i=1, 2, 3$, будет примитивной. При этом $m+n<M+N$.

И, наконец, завершающая

Задача 14. Докажите, что каждая примитивная пара содержится на генеалогическом дереве на рисунке 3 и притом только один раз (а также каждая примитивная пифагорова тройка на рисунке 4).

Другие генеалогии

В 1978 году в скандинавском математическом журнале «Normat» была опубликована статья Е. Сельмера, в которой установлено, что существуют еще два генеалогических дерева, содержащих все без исключений и повторений примитивные пифагоровы тройки (рис. 5).

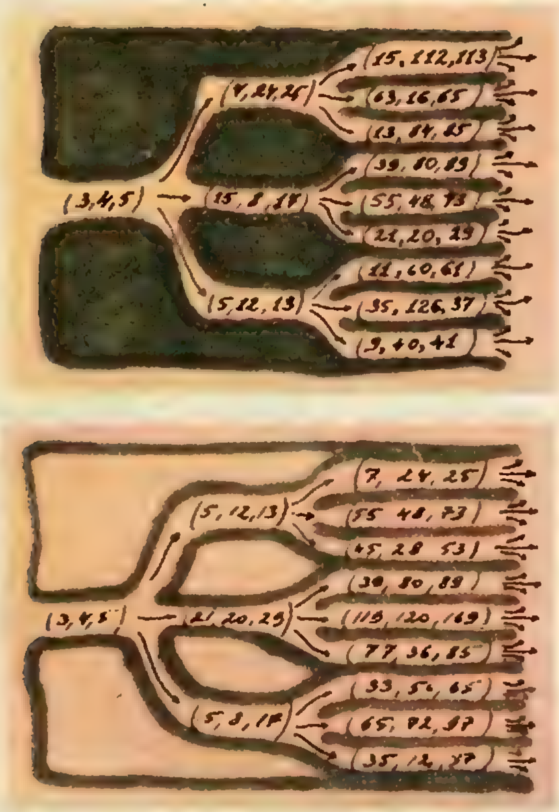


Рис. 5.

Первое из них строится при помощи преобразований

$$T_1(X, Y, Z)=(2X-Y+Z,\ 2X+2Y+2Z,\ 2X+Y+3Z),$$
$$T_2(X, Y, Z)=(2X+Y+Z,\ 2X-2Y+2Z,\ 2X-Y+3Z),$$
$$T_3(X, Y, Z)=(2X+Y-Z,\ -2X+2Y+2Z,\ -2X+Y+3Z).$$

Второе — при помощи преобразований

$$T_1(X, Y, Z)=(X-2Y+2Z,\ 2X-Y+2Z,\ 2X-2Y+3Z),$$
$$T_2(X, Y, Z)=(2X+Y+Z,\ 2X-2Y+2Z,\ 2X-Y+3Z),$$
$$T_3(X, Y, Z)=(-2X+3Y+3Z,\ -6X+2Y+6Z,\ -6X+3Y+7Z).$$

Пифагоровы тройки неизменно, на протяжении тысячелетий привлекают внимание математиков. Но мы видим, что эта тема не исчерпала себя, и тут до сих пор продолжают обнаруживаться новые интересные факты.

Подводя итоги

В связи с тем, что было рассказано, имеется несколько вопросов, которые необходимо если не решить, то по крайней мере задать. Например, почему на генеалогическом дереве для уравнения $XY=Z^2$ от каждого решения отходят две стрелки, а на генеалогическом дереве для $X^2+Y^2=Z^2$ — три? Далее, почему для уравнения $X^2+Y^2=Z^2$ построено три генеалогических дерева, а для $XY=Z^2$ — только одно, и существуют ли для этих уравнений другие деревья? Наконец, как были найдены преобразования T_1, T_2, T_3, позволяющие строить генеалогические деревья для пифагоровых троек?

Наше построение генеалогического дерева для уравнения $XY=Z^2$ напрямую связано с алгоритмом Евклида и выглядит достаточно мотивированным, чего нельзя сказать об уравнении $X^2+Y^2=Z^2$. Однако между этими уравнениями имеется связь, оправдывающая попытки сделать для одного из них то, что было сделано для другого. Действительно, запишем уравнение $X^2+Y^2=Z^2$ в виде $Z^2-X^2=Y^2$ и разложим левую часть на множители: $(Z-X)(Z+X)=Y^2$. Сделав замену $U=Z-X$, $V=Z+X$, $W=Y$, приходим к уравнению $UV=W^2$. Таким образом, существует замена, переводящая уравнение $X^2+Y^2=Z^2$ в уравнение $XY=Z^2$.

Имеется еще целый ряд уравнений, допускающих замену, переводящую их в $XY=Z^2$. Такими уравнениями будут, скажем, $X^2+Y^2=2Z^2$ и $X^2+3Y^2=Z^2$. Вы можете попытаться построить генеалогические деревья и для этих уравнений.

Необходимо сказать еще об одном замечательном уравнении — уравнении Маркова:

$$X^2+Y^2+Z^2=3XYZ.$$

Оно обладает уже привычным для нас свойством — все его решения, кроме двух очевидных — (1, 1, 1) и (2, 1, 1), организуются в генеалогическое дерево. Об этом подробно рассказано в увлекательной статье М. Г. Крейна («Квант», 1985, № 4, с. 13). Это дерево вполне аналогично генеалогическому дереву для уравнения $XY=Z^2$. Существует ли какая-то связь между этими уравнениями? Какие еще уравнения обладают подобными свойствами?

Так что тут есть о чем еще подумать.

ПОВЕРХНОСТЬ КРИСТАЛЛА

Кандидат физико-математических наук
Б. С. АШАВСКИЙ

1915 год. Уже год идет первая мировая война. Германия первой из воюющих держав применила химические боевые вещества. Когда стало известно об этом преступлении, выдающийся ученый Николай Дмитриевич Зелинский разработал специальный прибор, защищающий людей от боевых отравляющих веществ. Этот прибор — угольная противогазовая маска — спас жизни тысяч русских солдат.

Разработанное Зеленским устройство является прототипом современного противогаза. Главная часть противогаза — коробочка, заполненная угольным порошком. Попытаемся понять, на чем основано действие такого порошка и почему он может защитить от действия ядовитых газов.

Маленькие гиганты

Представьте себе, что в коробке противогаза вместо угольного порошка находится просто кусок угля той же массы. Что, если с таким противогазом попасть в зону газовой атаки? Защитит ли он от ядовитых газов? Оказывается, нет. Все дело именно в порошке.

Что же отличает порошок от сплошного куска угля?

В противогазе используется специально подготовленный уголь, который называют активированным. Такой уголь отличается от обычного тем, что имеет гораздо бóльшую поверхность на единицу массы. Его частицы пронизаны порами и чем-то напоминают изъеденное червями дерево. Площадь поверхности активированного угля на единицу массы, называемая удельной поверхностью, оказывается в миллионы раз больше удельной поверхности сплошного куска. Один грамм активированного угля обладает поверхностью, превышающей 1000 м^2. Вдумайтесь: маленький кусочек-лилипут, специальным образом подготовленный и размолотый в порошок, приобретает гигантскую поверхность! В таком порошке существенная часть молекул и атомов оказывается на поверхности. И этот факт определяет защитное действие противогаза: именно поверхностные атомы угля «задерживают» атомы ядовитых газов, очищая от них воздух, проходящий в дыхательную маску.

Почему атомы на поверхности могут поглощать ядовитый газ, а в объеме — нет? Чем жизнь атома на поверхности отличается от его жизни в объеме? Попробуем разобраться.

Почему атому неудобно на поверхности?

Хорошо известно, что кристалл имеет упорядоченную и симметричную решетку, в которой каждый атом занимает строго определенное место. Атомы кристалла взаимодействуют друг с другом, и у каждого атома в результате такого взаимодействия образуются устойчивые «связи» с его соседями. Число ближайших соседей у атома в данной кристаллической решетке называется координационным числом и является характеристикой кристалла. В каком бы месте внутри кристалла мы ни выбрали атом, у него всегда будет количество соседей, равное координационному числу. А если атом находится на поверхности?

Представим себе кристалл, находящийся в вакууме. У поверхностных атомов соседи есть не со всех сторон —

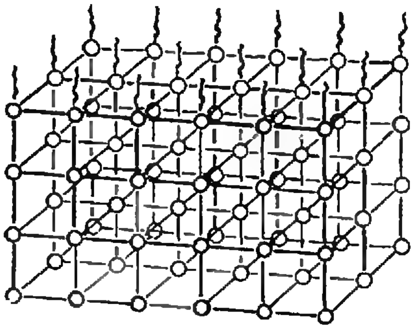


Рис. 1.

с одной стороны атомы вообще отсутствуют (рисунок 1). Иными словами, у атома на поверхности иное координационное число, чем у атома внутри кристалла. Например, у атома внутри кристалла с кубической решеткой (такой, как на рисунке 1) шесть соседей, а у атома на поверхности — лишь пять. Следовательно, часть возможных связей у поверхностного атома остается незадействованной, и энергия такого атома больше, чем атома, живущего внутри кристалла. Существование поверхности энергетически невыгодно, так как это увеличивает энергию кристалла в целом. Атомы поверхности стремятся уйти внутрь кристалла, окружить себя своими родными атомами, задействовать все возможные связи и тем самым уменьшить свою энергию. Однако любой реальный кристалл занимает ограниченную область пространства, поверхность существует, и кому-то надо на ней находиться. Причем атомы оказываются на поверхности не за какие-либо «провинности», а случайно. Как в известной песне: «Пусть кому-то повезет, а кому-то нет».

Таким образом, мы видим, что образование поверхности связано с определенными энергетическими затратами, и основной характеристикой поверхности является поверхностная энергия — энергия, необходимая для создания поверхности единичной площади.

Известно, что механические, электрические и другие свойства кристаллов могут зависеть от направления. Это явление называется анизотропией и является следствием упорядоченности структуры кристаллов. Поверхностная энергия — анизотропное свойство. Как видно из рисунка 2, создать поверхность можно многими способами. Например, расколов кристалл по плоскостям *1—1*, *2—2* или *3—3*, мы получим поверхности, весьма существенно различающиеся по структуре — количество атомов на единицу площади на поверхности *1—1* больше, чем на поверхности *2—2*. Разное количество атомов — разная поверхностная энергия. Значения поверхностной энергии, приходящейся на единицу площади, для различных поверхностей одного и того же кристалла могут различаться очень сильно, на несколько десятков процентов.

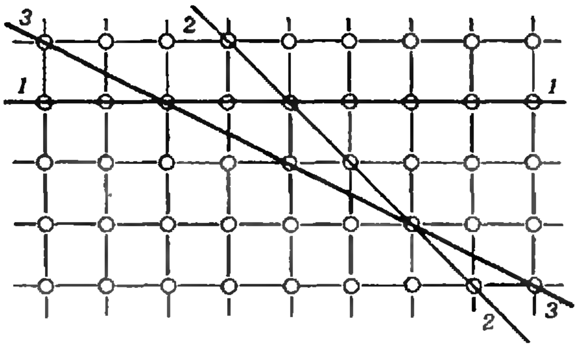


Рис. 2.

(В отличие от кристалла, для каждой жидкости существует свое значение удельной поверхностной энергии — поверхностное натяжение,— которое не зависит от направления. Это — одно из проявлений изотропности жидкостей.)

До сих пор мы говорили о кристалле в вакууме. Однако обычно вещества находятся в реальной среде, и взаимодействие с окружающей средой начинается именно с поверхности.

Адсорбция

Пример с противогазом, с которого мы начали разговор, служит наглядной иллюстрацией явления, называемого адсорбцией. Адсорбция (от латинских слов ad — «на» и sorbeo — «поглощать») — это поглощение вещества из газовой или жидкой среды поверхностным слоем твердого тела или жидкости. Именно на этом явлении основано защитное действие противогаза.

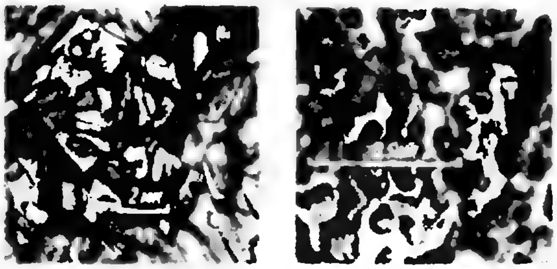
Что же происходит на гигантской поверхности угольного порошка в коробочке противогаза?

У атома на поверхности остаются свободные связи, которые он использует для взаимодействия с атомами и молекулами окружающей среды. Активированный уголь, помещенный в газовую атмосферу, является адсорбентом — на его поверхности располагаются (адсорбируются) частицы окружающей среды, и они оказываются связанными с поверхностью. Конечно, на угле адсорбируются кислород, азот и другие составные части воздуха. Поверхность угля насыщается этими газами еще в процессе приготовления — ведь уголь все время находится в соприкосновении с атмосферой, и молекулы составляющих воздух газов уже постарались занять все доступные для них места на поверхности. Однако не все молекулы одинаково прочно на ней удерживаются. Одни связываются накрепко, другие при малейшем воздействии уже не могут удержаться и покидают свои места, уступая место более «привязчивым» молекулам. Когда через уголь проходит воздух, содержащий ядовитые газы, между молекулами начинается настоящая борьба за территорию. Каждый газ стремится занять место на поверхности и вытеснить с нее другие газы. Побеждает в этой борьбе тот, кого поверхность «любит» больше, кого она сильнее к себе притягивает.

Своих друзей поверхность выбирает очень осмотрительно. Заполнение свободной связи чужеродным атомом или молекулой уменьшает поверхностную энергию кристалла. Изменение энергии зависит от того, какой именно атом (или молекула) занял свободную связь. Чем больше уменьшается поверхностная энергия от присоединения данного атома, тем прочнее связывается этот атом с поверхностью. Если газы связываются поверхностью примерно одинаково, то они будут удерживаться на поверхности приблизительно в равных количествах. Если же один из них гораздо «привязчивей» остальных, то он займет практически всю поверхность, вытеснив с нее молекулы другого газа. К счастью, многие ядовитые газы так сильно связываются поверхностью угля, что роль воздуха даже не принимается в расчет — настолько малые его количества адсорбируются углем. Молекулы отравляющего вещества остаются на поверхности угля, а молекулы кислорода проходят, позволяя дышать.

Формула Ленгмюра и активированный уголь

Значительный прогресс в изучении адсорбции был достигнут благодаря работам американского физико-химика И. Ленгмюра (1881—1957). В 1932 году за свои работы по исследованию поверхностных явлений он был удостоен Нобелевской премии. Ленгмюр получил формулу, позволяющую рассчитывать количество адсорбирующегося вещества в зависимости от его давления в окружающей среде. Получить эту формулу совсем несложно.



Микрофотографии поверхности активированного угля.

При выводе формулы Ленгмюра мы будем считать, что все атомы поверхности одинаковые и каждый из них может адсорбировать строго определенное количество молекул (или атомов) окружающей среды и что между адсорбированными молекулами отсутствует взаимодействие, т. е. адсорбированная молекула не влияет на адсорбцию остальных. Для того чтобы молекула газа адсорбировалась на поверхности, должны произойти два независимых события: молекула газа должна попасть на поверхность адсорбента и в данном месте поверхности должна оказаться свободная связь. Вероятность w_1 первого события пропорциональна числу ударов молекул газа о поверхность адсорбента за единицу времени, а это число пропорционально давлению газа p; так что $w_1 \sim p$. Вероятность w_2 второго события пропорциональна числу незанятых связей на поверхности адсорбента. Если в данный момент доля θ всех свободных связей занята адсорбированными молекулами, то $w_2 \sim (1-\theta)$. Вероятность W сложного события — адсорбции — равна произведению вероятностей этих двух независимых событий, т. е. $W \sim p(1-\theta)$. Если обозначить количество частиц, адсорбирующихся на поверхности за единицу времени, через $N_{\downarrow}$, то

$$N_{\downarrow} = \alpha p(1-\theta),$$

где α — некоторая постоянная, зависящая от температуры.

Молекула улетает с поверхности, когда ее энергия окажется достаточной для того, чтобы оторваться. Вероятность такого простого события пропорциональна общему числу адсорбированных на поверхности молекул. Следовательно, число молекул, улетающих с поверхности в единицу времени,—

$$N_{\uparrow} = \beta\theta,$$

где β — постоянная, также зависящая от температуры.

При равновесии количества молекул, приходящих на поверхность и уходящих с нее в единицу времени, должны быть равны ($N_\downarrow = N_\uparrow$):

$$\alpha p(1-\theta)=\beta\theta.$$

Отсюда находим долю связей на поверхности, занятых адсорбированными молекулами:

$$\theta=\frac{bp}{1+bp},$$

где коэффициент $b=\alpha/\beta$ зависит от температуры (поскольку α и β зависят от T). Если число свободных мест на поверхности адсорбента z (обычно берется число свободных связей на единицу массы адсорбента), то число адсорбированных молекул

$$\Gamma=z\frac{bp}{1+bp}.$$

Это и есть формула Ленгмюра.

Постоянная z является величиной, характеризующей поверхность. Именно в z заключена высокая адсорбирующая способность активированного угля — ведь чем больше удельная поверхность, тем больше z. Для адсорбента с удельной поверхностью 1000 м^2/г значение z равно примерно 10^{22} г$^{-1}$.

На рисунке 3 приведены графики зависимости Γ от p для двух различных адсорбентов. Это — так называемые изотермы адсорбции Ленгмюра (изотермы — потому что процесс адсорбции предполагается идущим при постоянной температуре). При относительно малых давлениях ($bp\ll 1$) Γ прямо пропорционально p; при больших давлениях ($bp\ll 1$) наступает насыщение — все связи на поверхности, которые были свободными, заняты, и для новых атомов и молекул окружающей среды уже не остается места — ведь поверхность не бесконечна. Очевидно, что вещество *1* является лучшим адсорбентом, чем вещество *2*.

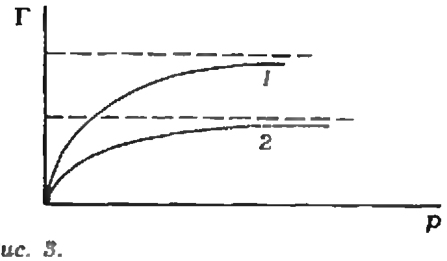


Рис. 3.

Из формулы Ленгмюра видно, что количество адсорбирующегося вещества Γ зависит от температуры — ведь от температуры зависит величина b. Не вдаваясь в подробности, скажем лишь, что при нагревании количество адсорбированного на поверхности вещества уменьшается. Это вполне естественно: с повышением температуры молекулы начинают двигаться быстрее, и хотя адсорбированные молекулы удерживаются поверхностью довольно сильно, при нагревании увеличивается число молекул с энергией, достаточной для отрыва от поверхности.

Зависимость адсорбции от температуры широко используется в промышленности. При низких температурах поверхность угольного порошка может адсорбировать большое количество вещества, равное уровню насыщения при этой температуре. Если потом нагреть уголь, то многие адсорбированные молекулы уйдут с поверхности (понизится уровень насыщения). Таким путем на заводах из отходящих газов собирают ценные органические вещества: бензин, эфир, ацетон и другие.

Теперь ясен принцип работы противогаза. Воздух, отравленный ядовитыми газами, проходит через коробочку противогаза с активированным углем. Ядовитые газы из воздуха адсорбируются на поверхности угольных частиц, концентрация этих газов в воздухе уменьшается в миллионы раз. Человек вдыхает уже относительно чистый воздух. Конечно, адсорбция происходит и на сплошном куске угля, но так как площадь его поверхности в миллионы раз меньше площади поверхности активированного угля той же массы, то и в миллионы раз меньше будет количество адсорбированных ядовитых газов.

Существует множество способов получения большой удельной поверхности. Это можно сделать, например, путем прокаливания. При этом сжигается часть самого угля, благодаря чему его поверхность разрыхляется, увеличивается число пор и их размеры. Другим примером может служить производство извести: при прокаливании мела или известняка летучие компоненты удаляются, и образуется множество пор с большой поверхностью.

Вездесущая поверхность

Во многих процессах поверхность играет решающую роль. Один из самых ярких примеров этого — процессы катализа (от греческого κατάλυσις — «разрушение»).

Катализаторы — вещества, которые могут влиять на скорость химической реакции, не участвуя в ней сами. Активность твердых катализаторов в первую очередь определяется свойствами их поверхности. В связи с этим хотелось бы упомянуть об одном интересном явлении.

Атомы, понижающие поверхностную энергию, могут приходить на поверхность не только из окружающей среды, но и из внутренней области кристалла. Представим себе кристалл, состоящий из атомов двух сортов (из двух компонентов). Условия существования атомов на поверхности и в объеме, как мы уже знаем, различны. Поэтому вполне возможно, что относительные концентрации атомов на поверхности и в объеме также различны. Атомы, уменьшающие поверхностную энергию, стремятся выйти на поверхность, и их относительное количество на поверхности увеличивается. Этот процесс называется сегрегацией (от английского segregation — «отделение»). Концентрация атомов одного из компонентов на поверхности может в тысячи раз превышать его концентрацию в объеме. Например, в сплаве, состоящем из атомов Fe и Bi, концентрация Bi на поверхности составляет десятки процентов при его концентрации в объеме всего 0,1 %. Сегрегацию необходимо учитывать в процессах катализа, так как скорость химической реакции на поверхности твердого катализатора очень сильно зависит от поверхностных концентраций веществ.

Поверхность является полномочным представителем и защитником материала при его взаимодействии с окружающей средой. Ведь воздействию окружающей среды в первую очередь подвергается поверхность. Злейший враг поверхности металла — коррозия. Первейшая задача поверхности — устоять перед натиском этого врага. Ничтожные количества примесей, в сотни раз меньшие, чем это необходимо для покрытия поверхности моноатомным слоем, могут значительно повысить коррозионную стойкость поверхности металла.

«Поверхность придумал дьявол»,— сказал как-то выдающийся физик, один из создателей квантовой механики, В. Паули (1900—1958). Эти слова связаны, по-видимому, с огромными трудностями исследования поверхности.

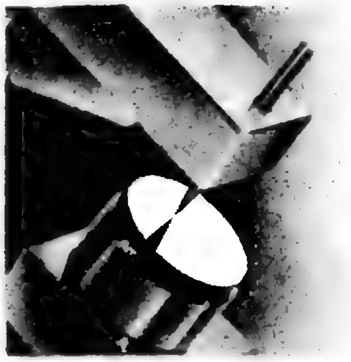
Методы, позволяющие получить информацию о поверхности — ее структуре, химическом составе и т. п., очень сложны, и основные успехи в этой области были сделаны лишь в последнее десятилетие. Приведем простой пример: необходимо определить концентрацию какого-либо вещества в кристалле. Для проведения такого измерения традиционными химическими методами необходимо минимум 0,001 г вещества. Если площадь поверхности анализируемого образца 1 см^2 (бо́льшую площадь получить, не разрушив образец, практически невозможно), то удается определить среднюю концентрацию вещества в слое толщиной около 1000 межатомных расстояний.

Современные методы позволяют исследовать слой вблизи поверхности толщиной всего в одно межатомное расстояние! Они дают возможность видеть атомы, изучать их взаимное расположение, взаимодействие друг с другом. С помощью этих методов удалось установить, что при сегрегации все отличие поверхностной концентрации от объемной сосредоточено в очень тонком слое вблизи поверхности — толщиной всего в несколько межатомных расстояний.

Прогресс в исследовании поверхности за последнее десятилетие связан в первую очередь с успехами микроэлектроники и созданием новых приборов. Ответ на самый важный вопрос — из каких элементов состоит поверхность? — нельзя было получить еще буквально несколько лет назад, а сегодня с помощью туннельного микроскопа можно различить на поверхности отдельные атомы, находящиеся друг от друга на расстоянии всего в несколько ангстрем.

«Поверхности очень интересны, но ведь их так мало»,— говорил великий итальянский физик Энрико Ферми (1901—1954). Действительно, поверхности принадлежит лишь очень малая часть вещества. Но значение ее в жизни вещества огромно.

Новости науки



Туннельный микроскоп

В 1986 году Нобелевской премии по физике были удостоены швейцарские физики Г. Бинниг и Г. Popep, изобретатели сканирующего туннельного микроскопа — прибора, о котором пойдет речь в этой заметке.

Один из самых «продуктивных» эффектов квантовой механики — туннельный эффект. В частности, он состоит в том, что электроны оказываются способными «просачиваться» из одного проводника в другой, отделенный от первого тонкой диэлектрической или вакуумной прослойкой.*) Явление обязано своим происхождением волновым свойствам электронов, благодаря которым электрон с некоторой вероятностью можно обнаружить вне проводника.

Фотография вольфрамового острия, используемого в туннельном микроскопе. Снимок сделан с экрана электронного микроскопа; масштаб левой части изображения 400 нм, правой — 40 мкм.

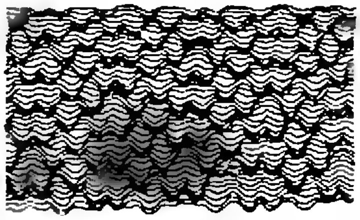
Известный уже более полувека туннельный эффект дал жизнь многим полезным приборам и устройствам. Один из них — туннельный диод — стал привычным радиотехническим элементом. А теперь туннельный эффект лег в основу микроскопа нового типа, шагнувшего в мир размеров, составляющих доли поперечника атома. (Напомним, что диаметр атома — порядка одного ангстрема: $1\,\text{Å} = 10^{-10}$ м.) Туннельный микроскоп имеет беспрецедентное увеличение, превосходящее 100 миллионов, и позволяет изучать детали атомной структуры поверхностей твердых тел.

До недавнего времени рекордсменом был электронный микроскоп с увеличением до 1 миллиона. В нем, в отличие от обычного оптического микроскопа, роль светового луча играет поток электронов, управляемый электронной оптикой — аналогом системы оптических линз. В туннельном микроскопе вы не найдете традиционных для микроскопов элементов. В нем нет устройств, подобных по назначению линзам, и работает он не по принципу «видения», а по принципу «осязания».

Чувствительным элементом, буквально «ощупывающим» поверхность, служит тончайшее вольфрамовое острие, столь тонкое, что на конце его умещается всего лишь несколько атомов. Острие с помощью высокоточных механизмов подводится перпендикулярно к исследуемой поверхности до появления заметного (10^{-9} А) тока туннелирующих электронов через зазор «острие — поверхность». Затем начинают свою работу так называемые пьезоэлементы — пластины из специальной керамики, меняющие свою длину при приложении электрического поля.*)

Электромеханическая система из пьезоэлементов автоматически поддерживает расстояние от острия до поверхности постоянным и равным 10 Å. Изменение расстояния на небольшую величину вызывает отклонение туннельного тока от заданного значения, и электронная схема обратной связи подает электрический сигнал на пьезоэлемент, приближающий или удаляющий острие относительно поверхности таким образом, чтобы туннельный ток, а значит, и расстояние острие — поверхность оставались неизменными. Эффективная работа системы автоматики обеспечивается чрезвычайно резкой зависимостью туннельного тока от величины зазора. Так, изменение зазора «острие — поверхность» на 2 Å увеличивает туннельный ток в 1000 раз.

Подачей электрических сигналов на другие пьезоэлементы системы острие перемещается по двум координатам в плоскости поверхности. Таким образом поверхность последовательно «просматривается», или, как говорят, сканируется (от английского scan — поле зрения). Поэтому туннельный микроскоп называется еще сканирующим.



Изображение атомного рельефа участка поверхности кремния. Выпуклости высотой 1,3 Å соответствуют «поверхностям» отдельных атомов.

В результате действия всей системы острие будет своим осевым перемещением отслеживать с высокой точностью в 0,01 Å рельеф изучаемой поверхности. Информация о рельефе поверхности в различных ее точках записывается в память ЭВМ и после обработки, состоящей в фильтрации, т. е. устранении шумовых и паразитных сигналов, выводится на дисплей ЭВМ в виде «топографической карты» поверхности.

(Окончание см. на с. 52)

---

*) В общем случае туннельный эффект заключается в преодолении частицей потенциального барьера, когда ее энергия меньше высоты барьера. Это явление существенно квантовой природы, невозможное в классической механике.

*) Действие такого пьезоэлемента основано на обратном пьезоэлектрическом эффекте — возникновении в некоторых кристаллах механических деформаций под действием электрического поля.

ЕДИНИЦЫ: ОТ СИСТЕМЫ К СИСТЕМЕ

С. И. ВАЛЯНСКИЙ

15 декабря 1832 года Геттингенскому научному обществу была представлена для обсуждения работа всемирно известного математика Карла Фридриха Гаусса. Она называлась «Напряжение земной магнитной силы, приведенной к абсолютной мере» и была небольшой, всего 37 страниц. Однако этот скромный труд сыграл огромную роль в развитии естествознания. Чтобы почувствовать эту роль, нам придется обратиться к истории, вспомнить некоторые моменты «биографии» магнита.

О существовании «камня», притягивающего железо, узнали еще древние, и попытки объяснить притягательную силу этого камня предпринимались еще более 2000 лет назад. Первым же практическим применением магнита стал компас. По поводу места и времени изобретения компаса однозначного мнения нет. Но по крайней мере с XIII века компас известен в Европе. С его появлением начались открытия, связанные с природой земного магнетизма. Сразу же было обнаружено, что магнитная стрелка указывает отнюдь не строго направление на север; что отклонение стрелки от этого направления (магнитное склонение) изменяется в зависимости от места наблюдения; что стрелка устанавливается не горизонтально, и угол, который она составляет с вертикалью, тоже зависит от места наблюдения.

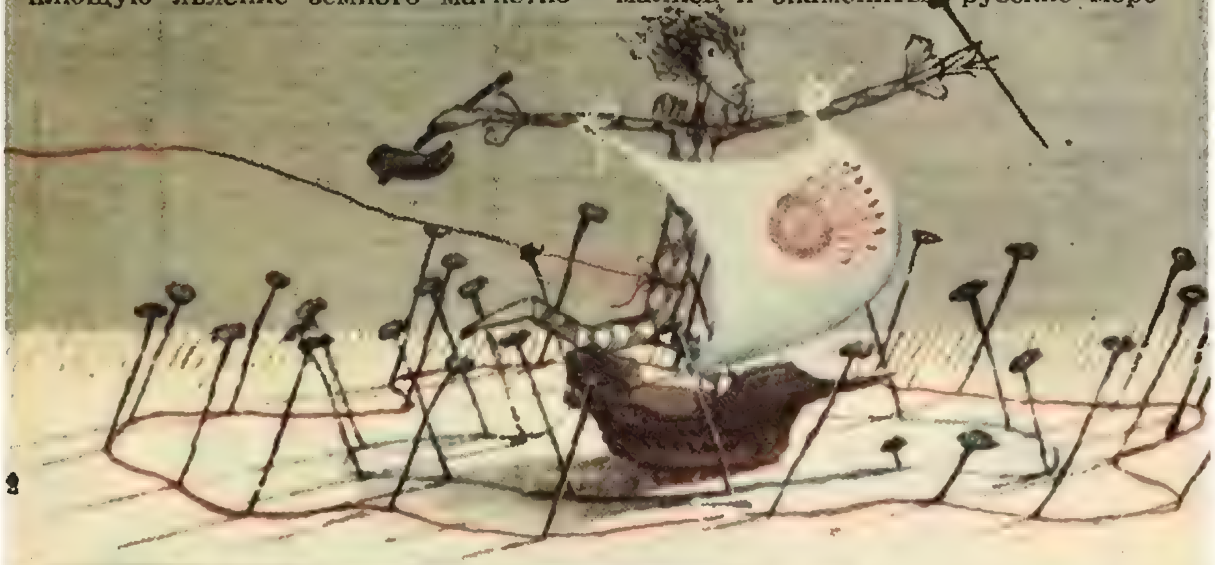
Чем объясняется ориентация магнитных стрелок? Что такое магнитные силы? Первым попытался ответить на эти вопросы английский физик Уильям Гильберт (1544—1603). Будучи тонким экспериментатором, Гильберт заложил основы науки о магнетизме и, в частности, о земном магнетизме. Он высказал предположение, что Земля — это большой магнит, и в этом смысле она подобна шару из магнитного материала. В подтверждение этой гипотезы ученый изготовил маленькую модель Земли — железный шар — и показал, что при движении по поверхности такого шара магнитная стрелка ориентируется как раз так, как это имеет место в реальности.

Проблема навигации поставила перед естествоиспытателями новую задачу: стало понятно, что для успешного пользования компасом (компас был одним из основных навигационных инструментов) необходимо иметь карту магнитных склонений. Для составления такой карты Лондонское Королевское общество (Академия наук Англии) в 1698 году снарядило специальную морскую экспедицию под руководством астронома и геофизика Эдмунда Галлея (того самого Галлея (1656—1742), чьим именем названа знаменитая комета). Три года кропотливой работы — и вот результат: Галлеем издана «магнитная» карта Атлантического и Тихого океанов. (На ней исследователь впервые соединил точки с одинаковыми значениями склонения одной линией. Теперь этот способ широко используется для наглядного представления различных характеристик земной поверхности, особенно в метеорологии.)

Как развивались события дальше? Понимая важность магнитных измерений для развития наук, путешествий, военного дела, сразу три Академии наук — Петербургская, Парижская и Берлинская — объявляют конкурс на лучшую работу, объясняющую явление земного магнетизма. Это было в середине XVIII века. Многие видные ученые откликнулись на призыв Академий. Ряд фундаментальных работ по изучению земного магнетизма был выполнен именно в это время. И среди них — работы французского физика и инженера Шарля Огюста Кулона по точному измерению электрических и магнитных сил.

Проведя серию удивительно точных для того времени экспериментов, Кулон доказал, что сила взаимодействия между заряженными телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и прямо пропорциональна их зарядам. По аналогии с электрическими зарядами, для характеристики магнитных свойств вещества Кулон использовал понятие магнитных зарядов и показал, что сила взаимодействия между намагниченными телами зависит от расстояния между ними и от величин их магнитных зарядов так же, как сила электростатического взаимодействия в случае электрически заряженных тел.*) Таким образом, благодаря экспериментам Кулона появилась возможность измерять абсолютное значение магнитной силы.

С открытием законов Кулона начался новый этап в изучении земного магнетизма. По почину знаменитого немецкого ученого — геолога, географа, путешественника — Александра Гумбольдта с 1800 года почти все экспедиции одним из пунктов программы имели измерение магнитного поля в различных точках Земли. Такими измерениями, кстати, занимались и знаменитые русские мореплаватели — Иван Федорович Крузенштерн, Юрий Федорович Лисянский, Федор Петрович Литке.



Все эти измерения имели большое значение для физики. Их результаты должны были быть достоверными. Вот какое значение придавал им, например, известный французский ученый Жан Батист Био. В своих лекциях по физике в Парижской политехнической школе в 1816 году он говорил так: «Для будущих успехов физики было бы важно определять с точностью теперешнее напряжение земного магнетизма... Повторив те же наблюдения через несколько столетий, можно было бы узнать, изменяют ли магнитные силы свою величину, подобно тому, как установлено, что изменяется их направление.» Для повышения надежности измерений Био предлагал иметь несколько стрелок и проводить независимые измерения, всякий раз намагничивая стрелки заново, до насыщения. Но даже в его время понимали, что это не выход из положения. Вопрос о достоверности результатов измерений оставался открытым. Хотелось бы найти способ, не зависящий от «капризов» стрелок, от их намагниченности.

---

*) Сегодня мы знаем, что магнитных зарядов в природе не существует. Но в свое время введение этого понятия оказалось очень плодотворным для развития представлений о магнетизме.

В 1828 году произошла встреча Гаусса с А. Гумбольдтом. Длительная беседа двух величайших ученых своего времени закончилась тем, что Гаусс заинтересовался явлениями земного магнетизма и решил попытаться создать теорию этого явления. Но прежде, чем приступить к решению задачи, нужно было разработать точные научные определения характеристик земного магнетизма — склонения, наклонения и напряженности. А для этого необходимо разработать основания магнитных измерений. Приступить же к намеченной работе Гаусс смог лишь осенью 1831 года, когда в Геттингенский университет был приглашен 27-летний физик из Галле Вильгельм Вебер. Гаусс познакомился с ним в доме Гумбольдта еще в 1828 году, и с приходом молодого ученого в университет у него появился единомышленник и талантливый помощник.

Вот какие события произошли до того, как «король математиков» занялся этой проблемой.

Что же такое измерение? Это последовательность операций, осуществляемых для нахождения значения физической величины, характеризующей некоторый объект или явление. Например, мы можем произвести измерение, сравнив интересующую нас физическую величину с некоторой однородной с ней, принятой за эталон. Хорошо, если такая эталонная величина у нас есть. Однако очень часто для того, чтобы определить значение физической величины, приходится произвести измерения нескольких других величин, связанных с искомой некоторым соотношением. Например, для измерения скорости тела нам надо измерить пройденный им путь и время, за которое этот путь пройден. Если некоторая величина измеряется путем сравнения с однородным ей эталоном, это называют прямым измерением, в противном случае — измерения косвенные. Используя разные зависимости между физическими величинами, мы можем некоторые величины принять за основные, а остальные — производные — получать комбинацией выбранных основных величин. Поэтому, прежде чем приступить к косвенному измерению магнитных величин через измерение сил и движений взаимодействующих намагниченных тел, Гауссу предстояло разобраться, какие величины в механике можно выбрать в качестве основных, а какие будут производными.

Исходя из законов и определений механики, Гаусс показал, что в этом разделе физики достаточно ввести всего три основных величины, а все остальные механические величины могут быть измерены с их помощью (т. е. выражены через основную тройку). Перебирая различные тройки величин, которые могли бы претендовать на роль основных, он установил, что в механике наиболее удобно в качестве основных величин выбрать длину, массу и время. Кроме того, для этих величин существовали эталоны и простые методы измерений.

Далее необходимо было сконструировать прибор, измеряя механические параметры которого можно было бы определить магнитные характеристики намагниченных объектов. Для этого Гаусс воспользовался следующим обстоятельством. Период колебаний намагниченной стрелки в магнитном поле Земли зависит от силы земного магнетизма, а также от магнитных и механических свойств стрелки. Поэтому, измеряя и сравнивая периоды колебаний разных стрелок с известными механическими свойствами, можно, зная закон взаимодействия магнитных зарядов, определить силу земного магнетизма. Итак, процесс измерений магнитных величин сводился к измерению механических величин, которые, в свою очередь, можно выразить через основные — длину, массу и время.

В качестве основных единиц измерения Гаусс предлагал использовать миллиграмм, миллиметр и секунду среднесолнечных суток. Эти единицы он выбрал не случайно. Во времена Великой Французской революции была образована специальная комиссия, целью которой было создание единой системы мер. (В комиссии работали такие ученые, как Лаплас, Лагранж, Монж, Лавуазье). Комиссия предложила использовать в качестве эталонов природные объекты и явления. В качестве единицы длины была выбрана одна десятимиллионная доля четверти парижского географического меридиана — «метр подлинный и окончательный» (поэтому предложенная комиссией система мер и называется метрической). Единицей массы назначили килограмм — массу кубического дециметра дистиллированной воды при 4 °С. В качестве единицы времени была узаконена секунда, равная 1/86400 среднесолнечных суток. Эти эталоны можно было воспроизвести в любом месте Земли и с их помощью проградуировать измерительные инструменты.

Гаусс оценил рациональность метрической системы. Однако при магнитных измерениях ему было удобно пользоваться миллиграммами и миллиметрами — дольными единицами метрической системы. Поэтому он предложил в качестве основных единиц измерений миллиграмм, миллиметр и секунду. Предложенную Гауссом систему стали называть «абсолютной» *).

---

*) С этим названием связано недоразумение. Заглавие работы Гаусса — «Напряжение земной магнитной силы, приведенное к абсолютной мере». Но «абсолютное» относится не к трем основным единицам, через которые Гаусс выразил магнитные величины, а означает лишь, что магнитная величина измерена абсолютно, с использованием лишь трех основных эталонов механических величин, а не относительно некоторой магнитной силы, взятой за эталон. Заметим, что уже в этой работе Гаусс предложил свести и электрические единицы к механическим. Практически эту задачу выполнил В. Вебер.

В 1862 году «Британская ассоциация для продвижения наук», членами которой были такие ученые, как лорд Кельвин, Дж. Клерк Максвелл, поставила задачу: выработать для различных областей физики основные и производные единицы измерения. Но... она не нашла ничего лучшего, чем идея Гаусса о выборе в качестве основных величин длины, массы и времени. Вот только единицы их измерений предлагалось несколько изменить, «назначив» основными сантиметр, грамм и секунду. И еще: именно этой авторитетной Комиссией были предложены единица силы — дина и единица энергии — эрг. По сути дела, была разработана известная система единиц СГС. Для электрических и магнитных единиц была использована идея Гаусса о связи механических и электромагнитных единиц через процедуру измерения (системы СГСЭ и СГСМ).

Комиссия впервые внесла некоторую ясность в систему электрических и магнитных единиц, но, к сожалению, на практике пользоваться такой системой было очень неудобно, потому что одни величины получались слишком большими, а другие слишком маленькими. Поэтому наряду с абсолютной системой было решено ввести так называемую практическую систему единиц. Здесь уже можно было в качестве основных использовать единицы, кратные 10^n основным единицам абсолютной системы, где *n* могло быть целым положительным или отрицательным числом. Это было большим шагом вперед. Ведь электрические и магнитные явления стали находить все большее и большее применение в технике и в быту, значит, надо было иметь удобные способы сравнения различных результатов, получаемых разными исследователями, чтобы потом их точно воспроизводить. Вот почему решение Британской комиссии было в центре обсуждения I Конгресса электриков в Париже в 1881 году. Так как Конгресс был международным, то и принятые им решения имели международное значение. А в основу этих решений были положены предложения Британской ассоциации по развитию наук, т. е. идеи Гаусса.

Сейчас мы пользуемся так называемой системой СИ. В отличие от существовавших ранее систем, количество основных величин в ней увеличено. Дело в том, что прежние системы единиц были удобны для измерений в тех конкретных областях физики, для которых они, собственно, и создавались. А система СИ призвана быть универсальной, единой для всех разделов физики. Поэтому, чтобы избежать совпадения размерностей у различных физических величин, пришлось увеличить число основных. Таким образом, в системе Си появилось уже 6 основных единиц — три механических, одна электромагнитная, одна термодинамическая и одна оптическая. В октябре 1971 года к ним была добавлена еще одна — единица количества вещества — моль.

Следует отметить, что законы физики не зависят от того, в какой системе мы производили измерения, но выбор удобной системы единиц существенно упрощает различные расчеты. Здесь можно провести аналогию с различными системами счисления. Так, в вычислительной технике до недавнего времени наиболее удобной системой счисления была двоичная, так как один из основных элементов ЭВМ — триггер — имеет два устойчивых состояния: нет напряжения на выходе — 0, есть напряжение — 1. Где-то может быть удобным счисление по основанию 3, 4, 5, и т. д. Но есть система, которая понятна всем,— десятичная. И если результат предназначен для большого числа различных специалистов, то его надо переводить в десятичную систему, хотя в рамках отдельной специальности может быть предпочтительной своя система. Так и с системами единиц измерения. Например, в США ряд специалистов, работающих над проектированием различных газопроводов, водопроводов и т. п., в качестве единицы площади используют не площадь единичного квадрата, а площадь единичного круга. В астрономии иногда в уравнении Ньютона для гравитационного взаимодействия двух масс $F=Gm_1m_2/r^2$ полагают гравитационную постоянную G равной 1. Это приводит к изменению системы единиц. В частности, к уменьшению числа основных единиц.

И все-таки наиболее общепринятой на сегодняшний день является Интернациональная Система — СИ. В чем ее преимущества?

Система СИ необходима для того, чтобы специалисты из разных областей точных наук и техники, а может быть, и более широкий круг людей (ведь с измерением температуры, например, с сообщениями об атмосферном давлении и т. п. имеют дело практически все) могли легко разобраться, в каких единицах что измерено, а не размышляли о том, в какой системе измерялась данная величина и как это будет выглядеть в привычной им системе. Вместе с тем, наверное, не следует требовать, чтобы во внутренних расчетах и измерениях, а также в сообщениях о проделанной работе, предназначенных для узкого круга специалистов данной области, делались пересчеты в систему СИ. Если же результаты предназначены для широкого круга, то такой пересчет необходим. Здесь опять можно провести некоторую аналогию. В свое время для научных работ существовал интернациональный язык — латынь. Работы, предназначавшиеся для внутреннего пользования, можно было писать и на родном языке, но то, что предназначалось для всего научного сообщества, следовало писать на латыни, тогда работы становились удобными для всеобщего ознакомления. (Кстати, работа Гаусса также написана на латыни.) Система СИ — это своеобразная «латынь», доступная всем, но никто не обязан говорить на этом языке в своем доме.

Вот так завершилась история 37 страниц, написанных более 150 лет назад.

КАК ПОСТРОИТЬ ТРАЕКТОРИЮ?

С. С. ХИЛЬКЕВИЧ, О. А. ЗАЙЦЕВА

С необходимостью рассчитать траекторию того или иного движения человек сталкивается очень часто. Такая задача возникает и перед австралийским аборигеном, подкрадывающимся с бумерангом к стае птиц, и перед математиком, вычисляющим место приземления космического корабля.

В этой статье мы хотим рассказать об одном методе приближенного построения траекторий сложных движений, проиллюстрировать его на конкретных примерах и предложить вниманию читателей несколько игр, в основе которых лежит этот метод.

Начнем с начала

> *Не бойся начала, а жди конца.*
> *Не дочитав сказки, не кидай указки.*
> В. Даль. Пословицы русского народа

Основная идея метода очень проста и основана на известном соотношении, связывающем вектор перемещения материальной точки с вектором ее средней скорости. Напомним, что средней скоростью $\vec{v}_{ср}$ неравномерного движения называется физическая величина, равная отношению перемещения $\vec{s}$ тела за некоторый промежуток времени Δt к длительности этого промежутка:

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\vec{s}}{\Delta t}.$$

Отсюда

$$\vec{s} = \vec{v}_{ср}\Delta t.$$

И средняя скорость, и перемещение — величины векторные, поэтому на рисунках они изображаются направленными отрезками. При этом направления обоих векторов одинаковые, а длины отличаются в Δt раз. Очевидно, что соответствующим выбором масштаба можно сделать так, чтобы направленные отрезки, изображающие среднюю скорость и перемещения, совпадали полностью — и по направлению, и по длине. Именно это обстоятельство и дает возможность быстро и несложно строить, разумеется приближенно, различные траектории.

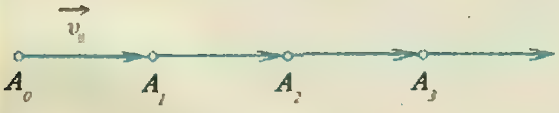


Рис. 1.

Рассмотрим сначала простейший случай — равномерное прямолинейное движение. Пусть в начальный момент времени тело находится в точке A_0 и имеет скорость $\vec{v}_0$ (рис. 1). Поскольку (как мы договорились) вектор перемещения за промежуток времени Δt совпадает с вектором скорости, то по истечении этого интервала тело окажется в точке A_1, в которой оканчивается отложенный из A_0 вектор начальной скорости $\vec{v}_0$. Отложив из точки A_1 еще один вектор $\vec{v}_0$, получим точку A_2, в которой тело окажется по истечении двух интервалов времени Δt. Продолжая эту процедуру, мы получим последовательность точек A_n, в которых тело будет находиться по истечении n выбранных промежутков времени от начала движения. Прямая, проходящая через эти точки, и есть траектория равномерного прямолинейного движения.

Идея обобщения метода

> *Они впервые рассмотрели обобщение игры на случай «многорукого игрока», т. е. игрока, имеющего более двух рук.*
> Из сборника «Математический цветник»

Рассмотренный выше случай равномерного прямолинейного движения является простейшим, однако основная идея метода остается неизменной и в более сложных ситуациях.

Идея метода в следующем.

Для приближенного построения траектории все время движения тела разобьем на малые промежутки*), такие, что на каждом из них движение можно считать равномерным, и определим, где будет находиться тело в моменты времени, кратные выбранному промежутку. При этом предполагается, что в течение каждого такого промежутка скорость тела остается постоянной и изменяется только при переходе от одного промежутка к другому.

---

*) В зависимости от условий движения длительность «малого» промежутка может измеряться как долями микросекунды, так и миллиардами лет. Важно только, чтобы она была намного меньше времени протекания рассматриваемого процесса.

Перейдем теперь к построению траекторий ускоренных движений.

Как вы знаете, средним ускорением $\vec{a}_{ср}$ называется физическая величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к промежутку времени Δt, в течение которого это изменение произошло:

$$\vec{a}_{ср}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Подобно скорости и перемещению, ускорение тоже является векторной величиной и на рисунках изображается направленным отрезком. При этом вектор ускорения по направлению совпадает с вектором изменения скорости, а по модулю отличается от него в Δt раз.

Если, например, время движения из точки A в точку B (рис. 2) равно Δt, то среднее ускорение тела на участке AB

$$\vec{a}_{ср}=\frac{\vec{v}_B-\vec{v}_A}{\Delta t},$$

или

$$\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{a}_{ср}\Delta t.$$

Следовательно, зная начальную скорость и ускорение тела, можно найти *скорость в конце движения. Обратите* внимание на то, что на рисунке 2 масштаб опять выбран так, чтобы длины векторов ускорения и изменения скорости были одинаковы.

Таким образом, зная положение и скорость тела в начальный момент времени, мы можем по известному ускорению определить скорости и положения тела в моменты времени, кратные выбранному интервалу. А зная положения тела в некоторые моменты времени, мы можем приближенно построить и траекторию его движения.

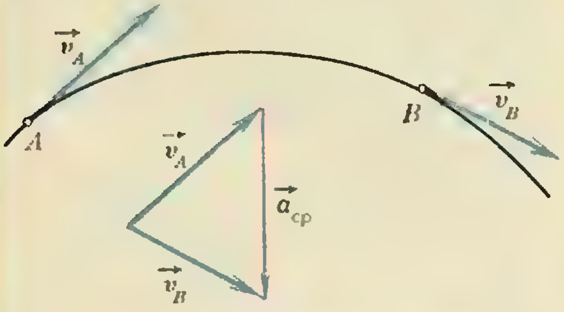


Рис. 2.

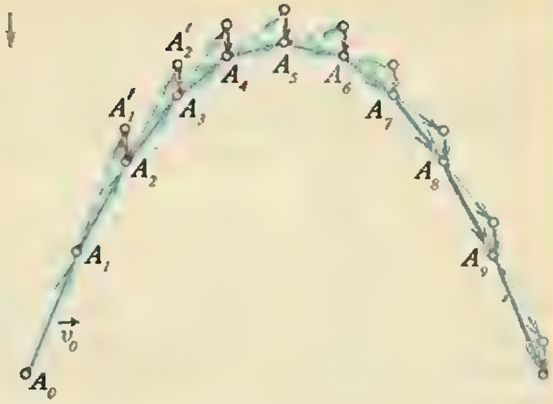


Рис. 3.

Для того чтобы идея метода стала более понятной, проиллюстрируем ее на нескольких примерах.

Полет тел в поле сил тяжести

> *И мы тронулись в путь, провожаемые криками «ура» и ликованием толпы, а также морковкой, которую мальчик от Биггса запустил в нас «на счастье».*
>
> Джером К. Джером.
> Трое в одной лодке...

В качестве первого примера построим траекторию, по которой будет двигаться тело, брошенное под углом к горизонту, при отсутствии сопротивления воздуха. Пусть в начальный момент времени тело находится в точке A_0 и имеет скорость $\vec{v}_0$ (рис. 3). Спустя малый интервал времени Δt оно окажется в точке A_1. Если бы ускорение тела было равно нулю, то еще через один интервал времени тело оказалось бы в точке A_1', которую можно построить, отложив вектор $\vec{v}_0$ из точки A_1. В действительности же движение тела является ускоренным — вектор ускорения $\vec{g}$ направлен вертикально вниз. Отложим вектор $\vec{g}$ из точки A_1' и получим точку A_2 — в нее и будет направлен новый вектор скорости тела. Очевидно, что спустя еще один интервал времени Δt после того, как тело побывало в точке A_1, оно окажется в точке A_2. Затем процедура повторяется: из точки A_2 откладываем такой же вектор скорости, как из точки A_1, прибавляем к нему вектор $\vec{g}$ и получаем точку A_3. В ней тело окажется спустя интервал Δt после прохождения точки A_2 и т. д. Построение дает приближенную траекторию — ломаную, которая похожа на хорошо известную всем параболу, являющуюся истинной траекторией.

Решение этой задачи особой ценности не представляет, поскольку ответ был известен заранее из школьного курса физики. Впрочем, сравнение полученного результата с известным позволяет проверить метод, а такая проверка всегда полезна.

Теперь мы готовы к рассмотрению более сложной и не изучаемой в школе задачи о движении тела в поле тяжести при наличии сопротивления воздуха. Пусть в начальный момент времени тело находится в точке A_0 и имеет скорость $\vec{v}_0$ (рис. 4), а сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c$ связана с вектором скорости тела $\vec{v}$ соотношением $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$ (α — постоянный коэффициент). Требуется установить, какой будет траектория тела в этом случае.

Ускорение $\vec{a}$, вызываемое двумя силами — тяжести и сопротивления, можно определить из второго закона Ньютона. Однако для построения удобнее ускорение $\vec{a}$ представить как сумму двух составляющих: ускорения $\vec{a}_т = \vec{g}$, сообщаемого силой тяжести, и ускорения $\vec{a}_c = \vec{F}_c/m = -(\alpha/m)\vec{v}$. Если изобразить зависимость a_c от v в виде графика, то по нему легко определить величину ускорения $\vec{a}_c$ для любого значения скорости тела. Направление же этого ускорения всегда противоположно направлению вектора скорости $\vec{v}$.

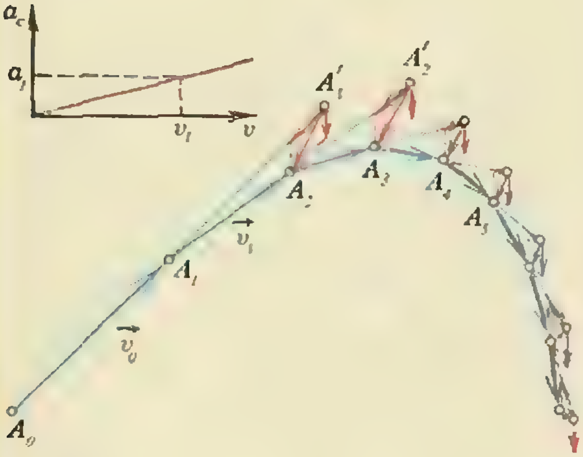


Рис. 4.

Приступим к построению траектории. Спустя малый промежуток времени Δt после того, как тело начало движение из точки A_0 (см. рис. 4), оно окажется в точке A_1. Для построения вектора скорости на следующем шаге нужно из точки A_1 отложить вектор начальной скорости $\vec{v}_0$ и прибавить к нему вектор ускорения $\vec{a} = \vec{g} + \vec{a}_c$ (как построить векторы $\vec{g}$ и $\vec{a}_c$ по отдельности, мы уже знаем). В результате построения получим точку A_2 — в нее и будет направлен новый вектор скорости. Таким образом, спустя два промежутка времени после начала движения тело окажется в точке A_2. Повторяя эту процедуру, мы получим точку A_3, в которой тело окажется еще через один промежуток, затем точки A_4, A_5 и т. д. Заметим, что ускорение $\vec{a} = \vec{g} + \vec{a}_c$ по истечении каждого промежутка времени необходимо определять заново, поскольку составляющая $\vec{a}_c$ зависит от скорости и поэтому в процессе движения не остается постоянной.

Ломаная, проходящая через точки A_0, A_1, A_2, ..., представляет собой приближенную траекторию полета тела при наличии сопротивления воздуха. Особенность этой кривой состоит в том, что, в отличие от параболы (см. рис. 3), она не симметрична относительно вертикали, проходящей через наивысшую точку полета: нисходящая ветвь траектории круче восходящей. Посмотрите теперь на заимствованный нами из учебника по бадминтону*) рисунок 5, на котором изображены траектории полета волана при различных подачах. Видите? Почти все траектории обладают отмеченной особенностью — они явно несимметричны. В спортивном бадминтоне этим пользуются очень широко. Высокую подачу, например, подают обычно настолько высоко, насколько позволяют высота потолка и силы игрока,— при этом на задней линии поля противника волан падает почти вертикально, а по отвесно падающему волану нельзя нанести ответного сильного удара, так как мешает оперение.

Теперь естественно усложнить ситуацию, добавив, например, еще одну действующую на тело силу. Оказы-

---

*) Рыбаков Д. Н., Штильман М. И. Основы спортивного бадминтона. (М., Физкультура и спорт, 1978.)

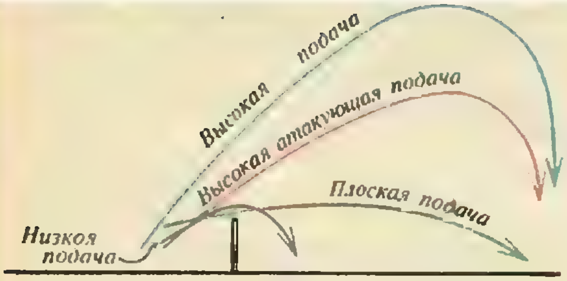


Рис. 5.

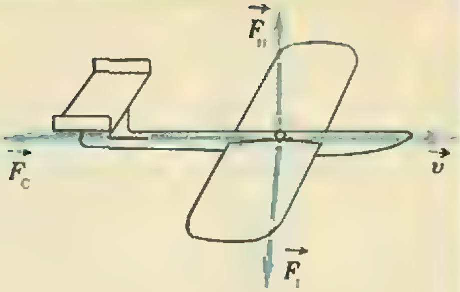


Рис. 6.

вается, что это позволит нам рассмотреть очень красивую задачу о...

Здесь мы советуем читателю на несколько минут прервать чтение, сложить из листка бумаги «самолетик» и понаблюдать за теми выкрутасами, которые он вытворяет в воздухе, когда его запускают с различными скоростями и под разными углами к горизонту. Во-первых, это даст возможность немного отдохнуть, а во-вторых, после таких экспериментов вам будет намного интереснее читать то, что написано дальше.

Как летает бумажный самолетик?

> *Заранее тут ничего сказать нельзя. И это, конечно, самое интересное!*
>
> А. А. Милн. Винни-Пух и все-все-все

Проведенные эксперименты, вероятно, убедили вас в том, что бумажный самолетик ведет себя в полете гораздо сложнее и интереснее, чем брошенный камень или волан для бадминтона. Даже если бросать его все время строго горизонтально, то в зависимости от начальной скорости он то почти отвесно пикирует на пол, то взмывает под потолок. Угадать заранее траекторию его полета практически невозможно, однако это вовсе не означает, что поведение кувыркающегося в воздухе самолетика не поддается никакому анализу.

Задача о полете бумажного самолетика является частным случаем более общей задачи о неуправляемом полете безмоторного летательного аппарата. Эту задачу впервые поставил и решил замечательный русский ученый, основоположник аэродинамики Н. Е. Жуковский (1847—1921). Здесь мы разберем только тот вариант задачи, который сам Жуковский называл «задачей о планере».

Пусть в воздушной среде летит симметричный планер (рис.6). На него действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}}$, сила лобового сопротивления $\vec{F}_{\text{с}}$ и подъемная сила $\vec{F}_{\text{п}}$. Сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}}=m\vec{g}$ постоянна по величине и всегда направлена вертикально вниз. Сила лобового сопротивления связана со скоростью $\vec{v}$ соотношением $\vec{F}_{\text{с}}=-\alpha\vec{v}$, т. е. точно так же, как и в предыдущем случае. Подъемная сила лежит в вертикальной плоскости и направлена перпендикулярно вектору скорости, а величина ее, согласно т. н. теореме Жуковского, связана со скоростью соотношением $F_{\text{п}}=\beta v^2$. Все три силы приложены в центре масс, который находится в вертикальной плоскости симметрии планера. Спрашивается, какой будет траектория полета, если планер запускают из точки A_0 с начальной скоростью $\vec{v}_0$ под углом φ к горизонту (рис. 7)?

Траектория строится в точности так же, как и раньше, только теперь для нахождения полного ускорения придется складывать не два вектора, а три: $\vec{g}$, $\vec{a}_{\text{с}}$ и $\vec{a}_{\text{п}}$, где вызываемое подъемной силой ускорение $\vec{a}_{\text{п}}=\vec{F}_{\text{п}}/m$ направлено перпендикулярно вектору скорости $\vec{v}$ и равно $(\beta/m)v^2$ по величине. Для упрощения построения полезно воспользоваться приведенными на рисунке 7 графиками зависимости $a_{\text{с}}$ и $a_{\text{п}}$ от v.

Построение траектории планера, как видите, хотя и громоздкое, но не сложное. Зато посмотрите, какую изумительную кривую мы получили! Наш планер описал самую настоящую «мертвую петлю»! В данном случае петля одна, но в принципе планер может описать несколько таких петель, после чего он переходит в режим характерного «порхающего» полета: он то проваливается вниз, то снова набирает высоту и, постепенно уменьшая амплитуду таких «провалов», выравнивает свой полет и движется равномерно по некоторой наклонной прямой.

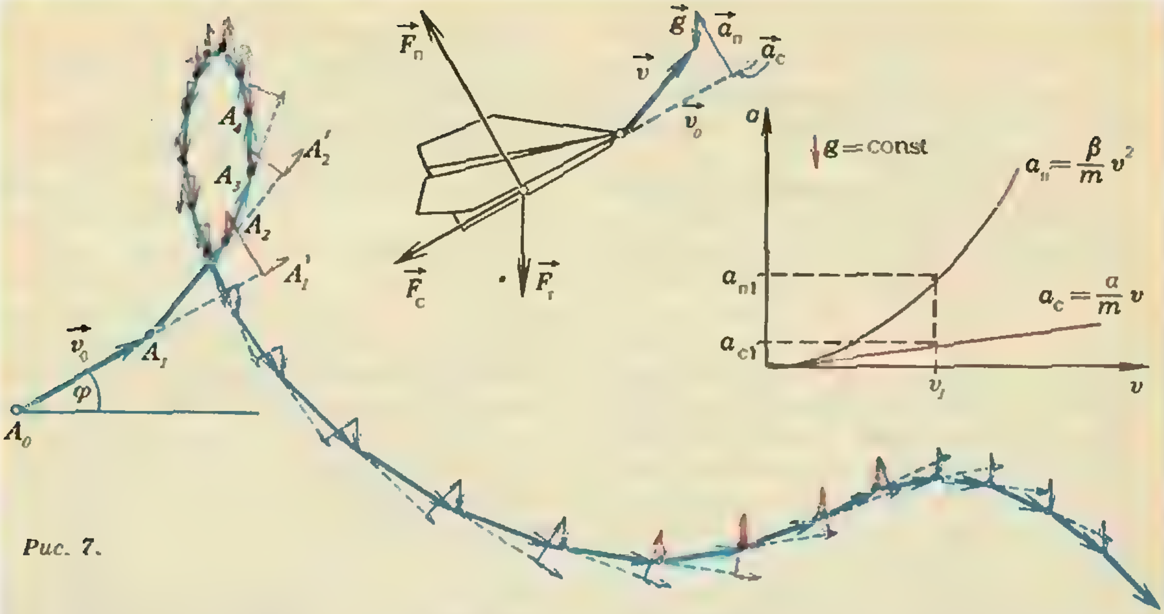


Рис. 7.

Итак, мы построили траекторию и получили описание наиболее характерных особенностей полета симметричного планера, несмотря на то, что точное решение задачи о планере (решение сложной системы дифференциальных уравнений) перевести на понятный школьнику язык совершенно невозможно.

Наблюдательный читатель, вероятно, заметил, что бумажный самолетик в некоторых отношениях отличается от рассмотренного нами идеального планера. Например, самолетик может не быть идеально симметричным: у него могут быть разными сила тяжести, подъемная сила и сила сопротивления воздуха, действующие на правое и левое крылья. Это приведет к тому, что в полете одно крыло самолетика будет располагаться выше другого, и самолетик начнет, как по наклонной плоскости, «соскальзывать» в сторону опущенного крыла. При таком поперечном «скольжении» носовая и хвостовая части самолетика будут испытывать неодинаковые силы сопротивления воздуха, поэтому самолетик начнет поворачиваться вокруг вертикальной оси, т. е. будет лететь не прямо вперед, а поворачиваясь вправо или влево. Короче говоря, к рассмотренному нами «кувырканию» и «порханию» планера в вертикальной плоскости добавятся повороты вправо или влево.

Поскольку разные типы сил, действующих на самолетик, по-разному зависят от скорости, то радиус поворота и даже его направление тоже будут зависеть от скорости. Поведение самолетиков, которые на больших скоростях поворачивают вправо, а на малых влево, оказывается особенно интересным. Позапускайте несколько таких самолетиков разных типов, присмотритесь к их полету — и вы увидите, что многое в их поведении будет вам теперь более понятным.

В принципе, с помощью изложенного метода можно рассматривать и еще более сложные задачи, связанные с поведением летательных аппаратов. Например, полет самолета. Для этого достаточно вспомнить, что самолет — это тот же планер, только с двигателем. Поэтому добавив к рассмотренным в задаче о планере трем силам постоянную по величине силу тяги двигателя $\vec{F}$, направленную вдоль вектора скорости, мы сможем построить траекторию полета самолета. Если представить, что в кабине этого самолета сидит пилот, который может управлять двигателем и рулем высоты (т. е. изменять величину $\vec{F}$ и параметр β), то можно моделировать даже поведение самолета в управляемом полете. Периодически включая и выключая двигатель такого самолета, терпеливый читатель сравнительно легко сможет добиться того, что самолет перейдет в волнообразный режим полета, напоминающий полет синиц, стрижей и других небольших птиц. А уменьшив в этом режиме массу m и увеличив параметры α и β, можно получить траектории, которые будут достаточно точно воспроизводить хаотический воздушный танец бабочек. Размеры статьи не позволяют остановиться на этих случаях подробно, и мы рекомендуем читателям рассмотреть их самостоятельно.

Заключение, или Еще раз о самом главном

> *Это такая штука, которую вы спокойно можете объяснить два раза, не опасаясь, что кто-нибудь поймет, о чем вы говорите.*
>
> А. А. Милн. Винни-Пух и все-все-все

Итак, в этой статье мы рассказали о методе приближенного построения траекторий и продемонстрировали его на нескольких примерах, начиная с простейших и кончая уже довольно сложными. Главное, что следует усвоить из этой статьи,— это основную идею метода, которая состоит в замене непрерывного движения последовательностью отдельных равномерных и прямолинейных шагов. В научной литературе этот метод называется методом конечных разностей. Основное достоинство его состоит в том, что он позволяет простыми средствами исследовать очень сложные виды движений и находить приближенные решения сложнейших уравнений, которые плохо поддаются другим методам решений. В настоящее время этот метод получает все большее распространение, поскольку является основным методом решения соответствующих задач с помощью электронно-вычислительных машин.

Приложение
Несколько слов об играх

> *И вот однажды Пух, и Пятачок, и Кролик, и Крошка Ру играли в Пустяки...*
>
> А. А. Милн. Винни-Пух и все-все-все

Поскольку игра — вещь очень интересная и полезная, то играть в те или иные игры любят все. Авторы статьи не являются исключением и поэтому не смогли удержаться от соблазна придумать игры на основе описанного выше метода.

Игра 1. «Автомобильные гонки». Поставьте на листе бумаги точку и представьте, что это автомобиль. Если он движется равномерно и прямолинейно, то с построением его траектории, как вы знаете, никаких проблем не возникает. Попытаемся теперь управлять движением автомобиля, разрешив вектору его скорости изменяться после каждого шага. При этом будем иметь в виду, что вектор ускорения автомобиля может иметь произвольное направление, но ограничен по величине некоторым максимальным значением a_m. Что можно сказать о движении автомобиля в этом случае?

Пусть в начальный момент времени автомобиль находится в точке A_0, имея скорость v_0 (см. рис. 7). Спустя первый интервал времени он окажется в точке A_1, а еще через один интервал, если бы движение было равномерным, он попал бы в точку A_1'. Однако в нашем случае к концу второго промежутка он может оказаться в любой точке круга радиуса a_m с центром в A_1'.

Теперь понятно, что может, а чего не может сделать наш автомобиль. Так, например, он не может слишком быстро разгоняться и тормозить, а также совершать слишком крутые повороты на большой скорости. Мы рекомендуем читателю сначала поупражняться в езде на таком автомобиле просто на чистом листке, затем нарисовать дорогу и попытаться по ней проехать, а уже потом можно соревноваться с товарищами в скорости езды по извилистым трассам с мостами и туннелями (врезавшийся в ограждение автомобиль из дальнейших соревнований, естественно, выбывает).

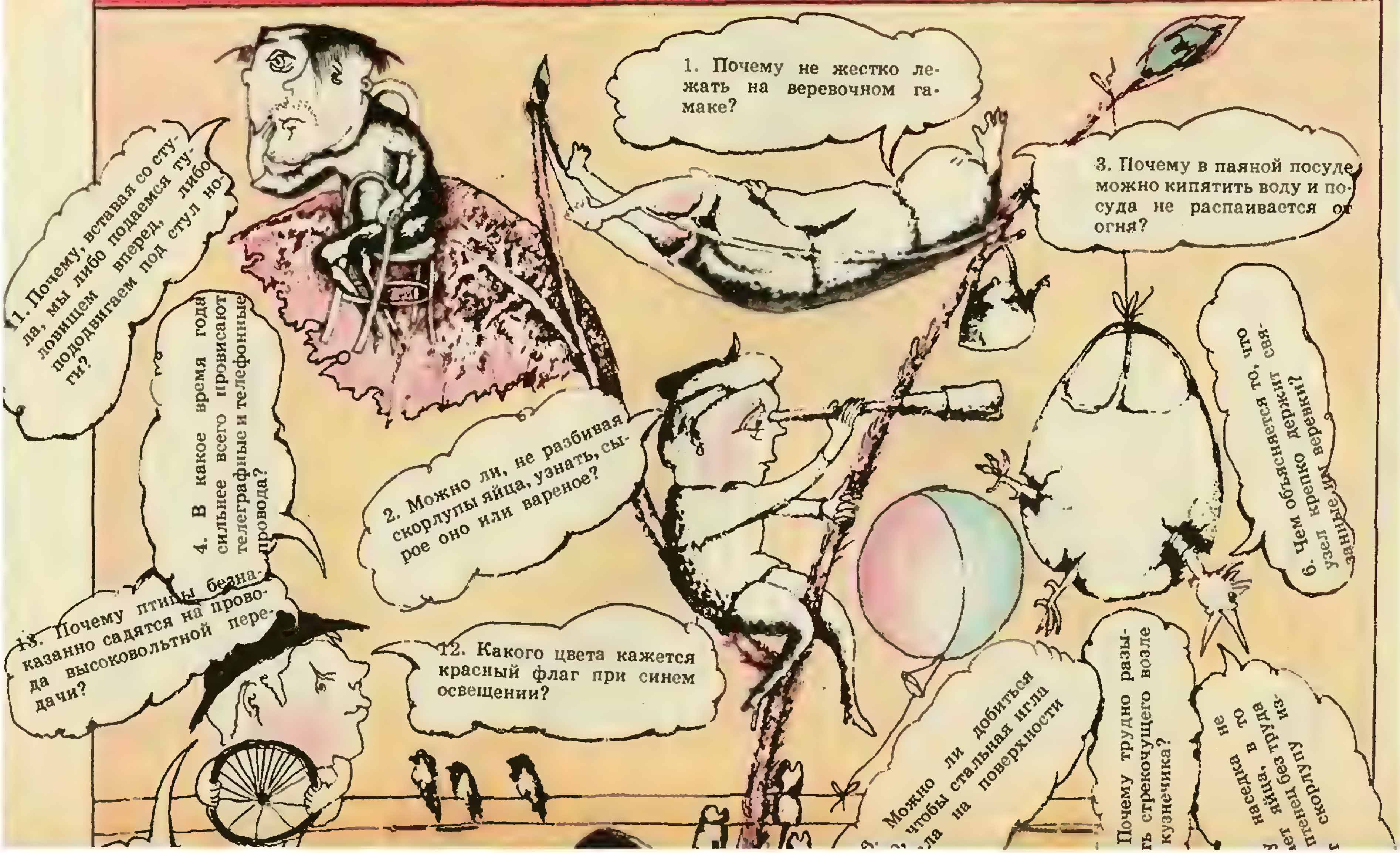
Как показал опыт, эта игра несложная, но, попытавшись сыграть в нее, вы тут же убедитесь, что она требует крепких нервов и хорошего глазомера — накал страстей может оказаться соизмеримым с остротой борьбы в настоящих гонках.

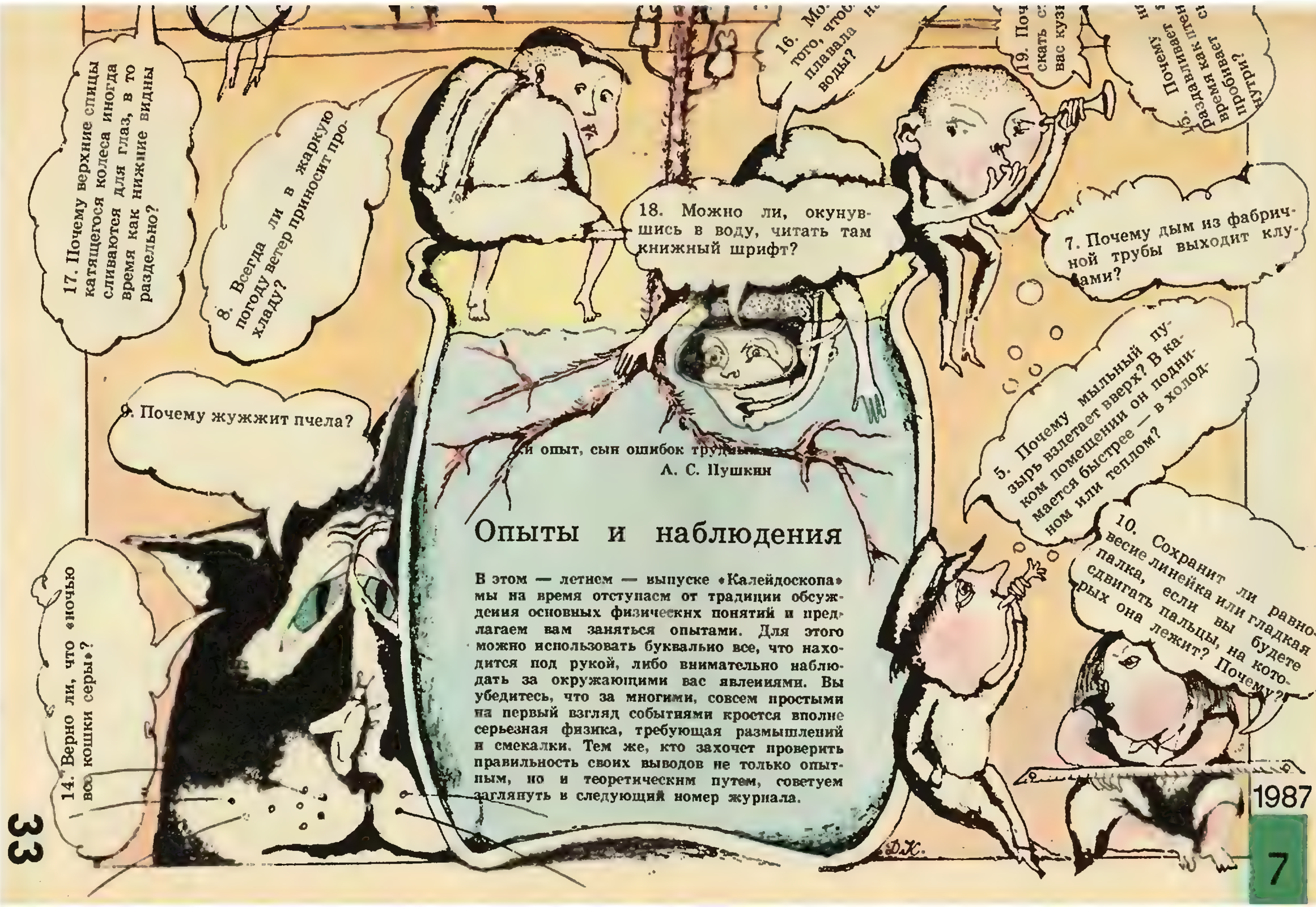
Игра 2. «Принцесса и чудовище». Известно, что излюбленным занятием всех чудовищ является охота за принцессами. Принцессы же, как правило, чудовищ не любят, боятся их и стремятся от них убежать. Такое поведение принцесс вполне понятно, однако справедливости ради следует отметить, что иногда они делают это совершенно напрасно, поскольку, догнав их, чудовища расколдовываются и превращаются в прекрасных принцев — вспомните хотя бы «Аленький цветочек».

Итак, пусть принцесса и чудовище представляют собой материальные точки, ускорения которых ограничены величинами $a_{\text{п}\,m}$ и $a_{\text{ч}\,m}$. Предположим далее, что чудовище имеет руки длиной l, т. е. оно может схватить все, что находится от него на расстоянии, меньшем или равным l. Задача чудовища состоит в том, чтобы схватить принцессу, а задача принцессы состоит в том, чтобы убежать. Варьируя соотношения между величинами $a_{\text{п}\,m}$, $a_{\text{ч}\,m}$ и l, читатели могут по своему желанию усложнять задачу либо чудовищу, либо принцессе.

Чудовищ может быть несколько, они могут ловить принцессу в пещере сложной формы или в лабиринте дворца, где имеются двери, через которые может пройти принцесса, но не может пролезть чудовище, и т. д. Простор для построения новых вариантов, как видите, здесь безграничен.

Калейдоскоп „Кванта"


1. Почему не жестко лежать на веревочном гамаке?
3. Почему в паяной посуде можно кипятить воду и посуда не распаивается от огня?
11. Почему, вставая со стула, мы либо подаемся туловищем вперед, либо пододвигаем под стул ноги?
2. Можно ли, не разбивая скорлупы яйца, узнать, сырое оно или вареное?
4. В какое время года сильнее всего провисают телеграфные и телефонные провода?
6. Чем объясняется то, что узел крепко держит связанные им веревки?
13. Почему птицы безнаказанно садятся на провода высоковольтной передачи?
12. Какого цвета кажется красный флаг при синем освещении?
Можно ли добиться чтобы стальная игла ла на поверхности
Почему трудно разы ть стрекочущего возле кузнечика?
не наседка в то яйца, птенец без труда из- скорлупу


17. Почему верхние спицы катящегося колеса иногда сливаются для глаз, в то время как нижние видны раздельно?
8. Всегда ли в жаркую погоду ветер приносит прохладу?
9. Почему жужжит пчела?
14. Верно ли, что «ночью все кошки серы»?
18. Можно ли, окунувшись в воду, читать там книжный шрифт?
16. Мо
того, чтоб
плавала
воды?
19. Поч
скать с
вас кузн
15. Почему н
раздавливает
время как птен
пробивает с
нутри?
7. Почему дым из фабричной трубы выходит клубами?
5. Почему мыльный пузырь взлетает вверх? В каком помещении он поднимается быстрее — в холодном или теплом?
10. Сохранит ли равновесие линейка или гладкая палка, если вы будете сдвигать пальцы, на которых она лежит? Почему?
ДЖ.

и опыт, сын ошибок труд
А. С. Пушкин

Опыты и наблюдения

В этом — летнем — выпуске «Калейдоскопа» мы на время отступаем от традиции обсуждения основных физических понятий и предлагаем вам заняться опытами. Для этого можно использовать буквально все, что находится под рукой, либо внимательно наблюдать за окружающими вас явлениями. Вы убедитесь, что за многими, совсем простыми на первый взгляд событиями кроется вполне серьезная физика, требующая размышлений и смекалки. Тем же, кто захочет проверить правильность своих выводов не только опытным, но и теоретическим путем, советуем заглянуть в следующий номер журнала.

Ван-дер-Ваальс и его уравнение

(к 150-летию со дня рождения ученого)

23 ноября 1837 года в семье лейденского плотника Якобуса Ван-дер-Ваальса появился на свет первый из девяти детей — Иоганнес Дидерик Ван-дер-Ваальс, будущий знаменитый голландский ученый, один из основоположников современной молекулярной физики.

Скромный достаток столь многочисленной семьи не позволял и мечтать о высшем образовании, так что после начальной школы весь долгий и нелегкий путь в науку Ван-дер-Ваальс прошел самостоятельно и, как сказали бы сейчас, без отрыва от производства, ибо только в 40 лет он расстался с профессией школьного учителя. Правда ему все же удалось, хотя и с многолетним перерывом, прослушать в старинном Лейденском университете с десяток лекционных курсов по математике, астрономии и физике.

Но 14 июня 1873 года Ван-дер-Ваальс — в это время он еще преподавал физику в одном из реальных училищ Гааги — приехал в Лейденский университет не для того, чтобы пополнить знания еще одной лекцией. На этот день была назначена защита его докторской диссертации «О непрерывности жидкого и газообразного состояний». Защита прошла успешно, но особого восторга диссертация гаагского учителя у членов ученого совета не вызвала. Миновало десять лет, и европейские ученые начали осознавать, что этой работой — заметим, это было первое самостоятельное научное исследование Ван-дер-Ваальса, его первая научная публикация! — ее автор вписал свое имя в число классиков науки. В 1910 году Ван-дер-Ваальс был удостоен Нобелевской премии по физике.

В чем же сущность этой классической работы голландского ученого? На языке формул ответ на этот вопрос выглядит следующим образом:

до Ван-дер-Ваальса было известно уравнение состояния *идеального газа*

$$pV=RT, \qquad (1)$$

в «Непрерывности» же впервые появилось уравнение состояния *реального газа*

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT, \qquad (2)$$

где V — объем моля газа при температуре T и давлении p, R — универсальная газовая постоянная, a и b — экспериментальные константы, характеризующие соответственно межмолекулярное притяжение и собственный объем молекул.

Идеальный газ — это хотя и чрезвычайно полезная в физике, но предельно упрощенная теоретическая модель. Она соответствует газу, плотность которого настолько низка, что взаимодействие между его молекулами и размер молекул практически никакой роли не играют. Уравнению Ван-дер-Ваальса (так называют уравнение состояния реального газа) отвечает гораздо более реалистическая модель: молекулы — абсолютно твердые шарики очень малого, но конечного диаметра, между которыми действуют быстро спадающие с расстоянием силы взаимного притяжения.

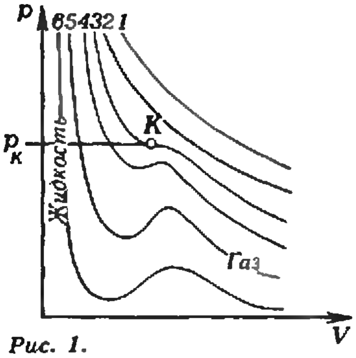


Рис. 1.

Переход от уравнения (1) к уравнению (2) Ван-дер-Ваальс охарактеризовал как «введение поправок». И это действительно так. Во-первых, в нем учитывается, что помимо внешнего давления p действует «внутреннее» давление a/V^2, возникающее за счет межмолекулярного притяжения и «стремящееся» стянуть мечущиеся в беспрестанном тепловом движении молекулы в один тесный сгусток. Во-вторых, принимается во внимание тот факт, что для теплового движения молекул доступен не весь объем V, а лишь пространство, остающееся за вычетом собственного объема молекул. (На самом деле Ван-дер-Ваальс обнаружил, к своему немалому удивлению, что константа b в первом приближении равна учетверенному значению суммарного собственного объема молекул, содержащихся в одном моле вещества.)

Обычно слово «поправка» ассоциируется с чем-то не слишком важным, во всяком случае, не принципиальным, не связанным с коренными изменениями. Однако в физике эта привычная ассоциация очень часто не оправдывается. И ярчайший тому пример — ван-дер-ваальсовские поправки, приводящие к чудесному превращению уравнения (1), справедливого лишь для не существующего в природе теоретического объекта под названием «идеальный газ», в уравнение (2), описывающее поведение реального вещества в диапазоне плотностей, простирающемся от значений, соответствующих разреженному газу, до величин, отвечающих жидкому состоянию. При этом из самих выражений для ван-дер-ваальсовских поправок можно определить и молекулярные силы, и размеры молекул — совершенно реальные параметры, о которых даже не заходит речь в модели идеального газа.

На рисунке 1 показаны изотермы, рассчитанные по уравнению Ван-дер-Ваальса для различных значений температуры. Ясно, что большие значения V относятся к газообразному состоянию, а малые — к жидкому. Как свидетельствуют изотермы *1*, *2*, *3*, при температурах $T > T_к$ каждому значению p отвечает одно значение V. Это означает, что переход от газообразного состояния к жидкому непрерывен, и поэтому при таких температурах само подразделение на газ и жидкость теряет смысл. Иное дело температуры $T < T_к$. В этом случае каждому значению p отвечают три различных значения V, так что на изотермах (см. изотермы *4*, *5*, *6* на рис. 1) появляется волнообразный сегмент.

Рассмотрим подробнее одну изотерму для некоторой температуры $T < T_к$ (рис. 2). Участок *ec* ее волнообразного сегмента, проведенный пунктиром, соответствует противоестественному положению: при сжатии давление падает, чего в природе не бывает. Наличие нереализуемого участка *ec* означает, что при постепенном изменении объема вещество не может все время оставаться однородным — в некоторый момент должно произойти его расслоение на газ и жидкость. Таким образом, истинная изотерма имеет вид ломаной линии *abfg* с прямолинейным отрезком *bf* в области волнообразного сегмента, соединяющим ветвь *ab*, соответствующую газообразному состоянию, и ветвь *fg*, соответствующую жидкому состоянию. Сам горизонтальный участок *bf* соответствует переходу газа в жидкость (и наоборот), происходящему при заданной температуре и при определенном постоянном давлении. На какой «высоте», т. е. при каком давлении, возникает прямолинейный участок, из уравнения Ван-дер-Ваальса определить невозможно. Ответ на этот вопрос дает правило, установленное Дж. Максвеллом (1831—1879) и Р. Клаузиусом (1822—1888): ордината участка *bf* должна быть такой, чтобы обеспечивалось равенство площадей «полуволн» *bcd* и *def*, лежащих сверху и снизу от него.

По мере повышения давления прямолинейный участок укорачивается и при $T = T_к$ стягивается в «критическую точку» K. По уравнению Ван-дер-Ваальса $T_к = 8a/(27bR)$ и ей отвечает критическое давление $p_к = a/(27b^2)$. Для воды, например, $T_к = 647{,}3$ К и $p_к = 22{,}13$ МПа, откуда $b = RT_к/(8p_к) = 30{,}4 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль, и для «диаметра» молекулы воды, уподобляемой абсолютно твердому шарику, получается значение $d = 2{,}9 \cdot 10^{-10}$ м, что по порядку величины вполне соответствует действительности.

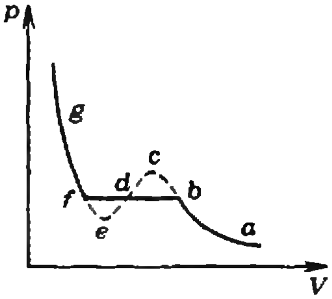


Рис. 2.

Уравнение Ван-дер-Ваальса чрезвычайно широко используется физиками и инженерами, и понятно почему. Ведь оно описывает всю картину поведения вещества от газообразного состояния до жидкого, оно несложно и потому с ним удобно работать, и, наконец, что очень важно, оно основано на простой, но реалистической модели вещества, допускающей наглядную интерпретацию.

А насколько точно уравнение Ван-дер-Ваальса согласуется с экспериментальными данными? В области высоких температур и низких давлений имеется хорошее *количественное* согласие, но при плотностях, близких к тем, которые характеризуют жидкое состояние, речь может идти лишь о *качественном* соответствии.

С появлением уравнения состояния реального газа родилась и загадка этого уравнения. Дело в том, что, с одной стороны, сам Ван-дер-Ваальс не дал его строгого вывода — он, скорее, угадал ответ, угадал, основываясь на правдоподобных, но отнюдь не строгих рассуждениях. С другой стороны, строгий математический вывод уравнения не получался ни у кого. Но как же может быть столь удачным уравнение, не имеющее под собой твердой теоретической почвы? Некоторые физики склонны были даже усматривать здесь какую-то мистику.

Вывести ван-дер-ваальсовское уравнение удалось только в 1966 году. Однако полного решения загадка все же не получила вплоть до наших дней. Речь идет о следующем. Уравнение было строго выведено для модели, в которой абсолютно жесткие шарики-молекулы связаны между собой очень слабыми, но обладающими бесконечным радиусом действия силами взаимного притяжения. Сам Ван-дер-Ваальс настаивал на том, что учитываемые его уравнением силы притяжения отнюдь не дальнодействующие, а простираются на расстояние, ограниченное всего лишь несколькими молекулярными диаметрами. Это обстоятельство не представляло бы особого интереса — так ли уж важно, какая картина рисовалась голландскому ученому столетие назад! — если бы в конце концов не оказалось, что физическая интуиция ученого все еще не превзойдена даже самыми изощренными математическими методами. Действительно, сопоставление экспериментальных данных с результатами компьютерных численных расчетов показало, что уравнение Ван-дер-Ваальса может быть справедливым и при короткодействующем характере межмолекулярного притяжения, причем оно не обязательно должно быть очень слабым.

Как сложилась судьба Ван-дер-Ваальса после защиты его знаменитой диссертации?

В 1875 году он был избран академиком, а спустя два года получил должность профессора физики Амстердамского университета. Этот пост он занимал до 1908 года, когда, согласно незыблемому правилу, вышел в отставку в связи с достижением 70-летнего возраста. Помимо уравнения состояния реальных газов, Ван-дер-Ваальс получил еще целый ряд важных научных результатов, причем значение некоторых из них было по достоинству оценено только в наше время. Его научная деятельность продолжалась до 1916 года, затем творческие и физические силы стали ослабевать. Ученый умер в 1922 году, в эпоху, когда занимавшие его всю жизнь проблемы молекулярной физики были вытеснены на периферию науки бурно развивавшимися квантовой теорией, физикой атома и атомного ядра. Но прошло полвека, эти проблемы снова переместились в центр внимания физиков, и работы Ван-дер-Ваальса получили новое и чрезвычайно плодотворное развитие.

Б. Е. Явелов

Задачи

М1051 — М1055, Ф1063 — Ф1067

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 сентября 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7—87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1051» или «Ф1063». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

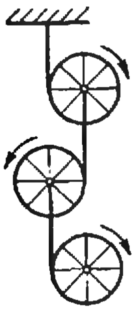


Рис. 1.

М1051. В левый нижний угол шахматной доски 8×8 клеток поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может перепрыгнуть через любую другую фишку, симметрично отразившись от нее, если соответствующее поле свободно. Можно ли несколькими такими ходами собрать все фишки в виде квадрата 3×3:

а) в левом верхнем углу?

б) в правом верхнем углу доски?

Я. Е. Брискин

М1052. Докажите, что из n четырехугольников, отсекаемых от выпуклого n-угольника диагоналями, не более $n/2$ могут оказаться описанными около окружности. Приведите пример 8-угольника, у которого таких четырехугольников 4.

Н. М. Седракян

М1053. Докажите, что в последовательности чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., где каждое число равно сумме двух предыдущих, при $m>3$ встретится не менее 4 и не более 5 m-значных чисел.

М1054. Докажите, что шесть точек попарного касания четырех сфер всегда лежат на одной сфере или на одной плоскости.

Ю. К. Коба

М1055. На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг с концами в этих точках не менее 100 дуг, не превосходящих 120°.

А. Ф. Сидоренко

Ф1063. Пешеходу необходимо в кратчайшее время попасть из точки поля A в точку поля B, расстояние между которыми 1300 м. Поле пересекает прямолинейная дорога так, что точка A находится от нее на расстоянии 600 м, а точка B — на расстоянии 100 м. Скорость перемещения пешехода по полю равна 3 км/ч, а по дороге — 6 км/ч. Какой путь должен избрать пешеход? Чему равно минимальное время? Рассмотреть случаи, когда точки A и B лежат по одну сторону от дороги и когда они лежат по разные стороны от дороги.

С. С. Кротов

Ф1064. Нить прикреплена к ободу тяжелого обруча и намотана на него. Если другой конец нити прикрепить к потолку и отпустить обруч, то он, вращаясь и разматывая нить, будет двигаться вниз. Пусть три таких обруча соединены «последовательно», т. е. конец нити следующего обруча прикреплен к оси предыдущего (рисунок 1). Все обручи одновременно отпустили, и они пришли в движение. Определить, с каким ускорением движется верхний обруч.

С каким ускорением будет двигаться верхний обруч, если число последовательно соединенных обручей очень велико?

Считать, что масса обруча равномерно распределена по его ободу, спицы невесомы, нити невесомы и нерастяжимы, трение отсутствует.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Ф1065. Кастрюлю, в которую налит 1 л воды, никак не удается довести до кипения при помощи нагревателя мощностью 100 Вт. Определить, за какое время вода остынет на один градус, если отключить нагреватель.

А. Р. Зильберман

Ф1066. Предположим, что в результате сильных пожаров в верхних слоях атмосферы возникает тонкий слой сажи, поглощающий практически все падающее на него солнечное излучение. Какой станет при этом средняя температура Земли, если сейчас она составляет 300 К?

А. А. Стасенко

Ф1067. Внутри прозрачного шара радиусом R, сделанного из материала с показателем преломления n, имеется небольшое вкрапление A (рисунок 2). При рассматривании вкрапления кажущееся расстояние от вкрапления до центра шара оказывается не зависящим от α для достаточно больших α (см. рисунок 2). Найдите, на каком расстоянии от центра шара находится вкрапление.

Г. В. Григорьев

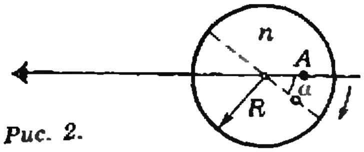


Рис. 2.

Problems

M1051 — M1055, P1063 — P1067

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than september 15, 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

M1051. The lower left hand corner of an 8×8 chessboard is occupied by nine pawns forming a 3×3 square. A pawn can jump over any other pawn, landing symmetrically, if the corresponding little square is empty. Using such moves, is it possible to reassemble the 3×3 square

a) in the upper left hand corner?

b) in the upper right hand corner?

Ya. E. Briskin

M1052. Prove that no more than $n/2$ out of n quadrilaterals cut out from an n-sided polygon by its diagonals can be circumscribed to a circle. Give an example of an octagon with 4 such quadrilaterals.

N. M. Sedrakyan

M1053. Prove that in the Fibonacci sequence 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,..., where each number is the sum of the two previous ones, there are no more than 5 and no less than 4 m-digit numbers for any $m > 3$.

M1054. Prove that the six pairwise tangency points of four spheres always lie on one sphere or on one plane.

Yu. K. Koba

M1055. There are 21 points on a circle, arbitrarily chosen. Prove that among the arcs with extremities at these points no less than 100 are no greater than 120°.

A. F. Sidorenko

P1063. A hicker must walk in the shortest possible time from point A to point B. The points are in a field, and the distance between them is 1300 m. The field is crossed by a rectilinear road whose distances from the points A and B are respectively 600 m and 100 m. The hicker walks in the field at the speed of 3 km per hour and along the road at 6 km per hour. What trajectory should the hicker choose? What is the minimal time? Consider two cases: when the points are on opposite sides of the road or on the same side.

S. S. Krotov

P1064. A string is fixed to the outside of a wheel and wrapped around it. If the other end of the string is fixed to the ceiling and the wheel is released, it will move down, rotating and unwrapping the string. Imagine that three such wheels are connected in sequence, i. e. the end of the string of each succeeding wheel is fixed to the axis of the previous one (see figure Рис. 1). If all the wheels are released simultaneously, what will the acceleration of the upper wheel be? Same question if the number of successively connected wheels is very large. Assume that the wheel's mass is uniformly distributed along the circumference, the strings are weightless and unstretchable and there is no friction.

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

P1065. A pot containing 1 liter of water refuses to come to a boil on a 100 watt heater. How long can it take for the water to cool by 1 degree when the heater is turned off?

A. R. Zilberman

P1066. Imagine that a thin layer of soot, absorbing practically all the Sun's emissions, is formed in the upper atmosphere as the result of massive forest fires. What will the Earth's mean temperature become, if it is now 300 K?

A. L. Stasenko

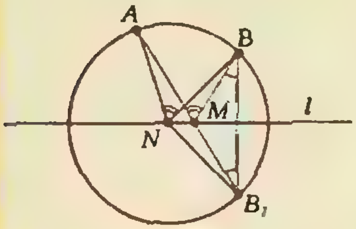
P1067. A transparent solid sphere of radius R made out of material with refraction index n contains a small incrustation A (figure Рис. 2 on p. 37). When looking at the incrustation the apparent distance from it to the centre of the sphere does not depend on α for sufficiently large α (see the figure). Find the true distance from the incrustation to the sphere's centre.

G. V. Grigoriev

Решения задач

М1031 — М1035, Ф1043 — Ф1045, Ф1047

М1031. *На плоскости даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. На прямой l выбраны точка M, сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая, и точка N, для которой расстояния от A и B равны: $AN=BN$. Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.*



Построим точку B_1, симметричную B относительно прямой l, тогда M лежит на пересечении прямых AB_1 и l (см. рисунок), так как для любой точки P на прямой l, отличной от M,

$$AP+PB=AP+PB_1>AB_1=AM+MB.$$

Покажем, что $\angle AMB=\angle ANB$, — из этого равенства вытекает утверждение задачи.

Угол AMB как внешний угол равнобедренного треугольника MBB_1 равен $2\angle AB_1B$. С другой стороны, точки A, B и B_1 лежат на окружности с центром N, поэтому и $\angle ANB=2\angle AB_1B$ (центральный угол ANB и вписанный в эту окружность угол AB_1B опираются на одну дугу AB).

Л. Д. Курляндчик

М1032. *Выписаны n чисел $2, 3, \ldots, n+1$, их всевозможные произведения по два, по три и т. д. вплоть до произведения всех n этих чисел. Докажите, что сумма чисел, обратных всем выписанным, равна $n/2$. (Например, при $n=3$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+$ $+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}=\frac{3}{2}$.)*

Очевидно, что рассматриваемая в задаче сумма на 1 меньше произведения

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Следовательно, она равна

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+2}{n+1}-1=\frac{n+2}{2}-1=\frac{n}{2},$$

что и требовалось доказать.

А. В. Анджанс

M1033. *Окружность отрезает от квадрата четыре криволинейных треугольника (граница каждого состоит из дуги окружности и двух отрезков). Выкрасим два из них, примыкающих к противоположным углам квадрата, в голубой цвет, два других — в красный. Докажите, что:*
а) суммы красных и голубых дуг равны;
б) суммы периметров красных и голубых треугольников равны.

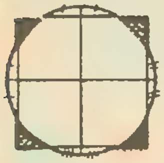


Рис. 1.

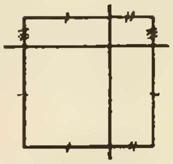


Рис. 2.

а) Проведем в окружности диаметры, параллельные сторонам квадрата. Они делят пополам дуги, находящиеся вне квадрата (рис. 1). Чтобы получить сумму красных дуг, нужно из двух четвертей окружности вычесть по половинке от каждой из выступающих за квадрат дуг; точно так же получается сумма голубых дуг.

б) С учетом утверждения а) нам достаточно доказать, что сумма длин красных отрезков сторон квадрата, выступающих за окружность, равна сумме длин голубых отрезков. Диаметры, которые мы рассмотрели в решении задачи а), делят пополам хорды, высекаемые на сторонах квадрата окружностью. При этом внутри каждой пары вертикальных углов, определяемых этими диаметрами, заключена половина периметра квадрата (это следует из равенства отрезков, отмеченных на рисунке 2). Следовательно, и сумма длин красных уголков, и сумма длин голубых уголков равны полупериметру квадрата минус полусумма хорд.

Верно и чуть более сильное утверждение: сумма горизонтальных красных отрезков равна сумме горизонтальных голубых отрезков, аналогично — для вертикальных. Кроме того, квадрат в условии задачи можно заменить на прямоугольник.

В. В. Произволов

M1034. *Прямоугольная шоколадка разбита продольными и поперечными углублениями на 50 квадратных долек. Двое играют в такую игру. Начинающий разламывает шоколадку по некоторому углублению на две прямоугольные части. Затем играющие по очереди ломают одну из получившихся частей по некоторому углублению на две. Тот, кто первым отломит квадратную дольку (без углублений), а) проигрывает, б) выигрывает. Кто из играющих может обеспечить себе выигрыш — начинающий или его партнер?*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

12 13 14 15 16 17 18

19 20 21 22 23 24 25

Ответ: в обоих вариантах игры побеждает начинающий. Это справедливо и для любой шоколадки из mn долек (размером $m \times n$), где mn четно (за исключением случая шоколадки $2 \times n$ с нечетным n в варианте б) — здесь ответ зависит от n.) Мы рассмотрим сразу общий случай. Интересно, что выигрышные стратегии в «противоположных» вариантах а) и б) почти совпадают.

а) Стратегия, обеспечивающая выигрыш начинающему, такова. Хотя бы одно из чисел m и n четно — пусть это будет m ($m=2k$). Первым ходом начинающий разламывает шоколадку на две одинаковые половины (по $n \times k$ долек). Затем каждый ход второго он дублирует на другой половине шоколадки. Таким образом, после каждого хода первого игрока обе половины будут разломаны совершенно одинаковым образом. Ясно, что при этом первый не отломит дольку 1×1 раньше, чем это сделает второй.

б) Здесь при четном $m > 2$ и $n > 1$ начинающий может использовать ту же «симметричную» стратегию до тех пор, пока второй не отломит полоску шириной 1; первый тут же отламывает от нее дольку 1×1 и выигрывает.

При публикации задачи мы по недоразумению не поместили рядом с условием рисунок, изображающий шоколадку из 5×10 долек; поэтому строго говоря, нужно рассмотреть еще случай шоколадки 2×25 (хотя, по-видимому, в жизни таких не бывает). В варианте б) игры «симметричная» стратегия для шоколадки $2 \times n$ не годится — отламывать полоску шириной 1 нельзя (это немедленно ведет к проигрышу), так что шоколадку можно ломать только «поперек». Возникает такая игра в «разбиение». На доске написано вначале число n; затем при каждом ходе одно из чисел стирается и пишутся некоторые два натуральных числа, в сумме дающих стертое. Проигрывает тот, кто вынужден написать 1 (то есть проигрышная позиция — это набор чисел 2 и 3). Вопрос о том, кто выигрывает в подобных играх, оказывается далеко не простым; об интересной теории, позволяющей найти ответ без большого перебора, будет рассказано в одном из номеров

«Кванта» в будущем году. Пока сообщим лишь ответ: при $n=25$ выигрывает начинающий (один из правильных первых ходов: $25=13+12$).

Ответ для нечетного mn в общем случае нам неизвестен ни для варианта а), ни для варианта б) игры.

С. В. Фомин, И. Б. Васильев

M1035. *На отрезке [0; 1] по очереди отмечаются точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для каждой точки x_k ($k=1, \ldots, n$) измеряется расстояние d_k от нее до ближайшей к ней из поставленных ранее точек. Докажите, что $d_1+d_2+\ldots+d_n\leqslant 1+\frac{\log_2 n}{2}$.*

Покажем сначала, что любой набор точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ на отрезке [0; 1] можно, не уменьшая суммы

$$s=d_1+d_2+\ldots+d_n,$$

преобразовать в набор, *две первые точки которого — 0 и 1, а каждая следующая — середина одного из отрезков, на которые предыдущие точки разбивают* [0; 1]. Ясно, что можно ограничиться наборами различных точек (если точка x_i совпала с одной из предыдущих, ее можно просто вычеркнуть — $d_i=0$ — и добавить новую точку в конце). Но нам будет удобно допустить совпадения.

Пусть x_i — самая левая, x_k — самая правая точка набора. Очевидно, s не уменьшится, если заменить x_i на 0, а x_k — на 1. Кроме того, при $i\geqslant 1$ можно поменять $x_i=0$ и x_{i-1} друг с другом местами — при этом сумма $d_{i-1}+d_i$ может только возрасти (рис. 1), а остальные слагаемые суммы s не изменятся. Поэтому впредь можно считать, что $x_0=0$, а $x_1=1$. Будем «улучшать» набор $x_0, \ldots, x_n$ дальше. Рассмотрим точку x_2. Если $x_2=x_0$ или $x_2=x_1$, пропустим ее и перейдем к x_3. Пусть теперь $x_2=x$, $0<x<1$. Будем двигать точку $x_2=x$ по отрезку [0; 1] и при этом один из отрезков $[0; x]$ или $[x; 1]$ вместе со всеми попавшими на него точками x_i растягивать, а другой — сжимать (рис. 2). Ясно, что тогда сумма чисел d_i для точек x_i отрезка $[0; x]$ будет изменяться пропорционально x, а для отрезка $[x; 1]$ — пропорционально $1-x$, поэтому общая сумма, как функция x, будет равна

$$s=1+\min(x, 1-x)+lx+r(1-x)$$

($d_1=1$, $d_2=\min(x, 1-x)$, l и r — постоянные). Эта функция линейна на отрезках [0; 1/2] и [1/2; 1] и имеет излом в точке $x=1/2$ (рис. 3), поэтому ее максимум достигается в одной из точек 0, 1/2, 1. Сдвинем x_2 в точку максимума и одновременно соответствующим образом растянем (или сожмем) набор точек x_i на отрезках $[0; x_2]$ и $[x_2; 1]$. Мы получим набор точек, у которого сумма s не меньше первоначальной, а точка x_2 находится либо в середине отрезка $[x_0; x_1]$ ($x_2=1/2$), либо на краю этого отрезка. Если, далее, x_3 не совпадает ни с одной из точек x_0, x_1, x_2, рассмотрим тот из отрезков $[x_0; x_2]$ и $[x_2; x_1]$, на котором лежит x_3. Как и выше, мы можем так изменить набор точек x_i на этом отрезке, чтобы точка x_3 стала его серединой или концом, и при этом сумма s не уменьшилась. Поступая так же со следующими точками, мы придем к набору, в котором $x_0=0$, $x_1=1$, а каждая следующая точка совпадает либо с серединой отрезка, соединяющего две соседние ранее поставленные точки, либо с одной из этих точек. Все точки, совпадающие с предыдущими, можно вычеркнуть, после чего останется набор из k точек ($k\leqslant n$), удовлетворяющий сформулированному в начале решения условию.

Для такого набора точек $d_1=1$, $d_2=1/2$, $d_3=1/4$, $d_4=1/4$ или 1/8 при $i\geqslant 2$ каждое число d_i равно 2^{-m} с некоторым натуральным m, причем чисел, равных 2^{-m}, имеется не более 2^{m-1}. Ясно, что наибольшее значение сумма первых n таких чисел принимает при

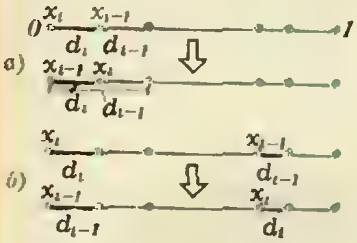


Рис. 1.

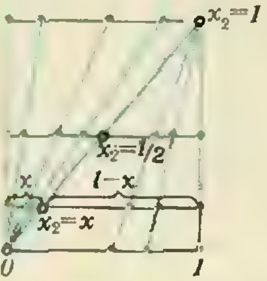


Рис. 2. Преобразование набора $x_0, x_1, \ldots, x_n$ при сдвиге точки x_2: каждому значению x_2, $0\leqslant x_2\leqslant 1$, отвечает горизонтальный отрезок, на пересечении которого с синими линиями расположены точки x_i.

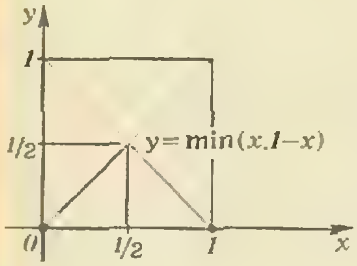


Рис. 3.

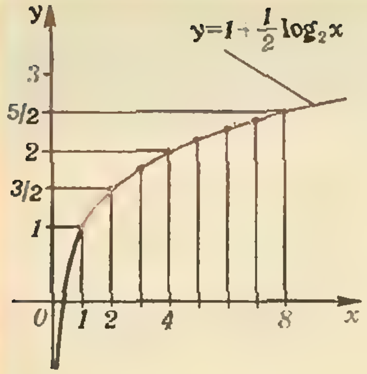


Рис. 4. Красные точки — значения s (n).

$$d_1=1,\ d_2=1/2,\ d_3=d_4=1/4,\ d_5=\ldots=d_8=1/8,\ \ldots \quad (1)$$

($d_i=2^{-m}$ при $2^{m-1}<i\leqslant 2^m$), т. е. для последовательности точек

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots \quad (2)$$

(дроби с одинаковыми знаменателями в этой последовательности можно переставлять). Остается оценить сумму $s(n)=d_1+\ldots+d_n$ для последовательности (1). При $n=2^m+k$, $0\leqslant k<2^m$, $m\geqslant 0$,

$$s(n)=1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\ldots+2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m}+\frac{k}{2^{m+1}}=$$

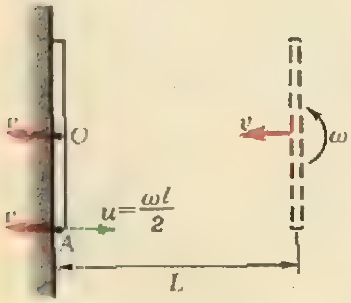
$$=1+\frac{m}{2}+\frac{k}{2^{m+1}},$$

т. е. $s(n)=1+(\log_2 n)/2$ при $n=2^m$, а на участках от 2^m до 2^{m+1} функция $s(n)$ меняется линейно. Поскольку $\log_2 x$ — выпуклая функция, $s(n)\leqslant 1+(\log_2 n)/2$ при всех натуральных n (рис. 4).

Интересно, что оптимальное расположение точек (2) дается «жадным» алгоритмом (это вполне официальный термин): на каждом шагу достаточно обеспечивать максимум очередного слагаемого, не заботясь о дальнейшем.

В. С. Гринберг

Ф1043. *По гладкой горизонтальной поверхности, вращаясь, скользит со скоростью $v=10$ см/с палочка длиной $l=10$ см. При какой угловой скорости вращения палочка ударится о стену (см. рисунок) плашмя, если на расстоянии $L=50$ см от стены палочка была параллельна стене?*



Время, за которое центр палочки пройдет расстояние L до стены, —

$$\tau=\frac{L}{v}=5\ \text{с}.$$

Чтобы палочка ударилась о стену плашмя, необходимо, чтобы за это время она совершила целое число полуоборотов вокруг оси вращения. Следовательно,

$$\omega_n\tau=n\pi,\ \text{где}\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

откуда

$$\omega_n=n\frac{\pi}{\tau}. \quad (*)$$

Но не все полученные значения ω будут являться ответом в задаче. При достаточно больших ω палочка при движении «зацепится» одним из своих концов за стену, не успев удариться об нее плашмя. Для того чтобы найти условие, которому удовлетворяют искомые значения ω, заметим, что во время удара палочки скорость ее конца A (см. рисунок) не может быть направлена от стены (в противном случае в предшествующие моменты времени точка A «находилась» в стене, что невозможно). Скорость точки A складывается из скорости движения центра палочки и линейной скорости вращения палочки:

$$v_A=u-v=\frac{\omega l}{2}-v>0.$$

Отсюда получаем условие для ω:

$$\omega<\frac{2v}{l}=2\ \text{с}^{-1}.$$

Сопоставляя это условие с формулой (*), мы увидим, что подходящими значениями ω_n являются лишь значения

$$\omega_1=0{,}63\ \text{с}^{-1},\ \omega_2=1{,}26\ \text{с}^{-1},\ \omega_3=1{,}89\ \text{с}^{-1}.$$

И. Ю. Потеряйко

Ф1044. *Парашютист массой $m = 90$ кг совершает затяжной прыжок. Перед раскрытием парашюта его скорость $v_0 = 60$ м/с, после раскрытия парашюта установившаяся скорость $v = 6$ м/с. Каково было бы максимальное натяжение строп парашюта, если бы он раскрывался мгновенно? Считать, что сила сопротивления воздуха движущемуся парашюту пропорциональна квадрату скорости. Массу парашюта и строп считать малой по сравнению с массой парашютиста.*

При раскрытии парашюта установившаяся скорость парашютиста (когда сумма всех действующих на него сил равна нулю) — 6 м/с. При этом сила сопротивления воздуха $F_с$ равна силе натяжения строп T_a, которая, в свою очередь, равна силе тяжести mg, т. е.

$$F_с = mg.$$

В первый момент после раскрытия парашюта сила сопротивления $F_с$ в $(60/6)^2 = 100$ раз больше. Таким образом, сила сопротивления становится равной $100mg$. Такова же и сила натяжения строп:

$$T = 100mg = 80\,000 \text{ Н}.$$

Примечание. При такой силе T парашютист приобрел бы ускорение $a = \frac{1}{m}(T - mg) = 99g$, т. е. перегрузка a/g была бы неприемлемо большой. В действительности купол раскрывается не мгновенно, и натяжение строп не бывает столь громадным. Реальные значения перегрузок a/g никогда не превышают 6—7. Поэтому при расчете прочности строп можно считать, что всегда $T \ll 100\,mg$.

И. Ф. Гинзбург

■

Ф1045. *В Арктике встретились два полярника. Они были одеты в одинаковые с виду комбинезоны, но на самом деле один из комбинезонов был теплее. Когда померили температуру на поверхности комбинезонов, на одном она оказалась выше, чем на другом. Какой из комбинезонов теплее? (Комбинезоны обычные, без подогрева.)*

Температура на внутренней поверхности комбинезонов одинакова — она равна температуре человеческого тела. Поток тепла через комбинезон тоже примерно одинаков (если только не предполагать, что один из полярников занимается тяжелой физической работой, а другой в это время бьет баклуши). Значит, материал того комбинезона, температура поверхности которого ниже, имеет более низкую теплопроводность, а именно такую одежду мы называем теплой. Предельный случай данной задачи описывает человека в тонкой рубашке — температура ее поверхности лишь немного отличается от нормальных 36 градусов (пока, конечно, человек не очень замерз).

И. И. Мазин

■

Ф1047.*) *Наблюдатель пускает «солнечный зайчик» при помощи маленького зеркальца, стоя перед большим зеркалом, в котором он видит свое изображение. Что произойдет, если наблюдатель направит «зайчик» на изображение зеркальца в зеркале?*

«Зайчик», который наблюдатель может увидеть в большом зеркале, это изображение того «зайчика», который образовался на «экране», стоящем перед большим зеркалом. Экраном может быть сам наблюдатель, стена, которую он видит в зеркале, и т. п. В экране есть «дырка» — это маленькое зеркальце: если прямые солнечные лучи, отразившись сначала от маленького зеркальца, а затем от большого, вновь попадут на маленькое, то «зайчика» не будет. Но при таком ходе лучи после первого отражения от маленького зеркальца идут перпендикулярно плоскости большого зеркала и, значит, попадают на изображение маленького зеркальца в большом зеркале.

Следовательно, если наблюдатель направит «солнечный зайчик» на изображение зеркальца, то он нигде не увидит изображения «зайчика».

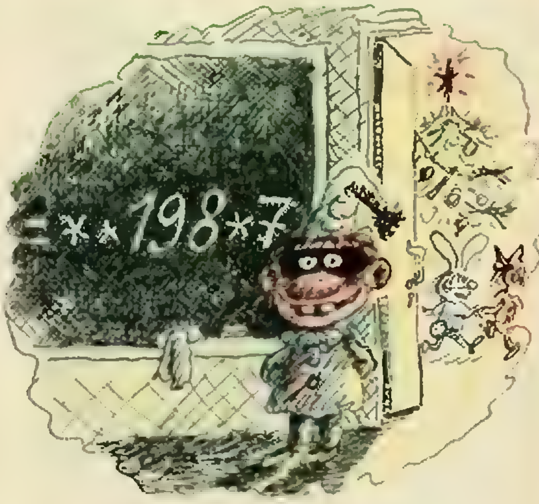
С. С. Кротов

---

*) Решению задачи Ф1046 будет посвящена заметка в одном из следующих номеров журнала.

„Квант" для младших школьников.

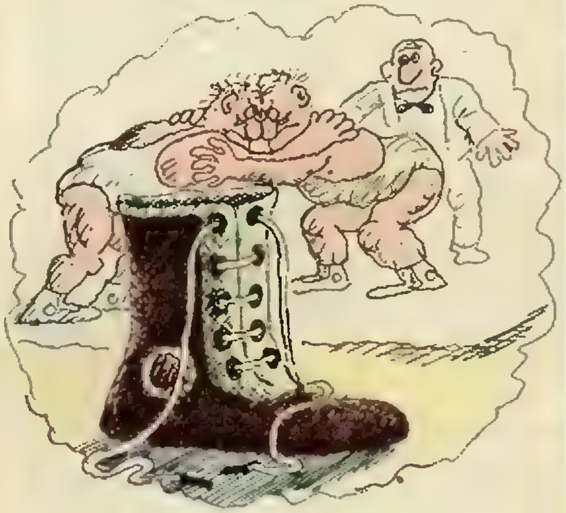
Задачи



1. Дядя Алеша вдвое старше меня, а цифры числа, выражающего мой возраст, равны сумме и разности цифр его возраста. Сколько мне лет?

2. Двери в салоне электрички движутся на роликах по направляющим, расположенным не горизонтально, а наклонно. Почему?

3. Во время новогоднего карнавала Антон забежал в свой класс и увидел оставшийся на доске пример на возведение числа в пятую степень. Он стер три цифры у результата и получил * * 198 * 7. Какое число возводилось в пятую степень?



4. Зашнуровать спортивные туфли так, как изображено на рисунке, можно многими способами за счет различий в шнуровке изнутри. А сколько таких способов?

5. Однажды на лестнице я нашел странную тетрадь. В ней было написано сто следующих утверждений:

«В этой тетради ровно
одно неверное утверждение».
«В этой тетради ровно
два неверных утверждения».
. . . .
«В этой тетради ровно
сто неверных утверждений».

Какое из этих утверждений верное?

Эти задачи нам предложили *А. К. Толпыго, С. В. Дворянинов, И. П. Нагель, Н. И. Зильберберг, А. П. Савин.*

ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ

Кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН

О ремесле, искусстве, спорте и науке

Те, кто интересовался шахматами, знают о давнем споре: что же такое шахматы — спорт, искусство или наука? По этому поводу написано много статей и книг, в которых сталкиваются различные точки зрения на эту увлекательную игру.

О математике вроде бы не поспоришь подобным образом. Это — наука! Даже «наука всех наук», как утверждают многие авторитеты. Но давайте немного подумаем.

Чему вы учитесь в школе на уроках математики? Составлять и решать уравнения, обращаться со степенями, логарифмами, производными и т. п. А чему учат, скажем, на курсах кройки и шитья? Кроить и шить платья, обращаться со швейными машинами, материалами и инструментами и т. п. Тут учат ремеслу, и на уроках математики учат ремеслу, умению проводить математические выкладки, что является составной частью подготовки технически образованного человека.

Ремеслу принято противопоставлять искусство. Заметим, что в Древней Греции математика относилась к числу искусств, наряду с музыкой, живописью и архитектурой (технику счета, взвешивания, измерения к математике не относили). И это было естественно, поскольку рассматривавшиеся задачи решались каждая отдельно, своим методом. Отношение к математике как к искусству сохранилось и в средние века. Тогда наряду с рыцарскими турнирами, состязаниями поэтов и трубадуров проводились и турниры математиков, где они демонстрировали свое искусство в решении задач.

Стоп, стоп! А где же наука математика? Какова ее роль? Математики открывают новые связи между математическими объектами. В результате этой работы находятся общие методы для решения различных классов задач. И эти задачи получают «стандартные» методы решения, переходя из разряда «творческих» задач в разряд «технических», т. е. требующих для своего решения применения уже известных методов.

Конечно, я не утверждаю, что обучение математике в школе и применение полученных знаний на практике полностью лишено элементов творчества. Наоборот, и ремесленник может создать произведение искусства, по-новому осмыслив производимые им изделия; и школьник, решая «стандартную» задачу в школе, может найти новый, красивый способ ее решения. Все сказанное имело целью подчеркнуть следующее: задачи делятся на те, для которых уже созданы специальные методы решения, и те, для которых таких методов нет. К последним относятся в большинстве своем задачи на разрезание. Действительно, сравним две задачи.

Первая задача — *решить уравнение* *)

$$1+\cfrac{2}{1+\cfrac{32}{1+\cfrac{1024}{1+\cfrac{32}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+x}}}}}}}}}}=1987.$$

Выглядит страшновато, не правда ли? По поводу таких уравнений даже существует старый школьный анекдот:

Учитель вызывает Петю к доске (на которой написано похожее уравнение) и говорит: «Найди икс!». Петя долго смотрит на доску, наконец, тычет в доску пальцем и радостно восклицает: «Вот он!».

Хотя здесь и не сразу разберешь, где же икс, но, последовательно упрощая выражение слева, шаг за шагом избавляясь от многоэтажности

---

*) Это уравнение прислал в редакцию наш читатель из Стерлитамака *А. Сливак*.

по известным правилам, мы приведем это уравнение к виду $x = -2$.

А вот другая задача: *как разрезать правильный треугольник на четыре части, из которых можно было бы сложить равновеликий ему квадрат?* Тут наши знания оказываются почти бесполезными.

Теперь собственно о разрезаниях

Решение задачи о разрезании равностороннего треугольника дано на рисунке 1, хотя, если вы пробовали найти его самостоятельно, у вас могло возникнуть сомнение в возможности такого разрезания даже на большее число кусков. Но еще в начале прошлого века венгерский математик Ф. Больяи и австрийский любитель математики П. Гервин почти одновременно доказали, что *любые два равновеликих многоугольника можно разрезать на попарно одинаковые части.*

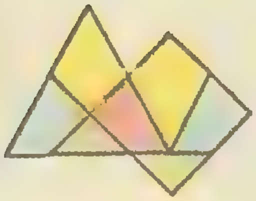


Рис. 1.

Любопытно, но для этого достаточно доказать, что любой многоугольник можно разрезать на части, из которых можно сложить равновеликий ему квадрат. Действительно, пусть мы можем разрезать каждый из двух равновеликих многоугольников на части, из которых можно сложить равновеликие им (и, следовательно, одинаковые) квадраты. Нанесем на одном таком квадрате границы уложенных на нем кусков первого многоугольника, а потом — границы кусков второго многоугольника (например, как на рисунке 2). Разрезав квадрат по всем полученным линиям, из образовавшихся кусков можно будет сложить как первый, так и второй многоугольник.

Превращения параллелограмма и прямоугольника в квадрат, изображенные на рисунке 2, очень полезны как при конкретных разрезаниях, так и при доказательстве теоремы Больяи—Гервина, о которой мы говорили.

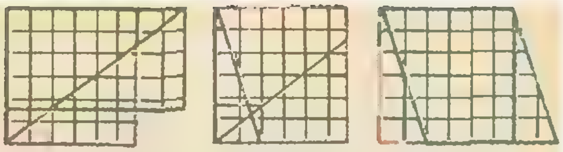


Рис. 2.

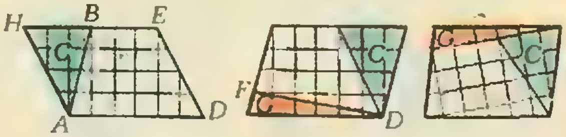


Рис. 3.

На рисунке 3 показано еще одно полезное преобразование параллелограмма в другой равновеликий ему параллелограмм. Вначале мы проводим разрез AB, равный по длине стороне второго параллелограмма, а потом прикладываем часть C к противоположной стороне DE. У преобразованного таким образом параллелограмма сторона AB и высота, опущенная на AB, имеют уже нужную нам длину, однако углы могут еще не совпадать с углами требуемого параллелограмма. Поэтому мы проводим второй разрез DF (равный другой стороне искомого параллелограмма) и прикладываем часть G к противоположной, верхней стороне. Конечно, при этом у полученного параллелограмма ни одна из сторон и ни один из углов не совпадают со сторонами и углами исходного параллелограмма.

А на рисунке 4 показан «ступенчатый» способ разрезания, позволяющий некоторые прямоугольники «перекраивать» в квадраты с помощью разрезания всего на две части. Попробуйте сами выяснить, для каких прямоугольников это возможно.

Все эти приемы сродни приемам экономного раскроя ткани, которым обучают на уже упоминавшихся курсах кройки и шитья. Правда, там задача обратная — квадратный или прямоугольный кусок ткани следует разрезать так, чтобы в результате сшивания полученных кусков образовалось заданное изделие: рубашка, брюки или кепка. Там допускаются

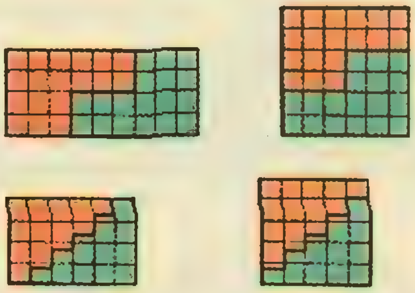


Рис. 4.

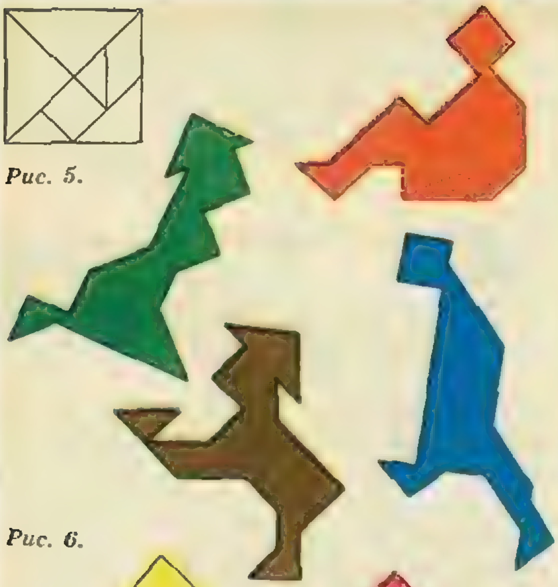


Рис. 5.

Рис. 6.

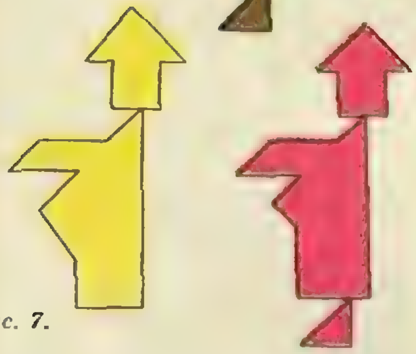


Рис. 7.

отходы, но, естественно, хочется, чтобы их было меньше. Неудивительно, что многие математики, в частности, замечательный русский математик Панфнутий Львович Чебышев, занимались задачами оптимального раскроя ткани.

Говоря о превращениях квадратного куска ткани в брюки, рубашку или чехол для автомобиля, нельзя не упомянуть о древней игре «Танграм», возникшей 4000 лет назад в Китае. Здесь квадрат уже разрезан на 7 частей (рис. 5), и из них нужно сложить заданные фигурки, такие, как, например, на рисунке 6. Сделать это не всегда просто. Посмотрите на рисунок 7. Вы видите два силуэта, сложенных из всех семи танграмов. У одного силуэта есть нога, у другого — нет*). Откуда взялась нога у правой фигуры?

А теперь предлагаем вам попробовать свои силы в задачах на разрезание. Все они формулируются однотипно: «Разрезать данную фигуру на сколько-то частей так, чтобы из них можно было сложить равновеликий ей квадрат».

Указание на количество частей существенно: при отсутствии ограничения на число частей разрезание можно провести стандартными методами, вроде тех, о которым мы говорили, но на большее число кусков.

Если вам удастся уменьшить в какой-либо из задач число частей по сравнению с указанным — присылайте свои решения к нам в редакцию.

Задачи *)

1. **Елочка.** Разрежьте «елочку» на 4 части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

2. **Из двух — один.** Разрежьте квадрат с дыркой двумя прямыми на 4 части так, чтобы из них и второго квадрата можно было сложить новый квадрат.

3. **Из трех — один.** Разрежьте большой квадрат на три части так, чтобы из полученных пяти фигур можно было сложить один квадрат.

4. **Две фигуры.** Из двух фигур, разрезав их, сделайте пять так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

5. **Квадрирование фигуры.** Изображенную фигуру разрежьте на 4 части, из которых потом можно было бы сложить квадрат.

6. **Продырявленный квадрат.** Разрежьте продырявленный квадрат на 8 частей, из которых можно сложить целый квадрат.

7. **Зубчатый квадрат.** Превратите зубчатый квадрат в обыкновенный, разрезав его на 5 частей.

8. **Дырявый зубчатый квадрат.** Разрежьте дырявый зубчатый квадрат на 5 частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

9. **Лесенка.** Превратите «лесенку» в квадрат, разрезав ее на три части.

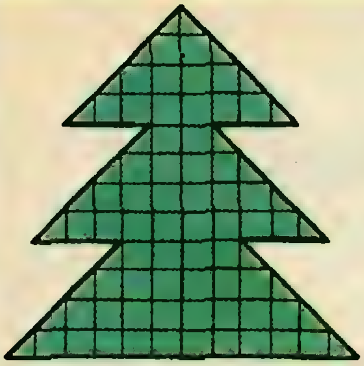
10. **Ступеньки.** Сделайте ступенчатый разрез «ступеньки» на две части, из которых можно сложить квадрат.

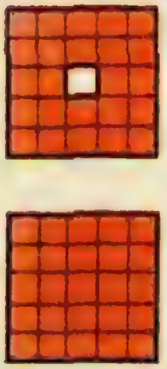
11. **Мальтийский крест.** Разрежьте «мальтийскй крест» на 5 частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

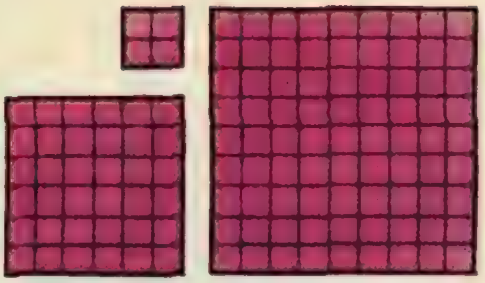
---

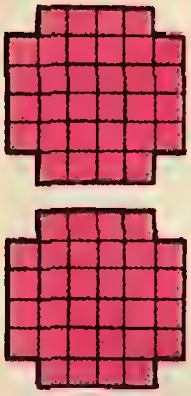
*) Эту задачу мы взяли из сборника Я. И. Перельмана «Веселые задачи» (Начатки знаний, Петроград, 1919).

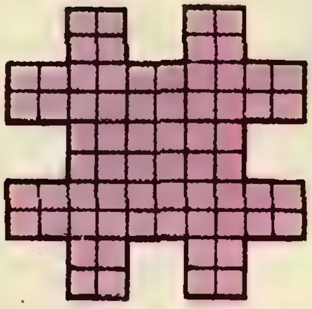
*) Задачу «Елочка» предложил *Н. И. Авилов*, задачу «Из двух — один» — *Н. К. Антонович*, остальные задачи предложил *Л. П. Мочалов*.

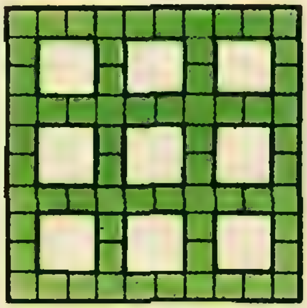

Елочка

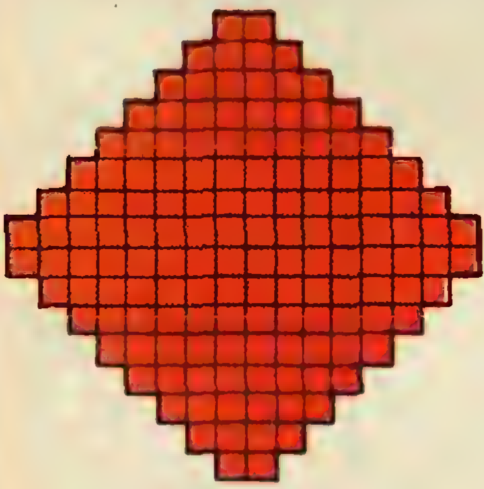

Из двух – один

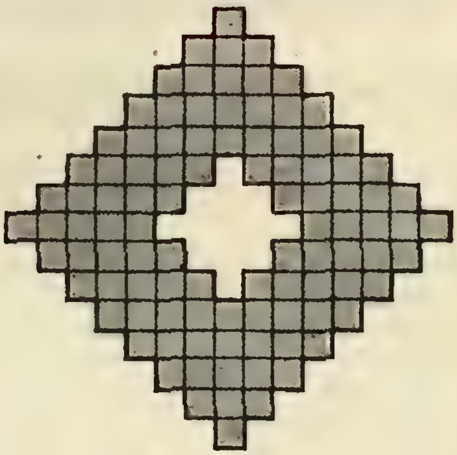

Из трех – один

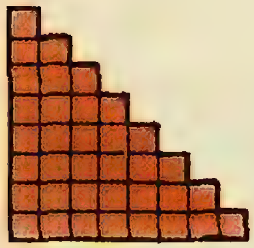

Две фигуры

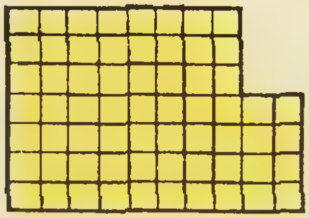

Квадрирование фигуры

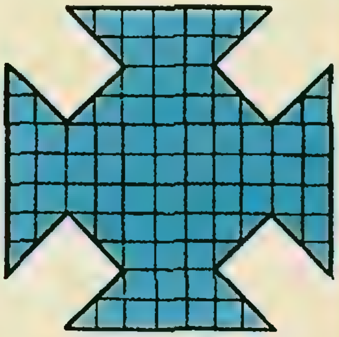

Продырявленный квадрат

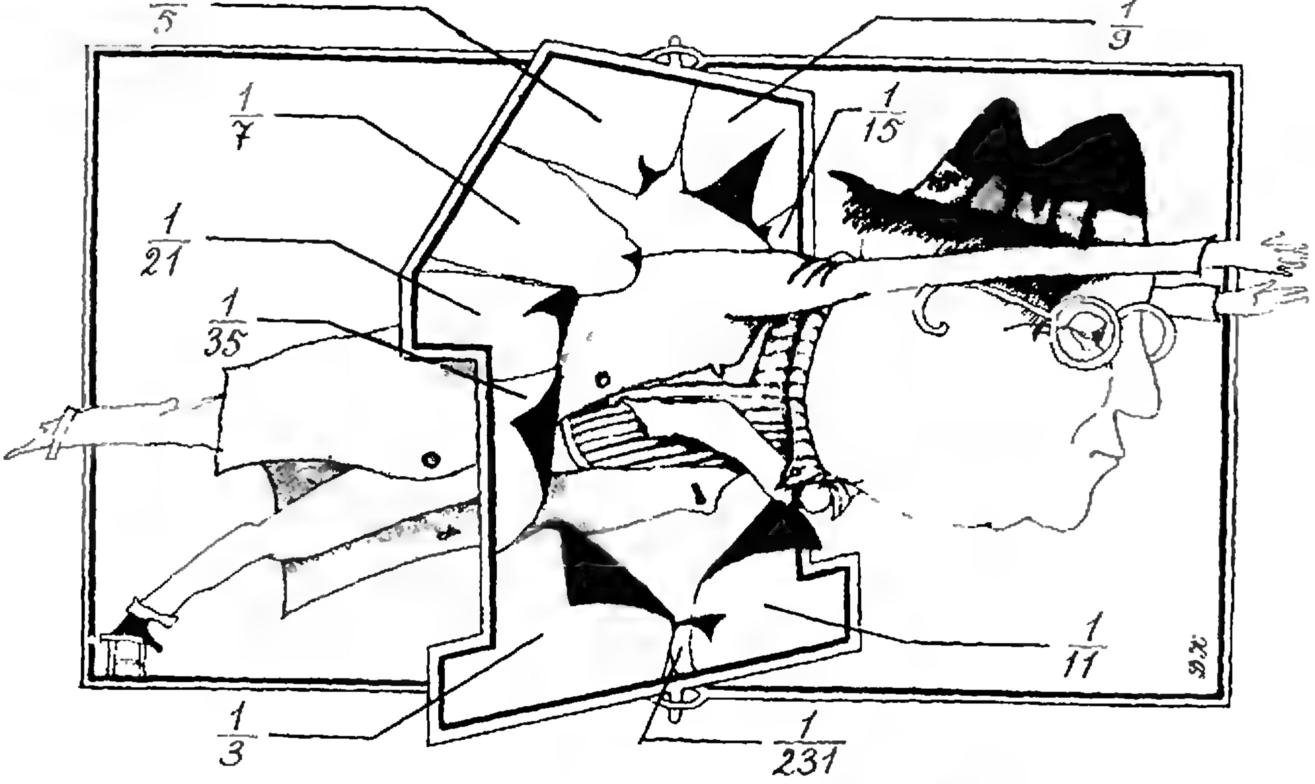

Зубчатый квадрат


Дырявый зубчатый квадрат


Лесенка


Ступеньки


Мальтийский крест



Математический кружок

Разбиение единицы

О. Т. ИЖБОЛДИН, Л. Д. КУРЛЯНДЧИК

Существует много задач, связанных с суммами чисел, обратных натуральным. Неоднократно обращался к этой теме и наш журнал: в прошлом году в «Задачнике «Кванта» были помещены две такие задачи — М989 и М1010 (в «Кванте» № 6 и № 10). Решение первой из них было опубликовано (см. «Квант» № 10 за 1986 г.); решению второй и еще нескольким близким задачам посвящена эта заметка. Напомним формулировку задачи.

Последовательность r_1, r_2, $r_3, \ldots$ *определяется условиями*

$$r_1=2,\ r_{n+1}=r_1r_2\ldots r_n+1,$$

так что $r_2=3$, $r_3=7$, $r_4=43, \ldots$

а) *Докажите, что при любом* n

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}<1.$$

б)* *Пусть* n *натуральных чисел таковы, что сумма их обратных величин меньше* 1. *Докажите, что эта сумма не больше*

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}.\ ^{*)}$$

По существу здесь требуется найти наилучшее приближение единицы снизу суммами дробей вида $1/n$ (кстати, такие числа носят название аликвотных, или египетских, дробей). Эта задача прииадлежит американскому математику Келлогу. В 1915 году профессор Кармайкл, которому Келлог сообщил о ней, привел ее в своей книге «Диофантов анализ». В 1922 году она была решена американским математиком Кертисом. Мы приведем другое, гораздо более короткое решение. (Говоря об истории задачи, упомянем и о том, что она была опубликована под номером 70 в сборнике «400 избранных задач», выпущенном издательством «Мир» в 1977 г., но фактически без решения.)

Последовательность
2, 3, 7, 42, 1807, 3263443, ...

Равенство, определяющее последовательность r_n в условии задачи, можно переписать в виде

$$r_{n+1}=(r_n-1)\,r_n+1$$

---

*) В задаче был и третий пункт — лемма к решению задачи б). Мы приведем его позже.

или

$$\frac{1}{r_{n+1}-1}=\frac{1}{(r_n-1)r_n}=\frac{1}{r_n-1}-\frac{1}{r_n}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}=$$

$$=\left(\frac{1}{r_1-1}-\frac{1}{r_2-1}\right)+\left(\frac{1}{r_2-1}-\frac{1}{r_3-1}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{r_n-1}-\frac{1}{r_{n+1}-1}\right)=1-\frac{1}{r_{n+1}-1}<1$$

(поскольку $r_1-1=1$). Тем самым доказано утверждение а) нашей задачи. Попутно мы доказали, что $1/r_{n+1}$ — наибольшее из чисел, обратных натуральным, которое можно добавить к сумме $1/r_1+\ldots+1/r_n$ так, чтобы она осталась меньше 1 (добавив $1/(r_{n+1}-1)$, мы получили бы уже ровно 1). Таким образом, при построении последовательности $1/r_n$ нужно каждый раз «откусывать наибольший возможный кусок».

Отметим, кстати, что числа r_n появляются и в другой задаче, внешне очень далекой от нашей: «описать все наборы из n натуральных чисел, таких, что произведение любых $n-1$ из них в сумме с единицей делится на оставшееся». Проверьте самостоятельно, что числа $r_1, \ldots, r_n$ удовлетворяют этому условию. Полное решение этой задачи неизвестно; подробности обсуждались в статье А. Гейна «На пути к решению» (Квант, 1978, № 7, с. 9).

Но вернемся к задаче М1010 и объясним,

Почему последовательность $1/r_n$ наилучшая

Пусть сумма $1/a_1+\ldots+1/a_n$, где $a_1, \ldots, a_n$ — натуральные числа, $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$,— наилучшее приближение к единице снизу; существование такого приближения для каждого натурального $n>1$ было доказано в решении задачи М989, в) (см. «Квант» № 10, 1986 г., с. 36). Положим $\alpha_k=1/a_k$ при $k=1, 2, \ldots, n-1$, $\alpha_n=1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{n-1}$. Мы покажем, что набор чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n\geqslant0, \qquad (1)$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1, \qquad (2)$$

$$\alpha_1\ldots\alpha_k\leqslant\alpha_{k+1}+\ldots+\alpha_n \text{ при } k=1, 2, \ldots, n-1. \qquad (3)$$

Это условия леммы, составляющей пункт в) задачи М1010. Согласно этой лемме, которая доказана ниже, число α_n, т. е. погрешность нашего приближения единицы, не меньше $1/(r_n-1)$, причем $\alpha_n=1/(r_n-1)$ только для набора $\alpha_k=1/r_k$, $k=1, \ldots, n-1$. Следовательно, $a_k=r_k$, что эквивалентно утверждению пункта б).

Итак, проверим условия (1)—(3) для $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Условие (2) очевидно; ясно также, что $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_{n-1}$. Покажем, что $\alpha_{n-1}\geqslant\alpha_n$. Поскольку рассматриваемое приближение единицы снизу наилучшее,

$$\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_{n-2}}+\frac{1}{a_{n-1}-1}\geqslant1.$$

Следовательно,

$$\alpha_n=1-\frac{1}{a_1}-\ldots-\frac{1}{a_{n-2}}-\frac{1}{a_{n-1}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{a_{n-1}-1}-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}(a_{n-1}-1)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{a_{n-1}}=\alpha_{n-1}.$$

Остается проверить неравенства (3). Они вытекают из следующих соотношений:

$$\alpha_{k+1}+\ldots+\alpha_n=1-\alpha_1-\ldots-\alpha_k=$$

$$=1-\frac{1}{a_1}-\ldots-\frac{1}{a_k}=\frac{N}{a_1\ldots a_k}=$$

$$=N\cdot\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_k,$$

где N — некоторое натуральное число, и поэтому последнее выражение не меньше $\alpha_1\ldots\alpha_k$.

Доказательство леммы

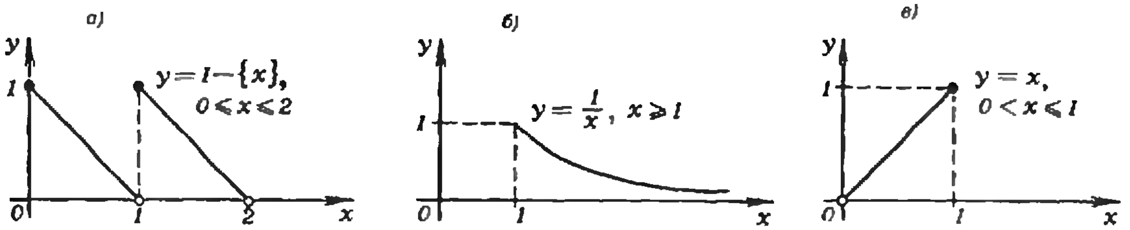
Мы должны доказать, что тот из наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющих условиям (1)—(3), для которого α_n минимально, совпадает с набором $(1/r_1, \ldots, 1/r_{n-1}, 1/(r_n-1))$.

Удобнее будет искать набор с минимальным произведением элементов; мы увидим, что у него будет минимален и последний элемент.

Итак, пусть $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — тот из наборов, удовлетворяющих условиям (1)—(3), для которого произведение $\beta_1\ldots\beta_n$ минимально (вопрос о том, почему такой набор вообще существует, мы обсудим позже). Заметим сразу, что $\beta_n>0$, и следовательно, в силу (2) $\beta_1<1$. (Если $\beta_n=0$, то из неравенства (3) последовательно получим: при $k=n-1$ — что $\beta_n=0$, при $k=n-2$ — что $\beta_{n-2}=0$ и т. д.; но все числа β_i не могут равняться 0, так как они в сумме дают 1.)

Докажем теперь, что *для набора* β *все неравенства* (3) *обращаются в равенства.*

При $n=2$ из (1)—(3) мы сразу получаем, что $\beta_1\geqslant\beta_2\geqslant0$, $\beta_1+\beta_2=1$ и $\beta_1\leqslant\beta_2$, т. е. $\beta_1=\beta_2=1/2$. Пусть $n>2$.



Примеры функций, которые не принимают своего наименьшего значения на заданном промежутке: а) $y=1-\{x\}$ ($\{x\}$ — дробная часть числа x), $0\leqslant x\leqslant 2$ — эта функция не непрерывна; б) $y=1/x$, $x\geqslant 1$ — область определения не ограничена; в) $y=x$, $0<x\leqslant 1$ — область определения не замкнута.

Предположим, что среди неравенств (3) есть строгие. Тогда можно найти такие i и j, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$, что они строгие при $i\leqslant k<j$, а при $k=i-1$ и при $k=j$ обращаются в равенство (естественно, о случаях $k=i-1$ и $k=j$ надо говорить только при $i>1$ и $j<n$ соответственно). Покажем, что можно «пошевелить» числа β_i и β_j так, чтобы условия (1)—(3) сохранились, произведение $\beta_1\ldots\beta_n$ уменьшилось. Поскольку это противоречит выбору β, предположение будет опровергнуто.

Заменим β_i на $\beta_i'=\beta_i+\varepsilon$, а β_j — на $\beta_j'=\beta_j-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Произведение элементов нового набора β' будет меньше, чем у β, так как

$$\beta_i'\beta_j'=\beta_i\beta_j-\varepsilon(\beta_i-\beta_j)-\varepsilon^2<\beta_i\beta_j.$$

Ясно, что набор β' удовлетворяет условию (2). Очевидно также сохранение неравенств (3) при $k<i$ и $k\geqslant j$ для любого $\varepsilon>0$. При $i\leqslant k<j$ левая часть каждого из этих неравенств увеличивается в $(\beta_i+\varepsilon)/\beta_i$ раз, а правая уменьшается на ε и, поскольку для набора β они были строгими, при достаточном малом β они не нарушаются.

Из неравенства (2) при нашей замене могут нарушаться только неравенства $\beta_{i-1}\geqslant\beta_i$ и $\beta_j\geqslant\beta_{j+1}$ (или $\beta_n\geqslant 0$ при $j=n$), но в действительности при достаточном малом ε этого не случится, так как все эти неравенства строгие. (Например,

$$\beta_{i-1}\geqslant\beta_1\cdot\ldots\cdot\beta_{i-1}=\beta_i+\ldots+\beta_n\geqslant\beta_i,$$

причем при $n>2$ хотя бы одно из двух неравенств здесь строгое, потому что $\beta_1<1$, а $\beta_n>0$. Аналогично, $\beta_j>\beta_{j+1}$ при $j<n$.)

Подведем итоги. Выяснилось, что последовательность чисел $\beta_1, \ldots, \beta_n$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned}1&=\beta_1+\ldots+\beta_n,\\ \beta_1&=\beta_2+\ldots+\beta_n,\\ \beta_1\beta_2&=\beta_3+\ldots+\beta_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \beta_1\ldots\beta_n&=\beta_n.\end{aligned}$$

Вычитая из первого уравнения второе, из второго — третье и т. д., получим систему из $n-1$ уравнений

$$\begin{aligned}1-\beta_1&=\beta_1,\\ \beta_1(1-\beta_2)&=\beta_2,\\ \beta_1\beta_2(1-\beta_3)&=\beta_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-2}(1-\beta_{n-1})&=\beta_{n-1}\end{aligned}$$

Ее первое уравнение дает $\beta_1=1/2$. Далее, мы можем переписать k-е уравнение ($2\leqslant k\leqslant n-1$) в виде

$$\frac{1}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}}=\frac{1-\beta_k}{\beta_k}$$

или

$$\frac{1}{\beta_k}=\frac{1}{\beta_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\beta_{k-1}}+1.$$

Поскольку $1/\beta_1=2=r_1$, отсюда следует, что $1/\beta_k=r_k$ при всех $k=1, \ldots, n-1$, а $1/\beta_n=1/\beta_1\cdot\ldots\cdot 1/\beta_{n-1}=r_n-1$.

Остается показать, что для любого набора $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющего условиям (1)—(3) и не совпадающего с β, $\alpha_n>\beta_n$. Имеем:

$$\alpha_n^2\geqslant\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n\geqslant\beta_1\ldots\beta_{n-1}=\beta_n^2$$

(первое неравенство следует из условия (3) для α при $k=n-1$, второе — из выбора последовательности β). Таким образом, $\alpha_n\geqslant\beta_n$. Если $\alpha_n=\beta_n$, то $\alpha_1\ldots\alpha_n=\beta_1\ldots\beta_n$. Но тогда набор α удовлетворяет условиям (1)—(3) и имеет минимальное произведение элементов; мы видели, что в этом случае он совпадает с β.

Надо признаться, что до сих пор наши рассуждения были в некотором роде построены на песке, а точнее — на недоказанном предположении о существовании набора с наименьшим произведением элементов. На более формальном языке оно звучит так: функция $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=\alpha_1\ldots\alpha_n$ на множестве A наборов $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющих условиям (1)—(3), принимает наименьшее значение. На рисунке показаны типичные ситуации, когда это утверждение не имеет места (для функций одной переменной). В курсах математического анализа доказывается, что *непрерывная функция (одной или нескольких переменных), определенная на ограниченном и замкнутом множестве, принимает на нем наименьшее значение.*

Поясним эту теорему на примере нашей функции f и множества A. Во-первых, ясно, что функция f **непрерывна**, т. е. ее значения для двух наборов, соответственные элементы которых достаточно мало отличаются друг от друга, будут сколь угодно близки. Во-вторых, множество A **ограничено**, т. е. элементы α_i любого входящего в него набора по абсолютной величине не превосходят некоторого фиксированного числа; у нас $|\alpha_i| \leqslant 1$. Наконец, множество A **замкнуто**; это означает, что если произвольная последовательность наборов из множества A сходится к $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ (т. е. первые элементы этих наборов образуют последовательность, сходящуюся к α_1, вторые — к α_2 и т. д.), то и набор α принадлежит множеству A. Замкнутость множества A обеспечивается тем, что все неравенства в условиях (1)—(3) нестрогие.

Таким образом, теорема о достижении наименьшего значения подводит прочный фундамент под возведенную нами конструкцию и тем самым завершает решение задачи М1010. Довольно необычно, что в такой целочисленной задаче пришлось применить методы анализа. Впрочем, первоначальное решение, упомянутое в начале статьи, было чисто арифметическим.

В знаменателе — арифметическая прогрессия

Обсудим еще две задачи о представлениях целых чисел суммами чисел, обратных натуральным.

Задача 1. *Может ли целое число быть представлено в виде суммы $1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n$, где натуральные числа $a_1, a_2, .., a_n$ образуют арифметическую прогрессию с ненулевой разностью?*

Начнем с наиболее простого случая, когда разность прогрессии равна 1. Итак, может ли число

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + ... + \frac{1}{a+n}$$

быть целым?

Нет, не может! Выберем из знаменателей те, которые делятся на максимальную степень двойки. Все дело в том, что если сумма целая, их по крайней мере два. (Иначе после приведения суммы к наименьшему общему знаменателю получится дробь с нечетным числителем и четным знаменателем.) Пусть $p \cdot 2^k$ и $q \cdot 2^k$ — два таких знаменателя, где $p < q$, и p, q — нечетны. Тогда в сумму входит дробь со знаменателем $(p+1)2^k$, который делится на большую, чем 2^k, степень двойки. Противоречие.

Одновременно решена и известная задача о том, что сумма

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

не может быть целой.

Совершенно так же доказывается, что рассматриваемая в задаче сумма не может быть целой, если разность d прогрессии $a_1, ..., a_n$ нечетна — между двумя знаменателями $p \cdot 2^k$ и $q \cdot 2^k$ с максимальным k вставляется $(p+d) \cdot 2^k$.

Пусть теперь разность прогрессии равна 2. Случай, когда первый член a_1 четен, сразу сводится к случаю прогрессии $a_1/2, a_2/2, ..., a_n/2$ с разностью 1. Если же a_1 — нечетное число, то в духе проведенных выше рассуждений можно доказать, что среди знаменателей есть ровно два, $p \cdot 3^k$ и $(p+2) \cdot 3^k$, делящихся на максимальную степень тройки 3^k. Значит, все знаменатели заключены между числами $(p-2) \cdot 3^k$ и $(p+4) \cdot 3^k$. Это позволяет оценить нашу сумму и показать, что она меньше 1. Так что и при $d=2$ она не может быть целой. Возникает желание перейти от разности 2 к произвольной четной разности так же, как мы перешли от разности 1 к произвольной нечетной. К сожалению, это принципиально невозможно, ведь в прогрессии может вовсе не быть чисел, кратных 3. Не помогает и замена степеней 3 на степени 5 или любого другого фиксированного числа. Тем не менее ответ на задачу 1 отрицательный. Быть может, наши читатели найдут достаточно простое доказательство этого; известное нам слишком сложно, чтобы привести его здесь.

Задача 2. *Из любой ли арифметической прогрессии натуральных чисел можно выбрать несколько различных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ таких, что $1/a_1 + ... + 1/a_n = 1$?*

Ответ здесь утвердительный, но, как и в задаче 1, мы ограничимся только разбором нескольких примеров.

Проще всего придумать нужное разложение единицы для прогрессии четных чисел 2, 4, 6... ; например:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}.$$

Несколько сложнее обстоит дело с нечетными числами: одно из возможных разложений —

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{35}+\frac{1}{231}.$$

И еще одна конструкция более общего характера — для произвольной прогрессии с разностью 1: a, $a+1$, $a+2$, ... Пусть k — такое натуральное число, что $2^k>a$. Если записать числители дробей в правой части равенства

$$1=\frac{1}{2^k}+\frac{3}{3\cdot 2^k}+\ldots+\frac{2^{k+1}-1}{(2^{k+1}-1)2^k}$$

в виде сумм различных степеней двоек: $2^{l+1}-1=1+2+\ldots+2^l$, мы получим представление единицы суммой дробей вида $2^s/(2m+1)2^k$, где $s<k$. После сокращения на 2^s они примут вид $1/n$.

Задачи

3. Всякое ли положительное рациональное число представимо в виде суммы различных чисел, обратных натуральным?

4. а) На какое число различных слагаемых, обратных натуральным, можно разбить единицу?

б) Докажите, что это число не меньше 9, если знаменатели в разбиении нечетны.

5. Приведите пример разбиения из задачи 4, в котором все знаменатели кратны 3.

Решения следующих задач авторам неизвестны.

6. Назовем множество натуральных чисел массивным, если единица представляется в виде суммы нескольких различных чисел, обратных числам этого множества. Докажите, что при любом разбиении множества всех натуральных чисел а) на 2, б) на n, где $n>2$, множеств хотя бы одно из них массивно.

7. Пусть $1/a_1+1/a_2+\ldots+1/a_n=1$ $(n>3)$, где $a_1<a_2<\ldots<a_n$ — натуральные числа. Докажите, что $a_n>2n$.

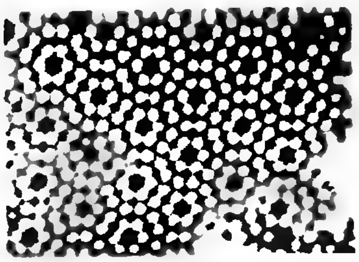
Массу других интересных задач на эту тему можно найти в книге P. Erdős, R. L. Graham. Old and new problems and results in combinatorial number theory, Imprimerie Kundig, Genéve, 1980.

Туннельный микроскоп

(Начало см. на с. 19)

Пример такой карты поверхности кристалла кремния, полученной американскими учеными, приводится на рисунке справа. Отчетливо видны положения отдельных атомов кремния в периодической кристаллической структуре.

Сканирующий туннельный микроскоп построен и в нашей стране. Он отличается огромной, в атомном масштабе, областью сканирования — 10×10 мкм и возможностью работы в жидкой непроводящей среде. Второе важно вот почему. Обычно при экспериментах на туннельном микроскопе исследуемый образец, ради чистоты поверхности, помещается в высокий вакуум. Однако для достижения той же цели может оказаться выгодной и плотная среда. Так, жидкий углеводород, который используется в советском туннельном микроскопе, предохраняет поверхность образца от окисления и других воздействий атмосферы, а на работу микроскопа никак не влияет. Дело в том, что в зазоре «острие — поверхность» большая молекула жидкости поместиться не может, и условия работы туннельного микроскопа те же, что и в хорошем вакууме.

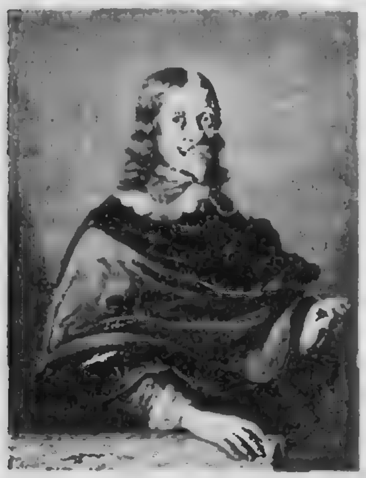


«Топографическая карта» участка поверхности кремния размером 175×115 Å. Светлые места соответствуют положениям отдельных атомов кристаллической решетки.

Сканирующий туннельный микроскоп в настоящее время представляется не только средством исследования поверхности, но и инструментом для воздействия на нее. Предполагается, что острием туннельного микроскопа можно «рисовать» на поверхностном слое структуры микросхем с размерами в сотни и даже десятки атомных. Не исключено, что скоро мы станем свидетелями нового этапа микроминиатюризации электроники. И поможет в этом сканирующий туннельный микроскоп.

А. П. Володин

Наша обложка



Ян Гевелий

1987 год по инициативе ЮНЕСКО (Организация Объединенных Наций по вопросам образования, науки и культуры) провозглашен годом Гевелия. Кто же он и чем заслужил такую высокую честь?

Ян Гевелий — выдающийся польский астроном XVII века. Он родился в Гданьске 28 января 1611 года и умер в том же городе 28 января 1687 года, прожив ровно 76 лет. На средства, унаследованные от отца — пивовара, он построил и оборудовал обсерваторию, которая долгое время была лучшей в Европе. Гевелий обладал необычайно острым зрением и превосходной зрительной памятью. И хотя в его обсерватории находились сделанные им телескопы, большинство наиболее точных наблюдений положения звезд он выполнил, не прибегая к их помощи.

Первым научным трудом Гевелия, изданным в 1647 году, была знаменитая «Селенография», в которой содержалось детальное описание видимой части поверхности Луны. Гевелий отпечатал эту книгу в своей типографии, изготовив для нее 133 искусных гравюры, из которых 60 изображали разные участки лунной поверхности и вид Луны в различных ее фазах. Одна из этих карт воспроизведена на первой странице обложки нашего журнала.

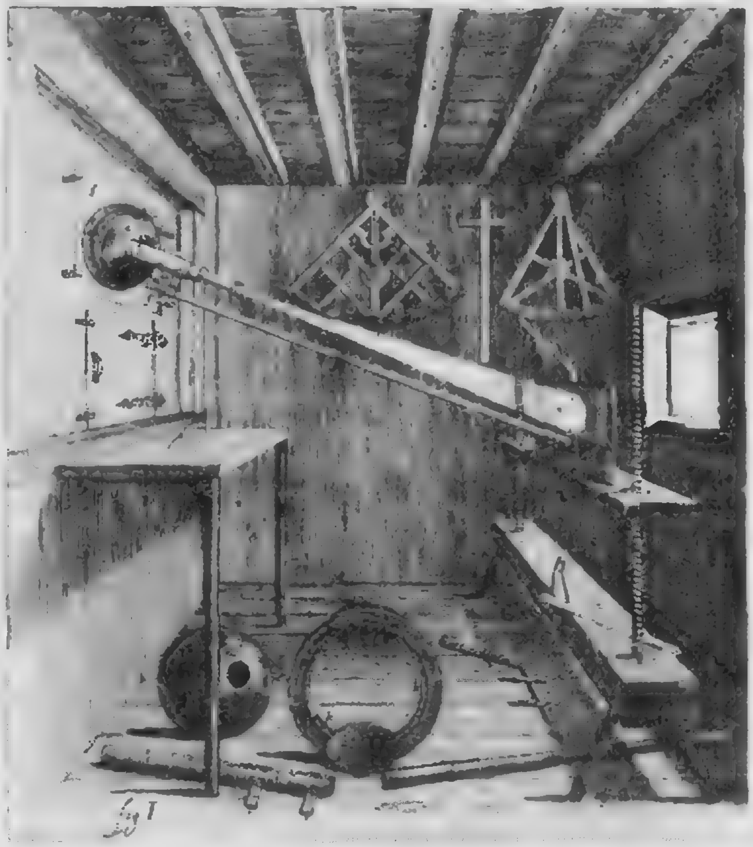
Описывая Луну, Гевелий правильно объясняет детали рельефа ее поверхности, отмечает долины и горные цепи, которые отбрасывают изменяющиеся со временем тени. Ему удастся даже правильно оценить высоты лунных гор. До сих пор сохранились названия многих лунных хребтов — Альпы, Алтай, Кавказ, Карпаты, Апеннины, предложенные Гевелием. «Селенография» оставалась непревзойденной в течение целого столетия.

Любопытно отметить, что рукописный перевод «Селенографии» на русский язык был выполнен по заказу царя Алексея Михайловича и находился в его личной библиотеке. Именно по нему и знакомился с астрономией его сын, царевич Петр, будущий российский император. Экземпляр этот сохранился и находится в библиотеке Литовской академии наук в Вильнюсе.

Гевелию принадлежит так много астрономических исследований, что трудно поверить в то, что все они сделаны одним человеком. Он правильно оценил расстояние от Земли до Луны, размеры Луны и ее период вращения, а также период собственного вращения Солнца. Он был одним из первых наблюдателей двойных и переменных звезд, довольно точно определил периоды обращения спутников Юпитера, открытых Галилеем. В изданной им в 1668 году «Кометографии» приведено систематическое описание и история наблюдения всех известных в то время комет, четыре из которых он открыл сам; впервые показано, что некоторые кометы движутся по параболическим орбитам. Составленный им каталог постоянных звезд содержал данные о 1564 звездах, которые видны над горизонтом Гданьска.

Жизнь преподнесла ему суровое испытание — в 1679 году сгорела его обсерватория вместе с находившимися там рукописями, книгами,

(Окончание см. на с. 57)



Прибор Гевелия для картографирования Луны.

Перевертыши

Кандидат физико-математических наук
В. Н. ДУБРОВСКИЙ

Раскрывать секрет решения головоломки — занятие столь же нечестное, как сообщать заядлому болельщику счет ночного футбольного матча перед его телевизионной трансляцией на другой день. Поэтому в нашем рассказе о двух головоломках-«перевертышах», знакомых читателю по обложкам 1-го и 2-го номеров «Кванта» за этот год, вопросов будет больше, чем ответов. Но прежде чем задавать вопросы и отвечать на них, напомним, как эти головоломки устроены.

В одной головоломке 8 одинаково раскрашенных в шесть цветов кубиков размером 1×1×1 стоят вплотную друг к другу в квадратной коробке размером 3×3 (рис. 1). В другой головоломке вместо кубиков берутся 23 одинаковых пирамидки (правильных тетраэдра) с раскрашенными в четыре цвета вершинами (рис. 2,*а*), которые размещаются в коробке, имеющей форму правильного шестиугольника со стороной, в два раза большей ребра пирамидки (рис. 2,*б*). В обеих головоломках одно место пустует — «дырка», что позволяет переставлять элементы (кубики и пирамидки), *перекатывая их через ребро*. Задачи, которые мы будем обсуждать, звучат для двух головоломок по-разному. Пирамидки надо научиться переводить в «правильное», или «начальное», положение, показанное на рисунке 2,*б*, после того, как оно было разрушено произвольными перекатываниями. У кубиков много правильных положений (что это такое — ясно из рисунка 1; проверьте, что имеется 24 правильных положения); требуется одно из них превратить в другое. Но обе эти задачи — частные случаи общей для всех «перестановочных» головоломок задачи: *для любых двух размещений элементов выяснить, переводится ли одно в другое, а если да, то каким образом.*

Кубики

Попробуем придумать операции, которые бы поворачивали кубик, оставляя его на месте,— тогда можно будет повернуть все кубики поочередно. Поставим в коробку только один кубик и прокатим его по квадрату 2×2 вокруг одной из вершин основания *A* (рис. 3). Когда он вернется на место, мы увидим, что он повернулся относительной исходного положения на 120° около диагонали, выходящей из вершины *A*. Точно так же можно катать по квадрату 3 кубика — цепочкой: после четырех ходов дырка вернется на место, а кубики циклически переставятся (рис. 4) — эту операцию, когда перестановка происходит против часовой стрелки вокруг точки *A*, обозначим C_A. Ясно, что операция C_A^3 (троекратно повторенная C_A) возвращает все 3 кубика на исходные места, причем каждый из них поворачивается на 120° вокруг своей диагонали, выходящей из *A* (см. рис. 4). Чтобы повернуть эти же кубики в обратном направлении, нужно выполнить обратную операцию $C_A^{-3} =$

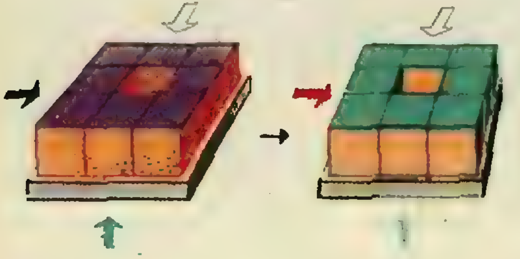
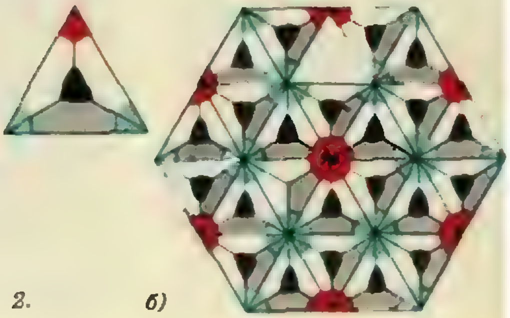


Рис. 1.


а)
Рис. 2. б)

$=(C_A^{-1})^3$, где C_A^{-1} — обход дырки вокруг точки A по часовой стрелке.

Итак, мы можем поворачивать кубики на своих местах, но пока только группами по 3. Теперь уже нетрудно придумать и операции, которые бы поворачивали только один кубик. Для них хватает поля размером 3×2 клетки. Пусть свободная клетка расположена вверху (рис. 5), она принадлежит двум квадратам 2×2 с центрами A и B. Операция C_A не затрагивает два правых кубика, а операция C_B — два левых, поэтому операции $R_1=C_A^3C_B^3C_A^{-3}C_B^{-3}$, $R_2=C_A^{-3}C_B^3\times C_A^3C_B^{-3}$*) и им подобные (см. задачу 1) заведомо оставляют эти 4 крайних кубика неподвижными; пятый же кубик (назовем его «боковым»), как можно проверить, поворачивается в обоих случаях на 180°: при R_1 — вокруг оси, параллельной AB, при R_2 — вокруг «горизонтальной» оси, перпендикулярной AB. Операция вида $[X,Y]=XYX^{-1}Y^{-1}$ называется *коммутатором* операций X и Y. Коммутаторы оказываются очень полезными во всех головоломках с переставляющимися элементами; имеются, например, алгоритмы сборки кубика Рубика, целиком основанные на коммутаторах (см. статью В. и С. Залгаллеров «Венгерский шарнирный кубик» в «Кванте» № 12 за 1980 год).

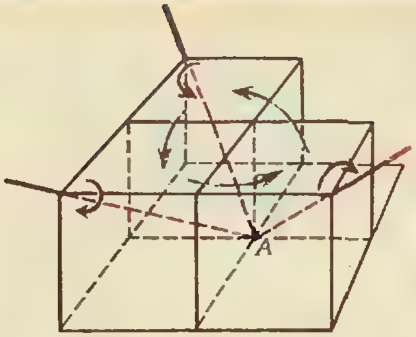


Рис. 4. Синие стрелки показывают перемещение кубиков при операции C_A, красные — вращение кубиков при операции C_A^{-1}.

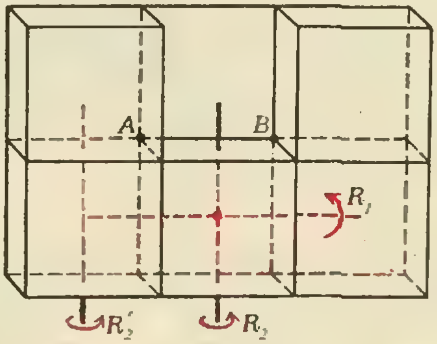


Рис. 5.

Задачи

1. Рассмотрите всевозможные коммутаторы операций $C_A^{\pm3}$, $C_B^{\pm3}$. Покажите, что все они действуют как R_1 или R_2 или как R_1R_2 (поворот кубика на 180° вокруг вертикальной оси).

2. Покажите, что существует 24 способа *поставить кубик на заданную клетку; из них* только 12 можно получить из исходного положения перекатываниями по замкнутым маршрутам, а из этих 12 только 4 получаются при действии коммутаторов $[X, Y]$, где X и Y — произвольные операции, возвращающие кубик на исходное место. Придумайте кратчайшую цепочку ходов, при выполнении которой кубик появляется на заданном поле во всех 12 возможных положениях.

Итак, мы научились поворачивать 4 «боковых» кубика. Чтобы повернуть угловой кубик, достаточно поставить его на место бокового, применить операцию R_1 или R_2, а потом вернуть назад: например (см. рис. 5), операция $R_2'=C_AR_2C_A^{-1}=C_A^{-2}C_B^3C_A^3C_B^{-3}C_A^{-1}$ поворачивает левый нижний кубик на 180° вокруг «горизонтальной» оси, перпендикулярной AB (аналогичную операцию для правого нижнего кубика составьте самостоятельно).

Теперь мы умеем поворачивать все кубики, но, наверное, не самым коротким способом (число ходов у нас равно $8\cdot48=384$): ведь каждый кубик поворачивается отдельно и к тому же остается на месте, что не обязательно*).

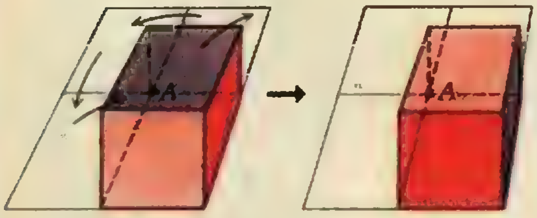


Рис. 3.

---

*) Порядок выполнения операций — слева направо; например, для $R_1=C_A^3C_B^3C_A^{-3}C_B^{-3}$ сначала выполняется операция C_A^3, затем C_B^3, C_A^{-3} и, наконец, C_B^{-3}.

*) Для случая, когда пустое место не в центре, а слева внизу, А. Б. Ходулев придумал решение в 100 ходов, причем кубики поворачиваются здесь не на 180°, а на 90°: $\text{ЛП}^2\text{ПВ}^2\text{ЛП}(\text{ПВЛН})^3\text{НЛВ}^2\text{П}^2\text{НЛ}(\text{ВПНЛ})^2\text{НПВЛВПН}^2\text{Л}^2(\text{ВП})^2\text{Н}^2\text{ЛВЛНП}^2\text{В}^2\text{Л}^2\text{Н}^2\text{ПВЛВП}^2\text{Н}^2\text{ЛВ}^2\text{ППЛНПВ}^2\text{Л}^2\text{П}^2\text{П}^2\text{ВЛНЛВ}^2\text{П}^2\text{НЛВП}$: буквы *П*, *Л*, *В* и *Н* в этой записи означают ходы, при которых кубик передвигается вправо, влево, вверх и вниз.

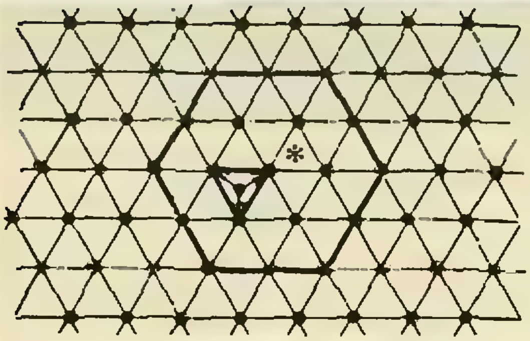


Рис. 6.

Другой изъян нашего решения в том, что оно неполно: мы указали только два варианта поворота кубиков (на 180° вокруг осей, параллельных бортам коробки), но, как следует из задачи 2, таких вариантов, даже если оставлять кубики на своих местах, может быть 11.

Задачи

3. Придумайте операции, поворачивающие на месте только один кубик на 120° вокруг его диагоналей.

4. Найдите как можно более короткие решения головоломки «кубики-перевертыши» для всех 23 «правильных» расстановок, отличных от исходной.

5.* Как узнать по двум данным расстановкам кубиков, переводится ли одна в другую? Каково максимальное число попарно непереводимых друг в друга расстановок?

Пирамидки

Правила действий с пирамидками-перевертышами как будто такие же, как с кубиками. Но сходство между ними оказывается чисто внешним. Дело в том — и это очень существенно,— что в отличие от куба ориентация правильного тетраэдра после нескольких перекатываний однозначно определяется его исходным положением и полем, на которое он попал, и не зависит от его маршрута.

Это легко доказать с помощью рисунка 6. Нашу пирамидку можно поставить любой гранью на один из треугольников сетки, изображенной на этом рисунке, так, чтобы цвета ее вершин совпали с цветами соответствующих узлов сетки. Более того, если цвета вершин и узлов совпали, то независимо от того, на каком треугольнике сетки оказался тетраэдр, они будут совпадать и после перекатывания через любое ребро. Следовательно, каким бы путем ни прикатить пирамидку на заданную ячейку, итоговое расположение цветов ее нижних вершин, а значит и цвет верхней вершины, будет одним и тем же.

Доказанное свойство пирамидок вынуждает нас отказаться от прежней стратегии — поворачивать элементы по отдельности, каждый на своем месте,— ведь если прокатить пирамидку по замкнутому пути, она вернется точно в начальное положение. Наоборот, для каждой пирамидки придется искать место, *куда* ее надо прикатить, а тогда уж нужная ориентация установится автоматически.

Возьмем одну пирамидку в «правильном» положении (рис. 7) и обойдем ею все поля нашей шестиугольной коробки. Мы увидим, что только на двух полях ее ориентация будет «правильной»: на исходном поле и на поле, симметричном ему относительно центра шестиугольника. (Это легко проверить, «накладывая» рисунок 6 на рисунок 7: при любом наложении только на двух парах полей совпадут цвета вершин.) Занумеруем числами от 1 до 12 поля головоломки (рис. 8) так, чтобы симметричные поля получили одинаковые номера, а каждой пирамидке дадим номер поля, на котором она стоит в «правильном» положении. Наша цель — перевести каждую пирамидку на поле с ее собствен-

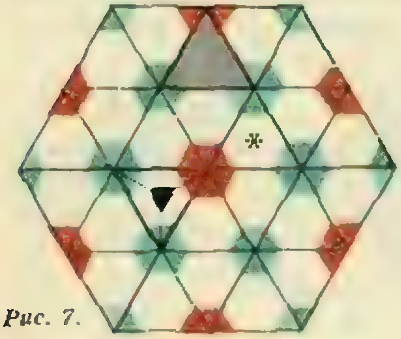


Рис. 7.

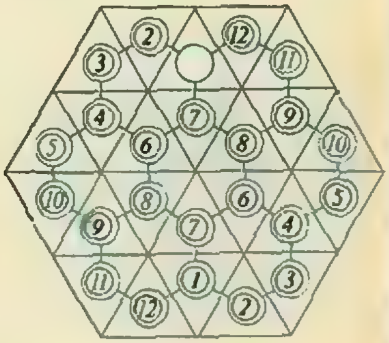


Рис. 8.

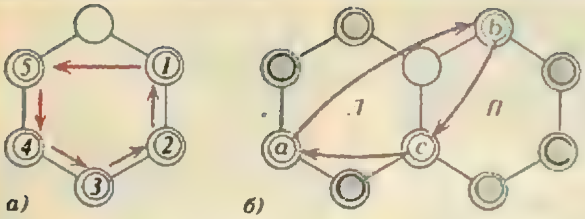


Рис. 9. а) Если последовательно передвинуть фишки 1. 2. 3. 4. 5. 1. получится циклическая перестановка, показанная красными стрелками. б) Пусть Л и П — циклические перестановки рисунка а) для левого и правого шестиугольников рисунка б): тогда операция $П^2Л^2П^{-2}Л^{-2}$ циклически переставляет три фишки a, b и c.

ным номером. Полного решения этой задачи мы не даем. Заметим лишь, что она упростится, если заменить 24 треугольника нумерованными кружками, а пирамидки — 23 фишками (см. рис. 8), которые разрешается передвигать на пустой кружок по голубым линиям. (Они соединяют кружки, отвечающие соседним треугольникам.) Головоломки этого типа подробно обсуждались в статье Д. Вакарелова «Путешествия по графам» («Квант», 1986, № 7, с. 50).

Здесь мы подскажем только одну, но очень полезную операцию — циклическую перестановку 3 фишек — см. рисунок 9 (заметьте, это снова коммутатор!).

Итак, эта игра, в отличие от кубиков-перевертышей, оказалась очень близка к знаменитой «игре 15», хотя с виду должно быть как раз наоборот. Но в «игре 15» все фишки действительно пронумерованы, поэтому сразу ясно, где место каждой; пирамидки сами по себе абсолютно одинаковые, различаются они только своим расположением относительно коробки, и нужны известные усилия и тренировка, чтобы научиться безошибочно определять, куда какую пирамидку ставить.

Задача 6. При каком условии некоторую расстановку пирамидок можно перевести в правильную? Каково максимальное число попарно непереводимых друг в друга расстановок?

Ян Гевелий

(Начало см. на с. 53)

астрономическими инструментами. Пожар уничтожил также все его имущество. Но он мужественно перенес это несчастье и при первой же возможности возобновил свои исследования.

Сегодня мы знаем о Луне намного больше, чем во времена Гевелия. Сфотографирован и детально изучен рельеф ее обратной стороны. Космические аппараты исследовали ее поверхность и принесли нам образцы лунного грунта. На Луне побывали и первые астронавты.

На второй странице обложки воспроизведен фрагмент карты Луны, на котором изображен участок обратной стороны, прилегающий к Морю Москвы (диаметр этого моря составляет 460 км). Оно впервые было обнаружено на фотографиях, полученных советской автоматической межпланетной станцией «Луна-3» в 1959 году. В 1961 году Международный астрономический союз утвердил восемнадцать наименований объектов обратной стороны Луны, и среди них — Море Москвы. Позднее к ним было добавлено еще более пятисот наименований деталей лунного рельефа обратной стороны Луны. Международный астрономический союз увековечил имена выдающихся деятелей науки и техники — Ломоносова, Циолковского, Королева, Лебедева, Мандельштама, Курчатова, Арцимовича, Пастера, Кюри, Ферми и многих других. В лунную номенклатуру вошли также имена погибших космонавтов — Комарова, Волкова, Добровольского, Пацаева, Гриссома, Уайта, Чаффи. В окрестностях Моря Москвы расположены кратеры, названные именами советских космонавтов Титова, Николаева, Терешковой, Беляева, Леонова, Шаталова, Феоктистова. Они хорошо видны на фрагменте лунной карты, изображенном на второй полосе обложки. В районе бассейна Аполлон и Моря Спокойствия шесть кратеров носят имена американских астронавтов — участников лунных экспедиций. Это кратеры Армстронг, Олдрин, Коллинз, Андерс, Борман и Ловелл.

Ж. Ф. Родионова,
В. А. Лешковцев

„Квант" улыбается

Математика в жизни

В городе Долгопрудном, где расположен Московский физико-технический институт, имеется всего два автобусных маршрута: № 368 (связывающий город с Москвой) и № «К» (кольцевой). Однако одному из студентов МФТИ удалось доказать следующее утверждение.

По городу Долгопрудному ходят автобусы со всеми маршрутными номерами n, большими или равными 368.

Доказательство проводится по индукции. Для этого нужно проверить справедливость следующих двух высказываний.

1. Утверждение справедливо при $n=368$.
2. Из справедливости утверждения при $n=k-1$ следует его справедливость при $n=k$.

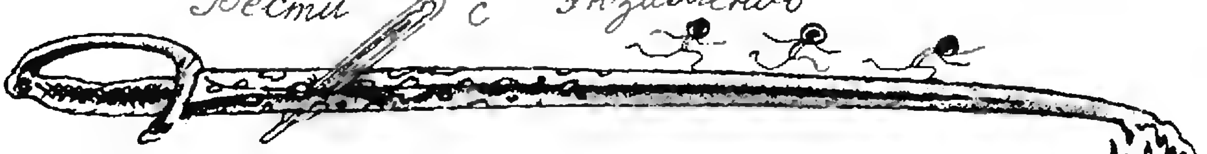
Первое высказывание справедливо, т. к. маршрут № 368 в г. Долгопрудном есть.

Второе тоже справедливо, т. к. маршрут № «К» тоже есть.

Таким образом, утверждение доказано.

А. П.

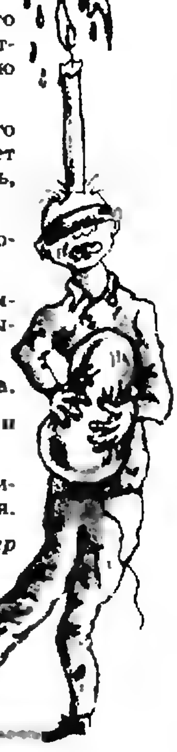
Вести с экзаменов



Газы можно сжать сильнее потому, что воздух — это небесное пространство, а жидкость — это вода, которую когда сожмешь, то она вытечет.

Почему газы можно сжать больше, чем жидкость? Потому, что газ невидим, а жидкость видна.

Прислала *С. Байбулатова*



Сверхпроводимость — это когда проводимость осуществляется с большой скоростью и силой.

Сверхпроводимость — это когда сопротивление исчезает вдруг вообще. То оно есть, а то его нет.

Металлами называются твердые сплавы.

Металлы при маленькой температуре ржавеют, а при высокой плавятся.

Металл — это сплав железа.

Твердые тела — плотная и сильно порядочная среда.

Температура металла зависит от его сопротивления.

Прислал *Б. И. Геллер*

Ученье — свет, а

— Вы мне нравитесь,— сказала окружность треугольнику.

— Но мы с Вами не пара, милочка. Ведь я такой разносторонний, к тому же у меня целых три вершины, а Вы однообразно круглая,— последовал ответ.

По своей простоте он не знал, что окружность вписывается в любой треугольник.

Я. Ф. Шкляр

Информация

Компьютеры на берегу Оби

Летом нынешнего года в нашей стране будут проведены четыре региональные летние школы юных программистов: в Новосибирске, Вильнюсе, Переславле-Залесском и Симферополе. В «Кванте» № 6 мы писали о переславской летней школе 1986 года, в этом номере рассказываем о Всесоюзной летней школе, состоявшейся в Новосибирске.

Волны Обского моря плещутся у высокого берега, к которому вплотную подступили стройные сосны. Здесь в молодежном туристском центре «Сибиряк» во второй половине августа необычная смена — «Сибиряк» отдан Всесоюзной летней школе юных программистов. Такие Школы стали традицией: с 14 по 28 августа 1986 года недалеко от новосибирского Академгородка проходила уже одиннадцатая Школа. Со всех концов страны — от Владивостока до Кишинева — приехали ее 225 участников. В числе участников Школы и зарубежные гости — школьники из Чехословакии и ГДР.

Немецкую делегацию сформировали учащиеся математических спецшкол из разных городов ГДР, а школьники Словакии прибыли из Братиславы, которая является признанным центром школьной информатики в ЧССР.

В традициях Школы и молодежный лекторский состав — разработчики учебно-производственного языка программирования Рапира, и современная вычислительная техника, и костры на берегу моря, и веселые песни о программистах. Бессменный научный руководитель новосибирских летних Школ — академик А. П. Ершов. Он торжественно открыл Школу, вместе с руководством Школы и туристского центра провел в «Сибиряке» пресс-конференцию для корреспондентов центральных и сибирских газет, принял участие в методическом семинаре преподавателей, вручил награды победителям и активистам на торжестве окончания Школы. Гостями Школы были секретарь новосибирского Обкома ВЛКСМ Т. Н. Абрамова и проректор Новосибирского университета им. Ленинского Комсомола профессор, доктор физико-математических наук В. Н. Врагов. Ряд обзорных лекций прочитали известные ученые специалисты А. Н. Терехов (Ленинград, ЛГУ), В. И. Нифонтов (Новосибирск, Институт ядерной физики СО АН СССР), А. Ю. Кривцов (Москва, НИИ Вычислительных комплексов), А. Г. Марчук (Новосибирск, ВЦ СО АН СССР).

В учебную программу Школы были включены различные языки программирования — Рапира, Паскаль, Си, Бейсик, операционные системы и отдельные их модули, различные аспекты системного и прикладного программирования, технологические проблемы программирования.

Интерес к информатике у школьников растет с каждым годом. Неудивительно поэтому, что в Новосибирск приехали сильнейшие из юных программистов. Вместе с тем уровень знаний и практический опыт у школьников сильно различались. Поэтому учащиеся были распределены на несколько учебных потоков, каждый из которых характеризовался как силой учащихся, так и тяготением к одной из двух основных моделей вычислительных машин, представленных на Школе — советским «Агатам» или японским «Ямахам». Внутри каждого потока было сделано еще одно разбиение школьников — побригадное. Бригада — это небольшой коллектив учащихся из двух-четырех человек. Во время Школы бригада работала над отдельным заданием — программой или пакетом программ. Тематика пакетов заданий определялась в первую очередь пожеланиями школьников. Некоторые из них привезли с собой постановки задач, но большинство заданий было предложено учебным сектором Школы. При всем разнообразии тем пакетов выделяются два главных тематических направления: игровые программы на младших потоках и учебно-ориентированные пакеты прикладных программ, предназначенных для использования ЭВМ в ходе школьных уроков — на старших. Интересные игровые программы создали немецкие школьники Штефан Эйрлих и Александр Шаков, Александр Матрос из Петропавловска, Владимир Гофлин из Алма-Аты, красноярец Алексей Федотов, рижанин Миндаугас Плукас и другие. И хотя на Школе было предложено немало готовых игр-программ (в течение полутора часов ежедневно на цветных экранах дисплеев можно было выбрать любую из полусотни увлекательных игр), многие с гораздо большим интересом работали над собственными, оригинальными игровыми проектами.

И все же главная забота школьников — учеба. Поэтому много хороших работ было сделано в помощь школе. Для уроков математики могут быть рекомендованы программы построения графиков функций, над которыми трудились И. Комаров, М. Базанов, Р. Хмелевский из Новосибирска, программы вычисления арифметических выражений с обыкновенными дробями, которые сделали одесситы О. Ниц и М. Альт, работа А. Хасанова из Свердловска «Операционная среда для обучения построению сечений геометрических тел», пакеты обучения по геометрии-8 (К. Обжерин, Новосибирск), алгебре-8 (А. Тюрин, Новосибирск), программа обучения алгоритму Евклида, предложенная коллективом юных томичей, несколько разных по своим возможностям программ для уроков стереометрии, написанных красноярцами, новосибирцами, немецкими гостями.

Ребята, которые делили свои интересы между информатикой и физикой, представили на конференцию школьных научных работ доклад по моделированию броуновского движения молекул (Ю. Левин, Харьков и А. Воробьев, Новосибирск), по расчету электрических цепей (Н. Бурученко, Е. Шостак, Е. Баранова, Красноярск), по способам регистрации частиц высоких энергий (А. Ляшенко, Москва).

Хорошо сделан химический пакет «Титрование», позволяющий провести (или, точнее, промоделировать) на экране школьного дисплея убедительные и красиво оформленные опыты по химии. Сами за себя говорят названия докладов юных программистов, второе увлечение которых — биология: «Экологическая система» (коллектив школьников Ангарска), «Биомоделирование» (М. Ямпольский, Харьков). Но если школьники аплодировали своим сверстникам, рассказывавшим о проектах применения ЭВМ на уроках физики и математики, то легко понять тех, кто решил помочь учителю родного предмета — информатики. Ленинградки С. Иванова, А. Обловатская и А. Матвеева показали программу, демонстрирующую поведение структур данных—деков, стеков и очередей. Такая программа поможет учителю на уроке информатики интересно и наглядно рассказать о весьма сложных понятиях информатики. А. Хасанов (Свердловск) разработал строковый редактор для языка программирования Лого, москвичи В. Гурарий, О. Покровский и Д. Петров — средства графики в языке программирования Си.

Далеко не все работы школьников можно вписать в рамки этих двух направлений. Так, сформировавшийся на Школе дуэт Д. Соколова (Горький) и Г. Нишанова (Фрунзе) был увлечен практической задачей полуавтоматического составления расписания школьных занятий; не менее важна в практическом отношении программа проверки знания правил дорожного движения (Д. Бугучану, Кишинев, К. Курочкин, Новосибирск); харьковчанин М. Ямпольский увлекся более абстрактной, но не менее сложной проблемой построения множеств Мандельброта.

Целая серия интересных программ была посвящена обработке музыкальной информации. Важнейшим фактором успеха в этой области была квалифицированная постановка задач сотрудником новосибирской консерватории им. М. И. Глинки С. А. Чельдиевым. Под его руководством выполнили свои работы учащиеся А. Гершун, Д. Измалков (Москва) «Тренажер «Музыкальный диктант», Н. Никогдина (Петропавловск) «Начальное обучение музыке», А. Гераськин, А. Черников и О. Никандров (Ульяновск) «Обучающий музыкальный пакет для начинающих». Эти программы найдут свое применение на уроках сольфеджио в музыкальных школах.

По-настоящему интернациональным проектом оказалась достаточно сложная задача по машинному синтезу речи. Бригада школьников, составленная из представителей всех трех стран, участвовавших в Школе, успешно завершила программу, которая по набранному на клавиатуре тексту (слову или целой фразе) воспроизводила голосом «Ямахи» достаточно четко и внятно подавляющее большинство заданий — тестов.

Главные участники Школы — девятиклассники, однако в целом возрастной спектр школьников очень широк. Среди многочисленных школьников, награжденных призами, грамотами и сувенирами, трое получили почетные грамоты «Пионерской правды»: М. Белолипецкий (Красноярск), Б. Кардаков (Новосибирск) и Д. Рафиков (Ленинград).

С интересом и пользой провели время на Школе самые младшие ее участники: впервые в Школе приняла активное участие экспериментальная группа из шести младших школьников (1 второклассник, 3 третьеклассника, 2 четвероклассника). Этой группе был специально выделен кабинет, представляющий собой локальную сеть из 7 французских ПЭВМ «Томсон». Все «малыши» были награждены почетными грамотами за активную работу на Всесоюзной летней школе юных программистов и успешное овладение языком программирования Лого. И недаром: им пришлось управлять роботом-черепашкой на экране дисплея, рисовать красивые многоцветные узоры, составлять программы, по которым компьютер «пел» знакомые и незнакомые песенки. Дети с удовольствием знакомились с мечтой А. Н. Скрябина о цветомузыке и сами с увлечением реализовали на своих экранах эту мечту. С неисчерпаемым весельем наблюдали они за результатами собственных программ, которые, работая со списками заданных подлежащих и дополнений (имена школьников), сказуемых и обстоятельств (забавно сочетаемые глаголы и наречия) и датчиком случайных чисел, писали «сочинения». Программы рассказывали такие «истории», что на хохот малышей сбегались старшие ребята из соседних домиков. Понятно, что картинки и песенки не были самоцелью этих уроков — школьники научились свободно оперировать фундаментальными понятиями информатики — циклами и процедурами с параметрами, рекурсиями и списками, файловой системой и редактором процедур. Для младших школьников был подготовлен (специально для новосибирской летней Школы) рукописный учебник «Уроки информатики на Лого».

Учеба — утром, практические занятия — днем, встречи с учеными Академгородка и гостями Школы — вечером. Кандидат физико-математических наук Ю. М. Брук из Москвы провел на Школе «Физические вечера». Это были рассказы о пульсарах, нейтронных звездах, о том, как радиоастрономы наблюдают Вселенную, как физики делают оценки. А. А. Берс (ВЦ СО АН СССР, Новосибирск) рассказывал собиравшимся на берегу Оби ученикам свои вечерние сказки о программировании — непринужденные беседы о технологии программных проектов.

Четырнадцать дней Школы — это две недели лета. И хотя умы и сердца школьников были заполнены компьютерами, ребята находили время для спортивных встреч между отрядами, для экскурсий в Вычислительный центр СО АН СССР, в Институт ядерной физики, в музеи Института геологии и Института истории СО АН, на выставку художественной галереи Новосибирска, на автородео. Гостем Школы был симфонический оркестр школьников Академгородка. И, как всегда на летних Школах, у костра на берегу Обского моря звучали гитары и сочиненные здесь же песни о любимых компьютерах и дорогих учителях.

Л. В. Городняя,
Ю. А. Первин

Юные программисты в Ленинграде

В середине марта весна в Ленинграде еще только вступала в свои права. Яркое солнышко уже напоминало о приближающихся школьных каникулах. Программистам же, собравшимся в эти дни во Дворце культуры работников просвещения Ленинграда, было явно не до каникул. Настроение у всех было очень рабочее. Здесь проходила научно-техническая конференция по школьной информатике. Шестой год подряд собираются на такие конференции школьники и студенты, учащиеся профессионально-технических училищ, учителя и преподаватели вузов. О своей работе рассказывали ребята из Таллина и Ленинграда, Москвы и Йошкар-Олы, Новосибирска и Ульяновска, Свердловска и Владивостока, Тбилиси и Вильнюса...

То, что столь представительные конференции юных программистов проходят в Ленинграде, конечно, не случайно. Еще в 1979 году ленинградцы принимали активное участие в работе Всесоюзной заочной школы юных программистов, организованной журналом «Квант» вместе с ВЦ Сибирского отделения АН СССР. Тогда же в Ленинграде появилась и очная школа юных программистов. В 1986 году уже 45 % ленинградских школьников получили выход на ЭВМ. Большую помощь в этом оказали школам вузы и предприятия Ленинграда, предоставившие школьникам возможность работать на своей вычислительной технике. Многие программы ленинградских школьников внедрены в школьный учебный процесс. А ленинградские предприятия заказывают и оплачивают разработки юных программистов.

Опыт, накопленный в школьной информатике в разных городах страны, показывает, что ребятам многое по силам. Они делают содержательные и интересные пакеты обучающих программ по курсам физики, математики, русского и иностранных языков, химии, музыки, вполне успешно «конкурируя» с профессиональными разработчиками таких программ.

Оргкомитет конференции возглавляли академик А. П. Ершов и лауреат Государственной премии профессор М. Б. Игнатьев. Всего на конференцию было заявлено около трехсот докладов. Жюри конференции, оценивавшее доклады, отметило специальными дипломами 68 работ. В состав жюри входили ленинградские ученые и организаторы конференции — представители Межотраслевого комитета Ленинградского областного совета научно-технических обществ по работе с молодежью, областного правления научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А. С. Попова, Ленинградского института авиационного приборостроения, Главного управления народного образования Ленинграда и других организаций.

Не только об успехах, но и о проблемах и перспективах широкого внедрения вычислительной техники в школы рассказывали на пленарных заседаниях академик А. П. Ершов, ученые и методисты из различных научных центров и вузов. Была у участников конференции возможность продемонстрировать свои разработки и программы непосредственно на ЭВМ, установленных в залах Дворца культуры и в расположенном неподалеку от него Центре школьной информатики Октябрьского района Ленинграда.

Основная же работа проходила по секциям: «Обучающие программы», «Системное программное обеспечение», «Прикладное программное обеспечение», «Информационные системы», «Игровые программы», «Целевые игры». На каждой из них было чему поучиться, что позаимствовать. И, увы, был очень жесткий лимит времени — конференция продолжалась всего два дня. А проводить и расширять такую работу безусловно нужно, она очень полезна и школьникам, и преподавателям основ информатики и вычислительной техники. Пожалуй, не будет преувеличением сказать, что обмен опытом и личные контакты юных и взрослых программистов — существенный фактор успешного развития школьной информатики.

Гости Ленинграда побывали в музеях и школах города, вместе с ленинградскими школьниками посетили исторические места и театры Ленинграда. Расставались, конечно, с грустью. До встречи в будущем году. Творческих вам всем удач, ребята!

Г. Н. Бровина

Учащиеся в кабинете вычислительной техники Центра школьной информатики.

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. Ленинского комсомола работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 8—10 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказывать помощь в формировании и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ 5 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 8—10 классов, на биологическое — только учащиеся 9 классов, на экономическое — только учащиеся 10 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школе под руководством учителя. Руководители кружков набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а работы членов кружков — его руководители (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо выслать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой прислать первое задание. Срок отправки заявления — *не позднее 20 сентября* (по почтовому штемпелю места отправления). В заявлении необходимо также указать следующие сведения о себе:

Ваша фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
Класс, в котором вы учитесь в своей школе	8 «а»
Отделение ЗШ, на котором Вы желаете учиться (можно указать два)	математическое (и физическое)
Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	632149 Новосибирская обл., с. Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5, Николаеву Игорю Ивановичу

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Зачисление в ЗШ производится по результатам первого задания. В тех случаях, когда число желающих учиться в ЗШ превышает возможности нашей школы, предпочтение может быть отдано школьникам из села или из малых городов и поселков.

Заявление о приеме на математическое или на физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 10 октября*.

Решения задач нужно записать в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работы отсылайте вместе с заявлением только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Наш адрес: 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11. Заочная школа при НГУ.

Первое (вступительное) задание по математике

8 класс

1. В некоторой книге для нумерации страниц понадобилось напечатать всего 1422 цифры. Сколько в книге страниц?

2. Две противоположные стороны прямоугольника удлинили на 20 %, а две другие укоротили на 20 %. Как в результате изменилась площадь прямоугольника?

3. Докажите, что любое нечетное число и половина следующего за ним четного числа являются взаимно простыми числами.

4. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют условию

$$|2x - y| > x + 1.$$

5. Как с помощью циркуля и линейки построить трапецию по основаниям и углам?

9 класс

1. Кузнечик может прыгать ровно на 0,5 м в любом направлении. Может ли он за несколько прыжков переместиться ровно на 7,3 м?

2. Существуют ли такие целые числа, которые уменьшаются в 57 раз при зачеркивании их первой (слева) цифры?

3. Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b. На его гипотенузе во внешнюю сторону построен квадрат. Найдите расстояние от центра квадрата до вершины прямого угла треугольника.

4. Докажите, что число n^p, где n и p — натуральные числа, $p > 1$, является суммой n последовательных нечетных чисел.

5. Решите уравнение

$$\frac{x^2}{4} + 1 - \frac{4}{x} = 0.$$

6. Окружность с центром в точке O вписана в угол и касается его сторон в точках A и B.

Через произвольную точку X на отрезке AB проводится прямая, перпендикулярная OX. Эта прямая пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что $MX = XN$.

10 класс

1. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых $(x;\ y)$ удовлетворяют условию

$$|y-1| \geqslant y - |x| + x.$$

2. Имеется 1987 гирь весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 1987 г. Можно ли разложить их на три равные по весу кучи?

3. Докажите, что для любого треугольника справедлива формула

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r},$$

где h_a, h_b, h_c — длины его высот, а r — радиус вписанного круга.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sin x - x$ на интервале $[0;\ 4]$.

5. В пространстве заданы четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько имеется плоскостей, равноудаленных от этих точек? (Плоскость называется равноудаленной от заданных точек, если расстояния от этих точек до нее равны.)

6. Найдите сумму квадратов трех действительных корней уравнения $x^3 - 6x^2 + 8x + 0{,}1 = 0$ (не находя корней уравнения).

Первое (вступительное) задание по физике

Экспериментальная задача 1 предназначена для учащихся всех классов. Кроме того, задачи 2—5 предназначены для поступающих в 8 класс, задачи 2, 6—9 — для поступающих в 9 класс, задачи 6, 10—14 — для поступающих в 10 класс.

Для поступления на физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным полностью решить одну-две задачи. Однако после разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться с задачами и для других классов, а понравившиеся вам задачи — попробовать решить (чем больше, тем лучше). При поступлении в ЗШ вам будут высланы решения всех задач. Познакомьтесь с ними, даже если вы их все решили.

1. Экспериментальное задание: измерьте скорость струи из водопроводного крана.

2. Шар массой m свободно плавает, погрузившись на четверть своего объема. С какой силой надо надавить на него сверху, чтобы он погрузился наполовину?

3. Две плитки мощностью 600 Вт и 1000 Вт включены последовательно. Считая, что сопротивление плиток не зависит от температуры, определите реальную мощность, выделяющуюся на каждой из них.

4. В солнечный день возьмите тонкий прут и, удаляя его от земли, наблюдайте за его тенью — по мере удаления тень становится все менее резкой. Объясните это явление. Воспользовавшись этим объяснением, ответьте также на вопрос, почему обычно на земле не видна тень от небольших облаков.

5. Четыре одинаковых проводника заключены в трубу, соединяющую третий и четвертый этажи здания. Провода выступают на одном и на другом концах на несколько сантиметров. Концы проводов на третьем этаже пронумерованы. Как узнать номера концов на четвертом этаже, имея в своем распоряжении батарейку, лампочку и короткий кусок провода и совершив наименьшее число операций? (Бумагой и карандашом тоже можно воспользоваться.)

6. Летающая тарелка начинает удаляться от вас с ускорением 10 м/с^2, начальные скорость и расстояние до нее нулевые. В течение какого времени имеет смысл подавать тарелке звуковые сигналы? Скорость звука 330 м/с.

7. Из проводящего пустотелого цилиндра радиусом R и толщиной стенки a $(a \ll R)$ изготовили проволоку квадратного сечения $(a \times a)$. Определите отношение сопротивлений проволоки и цилиндра.

8. В двухлитровую банку сечением 1 дм^2 налили хорошо перемешанную смесь керосина с водой (1:1 по объему). Какое количество теплоты выделится при разделении жидкостей? Поверхностное натяжение не учитывать. Плотность керосина 0,8 г/см^3.

9. Два мальчика с тяжелыми шариками в руках уравновешены на весах с медленным установлением равновесия. Один из мальчиков начинает жонглировать шариками. Останутся ли весы в равновесии? Ответ подтвердите расчетами.

10. Определите плотность гремучего газа при нормальных условиях.

11. На воду массой 30 г, налитую в блюдце, осторожно поставили вверх дном тонкостенный нагретый сухой стакан высотой 10 см с площадью дна 20 см^2. После остывания стакана в него оказалась втянутой вся вода из блюдца. Давление окружающего воздуха 10^5 Па, его температура 300 К, плотность воды 1 г/см^3. Найдите начальную температуру воздуха в стакане.

12. На гладком столе находилась система из двух брусков и свободной пружины между ними. Массы брусков m и $2m$, длина пружины l_0, жесткость k. К брускам приложили постоянные силы F и $2F$, как показано на рисунке 1. Какой станет длина пружины после затухания колебаний системы?

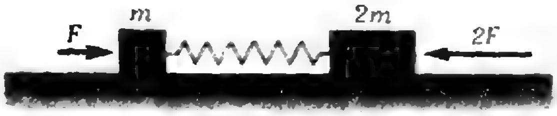


Рис. 1.

13. Между пластинами конденсатора емкостью C вставляют изогнутую металлическую незаряженную пластину (рис. 2). Как изменится при этом емкость конденсатора?

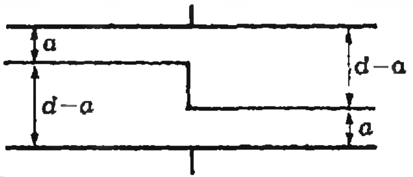


Рис. 2.

14. Электрон вылетает с катода лампы, выполненной в виде плоского конденсатора, со скоростью v_0. Потенциал анода через равные интервалы времени T меняет знак на противоположный, оставаясь в течение интервала постоянным и равным $\pm U$. За какое время τ электрон долетит до анода? Известно, что электрон вылетел в тот момент, когда напряжение переключилось и стало положительным. Можно считать, что расстояние L между электродами достаточно велико, и ограничиться лишь приближенным решением.

Ответы, указания, решения

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 6)

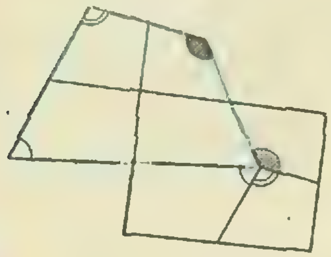
1. $2\times1=8-6=2:1=8:4=3-1$.

2. Из надписи на красной коробочке следует, что ключик лежит в синей или зеленой коробочке. Из надписи на синей коробочке следует, что в зеленой коробочке лежит гадюка или ключик, а из надписи на зеленой коробочке уже вытекает, что там лежит золотой ключик.

3. У Коли 22 ореха, у Вити 14, у Юры — 12 орехов.

4. Хлопок впитывает влагу, поэтому при транспортировке по морю вес хлопка увеличивается. Капитаны загружали хлопок с учетом будущего увеличения его веса.

5. См. рисунок.



Шахматная страничка
(см. «Квант» № 4)

Задание 7. Превращенный белопольный слон при «обезьяньей» игре ставит мат на ход быстрее чернопольного: 1. f4 f5 2. g4 g5 3. fg fg 4. g6 g3 5. gh gh 6. hgC! hgC 7. Ch7 Ch2 8. Cg6×.

Задание 8 (Л. Прокеш, 1951 г.). Белые выигрывают в двух симметричных вариантах: 1... h2+ 2. Кр:h2 f2 3. Ла6+ Кр:g5 4. Ла5+ Крg6 5. Лf5! Кр:f5 6. g4+ Крf4 7. Крg2 Кре3 8. Крf1 и т. д.; 1... f2+ 2. Кр:f2 h2 3. Ла6+ Кр:g5 4. Ла5+ Крg4 5. Лh5! Кр:h5 6. g4+ Кр:g4 7. Крg2 Крf5 8. а5 и т. д.

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Н. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, Л. А. Тишков, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор Т. С. Вайсберг

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук,
В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин,
Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев,
Е. П. Велихов, И. Я. Верченко,
Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев,
Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов,
В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин,
А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов,
Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Редакционный совет, редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» с глубоким прискорбием извещают читателей о том, что 11 июня 1987 года скончался член редакционного совета, кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова Буховцев Борис Борисович.

Сдано в набор 20.5.87. Подписано к печати 2.7.87. Т-12188
Бумага 70×108/16.
Печать офсетная. Усл. кр.-от. 23,8. Усл. печ. л. 5,60.
Уч.-изд. л. 7,31. Тираж 199 478 экз. Цена 40 коп. Заказ 1320

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ФИГУРЫ ВОЗВРАЩАЮТСЯ ДОМОЙ

Однажды мы уже рассказывали о головоломках, в которых все белые фигуры, присутствующие на доске, в начальной позиции занимают исходные места («Квант», 1985, № 4). Пожалуй, стоит еще раз вернуться к этой увлекательной теме.

Г. Ибулаев, 1986 г.

а) Белые: Kpe1, Cf1, Kg1; черные: Kph2.

б) Белые: Kpe1, Cf1, Kg1; черные: Kph1.

Мат в 3 хода.

а) 1. Kpf2 Kph1 2. Cg2+ Kph2 3. Kf3×.

б) 1. Kpf2 Kph2 2. Kf3+ Kph1 3. Cg2×.

Более тонкие позиции с двумя легкими фигурами принадлежат известному советскому проблемисту.

Р. Таварнани, 1986 г.

а) Белые: Kpe1, Kb1, Cf1; черные: Kpg1.

б) Белые: Kpe1, Cc1, Cf1; черные: Kpg1.

Мат в 4 хода.

а) 1. Kd2 Kph1 2. Kpf2 Kph2 3. Kf3+ Kph1 4. Cg2×. 1...Kph2 2. Kpf2 Kph1 3. Cg2+ Kph2 4. Kf3×.

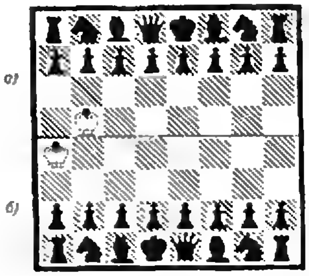
б) 1. Kpe2 Kph1 2. Kpf2 Kph2 3. Cf4+ Kph1 4. Cg2×, 1...Kph2 2. Kpf2 Kph1 3. Cg2+ Kph2 4. Cf4×. К сожалению, вступительный ход во второй задаче — не единственный.

Напомним знаменитую головоломку С. Лойда. Все фигуры белых — на своих местах, у черных один король на h4. Белые ставят мат в 3 хода. 1. d4 Kph5 2. Фd3 и 3. Фh3×, 1...Kpg4 2. e4+ Kph4 3. g3×. Любопытно, что поле h4 — единственное, на котором одинокий черный король получает мат так быстро. «Надежнее» всего находиться на e8, тогда раньше шестого хода короля не пленить. Если же король сам помогает, то мат ставится вдвое быстрее — та же скорость, что и в рекорде Лойда.

А. Коротаев, 1986 г. У белых все фигуры и пешки как в начале игры, у черных один король на поле e8. Кооперативный мат в 3 хода.

1. Kpf7! (в «кооперативах» начинают черные) **d3 (d4) 2. Kpg6! Фd2! 3. Kph5 Фg5×.**

А теперь еще более необычные задания. Вновь перед вами две задачи-близнецы на двух полудосках.



Р. Таварнани, 1986 г.

а) За какое (наименьшее) число ходов белый король может попасть с b5 на d8?

б) Белый король переставлен с b5 на h5 и доска повернута на 180°. За какое наименьшее число ходов белый король может попасть с a4 на e1?

а) Достаточно восьми ходов: **1. Kpc5 h5 2. Kpd5 c5! 3. Kpe5 Фa5 4. Kpf5 f6! 5. Kpg6 Kpd8 6. Kpf7 Kpc7 7. Kpe8 Kpb6 8. Kpd8!**

б) Это путешествие на четыре хода длиннее: **1. Kpb3 Kf3 2. Kpc4 g1K! 3. Kpb4 Ka3! 4. Kpc3 Cg2 5. Kpd3 b1Ф 6. Kpe3 Cb2 7. Kpe4 Kpc1 8. Kpf4 d1C! 9. Kpg4 Фc3 10. Kpg3 f1C! 11. Kpf2 Kd2 12. Kpe1!**

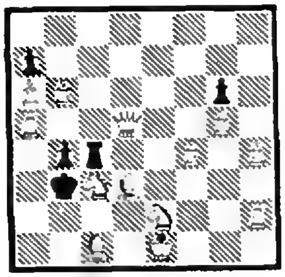
Чтобы скорее пропустить белого короля к цели, черные трижды осуществили слабое превращение!

Л. Соколов, 1986 г. Белые: Kpe1, Cf1, п. h2; черные: Kpb8, Лh1, Kg1. Кооперативный мат в 6 ходов.

Здесь ладья и конь черных тоже занимают привычные для них места, правда, в лагере соперника. **1. Kpc7! h4 2. Kpd6 h5 3. Kpe5 h6 4. Kpf4 h7 5. Kpg3 h8C!!** Пропуская короля к намеченному пункту маршрута. **6. Kph2 Ce5×.**

«Ай пешка! Знать, она сильна, коль превращается в слона!» — так прокомментировал эту задачу ее автор.

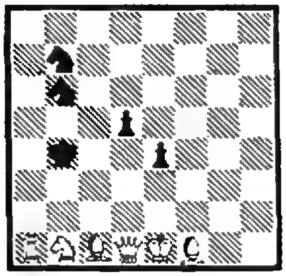
До сих пор белые войска занимали исходные рубежи еще до выполнения боевого задания, а вот уникальный пример противоположного рода — все белые фигуры (пешки не в счет) в процессе решения возвращаются домой.



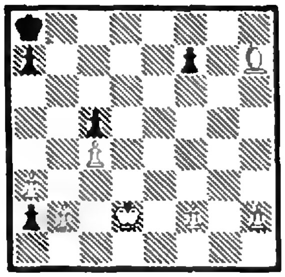
Т. Сабо, 1963 г. Обратный мат в 7 ходов.

В отличие от кооперативных задач, где черные помогают белым, в задаче на обратный мат белые заставляют черных объявить мат вопреки их желанию. **1. Kb1 ab 2. Лa1 b5 3. f5 gf 4. Kg1 f4 5. Cf1 f3 6. Фd1+ Лc2 7. Лh1!** Вся первая горизонталь приобрела привычный вид, и черные вынуждены поставить мат — **7...f2×.**

Конкурсные задания

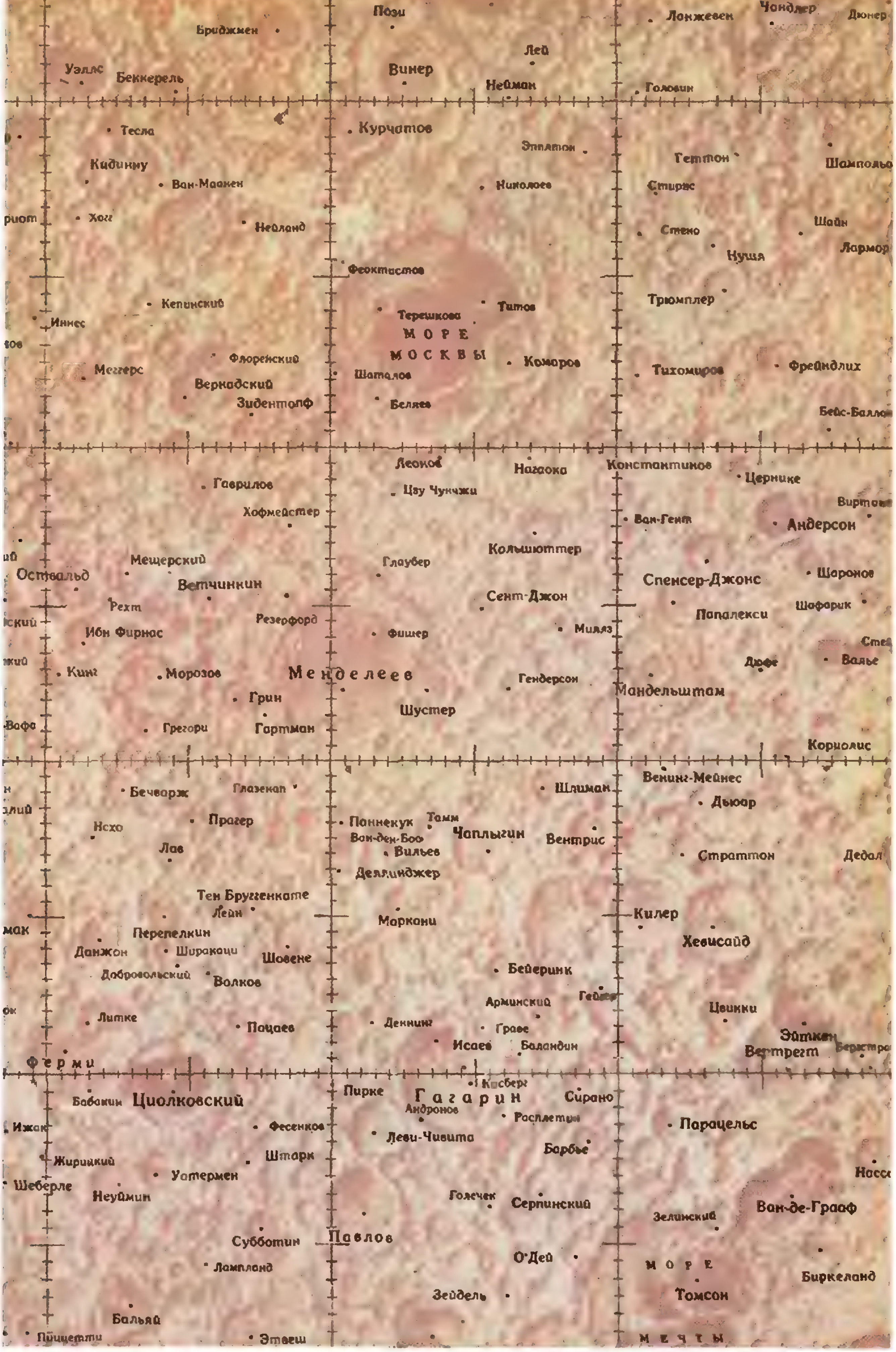


13. Белые начинают и дают мат в 2 хода.



14. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 20 сентября 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 13, 14».


Пози
Бриджмен
Лонжевен
Чандлер
Дюнер
Уэллс
Беккерель
Винер
Лей
Нейман
Головин
Тесла
Курчатов
Эпплтон
Геттон
Шампольон
Кидинну
Ван-Маанен
Николаев
Стирнс
Хогг
Нейланд
Стено
Шайн
Нушя
Лармор
Феоктистов
Трюмплер
Кепинский
Иннес
Терешкова
Титов
МОРЕ МОСКВЫ
Флоренский
Меггерс
Вернадский
Шаталов
Комаров
Тихомиров
Фрейндлих
Зидентопф
Беляев
Бейс-Баллот
Леонов
Нагаока
Константинов
Цернике
Гаврилов
Цзу Чунчжи
Виртанен
Хофмейстер
Ван-Гент
Андерсон
Кольшюттер
Мещерский
Оствальд
Глаубер
Спенсер-Джонс
Шаронов
Ветчинкин
Рехт
Сент-Джон
Шафарик
Паналекси
Резерфорд
Ибн Фирнас
Фишер
Милляз
Дюфе
Валье
Кинг
Морозов
Менделеев
Гендерсон
Мандельштам
Грин
Шустер
Вафа
Грегори
Гартман
Кориолис
Бечворж
Глазенап
Шлиман
Венинг-Мейнес
Дьюар
Нсхо
Прагер
Паннекук
Томм
Ван-ден-Бос
Чаплыгин
Вентрис
Лав
Вильев
Страттон
Дедал
Деллинджер
Тен Бруггенкате
Лейн
Маркони
Килер
Перепелкин
Хевисайд
Данжон
Ширакоци
Шовене
Добровольский
Волков
Бейеринк
Арминский
Гейгер
Литке
Пацаев
Деннинг
Граве
Цвикки
Исаев
Баландин
Эйткен
Вертрегт
Берстрак
Ферми
Касберг
Бабакин
Циолковский
Пирке
Гагарин
Сирано
Андронов
Расплетин
Парацельс
Ижак
Фесенков
Леви-Чивита
Барбье
Жирицкий
Штарк
Нассау
Шеберле
Уотермен
Неуймин
Голечек
Серпинский
Ван-де-Грааф
Зелинский
Субботин
Павлов
О'Дей
МОРЕ МЕЧТЫ
Ламплаид
Биркеланд
Зейдель
Томсон
Бальяй
Пиццетти
Этвеш

Цена 40 коп.

Индекс 70465

На рисунке 1 вы видите «цветную головоломку» — так незатейливо назвали ее на заводе-изготовителе (г. Львов). Кажется, что это просто чуть-чуть измененная игра «15» Сэма Лойда, но в действительности коробка с фишками закрыта прозрачной крышкой и передвигать их по одиночке, как в игре «15», нельзя. Для перемещения фишек предусмотрено два способа. Можно тряхнуть коробочку, и тогда один из горизонтальных рядов (тот, у которого левое или правое крайнее место свободно) целиком сдвинется на одну фишку (соответственно, влево или вправо — движению по вертикали препятствуют барьеры между горизонтальными рядами). Кроме того, с помощью рычажков по бокам головоломки можно сдвигать крайние вертикальные ряды, опять же целиком, на одну фишку вверх или вниз; эти ряды могут находиться в трех положениях каждый. Расстановка на рисунке 1 считается «правильной» и надо научиться возвращаться к ней после произвольного перемещения фишек.

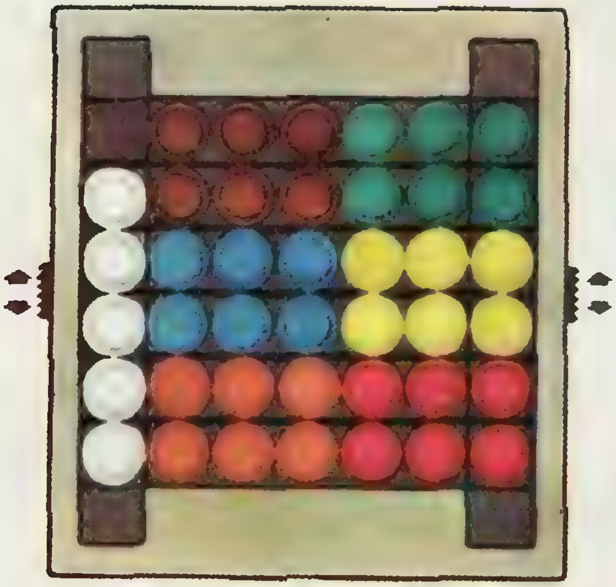


Рис. 1.

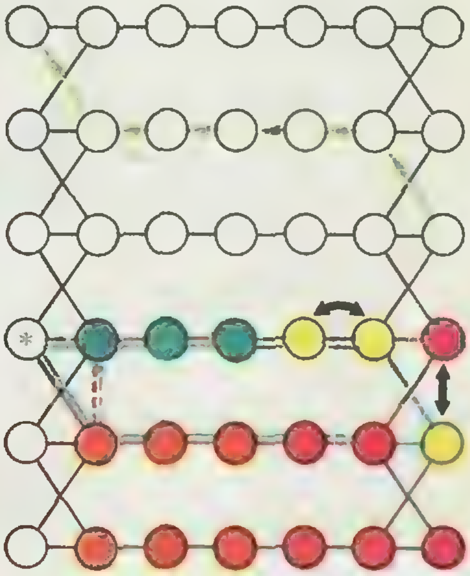


Рис. 2.

Читатели, которые следят за нашими публикациями о перестановочных головоломках знают, что ключ к их решению часто дают циклические перестановки и их коммутаторы (см. обложку «Кванта» № 5 или статью «Перевертыши» в этом номере), а исследовать такие головоломки удобно с помощью графа. Граф «цветной головоломки» приведен на рисунке 2. Линии на нем указывают допустимые передвижения фишек. Например, если в правильной позиции сдвинуть левый ряд вниз, а правый вверх, «тряхнуть коробочку влево» и вернуть крайние ряды на место, то переместятся 6 фишек — по зеленым стрелкам на графе. Легко сообразить и как устроить циклические перестановки фишек, например, по красному или синему замкнутому контуру (звездочкой на графе помечено свободное место, через которое фишка как бы перескакивает — это показано пунктиром). Коммутатор $ABA^{-1}B^{-1}$, где A и B — циклические перестановки фишек по красному и синему контурам по часовой стрелке, одновременно меняет местами две пары фишек, как указывают черные стрелки на рисунке 2, а остальные фишки не перемещает. В изображенной на рисунке ситуации он почти завершает сборку трех нижних рядов — остается только заслать белую фишку на пустое место. Полезны и другие коммутаторы — $AB^{-1}A^{-1}B$, $AB^{2}A^{-1}\times B^{-2}$ и т. д. Но разобраться, как они действуют и составить полный алгоритм решения мы. как всегда, предлагаем любителям поломать голову в качестве домашнего задания.

НОМЕР
8

Квант

1987

8

Основан в 1970 году

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *Н. Б. Васильев.* Гексаграммы Паскаля и кубические кривые
9 *А. А. Варламов, А. И. Шапиро.* Пока чайник не закипел...
16 *Л. А. Островский.* Волны на воде

Задачник «Кванта»

23 Задачи М1056 — М1060, Ф1068 — Ф1072
25 Решения задач М1036 — М1040, Ф1048 — Ф1052
31 Маятник в магнитном поле и принцип суперпозиции

32 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

37 Задачи
38 *Л. Г. Асламазов.* Лунный тормоз

Школа в «Кванте»

40 Математика 8, 9
44 Избранные школьные задачи

Лаборатория «Кванта»

45 *Б. М. Бубнов.* Вихри... на патефоне

Искусство программирования

48 *В. В. Гурарий, К. А. Стыркас.* Об одной рекуррентной последовательности

Наш календарь

51 Луиджи Гальвани (к 250-летию со дня рождения)

Игры и головоломки

53 *Л. А. Штейнгарц.* Из чего угодно — что угодно

Практикум абитуриента

55 *А. И. Буздин, С. С. Кротов.* Работа, энергия, тепло

Информация

54 Вечерняя физическая школа при МГУ
59 X Турнир юных физиков

61 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(36)*
Шахматная страничка
Ретроспективный анализ *(3-я с. обложки)*

Наша обложка

На первой странице обложки — деталь расписного донца работы городецкого мастера В. К. Лебедева (начало XX века). Эта картинка, как и фотография на второй странице обложки,— иллюстрация к статье «Пока чайник не закипел...» (см. с. 9).

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1987

ГЕКСАГРАММЫ ПАСКАЛЯ И КУБИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Кандидат физико-математических наук
Н. Б. ВАСИЛЬЕВ

В 1640 году Блез Паскаль (ему шел тогда семнадцатый год) обнаружил замечательное свойство шестизвенной замкнутой ломаной, вписанной в окружность. В возникающей конфигурации (рис. 1), которую Паскаль назвал «мистической гексаграммой», некоторые три точки пересечения неизбежно оказываются лежащими на одной прямой. Свое открытие Паскаль опубликовал в виде афиши, изданной в пятидесяти экземплярах для раздачи и пересылки отдельным ученым. Работа Паскаля и вышедшее четырьмя годами раньше небольшое сочинение Жерара Дезарга «Образец одного из общих способов для употребления перспективы» послужили фундаментом новой математической дисциплины — *проективной геометрии*. Именно тогда было осознано, что «древние знали не все» (выражение Пьера Ферма) — до тех пор достижения геометров Древней Греции считались непревзойденными.

С именем одного из последних античных геометров — Паппа Александрийского, жившего в III веке н. э.,— связана теорема о шестизвенной ломаной, похожая на теорему Паскаля; с нее мы и начнем рассказ.

Очень советуем провести экспериментальную проверку этих теорем: сделать несколько крупных и аккуратных чертежей — это не только убедит вас в справедливости теорем, но и позволит понять восторг, охвативший в свое время Паскаля и его современников (а быть может, и Паппа).

На геометрических доказательствах и многочисленных следствиях теорем Паппа и Паскаля мы не будем задерживаться, затронув лишь одну поучительную тему — использование геометрических преобразований, в том числе центрального проектирования. Наша главная цель — показать, что свойства «гексаграмм» — лишь частные проявления более общего факта, относящегося к алгебраической геометрии, одному из самых глубоких разделов математики XIX—XX веков. Мы увидим, что тот же факт объясняет и основное свойство операции «сложения точек» на кубической кривой (о его применениях в теории чисел рассказывалось в прошлом номере «Кванта»).

В заключительной серии рисунков точки трех цветов и соединяющие их прямые образуют конфигурации, где удивительные совпадения точек пересечения (которые в конфигурациях Паппа и Паскаля возникают

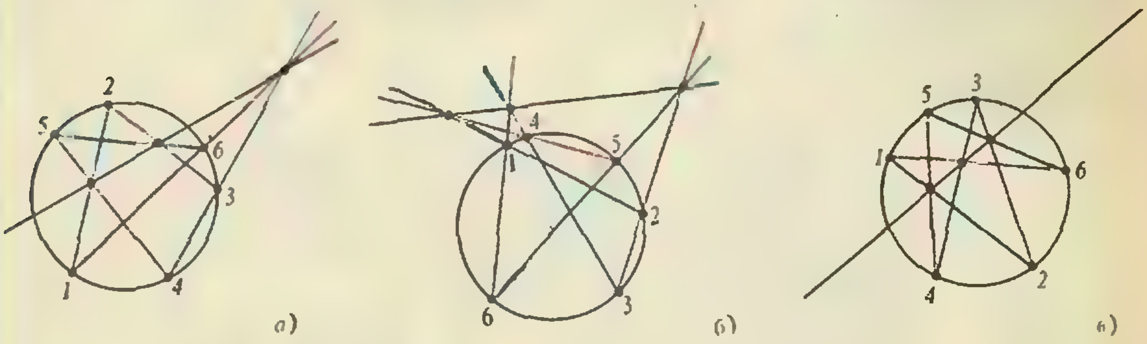


Рис. 1. Теорема Паскаля. Какие бы шесть точек ни взять на окружности и как ни занумеровать их числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, точки пересечения прямых 12 и 45, 23 и 56, 34 и 61 будут лежать на одной прямой (ее называют прямой Паскаля вписанного шестиугольника 123456). Другая формулировка: точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника или их продолжений лежат на одной прямой.

однажды) происходят бесконечное число раз.

Теоремы Паппа

Начнем со сравнительно простой теоремы о 6 точках, лежащих на двух прямых a и b (рис. 2*а*).

Теорема 1а. *Пусть вершины шестизвенной замкнутой ломаной лежат попеременно на двух прямых. Если две пары противоположных звеньев этой ломаной (1-е и 4-е, 2-е и 5-е) параллельны, то и оставшаяся пара звеньев (3-е и 6-е) параллельна.*

Идею доказательства поясним с помощью геометрических преобразований. Пусть прямые a и b пересекаются в точке O (рис. 2*б*). Рассмотрим две гомотетии с центром O: одну — переводящую прямую A_1B_1 в A_3B_2, и другую — переводящую A_3B_3 в A_2B_1. Их композиция — результат последовательного выполнения этих гомотетий — переводит прямую A_1B_3 в A_2B_2, поэтому $A_1B_3 \parallel A_2B_2$. Заметим, что следить за преобразованиями точки A_1 удобно, применяя гомотетии в одном порядке: $A_1 \to A_3 \to A_2$, а точки B_3 — в другом: $B_3 \to B_1 \to B_2$. Результат, конечно, не зависит от порядка применения двух гомотетий: их композиция — это тоже гомотетия с центром O, коэффициент которой равен произведению коэффициентов этих двух гомотетий. В случае, когда прямые a и b параллельны (рис. 2*в*), в том же рассуждении гомотетии нужно заменить параллельными переносами.

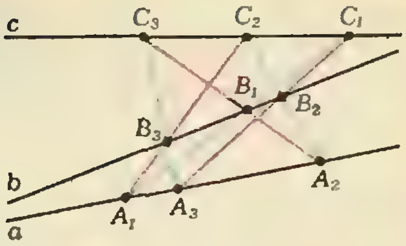


Рис. 3. Конфигурация Паппа из 9 точек и 9 прямых. Какие бы тройки точек A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 на прямых a и b ни взять, точки C_1, C_2, C_3 пересечения прямых A_1B_1 и A_3B_2, A_2B_2 и A_1B_3, A_3B_3 и A_2B_1 будут лежать на одной прямой (теорема 1).

Таким образом, теорема 1а — это просто геометрическое выражение коммутативности умножения (и сложения) чисел; это объясняет важную роль теоремы Паппа в основаниях геометрии (см., например, книгу [5]).

Теорема Паппа о 6 точках — лишь очень специальный случай значительно более глубокой теоремы (также носящей его имя) о конфигурации, состоящей из 9 точек и 9 прямых (рис. 3).

Теорема 1. *Пусть три голубые прямые пересекают три красные в девяти черных точках. Если две тройки черных точек лежат на двух прямых (отличных от красных и голубых), то и оставшаяся тройка черных точек лежит на прямой.*

Конфигурация Паппа замечательна тем, что все три тройки прямых — голубых, красных и черных — участвуют в ней совершенно равноправно: в каждой из 9 точек пересекаются три прямые разных цветов.

Начав строить такую конфигурацию, мы обнаружим, что при неудачном выборе первых шести точек A_1,

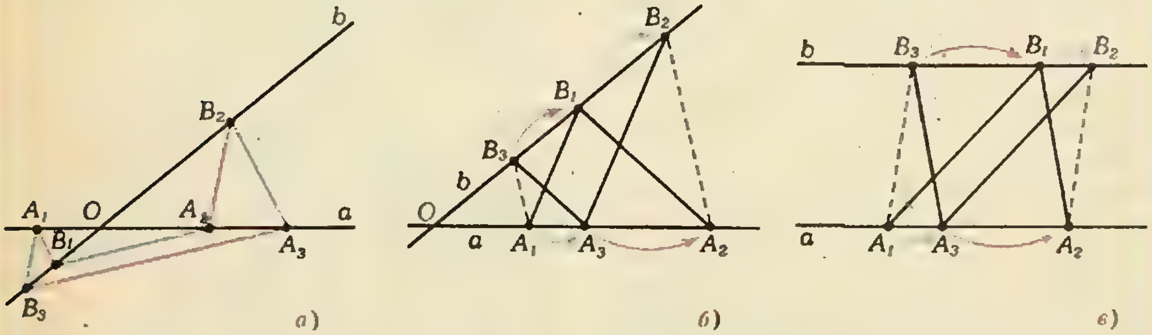


Рис. 2. Гексаграммы Паппа. Шесть вершин ломаной $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ лежат попеременно на двух прямых a и b: первые четыре выбираются произвольно, затем A_3 и B_3 строятся так, что $B_2A_3 \parallel A_1B_1$, $A_3B_3 \parallel B_1A_2$; тогда обязательно $B_3A_1 \parallel A_2B_2$ (теорема 1 а). Доказательство: а), б) перемножив равенства $OA_1/OA_3 = OB_1/OB_2$ и $OA_3/OA_2 = OB_3/OB_1$, получим $OA_1/OA_2 = OB_3/OB_1$; в) сложив равенства $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{A_3A_2} = \overrightarrow{B_3B_1}$, *получим* $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_3B_2}$.

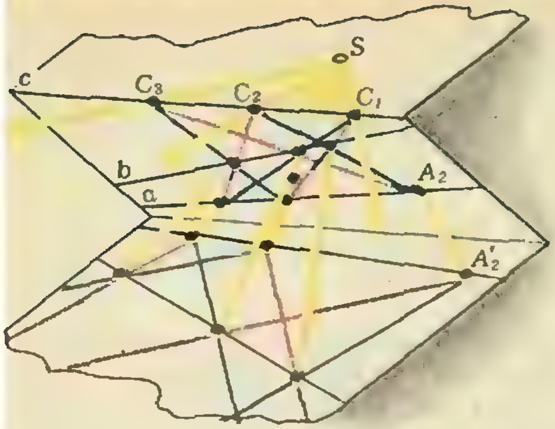


Рис. 4. Сведение общей теоремы Паппа к специальному случаю (теореме 1 а). Нарисуем конфигурацию Паппа на стекле или прозрачной бумаге, расположим ее в наклонной плоскости так, чтобы прямая C_1C_2 была горизонтальной, и спроектируем на горизонтальную плоскость с помощью источника света S — центра проекций, — расположенного над плоскостью на той же высоте, что и прямая C_1C_2. В проекции получится гексаграмма Паппа: пары разноцветных прямых, пересекающихся в точках C_1, C_2 и C_3, проектируются в пары параллельных прямых, поэтому C_3 лежит на прямой C_1C_2.

B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 новые точки C_1, C_2, C_3 могут оказаться далеко за пределами чертежа. Например, при $A_1B_1 \parallel A_3B_2$ точка C_1 просто «уйдет в бесконечность». (При этом прямая C_2C_3 будет также параллельна A_1B_1 и B_2A_3.) Если же две из трех точек C_1, C_2 и C_3 «уходят в бесконечность», то согласно теореме 1а и третья также должна оказаться «в бесконечности»; в этом случае удобно говорить, что все три точки C_1, C_2, C_3 лежат на одной «бесконечно удаленной прямой» с.

К этому частному случаю можно свести и самый общий с помощью геометрического преобразования, хорошо знакомого художникам, архитекторам и фотографам — *центральной проекции* (рис. 4); художники со времен Леонардо да Винчи и Альбрехта Дюрера называют его «линейной перспективой». Проекция с центром S каждой точке M ставит в соответствие точку M' пересечения прямой SM с некоторой плоскостью p (плоскостью проекции). Важно, что при этом образы точек одной прямой вновь лежат на одной прямой, хотя некоторые пересекающиеся прямые переходят в параллельные (их точка пересечения «уходит в бесконечность») и наоборот.

Замечательна идея Дезарга, лежащая в основе проективной геометрии: мысленно дополнить плоскость «бесконечно удаленными точками», в каждой из которых пересекаются параллельные друг другу прямые, и считать все эти точки лежащими на одной «бесконечно удаленной прямой» — тогда при центральной проекции одной плоскости на другую не возникает никаких исключений, это преобразование становится взаимнооднозначным. Эта «проективная» точка зрения будет постоянной побочной темой нашего рассказа, но мы не будем развивать ее здесь подробно (см. [1], [2]).

Конфигурации Паскаля

Теореме Паскаля можно придать тот же красочный вид, что и теореме Паппа о 9 точках.

Теорема 2. *Пусть три красные прямые пересекают три голубые в девяти черных точках. Если шесть из этих точек лежат на одной окружности, то три остальные лежат на одной прямой* (рис. 1).

Верна и в определенном смысле «обратная» теорема.

Теорема 2′. *Если из девяти черных точек пересечения тройки красных с тройкой голубых прямых три лежат на прямой, а еще пять — на окружности, то и девятая точка лежит на той же окружности.*

Как понял сразу же сам Паскаль, его теорему можно значительно обобщить: вместо окружности в ней может фигурировать эллипс, гипербола или парабола, ибо любую из этих кривых можно получить центральной проекцией окружности. Поэтому из конфигурации Паскаля для окружности можно получить конфигурацию для любой из этих кривых.

Все эти кривые называются *кривыми второго порядка*, поскольку каждую из них можно задать уравнением вида $P(x, y) = 0$, где P — многочлен второй степени:

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Любопытно, что теорема Паскаля остается верной и для вырожденного случая, когда многочлен P раскладывается на два линейных множителя: в этом случае кривая второго порядка $P(x, y) = 0$ превращается в пару прямых, а теорема Паскаля — в теорему Паппа.

Существует много различных доказательств теоремы Паскаля для окружности (см., например, «Квант» 1982, № 7, с. 2, книги [1], [2], [3]).

Интересно, что доказать ее можно тем же способом, каким мы свели общую теорему Паппа к частному случаю — спроектировать конфигурацию Паскаля так, чтобы «паскалева прямая» c превратилась в бесконечно удаленную, а окружность — в зависимости от того, пересекалась ли она с прямой c, касалась ее или не имела с ней общих точек — в гиперболу с перпендикулярными асимптотами, параболу или вновь в окружность (см. «Квант» № 3, 1987, с. 22—23). Теперь остается доказать аналог теоремы 1а для шестизвенной ломаной, вершины которой лежат на одной из полученных кривых. Для этого нужно придумать преобразования, при которых кривая скользила бы по самой себе, а параллельные прямые переходили бы в параллельные (такие преобразования называют *линейными*). Для окружности это — обычные повороты, для параболы $y=ax^2$ «неравномерные растяжения» $x'=kx$, $y'=k^2y$, для гиперболы $xy=a$ — «гиперболические повороты» $x'=kx$, $y'=y/k$.

Кубические кривые

Алгебраической кривой третьего порядка, или *кубической кривой*, называется множество точек (x, y), удовлетворяющих уравнению $P(x, y)=0$, где P — многочлен третьей степени: $P(x, y)=ax^3+bx^2y+\ldots+l$ (всего 10 членов). Заметим, что это определение не зависит от выбора системы координат: при переходе от одной системы координат к другой, даже косоугольной, старые координаты выражаются через новые по линейным формулам

$$x=a_1x'+b_1y'+c_1,\quad y=a_2x'+b_2y'+c_2, \qquad (1)$$

поэтому в новых координатах кривая будет задаваться также многочленом третьей степени.

Кубическая кривая называется *приводимой*, если многочлен $P(x, y)$ раскладывается в произведение многочленов меньшей (первой и второй) степени, и *неприводимой* — в противном случае. Такую кривую мы будем обозначать иногда буквой Ω — некоторые из очень разнообразных по форме кубических кривых имеют похожий вид. Например, кривая $(x+1)(x^2+y^2-1)+\varepsilon=0$ при малом ε (скажем, $\varepsilon=0{,}001$) очень близка к приводимой кривой $(x+1)(x^2+y^2-1)=0$, состоящей из прямой $x=-1$ и окружности $x^2+y^2=1$. Если многочлен раскладывается в произведение трех линейных многочленов: $P=L_0L_1L_2$, то кривая $P(x, y)=0$ будет объединением трех прямых $L_0=0$, $L_1=0$, $L_2=0$.

Оказывается, любой многочлен третьей степени можно представить в виде суммы двух таких «сильно приводимых» многочленов; это будет видно из доказательства следующей теоремы о 9 точках на кубической кривой.

Теорема 3. *Пусть три красные прямые пересекают три голубые в девяти черных точках. Если восемь из этих точек лежат на некоторой кубической кривой, то и девятая лежит на той же кубической кривой.*

В специальном случае, когда кривая приводима, отсюда получаются теоремы Паппа и Паскаля: если кривая распадается на три (черных) прямых, то теорема 3 превращается в теорему 1, а если на прямую и кривую второго порядка, то в теоремы 2 и 2′. Таким образом, доказав теорему 3, мы получим одновременно все предыдущие результаты, причем сразу в общем случае!

Пусть прямые $R_i=0$ и $L_j=0$ пересекаются в точке A_{ij} (рис. 5; i и j принимают значения 0,1 и 2). Докажем, что если все точки A_{ij}, кроме A_{22}, лежат на кубической кривой $P(x, y)=0$, то и A_{22} — тоже. Положим $K=L_0L_1L_2$, $\Gamma=R_0R_1R_2$ и докажем, что для некоторых чисел λ и μ выполнено тождество $P=\lambda K+\mu\Gamma$. Отсюда будет следовать, что $P=0$ в точке A_{22}: ведь $K=0$ на красных прямых, $\Gamma=0$ на голубых, так что в черных точках выполнены оба эти равенства.

Удобно считать, что прямые $L_0=0$ и $R_0=0$ — это оси координат, так что $L_0(x, y)=x$, $R_0(x, y)=y$ (этого можно добиться, заменив переменные по формулам (1)); при этом $K(x, y)$

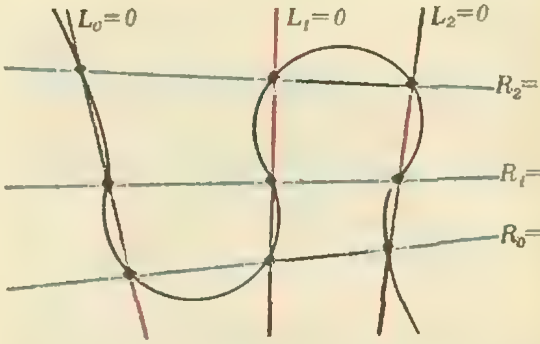


Рис. 5. Теорема 3 о 9 точках на кубической кривой. Уравнение кубической кривой Ω, проходящей через 8 из 9 черных точек, можно получить как линейную комбинацию уравнений $R_0R_1R_2=0$ и $L_0L_1L_2=0$, задающих тройки красных и голубых прямых: $\lambda R_0R_1R_2+\mu L_0L_1L_2$, поэтому кривая Ω обязательно проходит и через девятую черную точку.

имеет вид

$$x(x-\alpha_1-\gamma_1 y)(x-\alpha_2-\gamma_2 y),$$

где α_1 и α_2 — координаты точек A_{01} и A_{02} на оси Ox. Поскольку кривая $P(x, y)=0$ проходит через точки A_{00}, A_{01} и A_{02}, многочлен $P(x, 0)$ — т. е. P, рассматриваемый на оси $y=0$,— обращается в 0 при x, равном 0, α_1 и α_2, поэтому $P(x, 0)=\lambda x(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ при некотором λ, откуда $P(x, 0)=\lambda K(x, 0)$. Аналогично докажем, что $P(0, y)=\mu\Gamma(0, y)$ при некотором μ (здесь используются точки A_{00}, A_{10} и A_{20}).

Рассмотрим теперь многочлен $G=P-\lambda K-\mu\Gamma$. Он тождественно равен 0 при $x=0$ (ведь K содержит множитель x), а также и при $y=0$, поэтому он должен иметь вид $G=xyG_1$, где G_1 — многочлен степени не выше первой (ведь степень G не выше трех). С другой стороны, в точках A_{11}, A_{12} и A_{21}, где $G=0$ и $xy\neq 0$, многочлен G_1 должен обращаться в 0, а эти точки не лежат на одной прямой. Это возможно, лишь если G_1, а с ним и G тождественно равны 0.

Теорема 3 доказана.

Сложение точек на кубической кривой

Многие интересные геометрические свойства кубических кривых, а также их разнообразные применения в анализе, теории чисел и даже комбинаторике (теории кодирования) связаны с операцией сложения точек. Существование такой естественной операции — характерное свойство именно (неприводимых) кривых третьей степени, а ее геометрическое определение основано на том, что прямая, пересекающая кривую Ω в двух точках, обязательно имеет с ней еще и третью точку пересечения. Мы увидим, что теорема 3 выражает замечательное свойство этой операции — *ассоциативность*: $A+(B+C)=(A+B)+C$.

Сумма $A+B$ двух точек A, B кривой Ω определяется так. На Ω выбирается некоторая «начальная» точка E. По двум точкам A, B строится третья точка D пересечения прямой AB с Ω, а затем — третья точка пересечения с Ω прямой DE; это и есть, по определению, точка $A+B$.

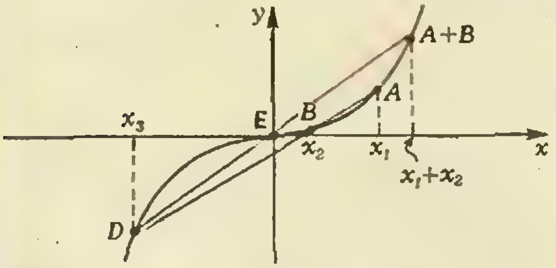


Рис. 6. Сложение точек на графике $y=x^3$. Три точки этого графика лежат на одной прямой, если и только если сумма их абсцисс равна 0.

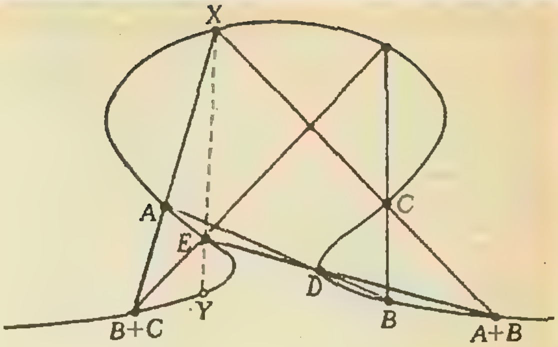


Рис. 7. Ассоциативность сложения точек на кубической кривой. Равенство $A+(B+C)=(A+B)+C$ следует из теоремы о 9 точках.

Особенно просто складываются точки на кривой $y=x^3$ (рис. 6): если за начальную точку E взять начало координат (0; 0), то суммой точек с абсциссами x_1 и x_2 будет точка с абсциссой x_1+x_2! В самом деле, три точки $A(x_1; x_1^3)$, $B(x_2; x_2^3)$, $D(x_3; x_3^3)$ лежат на одной прямой, если выполнено условие

$$\frac{x_1^3-x_2^3}{x_1-x_2}=\frac{x_2^3-x_3^3}{x_2-x_3},$$

которое после упрощений принимает вид

$$x_1+x_2+x_3=0;$$

а поскольку E — центр симметрии графика $y=x^3$, точка $A+B$ (третья точка пересечения прямой DE с этим графиком) имеет координаты $(-x_3; -x_3^3)$, т. е. абсциссу $-x_3=x_1+x_2$.

Чтобы операция сложения точек была определена для любых двух точек, нужно сделать некоторые уточнения: учесть точки касания прямых с Ω как двукратные (а для точек перегиба — трехкратные) точки пересечения, добавить к кривой «бесконечно удаленные» точки, выбросить «особые» точки, появляющиеся на некоторых кривых. Об этом подробнее говорилось в статье Ю. П. Соловьева в предыдущем номере «Кванта».

Для такого сложения точек на кривой Ω свойство *коммутативности* $A+B=B+A$ очевидно (прямая AB совпадает с прямой BA). А вот ассоциативность доказать не так просто. Это удается сделать с помощью теоремы 3, проведя 7 прямых (рис. 7). По этой теореме точка X пересечения прямых, соединяющих A с $B+C$ и $A+B$ с C, лежит на Ω, поэтому

$$A+(B+C)=(A+B)+C=Y.$$

Построение полиграмм

Назовем *полиграммой* тройку бесконечных последовательностей точек на плоскости — красных (A_k), черных (B_l) и голубых (C_m), для которых выполнено такое условие: если $k+l+$

$+m=0$, то точки A_k, B_l и C_m лежат на одной прямой ($k, l, m=0, \pm1, \pm2, \ldots$).

Этой бесконечной конфигурации была посвящена задача М585 из «Задачника Кванта». (Интересно, что автор задачи В. В. Батырев прислал нам задачу, когда был еще 10-классником, а теперь он окончил мехмат МГУ и стал его научным сотрудником — специалистом по алгебраической геометрии.) Самую простую полиграмму легко построить на клетчатой бумаге (рис. 8), но оказалось, что существует множество разнообразных полиграмм, причем их описание тесно связано со всем содержанием нашей статьи, включая даже «сложение точек» на кубической кривой.

Попробуйте экспериментально проверить и затем обосновать следующие утверждения (в этом помогут рисунки 9—11, где изображены некоторые примеры полиграмм; номера расставлены лишь у некоторых первых точек — по ним легко восстанавливаются остальные).

1. Для любых трех прямых a, b, c по произвольно заданным точкам A_0 (на a), B_0 и B_1 (на b) строится единственная полиграмма, у которой все точки A_k лежат на a, B_l на b и C_m на c.

2. Пусть заданы окружность σ (это может быть также эллипс, гипербола или парабола) и три точки: A_0 на σ, B_0 и B_1 — не лежащие на σ. Тогда существует единственная полиграмма, у которой все точки A_k и C_m лежат на σ, а B_l — на прямой B_0B_1.

3. Если задана неприводимая кубическая кривая Ω и на ней три точки A_0, B_0 и B_1, то по ним однозначно восстанавливается полиграмма, лежащая на Ω, причем ее можно записать в виде тройки арифметических прогрессий $A_k=A_0+kD$, $B_l=B_0+lD$, $C_m=C_0+mD$ (D — точка на Ω, определяемая условием $B_0+D=B_1$); правда, если D — такая точка на (неособой) кривой Ω, что $nD=\underbrace{D+\ldots+D}_{n}=E$, полиграмма получится не бесконечной, а периодической (такие конфигурации рассмотрены в статье [4] в связи с задачей о том, как много троек из заданного числа точек плоскости могут лежать на прямых).

4. Пусть заданы шесть точек A_0, A_{-1}, A_1, B_0, B_1 и B_2 на плоскости (в общем положении). По ним можно однозначно восстановить полиграмму, все точки которой автоматически окажутся лежащими на некоторой кубической кривой.

Для доказательства общих утверждений о полиграммах полезны следующие соображения. Центральная проекция любой полиграммы — снова полиграмма. Каждые 9 точек полиграммы A_k, A_{k+r}, A_{k+s}, B_l, B_{l+r}, B_{l+s}, C_m, C_{m+r}, C_{m+s}, где $k+l+m+r+s=0$, образуют конфигурацию, удовлетворяющую условиям теоремы 3; в частности, для полиграмм на трех прямых (рис. 9) они образуют 9 точек

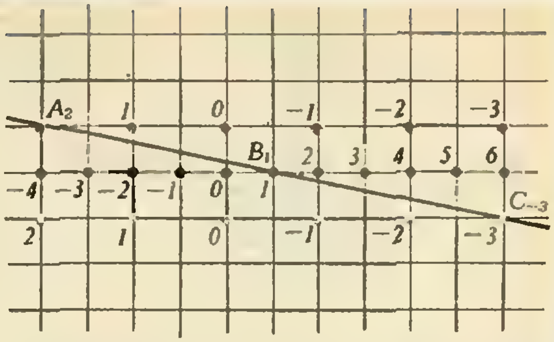
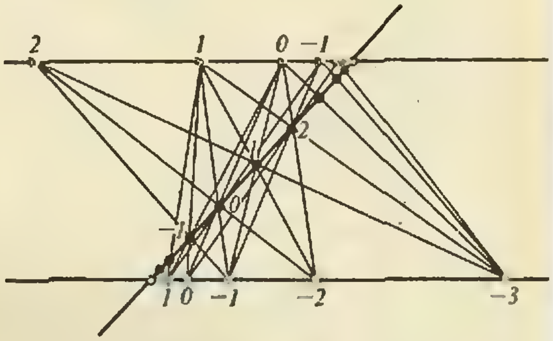


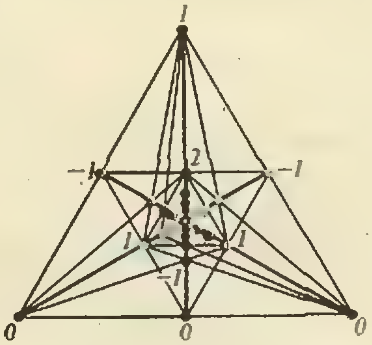
Рис. 8. Пример полиграммы. Три бесконечных последовательности красных, черных и голубых точек, занумерованных целыми числами, образуют полиграмму: три разноцветные точки A_k, B_l и C_m лежат на одной прямой, если сумма их номеров $k+l+m$ равна 0. (В этом примере B_{-k-m} — середина отрезка A_kC_m для любых k и m.)



а)

Рис. 9. Полиграммы на трех прямых. На каждой из них можно бесконечным числом способов выбрать три тройки разноцветных точек, служащих вершинами конфигурации Паппа из 9 точек.

а) Множества красных и голубых точек гомотетичны относительно каждой черной точки B_l, причем коэффициент гомотетии равен $k_n=k_0q^l$.



б)

б) Эту полиграмму, целиком расположенную в треугольнике, можно получить центральной проекцией рисунка 8. Расстояния от точек каждого цвета до центра треугольника пропорциональны числам 1, 1/2, 1/3, ...

Можно строить и полиграммы на трех прямых, попарно пересекающихся в трех различных точках. Такие полиграммы можно получать центральной проекцией рисунка а).

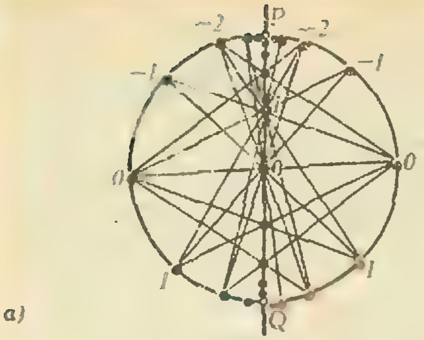
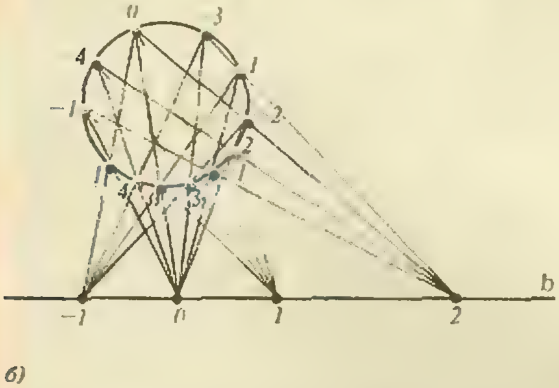


Рис. 10. Полиграммы на прямой и окружности. На них можно бесконечным числом способов выделить конфигурацию Паскаля.

а) Отношения расстояний от точек каждого цвета до концов диаметра PQ: A_kP/A_kQ, C_mP/C_mQ и B_kQ/B_kP образуют геометрические прогрессии с одним и тем же знаменателем q.



б) Если эту триграмму спроектировать так, чтобы прямая b с черными точками отобразилась в бесконечно удаленную, а окружность — снова в окружность, то образы красных (а также голубых) точек с соседними номерами будут отстоять друг от друга на одну и ту же дугу Θ·360° окружности; при иррациональном Θ красные и голубые точки будут всюду плотно заполнять окружность, а при рациональном Θ полиграмма получится периодической.

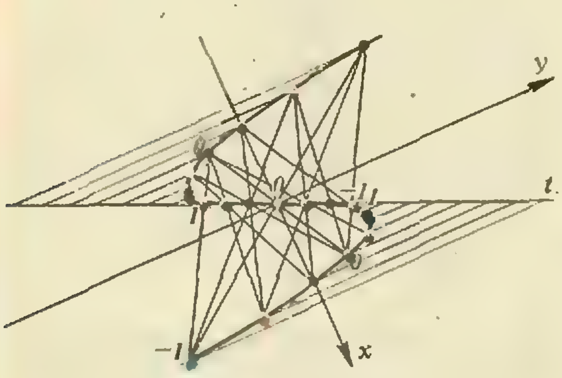


Рис. 11. Полиграмма на графике $y=x^3-ax$. Проекции точек каждого цвета на касательную Ot по направлению оси Oy составляют ряд равноотстоящих точек — арифметическую прогрессию.

конфигурации Паппа, а для полиграмм на прямой и окружности (рис. 10) — конфигурации Паскаля.

Шкала из точек с целочисленными номерами, возникающая при построении полиграмм, наводит на мысль, что существует непрерывный аналог полиграмм; в самом деле, оказывается, точкам любой — приводимой или неприводимой — кубической кривой Ω можно сопоставить числовые значения t — ввести на кривой Ω «хорошую параметризацию» — так, чтобы для любой прямой, пересекающей Ω в трех точках с параметрами t_1, t_2, t_3, выполнялось условие $t_1+t_2+t_3=0$. (Если кривая Ω содержит овал,— окружность на рисунке 10б, то значение параметра t определяется с точностью до прибавления целого кратного «периода» T, на который меняется значение t при обходе овала.) Как мы видели (рис. 6), на кривой $y=x^3$ «хороший параметр» — это абсцисса точки (x, y). Приведем еще один пример. Пусть Ω состоит из трех прямых AB, BC, CA. Условие, что точки M, N, L, лежащие соответственно на этих прямых, расположены на одной прямой, имеет вид

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{LC}{LA}=1$$

(*теорема Менелая*). Здесь за «хороший параметр» t на каждой прямой можно принять логарифм соответствующего отношения: если произведение трех чисел равно 1, то сумма их логарифмов равна 0. Точно так же можно в явном виде указать «хорошую параметризацию» для других приводимых и особых кубических кривых, таких, как $y^2=x^3$ и «лист Декарта» $y^2=x^3-x^2$ (см. первые страницы книги [6]).

Для неприводимых неособых кубических кривых существование «хорошей параметризации» тесно связано с операцией сложения точек, а ее явное выражение требует знакомства с теорией эллиптических функций — красивейшей областью математического анализа, которой занимались многие крупнейшие математики XIX века.

Сравнительно недавно (1976 г.) американский математик Ф. Гриффитс заметил, что наличие «хорошей параметризации» — характеристическое свойство именно кривых третьего порядка: если на плоскости расположены три кусочка кривых с параметрами t_1, t_2 и t_3, так что через каждую точку одного из них можно провести прямую, пересекающую два других, и при этом для параметров трех точек пересечения всегда выполнено условие $t_1+t_2+t_3=0$, то все эти три кусочка содержатся в одной кубической кривой. (Это — непрерывный аналог утверждения о том, что любая полиграмма лежит на кубической кривой.)

Литература

1. Яглом И. М. *Геометрические преобразования.* ч. II — М.: Л.: Гостехиздат, 1956.
2. Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии.* ч. II — М.: Наука, 1986.
3. Шарыгин И. Ф. *Задачи по геометрии. Планиметрия.*— М.: Наука, 1986.
4. Математический цветник.— М.: Мир, 1983 (статья С. Барра «Как сажать деревья», с. 117—129).
5. Артин Э. *Геометрическая алгебра.*— М.: Наука, 1969.
6. Шафаревич И. Р. *Основы алгебраической геометрии.*— М.: Наука, 1972 (и план 1988).

ПОКА ЧАЙНИК НЕ ЗАКИПЕЛ...

Кандидат физико-математических наук
А. А. ВАРЛАМОВ,
А. И. ШАПИРО

Ритуалу чаепития посвящены восточные трактаты и главы в специальных книгах. И все же, посмотрев на этот процесс под несколько иным углом зрения, в нем можно найти множество интересных физических явлений, объяснения которым нет даже в самом толстом кулинарном руководстве. Давайте именно с этой точки зрения подойдем к процессу чаепития, а точнее — к процессу подготовки к нему.

Начнем с эксперимента. Поставим два совершенно одинаковых чайника с равными количествами холодной воды на конфорки одинаковой мощности. Один из них закроем крышкой, а второй оставим открытым. Какой чайник закипит раньше?

Ответ на этот вопрос знает любая опытная хозяйка. Желая вскипятить воду побыстрее, она, не задумываясь, накрывает кастрюлю крышкой, и на поставленный вопрос сразу ответит, что скорее закипит чайник, накрытый крышкой. Ну что же, убедимся в ее правоте — вначале опытным путем, дождавшись кипения наших чайников, а потом объясним результат поставленного опыта с точки зрения молекулярной физики.

Пока чайники нагреваются, поставим на третью конфорку плиты еще один точно такой же чайник с тем же количеством холодной воды, что и первые два, и попробуем его вскипятить быстрее (при той же мощности конфорки). Для этого нужно каким-либо способом быстро повысить температуру воды в нем, «обогнав» ее нагрев в двух первых чайниках. Например, опустить в чайник еще и кипятильник. Ну, а если кипятильника нет?

Вспомним, что для того чтобы повысить температуру воды в какой-либо емкости, в нее достаточно добавить более горячей воды. Может быть, такой прием ускорит закипание воды в третьем чайнике? Отнюдь. Не только не ускорит, но еще и замедлит. Чтобы убедиться в этом, представим себе, что вода массой m_1, находившаяся первоначально в чайнике при температуре t_1, не смешивается и не обменивается теплом с долитой горячей водой массой m_2 и температурой t_2 ($t_2>t_1$). Тепло, которое необходимо было первоначально передать воде массой m_1 для доведения ее до кипения (до температуры $t_{\text{к}}$) — $Q_1=cm_1(t_{\text{к}}-t_1)$. Теперь же придется дополнительно разогреть от t_2 до $t_{\text{к}}$ еще и долитую горячую воду массой m_2. Поэтому полное количество теплоты составит

$$Q=cm_1(t_{\text{к}}-t_1)+cm_2(t_{\text{к}}-t_2).$$

(Понятно, что наше «абсурдное» предположение о том, что порции воды остались неперемешанными, никак не повлияло на закон сохранения энергии в системе, а лишь позволило нам рассмотреть явление проще и быстрее.)

Пока мы безуспешно возились с третьим чайником, первый, с закрытой крышкой, уже начинает «петь». Попробуем выяснить причину этого знакомого всем звука и оценить его характерную частоту.

Первой причиной можно предположить колебания жидкости, возникающие при отрыве пузырьков пара от дна и стенок сосуда. Эти пузырьки чаще всего зарождаются на неоднородностях и микротрещинках поверхности. Характерные размеры пузырьков до закипания воды порядка 1 мм (при кипении они значительно возрастают и могут доходить до сантиметра). Для оценки частоты возникающего звука нам нужно найти время отрыва пузырьков от дна τ. Именно это время характеризует длительность толчка, который получает жидкость в процессе отрыва пузырька, и, следовательно, период возникающих в жидкости колебаний. Соответственно, частота генерируемого звука определится величиной, обратной этому времени: $\nu \sim \tau^{-1}$.

Пока пузырек пребывает на дне в покое, на него действуют выталкивающая его вверх сила Архимеда $F_А = \rho_в g V_п$ ($V_п$ — объем пузырька) и удерживающая его на дне сила поверхностного натяжения. Заведомо малой силой тяжести мы пренебрегаем. По мере увеличения объема пузырька сила Архимеда возрастает и в некоторый момент становится больше силы поверхностного натяжения. Пузырек начинает свое движение вверх. Понятно, что полная сила, действующая на пузырек в процессе его отрыва от дна, по порядку величины равна $F_А$. Масса же пузырька, движущегося в жидкости, определяется не его собственной ничтожно малой массой (массой заключенного в нем воздуха и пара), а так называемой «присоединенной» массой, которая для сферического пузырька составляет $m^* = \frac{2}{3}\pi r_0^3 \rho_ж$ (в этой формуле $\rho_ж$ — плотность жидкости, а r_0 — радиус пузырька). Величина m^* фактически определяет ту массу жидкости вокруг пузырька, которая оказывается вовлеченной в движение при перемещении пузырька.

Таким образом, для ускорения пузырька на начальном этапе движения находим:

$$a \sim \frac{F_А}{m^*} = \frac{\rho_в g \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3}{\frac{2}{3}\pi r_0^3 \rho_в} = 2g.$$

Время отрыва пузырька от дна можно теперь оценить, считая его движение равноускоренным. На расстояние порядка своего размера он поднимается за время

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{2r_0}{a}} \sim 10^{-2}\ \text{с}. \qquad (*)$$

Соответствующая характерная частота генерируемого при отрыве пузырьков звука составляет $\nu_1 \sim \tau_1^{-1} \sim 100$ Гц.

Существует и вторая причина шума, возникающего при нагревании воды в чайнике. Для того чтобы добраться до нее, проследим судьбу пузырька пара после его отрыва от дна. Всплывая, пузырек попадает в еще не достаточно прогретые верхние слои воды. Заполняющий пузырек

насыщенный пар при этом охлаждается, его давление падает и уже не может компенсировать внешнего давления на пузырек со стороны воды. В результате пузырек быстро схлопывается — в жидкости распространяется звуковой импульс.

Оценим характерную частоту возникающего звука. Запишем уравнение Ньютона для массы воды m, устремляющейся внутрь пузырька при его схлопывании:

$$ma = F_д = S \cdot \Delta p.$$

Здесь $S = 4\pi r^2$ — площадь поверхности пузырька, на которую действует сила давления $F_д$, а Δp — разность давлений на границе пузырька, a — ускорение движения границы к центру пузырька. Понятно, что в процесс такого схлопывания вовлечена масса воды, по порядку величины равная произведению плотности воды на объем пузырька: $m \sim \rho_в r^3$. Таким образом, уравнение Ньютона может быть переписано в виде

$$\rho_{в} r^3 a \sim r^2 \cdot \Delta p.$$

Пренебрегая дополнительным давлением, обусловленным натяжением искривленной поверхности пузырька, а также небольшим количеством воздуха, которое может в нем содержаться, будем считать Δp постоянным (зависящим только от перепада температур между придонными и верхними слоями воды). Величину ускорения оценим из кинематического соотношения $r_0 = a\tau_2^2/2$ как $a \sim r_0/\tau_2^2$, где τ_2 — искомое время схлопывания пузырька. Тогда $\rho_{в} r_0^2/\tau_2^2 \sim \Delta p$, откуда

$$\tau_2 \sim r_0 \sqrt{\frac{\rho_{в}}{\Delta p}}. \qquad (**)$$

Вблизи $t_к = 100$ °C давление насыщенного пара падает примерно на $3 \cdot 10^3$ Па при понижении температуры на 1 °C (см. таблицу). Поэтому для оценки можно принять $\Delta p \sim$ $\sim 10^3$ Па, и в результате для времени схлопывания пузырька получаем $\tau_2 \sim 10^{-3}$ с. Характерная частота возникающего при этом звука $\nu_2 \sim \tau_2^{-1} \sim 10^3$ Гц.

t, °C	96,18	99,1	99,6	99,9	100	101	110,8
p, кПа	88,26	98,07	100	101	101,3	105	147

Доводом в пользу такого происхождения шума служит тот факт, что по мере повышения температуры воды частота характерного высокочастотного шума постепенно понижается, и это согласуется с полученной нами формулой (**). Непосредственно перед кипением пузырьки пара перестают схлопываться даже в верхних слоях воды. Тогда единственным механизмом возбуждения звука оказывается рассмотренный выше отрыв пузырьков от дна — частота «пения» чайника заметно понижается. После закипания воды «голос» чайника может снова измениться (особенно если открыть крышку) — это булькают пузыри, лопаясь непосредственно на поверхности воды. Здесь уже оказывается важной и степень заполнения чайника, и его форма.

Таким образом, мы приходим к выводу, что шум чайника перед его закипанием связан с рождением на горячем дне пузырьков пара, отрывом их от дна и гибелью в верхних, еще не достаточно прогретых слоях воды. Эти процессы очень интересно наблюдать непосредственно при нагревании воды в стеклянном чайнике с прозрачными стенками. Надо сказать, что мы не первые, кто заинтересовался этим вопросом и разобрался в нем. Еще в XVIII веке шотландский ученый Джозеф Блэк изучал «пение» нагретых сосудов и установил, что в этом «пении участвует дуэт: поднимающиеся пузырьки нагретого воздуха и вибрация стенок сосуда».

Вернемся теперь к нашим чайникам на плите. Как и ожидалось, первым закипел чайник под закрытой крышкой. Об этом нас извещает вырывающаяся из его носика струя пара. (Не лишним будет напомнить, что видим мы не сам пар — он невидимый; попадая в сравнительно холодный воздух, пар немедленно конденсируется в мельчайшие капельки воды — образуется туман. Струю тумана мы и видим.) А какова скорость этой струи?

Задачу нетрудно решить, если заметить, что в установившемся процессе кипения практически вся подводимая к чайнику энергия нагревателя расходуется на испарение воды. Филателисты знают, что, когда нужно отпарить марку от конверта, воду наливают лишь на дно чайника, чтобы весь образующийся пар выходил через носик. Будем считать, что и в нашем случае носик свободен и пар выходит наружу только через него. Пусть в результате подвода энергии за время Δt испаряется масса воды ΔM. Ее можно определить из уравнения

$$r \cdot \Delta M = P \cdot \Delta t,$$

где r — удельная теплота парообразования, а P — мощность нагревателя. За это же время Δt такая же масса пара покидает чайник через носик. Если площадь выходного отверстия носика s, плотность пара под крышкой чайника $\rho_п$, а искомая скорость v, то

$$\Delta M = \rho_п s v \cdot \Delta t.$$

Плотность насыщенного пара при $T_к = 373$ К можно взять из таблицы или, если таблицы нет под рукой, оценить из уравнения Менделеева —

Клапейрона:

$$\rho_п = \frac{p_{нк}\mu_{H_2O}}{RT_к} \approx 0,6 \text{ кг/м}^3.$$

Таким образом, для скорости вытекания пара из носика получаем окончательно:

$$v = \frac{PRT_к}{rp_{нк}\mu_{H_2O}s}.$$

Подставляя для оценки $P = 500$ Вт, $s = 2$ см^2, $r = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг, $p_{нк} = 10^5$ Па, находим, что $v \sim 1$ м/с.

И вот, наконец-то, закипел чайник с открытой крышкой. Он заметно отстал от первого. Кстати, снимать с плиты его следует с осторожностью — можно здорово обжечься паром. А что обжигает сильнее — пар или кипяток? Прежде чем ответить на этот вопрос, следует его уточнить: что сильнее обжигает — определенная масса кипятка или такая же масса пара? Обратимся снова к оценкам.

Пусть объем, занятый насыщенным стоградусным паром под крышкой чайника, составляет $V_1 = 1$ л и, скажем, одна десятая его часть при открывании крышки сконденсируется на руке. Как мы уже выяснили, плотность пара при $t_к = 100$ °C составляет 0,6 кг/м^3. Поэтому на руке окажется около 0,06 г пара. При конденсации и последующем охлаждении от 100 °C до температуры тела t_0 ($t_0 \approx 37$ °C) выделится тепло $\Delta Q = rm_п + cm_п(t_к - t_0) \approx 150$ Дж. Легко убедиться, что для того же теплового воздействия понадобится почти в десять раз большая масса кипятка. Кроме того, при ожоге паром значительно большей оказывается площадь поражения. Таким образом, пар обжигает сильнее кипятка в первую очередь из-за выделяющегося при конденсации значительного тепла.

Но мы отвлеклись от обсуждения результата нашего опыта с двумя чайниками. Почему же все-таки отстал чайник с открытой крышкой? Разберемся в этом подробнее. Ответ почти очевиден: в процессе нагревания воды в открытом чайнике наиболее быстрые ее молекулы имеют возможность беспрепятственно покидать чайник, унося с собой энергию и как бы охлаждая этим оставшуюся в чайнике воду (этот процесс есть не что иное, как испарение). Поэтому нагревателю в этом случае приходится не только довести воду в

чайнике до кипения, но и часть ее испарить в процессе нагревания. Понятно, что на это уходит большее количество энергии (а следовательно, и времени), чем при кипячении воды в закрытом чайнике, где вырвавшиеся из воды «быстрые» молекулы очень скоро образуют в замкнутом пространстве под крышкой насыщенный пар и, возвращаясь в воду, отдают свою избыточную энергию обратно.

Однако имеют место и два эффекта, противодействующих рассмотренному. Во-первых, в процессе испарения несколько уменьшается масса воды, которую следует доводить до кипения. Во-вторых, кипение в открытом чайнике при нормальном атмосферном давлении наступает при температуре 100 °C, а в закрытом — при более высокой температуре. Действительно, если чайник налит так, что пары не могут выходить через носик, из-за интенсивного испарения перед кипением давление у поверхности повышается, поскольку оно теперь определяется суммой парциальных давлений находящегося под крышкой небольшого количества воздуха и самих водяных паров, и с ростом внешнего давления должна стать и более высокой температура кипения воды, так как она определяется условием равенства давления насыщенного пара в зарождающемся в жидкости пузырьке внешнему давлению.

Как же быть? Какому из эффектов отдать предпочтение?

В случае, когда возникают подобного рода сомнения, на помощь следует призвать точный расчет или, по крайней мере, оценку по порядку величин обсуждаемых эффектов. Вначале оценим массу воды, которая испаряется из открытого чайника в процессе нагревания его до кипения.

Молекулы в жидкости достаточно сильно взаимодействуют друг с другом. Однако если в кристалле потенциальная энергия взаимодействия значительно превышает кинетическую энергию движения атомов или молекул, а в газе, наоборот, кинетическая энергия хаотического движения значительно превосходит потенциальную энергию взаимодействия молекул, то в жидкости эти величины оказываются одного порядка. Поэтому молекулы жидкости совершают тепловые колебания около некоторых положений равновесия, изредка перепрыгивая в другие. «Изредка» по сравнению с периодом колебаний около положения равновесия. В привычном же нам масштабе времени очень даже часто — за одну секунду молекула в жидкости может менять свое положение равновесия миллиарды раз! Однако далеко не каждая молекула в процессе своих перескоков, даже находясь у поверхности, может вырваться на свободу. Для преодоления сил взаимодействия ей необходимо иметь возможность совершить некоторую работу. Можно сказать, что потенциальная энергия молекулы в жидкости меньше ее потенциальной энергии в паре на величину, равную теплоте испарения, отнесенной к одной молекуле. Если r — удельная теплота испарения, то молярная теплота испарения — μr, а теплота испарения, приходящаяся на одну молекулу, — $U_0 = \frac{\mu r}{N_A}$. Эту «работу выхода» молекула может совершить только за счет своей кинетической энергии теплового движения. Однако соответствующая величина средней кинетической энергии $E_к \sim kT$ оказывается значительно меньше U_0. И все же, согласно законам молекулярной физики, в жидкости всегда существует некоторое количество столь высокоэнергетичных молекул, что они в состоянии преодолеть силы притяжения и вырваться за пределы жидкости. Их число в единице объема определяется выражением

$$n = n_0 e^{-\frac{U_0}{kT}}, \qquad (***)$$

где n_0 — концентрация молекул, $e = 2{,}7182....$ — основание натуральных логарифмов.

Ну, а теперь забудем о перепрыгивании молекул жидкости с места на место и будем представлять себе высокоэнергетичные молекулы как некоторый газ. Тогда за малое время Δt через участок поверхности S смогут вырваться высокоэнергетичные молекулы из объема $\Delta V \sim S\bar{v} \cdot \Delta t$. Для оценки мы считаем, что 1/6 часть всех этих молекул приближается к поверхности со скоростью $\bar{v}$, которая определяется соотношением $m_0(\bar{v})^2/2 \sim U_0$. Воспользовавшись выражением (***), для скорости испарения — числа молекул, покидающих жидкость в единицу времени, — находим:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx \frac{n(S\bar{v} \cdot \Delta t)}{6 \cdot \Delta t} \sim Sn_0\sqrt{\frac{U_0}{m_0}}\, e^{-\frac{U_0}{kT}}.$$

Масса, уносимая из жидкости в единицу времени, составляет

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = m_0 \frac{\Delta N}{\Delta t} \sim m_0 n_0 \sqrt{\frac{U_0}{m_0}}\, S e^{-\frac{U_0}{kT}}.$$

Посмотрим, какая масса воды уйдет из чайника при его нагревании на 1К. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии. За время Δt чайник получает от конфорки тепло $\Delta Q = P \cdot \Delta t$ (напомним, что P — полезная мощность конфорки). При этом температура воды повышается на ΔT такое, что

$$P \cdot \Delta t = cM \cdot \Delta T,$$

где M — масса воды в чайнике (теплоемкостью самого чайника мы пренебрегаем). Подставляя в скорость испарения $\Delta t = \frac{cM \cdot \Delta T}{P}$, находим, что

$$\frac{\Delta M}{\Delta T} = \frac{\rho c S M}{P} \sqrt{\frac{r\mu_{H_2O}}{N_A m_0}}\, e^{-\frac{\mu_{H_2O} r}{N_A kT}} \cdot \Delta T =$$

$$= \frac{\rho c S M}{P}\sqrt{r}\, e^{-\frac{\mu_{H_2O} r}{RT}} \cdot \Delta T.$$

При нагревании чайника температура меняется от комнатной до $T_к = 373$ К. Принимая во внимание, что основная потеря массы происходит при достаточно высоких температурах, подставим в экспоненту некую среднюю температуру $\bar{T} = 350$ К. Для остальных величин примем: $\Delta T \approx 80$ К, $S \approx 10^{-3}$ м², $\rho = 10^3$ кг/м³, $\mu_{H_2O} = 0{,}018$ кг/моль, $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/кг. С учетом этих значений найдем, какая часть воды испаряется в процессе нагревания открытого чайника до кипения:

$$\frac{\Delta M}{M} \sim \frac{\rho c S}{P}\sqrt{r}\, e^{-\frac{\mu_{H_2O} r}{RT}} \cdot \Delta T \sim 3 \cdot 10^{-2}.$$

Таким образом, в процессе нагревания чайника без крышки его покидает несколько процентов всей массы воды. Испарение всей этой массы воды идет за счет нагревателя и, естественно, удлиняет процесс закипания открытого чайника. Чтобы понять, на сколько, достаточно заметить, что такое испарение для нагревателя эквивалентно доведению до кипения 1/4 массы воды в чайнике (убедитесь в этом сами).

Теперь перейдем к рассмотрению эффектов, замедляющих закипание закрытого крышкой чайника. О первом из них — неизменности массы в процессе нагревания — и говорить нечего. Только что было сказано, что испарение 3 % массы эквивалентно нагреву 25 % массы, так что необходимостью нагрева этих 3 % в закрытом чайнике можно пренебречь.

Второй эффект — повышение давления под закрытой крышкой — также не может составить конкуренции испарению воды из открытого чайника. Действительно, избыточное (по сравнению с атмосферным) давление под крышкой не может превысить веса крышки, отнесенного к его площади (в противном случае крышка начнет подпрыгивать, выпуская пар):

$$\Delta p \leqslant \frac{m_{кр} g}{S} \sim \frac{3 Н}{10^{-3}\ м^2} \sim 3 \cdot 10^3\ Па.$$

Взглянув еще раз в приведенную выше таблицу (см. с. 11), видим, что такое повышение давления сдвинет

температуру кипения не более чем на $\delta t_к \approx 0{,}5$ °С. Соответственно, на доведение чайника до кипения придется затратить дополнительно тепло $\delta Q = cM \cdot \delta t_к$. Сравнивая величины $cM \cdot \delta t_к$ и $r \cdot \Delta M$, видим, что неравенство $r \cdot \Delta m \gg cm \cdot \delta t_к$ выполняется с запасом в 30:1. Таким образом, и повышение температуры кипения в чайнике, закрытом крышкой, не может всерьез противостоять испарению воды с открытой поверхности в чайнике без крышки.

Кстати, на описанном эффекте повышения давления при нагревании воды в замкнутом объеме работает кастрюля-скороварка. В ней сделано маленькое отверстие предохранительного клапана, которое открывается только начиная с некоторого давления; до этого момента она герметична. В результате испарения жидкости в замкнутый объем давление в кастрюле повышается примерно до $1{,}4 \cdot 10^5$ Па, когда срабатывает клапан, и температура кипения сдвигается до $t_\text{к}^* = 108$ °С (см. ту же таблицу на с. 11). Это позволяет сварить пищу гораздо быстрее, чем в обыкновенной кастрюле.

Но мы заговорились, а чайники на плите исходят паром. Сняв чайник с закрытой крышкой с плиты, вы видите, что кипеть он перестает не сразу — некоторое время из его носика еще вырывается струя пара. Какая же часть воды выкипает после снятия чайника с плиты?

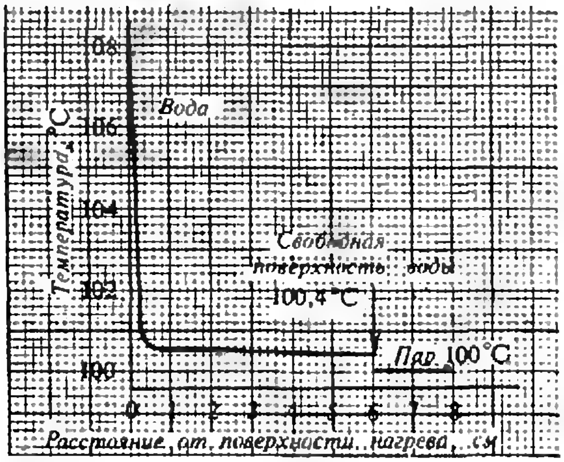
Для того чтобы ответить на эти вопросы, обратимся к рисунку, на котором показано распределение температуры воды по высоте при кипении ее в сосуде, к которому через дно подводится тепло. Из рисунка видно, что тонкий придонный слой воды толщиной $\Delta h \approx 5$ мм сильно перегрет — на его протяжении температура падает от $t_\text{д} = 110$ °С до $t_\text{м} = 100{,}5$ °С. Температура остальной массы воды в чайнике (мы предполагаем уровень воды $h = 10$ см) около 100,5 °С, а у свободной поверхности жидкости происходит скачок температуры на $\Delta t = 0{,}4$ °С. Таким образом, после прекращения подачи тепла в массе воды запасено избыточное относительно равновесного количества тепла

$$\Delta Q_1 = c\rho S_\text{д} \cdot \Delta h \, \frac{t_\text{д} - t_\text{м}}{2} + c\rho S_\text{д}(h - \Delta h) \cdot \Delta t,$$

где $S_\text{д}$ — площадь дна чайника (который мы предполагаем цилиндрической формы). Это тепло пойдет на испарение массы δm жидкости:

$$S_\text{д}\rho c \left(\Delta h \, \frac{t_\text{д} - t_\text{м}}{2} + (h - \Delta h) \cdot \Delta t\right) = \\ = r \cdot \delta m = \rho S_\text{ч} \cdot \delta h \cdot r,$$

где δh — понижение уровня жидкости в чайнике в результате этого



испарения. Из последнего соотношения находим:

$$\frac{\delta h}{h} = \frac{c}{r}\left(\Delta h \, \frac{t_\text{д} - t_\text{м}}{2} + (h - \Delta h) \cdot \Delta t\right) \approx \\ \approx 2 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, после снятия с плиты из чайника выкипит еще около 0,2 % его содержимого.

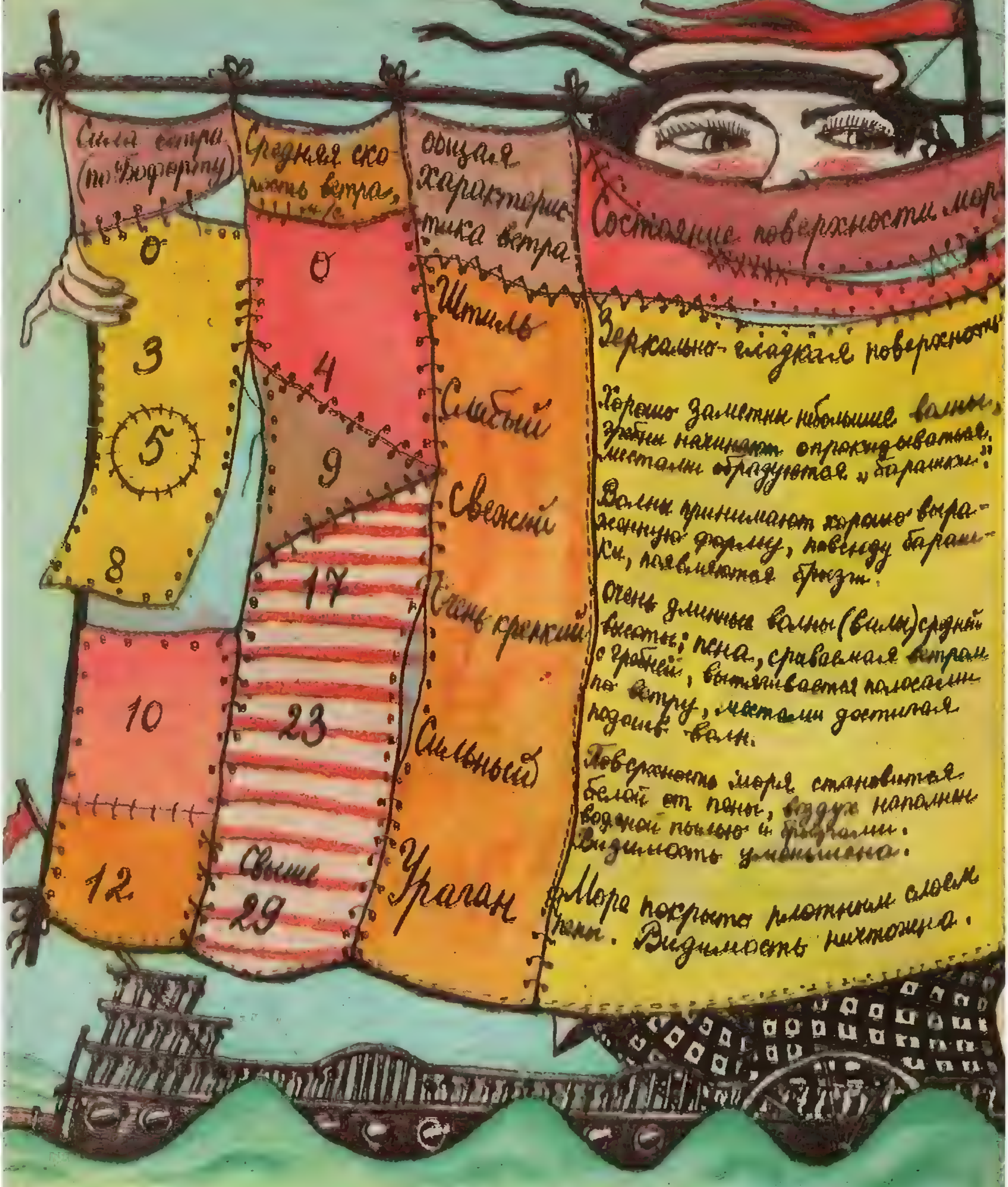
Характерное время выкипания полного чайника с массой воды M (скажем, 2 кг) на плите с полезной мощностью $P = 1$кВт составляет

$$\tau = \frac{rm}{P} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ с.}$$

Соответственно, 0,2 % его массы выкипит за время порядка 10 с (если предполагать, что скорость испарения по порядку величины не меняется по сравнению со стационарным режимом).

Пока мы рассуждали и считали, пришло время разливать чай. Кстати, восточные народы пьют его обычно из пиал. Пиалы, по-видимому, ввели в употребление кочевники — их форма очень удобна при упаковке, они занимают мало места и прочны. Кроме того, они имеют еще одно существенное преимущество перед обычным стаканом. Форма пиалы такова, что верхний слой налитой в нее жидкости благодаря большой поверхности остывает быстрее, чем в стакане, и можно пить, не обжигаясь. В Азербайджане существует специальный сосуд для питья чая — армуди. В нем также большая свободная поверхность сочетается с минимальной поверхностью хранилища горячего чая (нижняя часть сосуда). Старинные фарфоровые чашки также всегда делались расширяющимися кверху. А стаканы как сосуды для питья чая вошли в обиход в XIX веке в связи с дороговизной фарфоровых чашек. Эти произведения декоративного искусства уступались женщинам, а мужчины пили чай из стеклянных стаканов, которые постепенно обзавелись серебряными подстаканниками с вензелем хозяина.

В заключение подумайте, хороши ли с физической точки зрения серебро и алюминий в качестве материалов для изготовления подстаканников? Каким требованиям должен в первую очередь удовлетворять материал, из которого делается подстаканник?

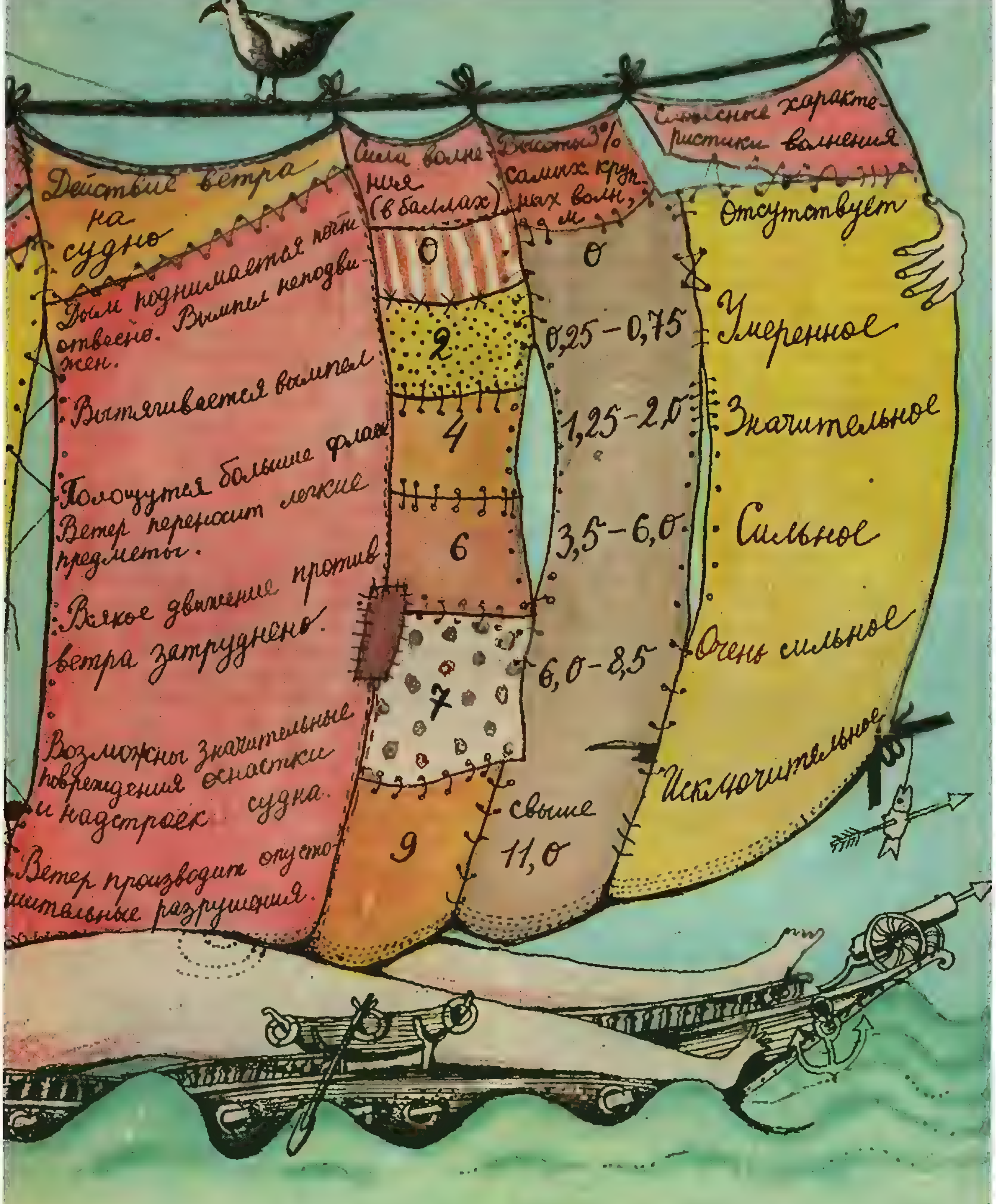


Сила ветра (по Бофорту)	Средняя скорость ветра, м/с	Общая характеристика ветра	Состояние поверхности мор
0	0	Штиль	Зеркально-гладкая поверхност
3	4	Слабый	Хорошо заметны небольшие волны, гребни начинают опрокидываться, местами образуются „барашки".
5	9	Свежий	Волны принимают хорошо выраженную форму, повсюду барашки, появляются брызги.
8	17	Очень крепкий	Очень длинные волны (валы) средней высоты; пена, срываемая ветром с гребней, вытягивается полосами по ветру, местами достигая подошв волн.
10	23	Сильный	Поверхность моря становится белой от пены, воздух наполнен водяной пылью и брызгами. Видимость уменьшена.
12	Свыше 29	Ураган	Море покрыто плотным слоем пены. Видимость ничтожна.

ВОЛНЫ НА ВОДЕ

Доктор физико-математических наук
Л. А. ОСТРОВСКИЙ

Каких только прекрасных слов не было сказано о море, о мыслях и чувствах, возникающих при взгляде на его вечно живую, вечно волнующуюся поверхность! Море — символ грозной стихии, непостоянства, опасности, непостижимого разнообразия. Наблюдения морских волн издавна по-



Действие ветра на судно	Сила волнения (в баллах)	Высота 3% самых крупных волн, м	Словесные характеристики волнения
Дым поднимается отвесно. Вымпел неподвижен.	0	0	Отсутствует
Вытягивается вымпел	2	0,25–0,75	Умеренное
Полощутся большие флаг Ветер переносит легкие предметы.	4	1,25–2,0	Значительное
Всякое движение против ветра затруднено.	6	3,5–6,0	Сильное
Возможны значительные повреждения оснастки и надстроек судна.	7	6,0–8,5	Очень сильное
Ветер производит опустошительные разрушения.	9	свыше 11,0	Исключительное

буждали человека к размышлениям, давали начало новым научным теориям. Сама наука о волнах «зародилась в океане», и, пожалуй, бóльшую часть из того, что известно сегодня о волнах самой различной природы, люди впервые узнали, изучая волны на воде.

Бегущая синусоида

В школьном курсе физики подробно изучают движение твердых тел. Волна — движение совсем другого рода. Пусть, например, в каком-либо месте водной поверхности появилось возмущение — упал камень, движется судно, подул ветер... Движение частиц воды, возникшее в этом месте, будет передаваться соседним частицам, и постепенно еще захватит обширную часть поверхности (от камня, например, будут разбегаться круги). При этом каждая частица воды смещается слабо, но движение «переносится» на значительные расстояния. Энергия колебаний передается от одних частиц к другим, как бы по эстафете. Такое изменение состояния среды, распространяющееся в ней и несущее с собой энергию, мы называем волной.

Чтобы понять свойства волновых движений, их удобно разложить на какие-то более простые элементы. В качестве такого элемента чаще всего принимают синусоидальную волну.

Представим себе «синусоидально гофрированную» поверхность воды, и этот «гофр» не стоит на месте, а движется вдоль оси x с постоянной скоростью (рисунок 1). Если разрезать нашу волнистую поверхность вертикальной плоскостью, параллельной оси x, то получится синусоида. Расстояние между двумя соседними вершинами, двумя соседними впадинами, вообще между двумя ближайшими точками, находящимися в одинаковых фазах, одно и то же — это длина волны λ. Так как волна бежит вдоль оси x с постоянной скоростью, любая точка пространства, через которую проходит волна, через определенный промежуток времени T оказывается в одной и той же фазе — колебания точек происходят с периодом T. Ясно, что за это время волна должна сместиться по оси x на расстояние λ. Скорость такого смещения $c=\lambda/T$ называют фазовой скоростью волны.

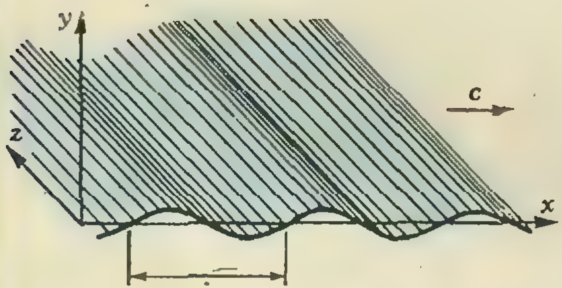


Рис. 1.

Но бесконечных синусоид в природе на бывает — волновое движение где-то начинается и где-то заканчивается. Правда, нередко волна достаточно долго остается почти синусоидальной, но это «почти» оказывается очень существенным. Чтобы понять, в чем дело, рассмотрим две синусоидальные волны с различными, но близкими периодами T_1 и T_2 и близкими длинами λ_1 и λ_2. Если в какой-то области пространства вершины и впадины обеих волн почти совпадают, то суммарный размах — амплитуда — колебаний точек пространства заметно увеличится. Но по мере удаления от этой области различие в длинах волн приведет к тому, что фазы волн, соответствующие одной и той же точке пространства, будут заметно различны, и в конце концов вершины одной волны начнут попадать на впадину другой — волны будут гасить друг друга. Потом это гашение снова сменится усилением, и вся картина будет периодически повторяться. Вы можете в этом убедиться, нарисовав две синусоиды с одинаковыми амплитудами со слегка различными периодами и сложив их — наложив одну на другую, как на рисунке 2, *а*. Результат такого сложения — на рисунке 2, *б*: это как бы синусоидальная волна с периодом T, близким к T_1 и T_2, но амплитуда ее периодически меняется. Такой процесс называют биениями, а волну называют модулированной.

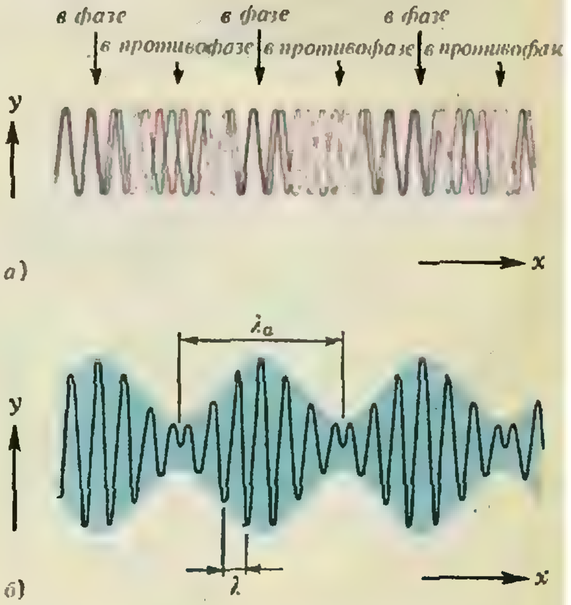


Рис. 2.

Изменение амплитуды при биениях описывается волной, «огибающей» основные — или, как говорят, несущие — колебания. Найдем длину $\lambda_в$ этой огибающей волны и ее период $T_в$. Сделать это довольно просто. Числа волн исходных синусоид, укладывающихся, скажем, между двумя соседними максимумами огибающей, должны отличаться на единицу, чтобы вершины и впадины этих волн снова совместились. Для первой волны число таких волн есть $\lambda_в/\lambda_1$, для второй — $\lambda_в/\lambda_2$. Значит, $\frac{\lambda_в}{\lambda_1} - \frac{\lambda_в}{\lambda_2} = 1$, откуда

$$\lambda_в = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \qquad (1)$$

Здесь мы через $\Delta\lambda$ обозначили разность $\lambda_2 - \lambda_1$, а произведение $\lambda_1\lambda_2$ заменили квадратом среднего геометрического λ_1 и λ_2 ($\lambda^2 = (\sqrt{\lambda_1\lambda_2})^2$) — величиной, близкой к тому и другому значению, а также к длине несущей волны (точный расчет для длины несущей волны дает $\lambda_н = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$). Нетрудно получить аналогичное (1) выражение для периода биений: $T_в \approx T^2/\Delta T$. Теперь можем найти скорость огибающей — скорость, с которой движутся биения:

$$v = \frac{\lambda_в}{T_в} = \frac{\lambda^2}{T^2}\,\frac{\Delta T}{\Delta\lambda} = c^2\,\frac{\Delta T}{\Delta\lambda}, \qquad (2)$$

где c — фазовая скорость несущей волны. Если скорости обеих синусоид, из которых складывается несущая волна, в точности одинаковы, так что $\lambda_1 = cT_1$, а $\lambda_2 = cT_2$, то и $\frac{\Delta\lambda}{\Delta T} = c$, и получается, что $v = c$. В этом случае вся волновая картина бежит со скоростью c как целое. Если же $c_1 \neq c_2$, то и v отличается от c: получается, что несущая волна движется с одной скоростью — фазовой скоростью c, а огибающая — с другой скоростью v, которую называют групповой. Именно с групповой скоростью переносится волной энергия.

Волна-огибающая, как и синусоида, бесконечна и во времени, и в пространстве. Только сложив не две, а много (строго говоря — бесконечно много) синусоид с близкими длинами и периодами, можно получить «волновой пакет» — картину колебаний, занимающих ограниченную область пространства (рисунок 3). И опять весь пакет будет двигаться с групповой скоростью, а несущая «синусоида» — с фазовой. Правда, это движение не может продолжаться бесконечно долго. Если фазовые скорости различных синусоид различны, то групповые скорости для разных пар синусоид, вычисленные по формуле (2), будут различны. Из-за этого на больших расстояниях волновой пакет постепенно изменит свою форму и в конце концов расплывется, «размажется» по пространству. Это явление называют дисперсией, от латинского слова dispersio — рассеяние.

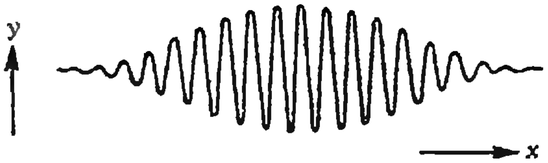


Рис. 3.

Итак, для описания движений в среде с дисперсией нам приходится ввести не одну, а по меньшей мере две скорости!

Волны на воде

Вернемся к волнам на поверхности воды. Для строгого описания этих волн нужно было бы записать уравнения движения частиц воды и попытаться найти их решения. Однако многое можно понять и без уравнений, если воспользоваться так называемым методом размерностей, который часто позволяет исследовать явление, не прибегая к сложным математическим выкладкам.

Посмотрим, от каких физических величин может зависеть скорость распространения синусоидальных волн на поверхности воды. Если пренебречь влиянием атмосферы (ветра), а водоем считать бесконечно глубоким, то в нашем распоряжении — плотность воды ρ, ускорение силы тяжести g и, наконец, период самой волны T (или ее длина λ) *). Запишем размерности этих величин:

$$[\rho] = кг/м^3,\ [g] = м/с^2,\ [T] = с.$$

---

*) Еще одним размерным параметром, который может влиять на скорость волны, является поверхностное натяжение σ. Однако, как показывает расчет, оно оказывается существенным лишь для очень коротких волн (~1 см), которыми мы здесь интересоваться не будем.

Только от них может зависеть скорость волны c. Как составить из них комбинацию с размерностью скорости? Поскольку $[c]=$м/с, а масса входит только в $[\rho]$, плотность ρ нужно исключить. Из оставшихся величин g и T годится единственная комбинация: $[c]=[gT]$ (безразлично, о какой скорости — фазовой или групповой — идет речь).

Это позволяет нам утверждать, что c и v пропорциональны gT. Коэффициент пропорциональности методом размерностей не определить; из более детальной теории следует, что для фазовой скорости он равен $1/2\pi$:

$$c=\frac{gT}{2\pi}. \qquad (3)$$

По определению $c=\lambda/T$, и из формулы (3) получается связь между длиной и периодом волны —

$$\lambda=\frac{gT^2}{2\pi}.$$

Это соотношение называют дисперсионным уравнением. Можно записать и еще одно выражение для c:

$$c=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

А какова групповая скорость? Выше мы получили соотношение $v=c^2\frac{\Delta T}{\Delta\lambda}$ (см. (2)). Теперь, воспользовавшись дисперсионным уравнением, найдем отношение $\frac{\Delta T}{\Delta\lambda}$:

$$\Delta\lambda=\frac{g}{\pi}T\cdot\Delta T\Rightarrow\frac{\Delta T}{\Delta\lambda}=\frac{\pi}{gT}.$$

Подставив это в формулу для v, с учетом (3) получим:

$$v=c^2\frac{\Delta T}{\Delta\lambda}=\frac{gT}{4\pi}=\frac{1}{2}c. \qquad (4)$$

Итак, для волн на глубокой воде групповая скорость равна половине фазовой, причем обе они зависят от периода волны, т. е. волна обладает дисперсией.

Запишем расчетные выражения, связывающие длину и скорость распространения волны с ее периодом:

$$\lambda=1{,}56T^2,\quad v=\frac{1}{2}c\approx0{,}78T$$

(T берется в секундах, λ — в метрах, а скорости — в метрах/секунду).

Чтобы представить себе, что бывает на самом деле, приведем небольшую таблицу:

T, с	0,5	1	5	15	20	50
λ, м	0,39	1,56	39	156	620	3900
v, м/с	0,39	0,78	3,9	7,8	15,1	39

Как видно из таблицы, сравнительно короткие волны движутся со скоростью пешехода, а длинные могут обогнать автомобиль.

Взяв еще больший период, скажем $T\approx1$ ч, и соответственно длину волны $\lambda\approx20000$ км, мы получили бы фантастическую скорость $v\approx\approx10000$ км/ч. Однако для столь длинных волн гораздо раньше окажется, что волна будет «доставать» дно даже в самом глубоком месте океана, и наши простые формулы перестанут быть применимыми. Неприменимы они и для очень коротких волн, длиной меньше нескольких сантиметров — здесь сказывается влияние сил поверхностного натяжения. И все-таки эти формулы годятся для описания волн в очень широком диапазоне длин — от десятка сантиметров до десятка и более километров.

Хотя волна образуется движением частиц воды, сами эти частицы вовсе не движутся вместе с волной. В этом легко убедиться, взглянув на поплавок: он остается на месте, совершая лишь небольшие колебательные движения. Чтобы представить, как в процессе распространения синусоидальной волны движутся частицы воды, удобно встать на точку зрения наблюдателя, движущегося со скоростью, равной фазовой скорости волны. Для такого наблюдателя «гофрированная» поверхность воды остановится, застынет, но зато вся масса воды будет «течь» в обратную сторону со скоростью c. Частицы воды на поверхности скользят по волнистому рельефу точно так же, как это делал бы любой шарик, пущенный по нему с некоторой начальной скоростью. Взобравшись на вершину рельефа, такой шарик (и частица воды) будет иметь скорость, несколько меньшую средней скорости c, а скатившись к подошве — несколько бо́льшую c. В неподвижной системе отсчета, в которой волновой профиль бежит с фазовой скоростью, движение отдельной частицы будет складываться из этих торможений и ускорений как в горизонтальном, так и в вертикальном направлении. Результат такого сложения — движение по окружности, радиус которой равен амплитуде волны (рисунок 4).

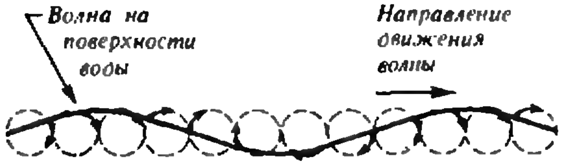


Рис. 4.

Частицы, лежащие под поверхностью, тоже описывают окружности, но с меньшими радиусами. Амплитуды колебаний частиц уменьшаются с глубиной по экспоненте, пропорционально $e^{-2\pi z/\lambda}$, где z — глубина. Это означает, что на глубине, равной длине волны, амплитуда волновых движений в $e^{2\pi}\approx 535$ раз меньше, чем на поверхности. Поэтому даже сильные штормы практически не возмущают толщу океана на глубинах больше, скажем, сотни метров, и если λ меньше $2\pi H$, где H — глубина водоема, то его действительно можно считать бесконечно глубоким—волны «не задевают» дна.

Конечно, в реальном морском волнении волны обычно не синусоидальны, они состоят из многих синусоид, и движение частиц воды сложнее — оно тоже как бы состоит из многих окружностей различных радиусов, вращение по которым происходит с разной скоростью; но в достаточно слабых волнах это движение остается ограниченным и примерно симметричным (вверх — вниз). Но более сильная волна, даже строго периодическая, не будет синусоидой — ее вершины острее, чем подножия (рисунок 5). А если волна станет еще круче, на ее вершине появится «излом» с углом примерно 120 °, а затем произойдет «обрушивание» — на вершине возникнет пенный «барашек». Вы, наверное, видели такие барашки на море, озере, реке; при сильном ветре они покрывают значительную часть водной поверхности.

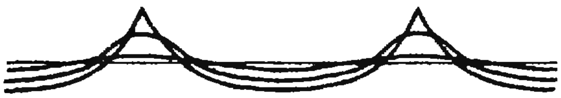


Рис. 5.

Ветровые волны

В конце прошлого века замечательный английский физик Релей заметил: «Основным законом морского волнения является отсутствие какого-либо закона». Правда, уже давно была разработана описательная классификация состояния морской поверхности, необходимая для моряков. Как известно, сила ветра характеризуется 12-балльной шкалой Бофорта, а высота волн — 9-балльной шкалой волнения. Выдержки из этих шкал приведены на с. 16—17. Как видите, они во многом основаны на словесном описании обстановки. Эта классификация немного напоминает пушкинскую «Сказку о рыбаке и рыбке». Помните, сначала старик «видит, море слегка разыгралось»; потом «помутилося синее море», затем «почернело синее море» и, наконец, «видит, на море черная буря: так и вздулись сердитые волны, так и ходят, так воем и воют»... Пожалуй, тут даже можно указать, сколько баллов волнения прибавляла каждый раз золотая рыбка!

В последнее время средства измерения морских волн значительно усовершенствовались. Кроме специальных волнографов — приборов, записывающих колебания поверхности моря в данной точке, все большее значение приобретают дистанционные методы. Уже простое фотографирование поверхности с судна, самолета дает массу информации. Эффективна и радиолокация моря. Появилась и быстро развивается «спутниковая океанография». В результате многолетних наблюдений собраны обширные данные о морском волнении. Но получить ответ на вопросы о том, как именно ветер возбуждает волны на воде, как они развиваются дальше, совсем не легко, и полная ясность не достигнута по сей день, хотя основные механизмы известны.

Представьте себе гладкую водную поверхность. Вот подул ветер — появились волны. Почему? Прежде всего потому, что ветер — это не ровный, регулярный поток воздуха, скользящий вдоль водной глади. В нем всегда есть случайные пульсации давления, которые действуют на воду, возмущая, искривляя ее поверхность. Если эти пульсации действуют «кто в лес, кто по дрова», беспорядочным образом, то в итоге никакой заметной волны, скорее всего, не возникнет. Иначе обстоит дело, если скорость ветра близка к фазовой скорости возбуждаемой им волны. Тогда возникает резонанс: поверхность колеблется в такт с воздушными пульсациями, и волна, распространяясь, непрерывно усиливается. По мере роста амплитуды волна сама начинает влиять на пульсации воздушного потока, усиливая их и усиливаясь под их действием еще больше, и этот взаимосвязанный рост идет еще быстрее, чем на начальном этапе. Такой «разгон» может происходить достаточно долго, и тогда волна достигает значительной высоты. Но в конце концов, даже если ветер не прекратится, этот процесс замедлится. Во-первых, вершины волн будут заостряться (как на рисунке 5) и затем обрушиваться, образуя барашки. Во-вторых, различные волны не существуют каждая сама по себе, а взаимодействуют, т. е. передают друг другу энергию, которая перераспределяется между ними сложным образом.

В результате всего этого и формируется картина реального ветрового волнения, состоящего из волн различных длин, амплитуд и направлений. И все же в этой картине преобладают волны, фазова́я скорость которых близка к скорости ветра u, и значит, длина волны равна примерно $2\pi u^2/g$: чем сильнее ветер, тем больше характерная длина и, конечно, высота волн. Вообще, высота гладких волн не превышает 1/7 их длины; более крутые гребни обрушиваются, образуя барашки. При слабом ветре существуют только короткие волны, но и то не всегда. Как уже упоминалось, для очень коротких волн необходимо учитывать влияние поверхностного натяжения. Это влияние сказывается в том, что фазовая скорость не убывает до нуля с уменьшением λ, а достигает минимума для волн с длиной 1,73 см и снова растет с дальнейшим укорочением волны. Минимум фазовой скорости составляет 23 см/с (для чистой, лишенной поверхностных пленок воды). Это и есть минимальная, пороговая скорость ветра, при которой могут появляться волны, причем волны короткие, «сантиметровые»; их легко заметить, наблюдая появление ряби в любой луже при кратковременных порывах ветра.

Нужно заметить, что нередко на спокойной морской поверхности все-таки появляются довольно правильные синусоидальные волны — зыбь. Это отголосок далекого шторма: в области шторма возникает сложное волнение, но вдаль убегают прежде всего длинные волны, которые имеют наибольшую групповую скорость и к тому же слабо затухают. Это и есть зыбь, распространяющаяся иногда на тысячи километров и вызывающая неприятную качку судна.

Море волн

Поистине в проблеме морских волн больше вопросов, чем ответов, и мы лишь довольно поверхностно коснулись ее. «Поверхностно» еще и потому, что, как мы видели выше, ветровые волны возмущают лишь тонкий, в десятки метров, верхний слой океана — ведь для глубоких его областей эти волны всегда короткие. Но есть и другие волны — приливы, цунами, — длина которых больше глубины самых глубоких мест океана. В таких волнах движение воды захватывает всю толщу океана, а сами они распространяются с наибольшей для данной глубины H скоростью $c=v=\sqrt{gH}$. Но и это не всё. В толще океана существуют «волны-тихоходы» — так называемые внутренние волны, бегущие со скоростями, не превышающими одного — двух метров в секунду, но зато достигающие огромной высоты в десятки, подчас сотни метров. Впрочем, что там метр в секунду! Имеются и такие волны — волны Россби, периоды которых достигают нескольких месяцев, а скорости составляют всего 1—2 сантиметра в секунду; для таких волн определяющую роль играет вращение Земли. Эти и другие волны интересны для физиков, океанологов, метеорологов, и они заслуживают отдельного рассказа.

Задачи

М1056—М1060, Ф1068—Ф1072

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 ноября 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1056» или «Ф1068». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике».

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1056. В каждой клетке квадратной таблицы 1987×1987 написано число, не превосходящее по модулю 1. В любом квадрате 2×2 данной таблицы сумма чисел равна 0. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не превосходит 1987.

А. С. Меркурьев

М1057. Два игрока поочередно выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p. Правилами игры запрещается писать на доске делители уже выписанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

а) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=10$, и укажите ее.

б) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=1000$.

Д. В. Фомин

М1058. На целочисленной решетке отмечено непустое множество узлов. Кроме того, задан конечный набор векторов с целыми координатами. Известно, что если от любого отмеченного узла отложить все заданные векторы, то среди их концов будет больше отмеченных узлов, чем неотмеченных. Докажите, что отмеченных узлов бесконечно много.

Д. Г. Флаас

М1059. График функции $y=f(x)$, определенной на всей числовой прямой, переходит в себя при повороте на угол $\pi/2$ вокруг начала координат.

а) Докажите, что уравнение $f(x)=x$ имеет ровно одно решение.

б) Приведите пример такой функции.

А. В. Клюшин

М1060. На плоскости даны две замкнутые ломаные, каждая с нечетным числом звеньев. Все прямые, содержащие звенья этих ломаных, различны, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что из каждой ломаной можно выбрать по одному звену так, чтобы они были противоположными сторонами некоторого выпуклого четырехугольника.

А. Сердюков, Д. Г. Флаас

Ф1068. Снаряд, летящий по вертикали, разрывается в верхней точке траектории на три равных осколка. Один из осколков, двигаясь по вертикали, упал через время T_1 после выстрела, два других упали одновременно через время T_2 ($T_1<T_2$). Найти высоту H, на которой разорвался снаряд.

Ю. Г. Павленко

Ф1069. На угол величиной α, согнутый из тонкого гладкого стержня, надета легкая петля длиной l с прикрепленным к ней небольшим грузом; угол установлен вертикально (рис. 1). Найдите расстояние от груза до вершины угла в положении равновесия и период малых колебаний груза в плоскости угла.

И. И. Мазин

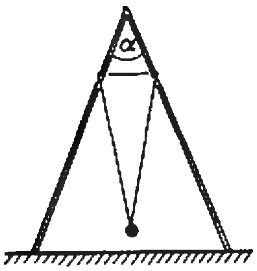


Рис. 1.

Ф1070. Мальчик выдувает из длинной трубки мыльный пузырь. Надув пузырь, он выпускает трубку изо рта, при этом пузырь сдувается обратно в трубку и окончательно исчезает через время τ. За какое время сдуется таким же образом пузырь вдвое большего радиуса? Считать, что воздух движется по трубке до-

Задачник „Кванта"

Задачник „Кванта"

статочно медленно, свойства мыльной пленки у обоих пузырей одинаковы.

Д. А. Купцов

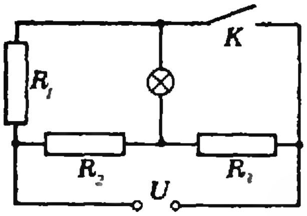


Рис. 2.

Ф1071. В схеме, указанной на рисунке 2, лампочка горит одинаково ярко как при замкнутом, так и при разомкнутом ключе K; $R_1 = R_3 = 90$ Ом, $R_2 = 180$ Ом, $U = 54$ В. Найдите напряжение на лампочке.

В. И. Чивилёв

Ф1072. Почему наличие ультрафиолетового компонента в спектре ухудшает резкость изображения, получаемого на фотопленке?

Л. А. Ашкинази

Problems

M1056 — M1060, P1068 — P1072

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than November 1, 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant' problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

M1056. In each little square of a 1987×1987 square table there is a number no greater than 1 in absolute value. In any 2×2 square of the table the sum of numbers is 0. Prove that the sum of all numbers in the table is no greater than 1987.

A. S. Merkurlev

M1057. Two players in turn write natural numbers on a board. The rules forbid writing numbers greater than p and divisors of previously written numbers. The player who has no move loses.

a) Determine which of the players has a winning strategy for $p = 10$ and describe this strategy.

b) Determine which of the players has a winning strategy for $p = 1000$.

D. V. Fomin

M1058. A non-empty set of points is chosen on an integer lattice. A finite family of vectors with integer coordinates in given. In is known that if the initial points of all the vectors are placed at any of the chosen points, more of the vectors' end points will be chosen points than not chosen ones. Prove that there are infinitely many chosen points.

D. G. Flaas

M1059. The graph of the function $y = f(x)$, defined on the entire numerical axis, is mapped into itself by the rotation about the origin by the angle $\pi/2$.

a) Prove that the equation $f(x) = x$ has exactly one solution.

b) Give an example of such a function.

A. Klyushin

M1060. Two closed polygonal lines, both with an odd number of sides, are drawn in the plane. All the straight lines containing the sides of these lines, differ, no three of them meet at one point. Prove that it is possible to choose one side in each of the lines so that the two chosen sides are opposite sides of a convex quadrilateral.

A. Serdyukov, D. G. Flaas

P1068. A canonball shot vertically up explodes at the highest point of its trajectory into three equal parts. One of the parts, moving vertically, falls in time T_1 after the shot, the two others fall simultaneously in time T_2 ($T_1 < T_2$). Find the elevation H of the explosion point.

Yu G. Pavlenko

P1069. The angle α obtained by bending a thin smooth rod has a light loop on it; the loop is of length l and has a small weight tied to it; the angle is placed vertically (figure Рис. 1, p. 23). Find the distance between the weight and the angle's vertex in the equilibrium position and the period of small oscillations of the weight in the angle's plane.

I. I. Mazin

P1070. A boy blows a soap bubble from a long straw. Having blown up the bubble to a certain size, he takes the straw out of his mouth and the bubble shrinks back into the straw,

finally disappearing in time τ. How long will a bubble of double radius take to disappear? Assume that the air in the straw moves slowly and the properties of the soap film of the two bubbles are the same.

D. A. Kuptsov

P1071. In the circuit shown on figure Рис. 2 the bulb burns with equal brightness when the switch K is turned on or off; $R_1=R_3=90$ Ohms, $R_2=180$ Ohms, $U=54$ V. Find the voltage on the bulb.

V. I. Chivilev

P1072. Why does the presence of the ultraviolet component in light spectrum decrease the sharpness of photographic images?

L. A. Ashkinazi

Решения задач

М1036—М1040, Ф1048—Ф1052

М1036. *Существует ли такой (невыпуклый) пятиугольник, который можно разрезать на два равных пятиугольника?*

Ответ: существует; примеры приведены на рисунке. Можно показать, что любой пятиугольник, удовлетворяющий условию, устроен как один из этих двух примеров — при соответствующих параметрах. (Ломаная, разбивающая пятиугольник, состоит из двух звеньев и соединяет его вершину с точкой на противоположной стороне; отсюда выводится, что углы пятиугольника равны α, $360°-\alpha$ и либо $90°$, β, $90°-\beta$, либо β, $\alpha-\beta$, $180°-\alpha$.)

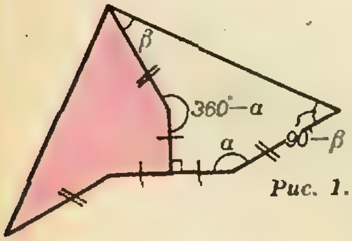


Рис. 1.

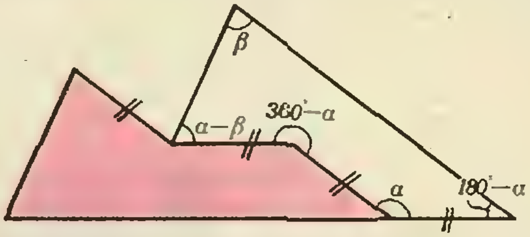
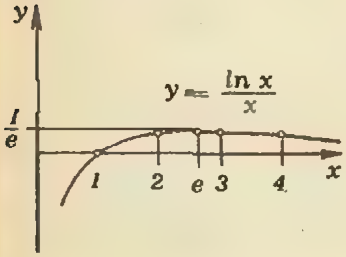


Рис. 2.

С. М. Хосид

М1037. *Найдите все решения в натуральных числах x, y уравнения $x^y-y^x=x+y$.*



Ответ: $(x, y)=(2, 5)$.

Докажем, что других решений, кроме указанного, уравнение не имеет. Выясним сначала, когда левая часть уравнения положительна, т. е.

$$x^y>y^x \tag{1}$$

или $\ln x/x>\ln y/y$. Производная функции $\ln x/x$ равна $(1-\ln x)/x^2$, поэтому эта функция возрастает на отрезке $[1; e]$ и убывает при $x\geqslant e$ (см. рисунок). Учитывая, что $2<e<3$ и $\ln 4/4=\ln 2/2<\ln 3/3$ (так как $2^3<3^2$), получаем, что (1) выполняется для следующих пар: $(x, 1)$ при $x>1$, $(3, 2)$, $(2, y)$ при $y\geqslant 5$ и (x, y) при $3\leqslant x<y$. Непосредственно проверяется, что пары $(x, 1)$ и $(3, 2)$ не удовлетворяют уравнению, а $(2, 5)$ — удовлетворяет. Пользуясь тем, что $2^y>y^2$ при $y\geqslant 5$, находим для пар вида $(2, y)$, где $y\geqslant 6$, что

$$x^y-y^x-x-y=2^y-y^2-y-2>$$
$$>2(y-1)^2-y^2-y-2=y^2-5y>0.$$

Теперь остается доказать, что при $3\leqslant x<y$ (т. е. $y\geqslant x+1$) уравнение не имеет решений. Фиксируем x, полагая $x=a\geqslant 3$, и рассмотрим функцию $f(y)=a^y-y^a$. Достаточно установить неравенства

$$f'(y)>1 \text{ при } y\geqslant a+1 \tag{2}$$

и

Лемма

Если $f'(x) > g'(x)$ *при* $x \geqslant x_0$, *то* $f(x) > f(x_0) + g(x) - g(x_0)$ *при* $x > x_0$ (действительно, функция $f(x) - g(x)$ имеет положительную производную и, следовательно, строго возрастает при $x \geqslant x_0$).

$$f(a+1) > 2a+1; \qquad (3)$$

тогда согласно лемме, приведенной на полях для функций $f(y)$ и $g(y) = y + a$ ($g'(y) = 1$), из (2) и (3) будет следовать, что при $y \geqslant a+1$

$$a^y - y^a = f(y) \geqslant f(a+1) + g(y) - g(a+1) > \\ > 2a + 1 + y - (a+1) = a + y.$$

Оценим производную $f(y)$:

$$f'(y) = \ln a \cdot a^y - ay^{a-1} = \\ = (\ln a - 1)a^y + (a^y - y^a) + y^{a-1}(y-a) > y^{a-1}(y-a)$$

($\ln a \geqslant \ln 3 > 1$, $a^y - y^a > 0$ по доказанному выше). Из этой оценки сразу следует (2), поскольку $y^{a-1}(y-a) \geqslant (a+1)^{a-1}$ при $y \geqslant a+1$. Для доказательства (3) заметим, что $y^{a-1}(y-a)$ — это производная функции $g(y) = y^{a+1}/(a+1) - y^a$, и по лемме на полях (для $x = a+1$, $x_0 = a$)

$$f(a+1) > f(a) + g(a+1) - g(a) = \ -g(a) = \\ = a^a - \frac{a^{a+1}}{a+1} = \frac{a^a}{a+1} = \left[a^{a-2}\left(1 - \frac{1}{a+1}\right)\right]a.$$

Функция в квадратных скобках, очевидно, возрастающая и при $a \geqslant 3$ не меньше $3(1-1/4) = 9/4$. Поэтому

$$f(a+1) > 2a + \frac{a}{4} \geqslant 2a + \frac{3}{4};$$

но числа $f(a+1)$ и $2a$ — целые, значит, $f(a+1) \geqslant 2a+1$, причем равенство здесь возможно только при $a = 3$, но и в этом случае $f(4) = 3^4 - 4^3 = 81 - 64 > 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

А. И. Зайчик, В. Н. Дубровский

М1038. *а) Докажите, что если произведение* mn *делится на 6 (где* m *и* n *— целые числа, большие 1), то прямоугольник из* $m \times n$ *клеток можно разрезать на уголки из трех клеток. При каких* m *и* n *это можно сделать так, чтобы при этом линии раздела не вырезали:*

б) ни одного прямоугольника 2×3 *клетки;*

в) ни одного прямоугольника (меньшего $m \times n$*)?*

а) Достаточно рассмотреть два случая: $m = 3k$, $n = 2l$ и $m = 6k$, $n = 2l+1$, где $k \geqslant 1$, $l \geqslant 1$. В первом случае прямоугольник $m \times n$ можно разбить на $k \times l$ прямоугольников 3×2, каждый из которых разрезается на два уголка (рис. 1, *а*). Во втором — отрезаем от прямоугольника $m \times n$ полоску $m \times 3$, которую можно разрезать на $3k$ прямоугольников 2×3 (рис. 1, *б*), а затем (при $l > 1$) разрезаем оставшийся прямоугольник $m \times (2l-2)$ так же, как в первом случае.

Вообще, *прямоугольник* $m \times n$ *можно разрезать на уголки тогда и только тогда, когда одно из чисел* m *и* n *делится на 3, за исключением случая* $3 \times (2l+1)$ (*или* $(2l+1) \times 3$). Действительно, очевидно, что mn — число клеток в прямоугольнике $m \times n$ — делится на 3, причем если одно из чисел m и n равно 3, то уголки неизбежно должны складываться в прямоугольники 3×2 (рис. 1, *б*), поэтому другое число должно быть четно. Обратно, пусть m делится на 3. Можно считать, что $m/3$ и n — нечетные числа, $m \geqslant 9$, $n \geqslant 5$ (остальные случаи рассмотрены выше), т. е. $m = 9 + 6k$, $n = 5 + 2l$, $k, l \geqslant 0$. Прямоугольник $m \times n$ разрезается на 3 прямоугольника: 9×5, $9 \times 2l$ и $6k \times n$; разрезание первого из них на уголки показано на рисунке 2, два других разрезаются на прямоугольники 3×2, как было показано выше.

б), в) В обеих задачах б) и в) **ответ** одинаков: «разрезания без прямоугольников» (будем называть их правильными) существуют лишь для прямоугольников $6k \times 2n$, где $k \geqslant 1$, $n \geqslant 3$, 6×4 и 3×2.

Как мы уже видели в решении задачи а), одно из чисел m и n должно делиться на 3. Заметим далее, что при правильном разрезании уголок может примыкать к стороне прямоугольника $m \times n$, отличного от

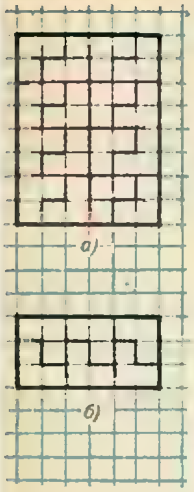


Рис. 1.

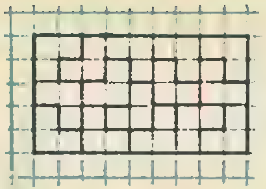


Рис. 2.

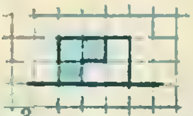


Рис. 3

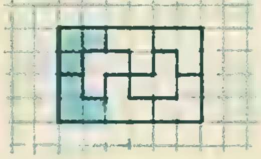


Рис. 4.

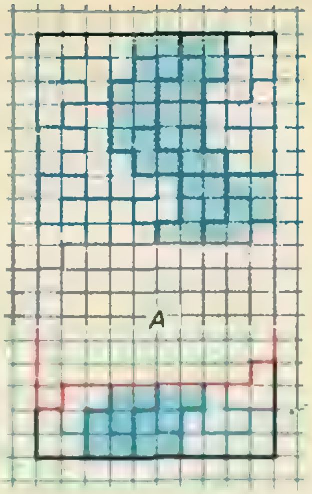


Рис. 5.

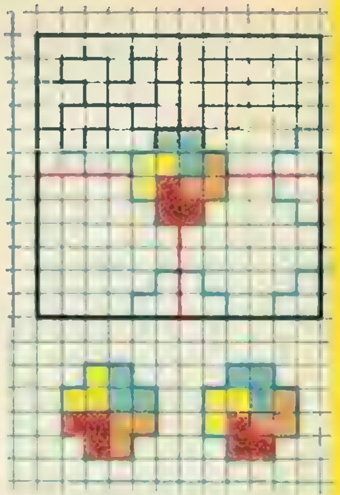


Рис. 6.

3×2, только по двум клеткам — иначе образуется прямоугольник 3×2 (рис. 3). Следовательно, числа m и n должны быть четными.

Прямоугольник $6k\times 2$ правильно разрезать нельзя — очевидно, он обязательно распадется на прямоугольники 3×2. Легко видеть также, что при попытке правильного разрезания прямоугольника $6k\times 4$ обязательно образуется прямоугольник 6×4 (начните с короткой стороны — рис. 4), поэтому при $k>1$ правильное разрезание здесь также невозможно. Наконец, правильное разрезание прямоугольника $6k\times 2l$ при $k\geqslant 1$, $l\geqslant 3$ показано на рисунке 5, где нужно взять $k-1$ «блоков» A по вертикали, а по горизонтали — по $l-3$ голубых «блока» в ряду.

Существуют и другие замощения прямоугольников уголками. Например, переставляя уголки внутри «крестов», можно получать симметричные правильные разрезания из разрезаний на прямоугольники (см. рис. 6 для случая $6k\times 6l$). Можно показать, что любой прямоугольник, допускающий правильное разрезание, допускает и симметричное правильное разрезание.

М. Хованов

◆

М1039. *Точки A, B, C, D — вершины тетраэдра. Докажите, что*

а) если $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$, то все три эти скалярные произведения равны 0;

б) если три угла между противоположными ребрами тетраэдра равны, то они прямые.

а) Для любых четырех точек A, B, C, D справедливо тождество

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0. \qquad (1)$$

Это становится очевидным, если представить его левую часть в виде $\bar{a}\cdot(\bar{c}-\bar{b})+\bar{b}\cdot(\bar{a}-\bar{c})+\bar{c}\cdot(\bar{b}-\bar{a})$, где $\bar{a}=\overrightarrow{DA}$, $\bar{b}=\overrightarrow{DB}$, $\bar{c}=\overrightarrow{DC}$. Из (1) сразу следует утверждение задачи.

б) Пусть угол между противоположными ребрами тетраэдра равен α, тогда углы между векторами $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AB}$ равны α или $180°-\alpha$. Поэтому (1) можно переписать так:

$$\cos\alpha(\pm DA\cdot BC\pm DB\cdot CA\pm DC\cdot AB)=0.$$

Покажем, что выражение в скобках не может равняться нулю, т. е. $\cos\alpha=0$ и $\alpha=90°$. Для этого достаточно доказать, что произведение длин любых двух противоположных ребер тетраэдра строго меньше суммы произведений длин двух других пар противоположных ребер, например

$$DA\cdot BC < DB\cdot CA + DC\cdot AB. \qquad (2)$$

Проведем через точки A, B и C произвольную сферу. Пусть она пересекает ребра DA, DB и DC в точках A_1, B_1, C_1. Легко видеть, что треугольники ABD и B_1A_1D подобны, и следовательно, $A_1B_1 = AB\cdot(DB_1/DA)$. Аналогично, $B_1C_1 = BC\cdot(DB_1/DC)$. Деля почленно первое из этих равенств на второе, получим, что

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{AB\cdot DC}{DA\cdot BC}.$$

Таким образом, стороны треугольника $A_1B_1C_1$ пропорциональны произведениям противоположных ребер тетраэдра, и (2) следует из неравенства треугольника для $A_1B_1C_1$.

Тетраэдры, о которых идет речь в этой задаче, называются *ортоцентрическими*, так как их высоты пересекаются в одной точке (что, вообще говоря, не имеет места).

В. Э. Матизен

■

М1040*. *Числа 1, 2, ..., 3n произвольным образом разбиты на три группы по n чисел в каждой. Докажите, что можно выбрать по одному числу из каждой группы так, чтобы одно из них равнялось сумме двух других.*

Обозначим эти три группы буквами A, B, C и предположим, что числа от 1 до $k-1$ попали в группу A, а число k — в группу B. Тройку чисел назовем хорошей, если они все из разных групп и сумма двух из них равна третьему. Допустим, что хороших троек нет, и покажем, что тогда *для всякого a из группы C число $a-1$ принадлежит A*. Отсюда будет следовать, что в A чисел больше, чем в C, что противоречит условию.

Пусть a — число из C. Тогда $a-1$ не принадлежит B, иначе тройка $(1, a-1, a)$ была бы хорошей. Допустим, что $a-1$ принадлежит C. Рассмотрим число $a-k$. Если оно входит в A, то $(a-k, k, a)$ — хорошая тройка, если в B, то $(k-1, a-k, a-1)$ — хорошая тройка. Следовательно, $a-k$ входит в C. Аналогично, если число $a-k-1$ входит в A, то хорошей тройкой будет $(a-k-1, k, a-1)$, а если в B — то $(1, a-k-1, a-k)$. Повторяя это рассуждение, приходим к выводу, что все натуральные числа вида $a-ik$, $a-ik-1$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ принадлежат C. Но при некотором i число $a-ik$ совпадает с одним из чисел $1, 2, \ldots, k$ и, значит, входит в A или в B. Это противоречие доказывает, что $a-1$ принадлежит A. Следовательно, если C состоит из чисел $c_1, \ldots, c_n$, то A содержит числа $c_1-1, \ldots, c_n-1$, причем все они больше 1, так как 2 принадлежит A или B. Но A содержит и 1, поэтому в A по крайней мере $n+1$ число.

В. Е. Алексеев

■

Ф1048. *Киномеханик по ошибке вставил киноленту так, что все события на экране «потекли в обратном направлении», при этом автомобили поехали назад. Как изменились скорость и ускорение автомобиля в результате такой ошибки?*

Пусть, когда лента вставлена правильно, автомобиль имеет скорость $\vec{v}$. Тогда его перемещение за малый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ есть

$$\overrightarrow{\Delta x} = \overrightarrow{x(t_2)} - \overrightarrow{x(t_1)} = \vec{v}\cdot\Delta t.$$

Если же лента вставлена так, что события на экране «потекли в обратном направлении», перемещение автомобиля за это же время Δt будет

$$\overrightarrow{\Delta x'} = \overrightarrow{x(t_1)} - \overrightarrow{x(t_2)} = -\overrightarrow{\Delta x}.$$

Но $\overrightarrow{\Delta x'} = \vec{v}'\cdot\Delta t$, так что

$$\vec{v}'\cdot\Delta t = -\overrightarrow{\Delta x} = -\vec{v}\cdot\Delta t,$$

и кажущаяся скорость автомобиля на экране —

$$\vec{v'}=-\vec{v}.$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{\Delta v'}=\overrightarrow{v'(t_1)}-\overrightarrow{v'(t_2)}=$$

$$=-\overrightarrow{v(t_1)}-(-\overrightarrow{v(t_2)})=\overrightarrow{v(t_2)}-\overrightarrow{v(t_1)}=\overrightarrow{\Delta v},$$

и так как $\overrightarrow{\Delta v}=\vec{a}\cdot\Delta t$, а $\overrightarrow{\Delta v'}=\vec{a'}\cdot\Delta t$,

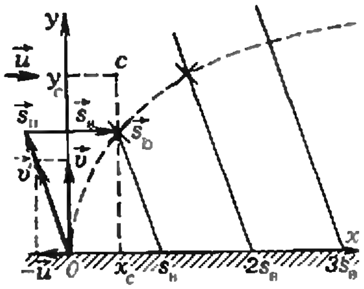
$$\vec{a'}=\vec{a}.$$

Следовательно, когда лента вставлена «задом наперед», скорость автомобиля на экране меняет направление, а ускорение остается неизменным.

А. С. Бутов

Ф1049. *Деревянный плот оттолкнули от берега реки так, что в начальный момент его скорость была равной $\vec{v}$ и направлена перпендикулярно берегу. Траектория плота показана на рисунке. Красный крестик на траектории — место, в котором плот находился через время T после начала движения. Считая скорость реки постоянной и равной $\vec{u}$, найти графически точки траектории, в которых плот находился в моменты времени $2T$, $3T$, $4T$.*

Рассмотрим движение плота в системе отсчета, связанной с водой, т. е. движущейся со скоростью $\vec{u}$. В этой системе плот имеет начальную скорость $\vec{v'}=\vec{v}-\vec{u}$ и движется по прямой. При этом скорость плота $\vec{v'}$ уменьшается из-за действия на него силы сопротивления воды. (Если бы сопротивление отсутствовало, то через время T плот оказался бы в точке c с координатами



$x_c=uT$, $y_c=vT$.) Перемещение плота относительно берега за время T складывается из его перемещения $\vec{s}_п=\vec{v'}T$ относительно воды и перемещения воды $\vec{s}_в=\vec{u}T$ (см. рисунок). За время $2T$ перемещение воды будет вдвое бо́льшим. Отложим от точки O вдоль оси x отрезок длиной $2s_в$ и проведем через точку с координатой $2s_в$ прямую, параллельную $\vec{s}_п$. Эта прямая пересекает траекторию плота в точке, отмеченной синим крестиком,— в этой точке будет находиться плот через время $2T$ после начала движения.

Аналогичным построением находятся точки, в которых плот будет через время $3T$, $4T$ и т. д.

И. Ю. Потеряйко

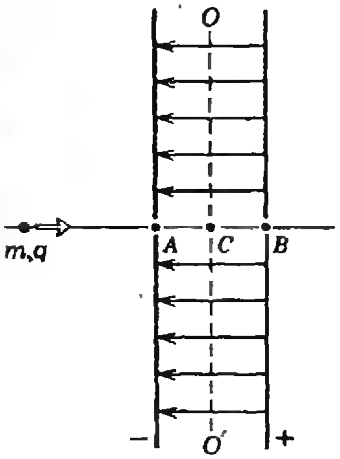
Ф1050. *Небольшая частица массой m, несущая положительный заряд q, с очень большого расстояния приближается к конденсатору по направлению, перпендикулярному его пластинам, и пролетает сквозь конденсатор через небольшие отверстия в серединах пластин. Считая, что на большом расстоянии от конденсатора скорость частицы равна v,*

Если конденсатор отключен от источника тока, то система «частица+конденсатор» является замкнутой и ее полная энергия сохраняется. Внешнее электрическое поле конденсатора совершает работу над частицей, и эта работа идет на увеличение ее кинетической энергии: $\Delta K=A$. Следовательно

$$\Delta K_A=K_A-\frac{mv^2}{2}=A_A,\quad \Delta K_B=K_B-\frac{mv^2}{2}=A_B,$$

где A_A и A_B — работа электрического поля по перемещению частицы из бесконечности в точки A и B соответственно, K_A и K_B — кинетическая энергия частицы в этих точках. По определению потенциала мы можем записать:

найти ее скорость: 1) в точке A внутри конденсатора (см. рисунок); 2) в точке B сразу после вылета из конденсатора. Конденсатор заряжен до разности потенциалов U, расстояние между его пластинами много меньше размеров пластин; заряд конденсатора много больше q.



$$A_A=q(\varphi_\infty-\varphi_A),\quad A_B=q(\varphi_\infty-\varphi_B).$$

Потенциал φ_∞ на большом удалении от конденсатора, как это обычно делается, положим равным нулю. Найдем потенциалы φ_A и φ_B.

Так как заряд частицы q много меньше заряда конденсатора, можно считать, что частица практически не меняет поле внутри конденсатора. Поле внутри конденсатора однородно и его напряженность $E=U/d$, где d — расстояние между пластинами. Так как отрицательно и положительно заряженные пластины равноудалены от средней линии OO' внутри конденсатора, потенциал $\varphi_{OO'}$ на этой линии будет равен нулю. Поскольку поле однородно, для точек A, B и C можем записать:

$$\varphi_A-\varphi_C=-E\frac{d}{2},\quad \varphi_B-\varphi_C=E\frac{d}{2}.$$

Но $\varphi_C=0$, и следовательно,

$$\varphi_A=-\frac{Ed}{2}=-\frac{U}{2},\quad \varphi_B=\frac{U}{2}.$$

Отсюда находим A_A и A_B:

$$A_A=-q\varphi_A=\frac{qU}{2},\quad A_B=-q\varphi_B=-\frac{qU}{2}.$$

Таким образом,

$$\Delta K_A=\frac{mv_A^2}{2}-\frac{mv^2}{2}=\frac{qU}{2},$$

$$\Delta K_B=\frac{mv_B^2}{2}-\frac{mv^2}{2}=-\frac{qU}{2},$$

Отсюда находим:

$$v_A=\sqrt{v^2+\frac{qU}{m}},\quad v_B=\sqrt{v^2-\frac{qU}{m}}.$$

Видно, что если $v^2<\frac{qU}{m}$, то частица вообще не пролетит через конденсатор.

Г. В. Григорьев

Ф1051. *В магнитном поле, индукция которого горизонтальна и равна B, катится без проскальзывания со скоростью v тонкое металлическое кольцо, в котором имеется очень маленький разрыв длиной l; вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости кольца (рис. 1). Найти ЭДС индукции в момент, когда угол AOC (см. рисунок) равен α.*

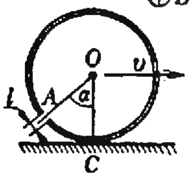


Рис. 1.

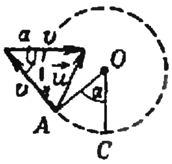


Рис. 2.

■

Прямой путь нахождения ЭДС предполагает разбиение кольца на малые (почти прямолинейные) участки и суммирование всех элементарных ЭДС. Мы поступим иначе. Если мысленно дополнить кольцо до целого, то ЭДС в нем будет равна нулю (контур замкнут). С другой стороны,

$$0=\mathscr{E}_0+\mathscr{E}',$$

где $\mathscr{E}_0$ — искомая разность потенциалов, $\mathscr{E}'$ — ЭДС индукции дополненного элемента. Следовательно,

$$\mathscr{E}_0=-\mathscr{E}'=-uBl\sin\psi,$$

где u — скорость элемента, l — его длина, ψ — угол, который составляет вектор $\vec{u}$ с $\vec{B}$. Как видно из рисунка 2,

$$u=2v\sin\frac{\alpha}{2},\quad \varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом,

$$\mathscr{E}_0=-2Blv\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=-Blv\sin\alpha$$

— ЭДС меняется по синусоидальному закону.

Л. Г. Маркович

Ф1052. *Известно, что освещенность, создаваемая на земле лунным диском в полнолуние, примерно в 10 раз больше, чем освещенность от «ущербной» луны в половину лунного диска. Как это объяснить?*

Многократное уменьшение освещенности в половинной фазе Луны (а не двойное, как представляется естественным) — экспериментальный факт. Попробуем понять, хотя бы в общих чертах, какие явления могут за ним стоять.

Обычно эти явления объясняют так. В половинной фазе свет Солнца падает по касательной на ту часть Луны, которая в основном «светит» на Землю. При этом тени от лунных гор экранируют большую часть поверхности Луны от прямого солнечного света, в целом Луна оказывается освещенной хуже, и на Землю она посылает меньше света. Однако в этом случае полукруглый край Луны должен казаться ярче остальной части «полудиска». Казалось бы, более полное решение должно учитывать то, что горы экранируют не только Луну от Солнца, но и Землю от отраженного Луной света. В этом случае на всех краях «полудиска» освещенность должна уменьшаться. Кроме того, из подобного объяснения следует, что в полнолуние край диска должен быть еще темнее, ибо на краю будет двойное экранирование — поверхности Луны от Солнца и Земли от Луны.

На самом деле в полнолуние край диска имеет примерно такую же яркость, как центр. Это означает, что поверхность Луны должна отражать значительную долю света навстречу падающему свету, а не равномерно во все стороны, как, скажем, белая бумага. Таким образом, оптические свойства поверхности Луны довольно сложны, и конкретная величина ослабления освещенности зависит от рельефа. Например, при острых и часто расположенных горах поверхность будет выглядеть черной.

Заметим, что при частичном лунном затмении половина диска Луны также создает на Земле освещенность меньшую, чем половина максимальной. Но причина этого явления иная — наличие полутени.

Л. А. Ашкинази

Маятник в магнитном поле и принцип суперпозиции

В мартовском выпуске «Задачника Кванта» была опубликована задача **Ф1046**. Напомним ее условие: «Маленький шарик массой m, имеющий заряд q, подвешен на невесомой нерастяжимой нити. Этот математический маятник помещен в сильное однородное магнитное поле, индукция которого равна B_0 и направлена вертикально. За какое время плоскость качаний маятника повернется на угол 2π? Явления, связанные с вращением Земли, не учитывать». Эта, казалось бы, искусственная задача, имеет довольно наглядное и, с нашей точки зрения, красивое решение, основанное на идее сложения колебаний.

Начнем с качественной оценки влияния магнитного поля на колебания маятника. Движение шарика изображено на рисунке 1 (вид сверху). Будем считать, что заряд $q > 0$, а поле $\vec{B}_0$ направлено вверх. Отведем шарик из положения равновесия (т. O) в точку A и отпустим. В отсутствие магнитного поля ($B_0 = 0$) шарик пришел бы в точку A' и продолжал бы дальше колебаться между точками A и A'. Но если $B_0 \neq 0$, то на шарик действует сила Лоренца $\vec{F}_л$, направление которой показано на рисунке. Она искривляет траекторию шарика, и в результате он приходит в точку B, потом в точку C и т. д. Траектория приобретает довольно замысловатый вид. Если сила Лоренца мала по сравнению с возвращающей силой, то в течение полупериода магнитное поле будет лишь слегка искривлять траекторию шарика. Тогда дви-

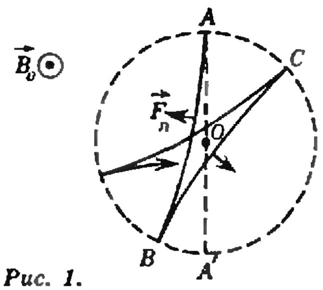


Рис. 1.

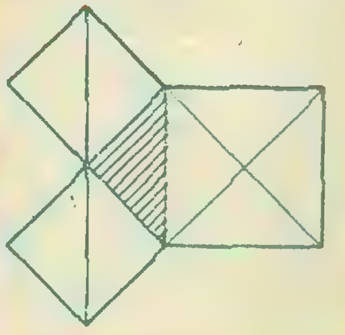
(Окончание см. на с. 34)

Калейдоскоп „Кванта"

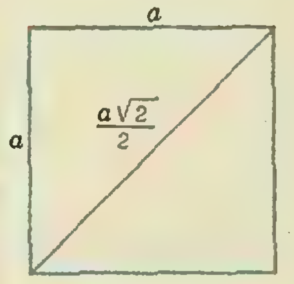
Замечательные числа

$\sqrt{2}$ и e

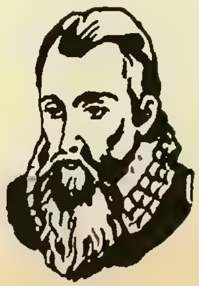
Еще задолго до Пифагора было известно, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, вдвое больше площади квадрата, построенного на его катете. Об этом свидетельствуют рисунки, встречающиеся в письменных источниках более раннего периода.



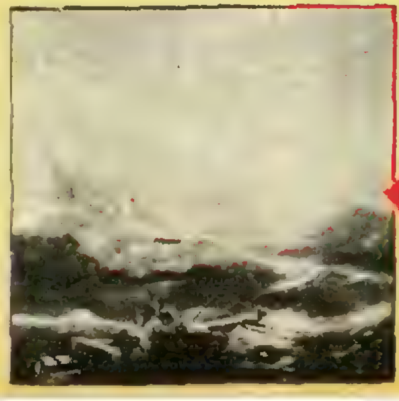
Число $\sqrt{2}$ — отношение диагонали квадрата к его стороне — это первое число, иррациональность которого была доказана. Доказательство, полученное в школе Пифагора почти за 500 лет до н. э., внесло разлад в созданную в этой школе философскую систему, основанную на гармонии чисел.



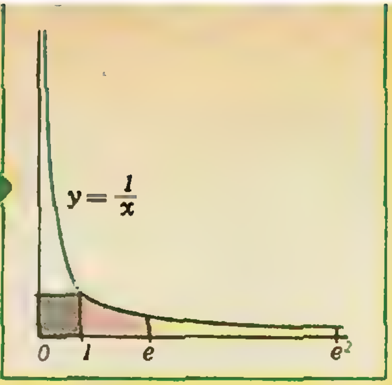
Число $e = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828182845\ldots$ появилось сравнительно недавно. Его часто называют «неперовым числом» в честь изобретателя логарифмов шотландского математика Джона Непера (1550—1617), однако нет твердых оснований для утверждения, что Непер имел о числе e четкое понятие.



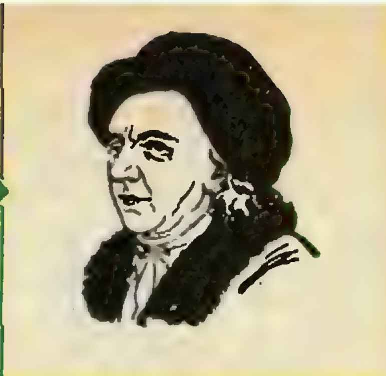
По преданию, первый, кто разгласил факт иррациональности $\sqrt{2}$, погиб при кораблекрушении. Такая же участь постигла и того, кто разгласил открытие пифагорейцами додекаэдра, первоначально не вписывавшегося в их систему чисел и фигур. Так в античные времена боги наказывали болтунов.



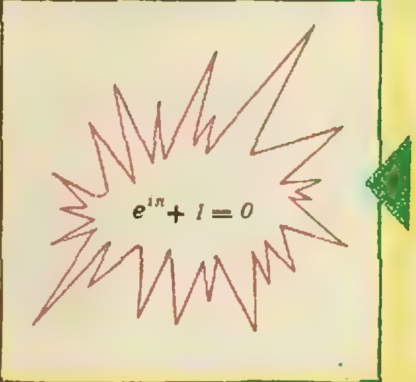
Значение числа *e* для математического анализа стало ясно после того, как в 1647 году бельгийский математик Григорий из Сен-Винцента обнаружил связь логарифмов с площадью под гиперболой. В частности, он нашел, что криволинейные трапеции под гиперболой с основаниями $[1; e]$, $[e; e^2]$, ... имеют единичные площади.



Впервые обозначение *e* ввел Леонард Эйлер (1707—1783). Он также вычислил число *e* с 23 знаками, использовав представление числа *e* в виде бесконечного числового ряда: $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$, полученное Даниилом Бернулли (1700—1782).



Л. Эйлер получил замечательный результат, связывающий числа *e*, *π* и $i=\sqrt{-1}$: $e^{i\pi}=-1$. Ему принадлежит и заслуга определения функции $w=e^z$ для комплексных значений *z*, что положило начало математическому анализу в комплексной области — *теории функций комплексного переменного.*



Прямоугольники с отношением сторон, равным $\sqrt{2}$, часто встречаются в архитектуре, например в пропорциях церкви Покрова-на-Нерли. Встречаются они и в книгопечатании, поскольку только такие прямоугольники переходят в подобные себе при складывании пополам.

$\sqrt{2}$
1
$\sqrt{2}/2$

Головоломки

1. Слова «числа» и «силач» состоят из одинаковых букв. Расставьте эти буквы в пустых клетках квадрата так, чтобы в каждом столбце, в каждой строке и на каждой из двух диагоналей квадрата стояли все пять этих букв.

Н. К. Антонович

	С			
Ч	И	С	Л	А
	Л			
	А			
	Ч			

2. Замените буквы цифрами так, чтобы в каждой строчке стояли квадраты натуральных чисел. Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

Л. П. Мочалов

Т	И	Р
И	В	А
Р	А	Б

(Начало см. на с. 31)

жение шарика можно представить как колебания в вертикальной плоскости, которая сама медленно поворачивается — за один период колебаний маятника $T_0=2\pi\sqrt{l/g}$ она поворачивается на угол $\Delta\gamma=\widehat{AOC}$. Малость силы Лоренца соответствует тому, что $\Delta\gamma\ll 1$.

Выполняется ли это условие на практике? Чтобы выяснить это, достаточно сравнить максимальную величину силы Лоренца — $F_{\text{Л max}}=qv_{\max}B_0$ — с максимальной величиной возвращающей силы $F_{\text{в}}$. При малых колебаниях маятника (рис. 2) $F_{\text{в max}}=mg\sin\alpha\approx mg\alpha\ (\alpha\ll 1)$. Максимальную скорость можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2=mgl(1-\cos\alpha)=$$
$$=mgl\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_{\max}\approx\alpha\sqrt{gl}.$$

Следовательно,

$$\frac{F_{\text{Л max}}}{F_{\text{в max}}}\approx\frac{qB_0v_{\max}}{mg\alpha}=\frac{qB_0}{m}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Возьмем $l=1$ м, $m=1$ г, $B_0=3$ Тл (бóльшие поля получить довольно трудно). Шарик радиусом $R=1$ см можно зарядить до потенциала $\varphi=3\cdot 10^4$ В (после чего наступает электрический пробой воздуха). При этом $q=4\pi\varepsilon_0R\varphi\approx 3\cdot 10^{-6}$ Кл. Тогда $F_{\text{Л max}}/F_{\text{в max}}\approx 3\cdot 10^{-5}$. Условие малости силы Лоренца выполняется, как видим, с огромным запасом.

Для решения задачи нужно найти скорость поворота плоскости качаний маятника. Здесь не обойтись без анализа уравнений движения. Мы выведем их в приближении малых колебаний.

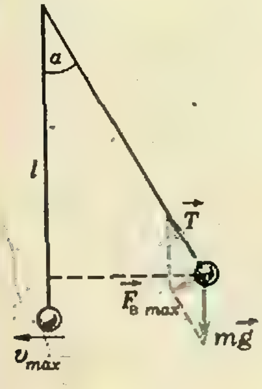


Рис. 2.

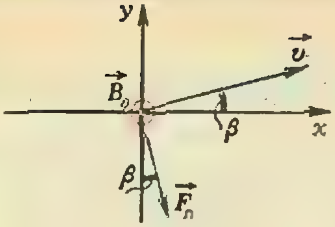


Рис. 3.

Введем систему координат, начало которой находится в точке подвеса, ось Z направлена вертикально вверх, а оси X и Y лежат в горизонтальной плоскости. Уравнение движения шарика имеет вид

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{T}+\vec{F}_{\text{Л}}.$$

При этом $\vec{a}=\vec{r}\,''(t)$, где $\vec{r}=(x,y,z)$ — радиус-вектор шарика, $|\vec{r}|=l$. Сила натяжения нити $\vec{T}=-\frac{\vec{r}}{l}T$, где для малых колебаний $T\approx mg$. В этом случае шарик движется практически в горизонтальной плоскости, и можно легко найти силу Лоренца (рис. 3):

$$F_{\text{Л}x}=|\vec{F}_{\text{Л}}|\sin\beta=$$
$$=q(v\sin\beta)B_0=qv_yB_0,$$
$$F_{\text{Л}y}=-|\vec{F}_{\text{Л}}|\cos\beta=$$
$$=-q(v\cos\beta)B_0=-qv_xB_0,$$
$$F_{\text{Л}z}=0.$$

Таким образом, в проекциях на оси X, Y уравнение движения имеет вид:

$$ma_x=-\frac{x}{l}T+qv_yB_0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x''=-\frac{g}{l}x+\frac{qB_0}{m}y',$$
$$ma_y=-\frac{y}{l}T-qv_xB_0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y''=-\frac{g}{l}y-\frac{qB_0}{m}x'.$$

Можно обозначить частоту колебаний маятника в отсутствие магнитного поля $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$ и циклотронную частоту (частоту вращения свободной заряженной частицы по круговой орбите в магнитном поле $\vec{B}_0$) $\omega_B=\frac{qB_0}{m}$, и наши уравнения приобретут вид

$$x''=-\omega_0^2x+\omega_By',$$
$$y''=-\omega_0^2y-\omega_Bx'. \qquad (1)$$

(Заметим, что условие малости силы Лоренца эквивалентно условию $\omega_B\ll\omega_0$, поскольку $\frac{F_{\text{Л max}}}{F_{\text{в max}}}=\frac{qB_0}{m}\sqrt{\frac{l}{g}}=\frac{\omega_B}{\omega_0}$.)

Замечательным свойством уравнений движения нашего маятника является их линейность. Это значит, что если мы знаем два решения уравнений — $x=x_1(t)$, $y=y_1(t)$ и $x=x_2(t)$, $y=y_2(t)$, — то любая их линейная комбинация, т. е. выражения вида $x=Ax_1(t)+Bx_2(t)$, $y=Ay_1(t)+By_2(t)$, где A и B — некоторые произвольные постоянные, тоже является решением уравнений. (Для проверки достаточно подставить эти выражения в уравнения и учесть, что $(Ax_1(t)+Bx_2(t))'=Ax_1'(t)+Bx_2'(t)$ и т. д.) Заметим, что, если бы колебания были не малы, в уравнениях появились бы члены вида $(x')^2$ и другие — линейности уже не было бы.

Линейность хороша тем, что позволяет складывать решения уравнений. В результате часто удается описать сложное движение (такое, как на рисунке 1) как сумму нескольких простых.

Рассмотрим сначала случай $B_0=0$. Тогда уравнения движения упрощаются:

$$x''=-\omega_0^2x,$$
$$y''=-\omega_0^2y. \qquad (2)$$

Эти два уравнения «не связаны». Это значит, что x-компонента силы, действующей на шарик, зависит только от координаты x, а y-компонента силы — только от y. Поэтому движения по x и по y не зависят друг от друга, и уравнения (2) можно рассматривать по отдельности. Их решения, как известно, в общем случае имеют вид

$$x=A_1\cos(\omega_0t+\varphi_1),$$
$$y=A_2\cos(\omega_0t+\varphi_2).$$

Эти формулы описывают любое возможное движение маятника. Выбирая надлежащим образом постоянные A_1, A_2, φ_1, φ_2, легко, например, выписать решения уравнений (2), описывающие колебания маятника в плоскости:

$$\begin{aligned}&x_1(t)=X_0\cos\omega_0t,\\&y_1(t)=0;\\&x_2(t)=X_0\sin\omega_0t,\\&y_2(t)=0;\\&x_3(t)=0,\\&y_3(t)=Y_0\cos\omega_0t;\\&x_4(t)=0,\\&y_4(t)=Y_0\sin\omega_0t.\end{aligned} \qquad (3)$$

Первые два решения описывают колебания в плоскости (XZ), а вторые два — в плоскости (YZ).

Линейность уравнений (2) позволяет по-разному комбинировать их решения. Например, если $X_0 = Y_0 = A$, то, складывая законы движения плоских маятников, мы получим решение, описывающее конический маятник, вращающийся против часовой стрелки, если смотреть сверху:

$$x = x_1 + x_4 = A\cos\omega_0 t,$$
$$y = y_1 + y_4 = A\sin\omega_0 t.$$

Можно описать и конический маятник, вращающийся по часовой стрелке:

$$x = x_1 - x_4 = A\cos\omega_0 t,$$
$$y = y_1 - y_4 = -A\sin\omega_0 t.$$

И наоборот, складывая эти два решения для маятников, вращающихся в разные стороны, мы снова получаем колебания, лежащие в одной плоскости.

Теперь понятно, что конический маятник не случайно имеет тот же период, что и маятник, колеблющийся в плоскости. Это — следствие линейности уравнений движения!

Все сказанное выше — по существу, проявление в механике общего физического принципа: если физическая система описывается линейными уравнениями, то в ней действует принцип суперпозиции — сумма решений тоже является решением.

Рассмотрим теперь случай $B_0 \neq 0$. Решения (3), описывающие колебания маятника в одной плоскости, больше не удовлетворяют уравнениям (1). Однако им удовлетворяют круговые колебания! Действительно, закон движения $x = A\cos\omega t$, $y = A\sin\omega t$ удовлетворяет уравнениям при условии, что $\omega^2 = \omega_0^2 - \omega_B\omega$ (проверьте!). Решая это квадратное уравнение, находим:

$$\omega_{1,2} = -\frac{\omega_B}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_B^2}{4}} \approx$$
$$\approx -\frac{\omega_B}{2} \pm \omega_0$$

(поскольку $\omega_B \ll \omega_0$). Таким образом, получается два решения: маятник, вращающийся против часовой стрелки с частотой $\omega_1 = \omega_0 - \omega_B/2$, и вращающийся по часовой стрелке с частотой $|\omega_2| = \omega_0 + \omega_B/2$.

Наличие магнитного поля приводит к тому, что конический маятник вращается в одну сторону с одной частотой, а в другую — с другой! Если $B_0 \to 0$, то $\omega_B \to 0$, и это отличие исчезает.

При $B_0 = 0$ сложение двух решений для маятников, вращающихся в разные стороны, дает колебания в одной плоскости. При $B_0 \neq 0$ получается сумма круговых колебаний со слегка различными частотами, своего рода «круговые биения»:

$$\begin{aligned} x &= A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t = \\ &= 2A\cos\omega_0 t \cdot \cos\frac{\omega_B}{2}t, \\ y &= A\sin\omega_1 t - A\sin|\omega_2| t = \\ &= -2A\cos\omega_0 t \cdot \sin\frac{\omega_B}{2}t. \end{aligned} \tag{4}$$

Это — не что иное, как колебания маятника с частотой ω_0 в плоскости, которая сама медленно поворачивается с частотой $\omega_B/2$, т. е. как раз то, что нам нужно. Отсюда сразу получаем ответ: плоскость качаний маятника поворачивается с угловой скоростью $\omega_B/2 = qB_0/2m$ и повернется на угол 2π за время

$$\tau = \frac{4\pi}{|\omega_B|} = \frac{4\pi m}{|qB_0|}.$$

Поворот плоскости качаний маятника очень напоминает поведение маятника Фуко. Как мы только что выяснили, такое движение есть сумма вращений по и против часовой стрелки со слегка различными частотами. Можно ли применить эту идею к маятнику Фуко?

Представим себе для простоты, что маятник расположен на северном полюсе. Тогда наблюдатель, который не вращается вместе с Землей, а сохраняет постоянную ориентацию относительно звездного неба, обнаружит следующее. Если он отклоняет маятник и отпускает его без начальной скорости, то маятник колеблется в фиксированной плоскости с периодом $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Если он запускает маятник по кругу, тот вращается с частотой $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ независимо от направления вращения. Наблюдатель, стоящий на Земле и вращающийся вместе с ней, видит, что плоскость качаний маятника Фуко поворачивается по часовой стрелке (если смотреть сверху) со скоростью 1 оборот в сутки (синхронно со звездным небом, относительно которого эта плоскость неподвижна). С точки зрения этого наблюдателя конические маятники по-прежнему совершают круговое движение, но их угловые скорости изменились: при вращении против часовой стрелки $\omega_1 = \omega_0 - \omega_3$, а по часовой стрелке — $\omega_2 = \omega_0 + \omega_3$, где $\omega_3 = 2\pi/\text{сутки} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли. Складывая эти движения по формулам (4), получаем колебания в плоскости, поворачивающейся по часовой стрелке с угловой скоростью ω_3, как и должно быть.

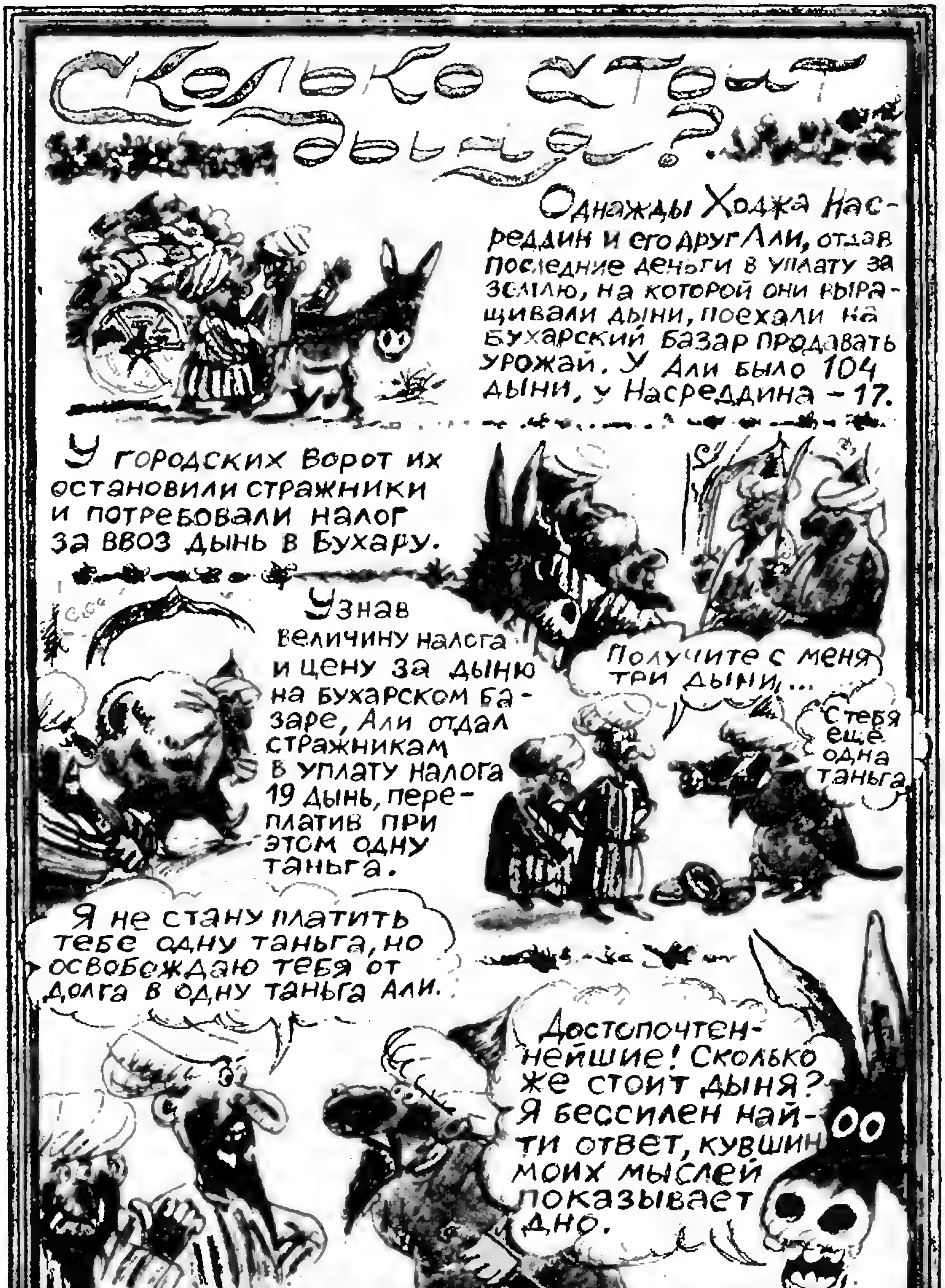
Мы видим, таким образом, что движения заряженного маятника в магнитном поле и маятника Фуко чрезвычайно похожи. В обоих случаях плоскость качаний поворачивается, а вращение по и против часовой стрелки происходит с разной угловой скоростью. Физические причины такого поведения совершенно различны: для маятника в магнитном поле это сила Лоренца, а для маятника Фуко — то обстоятельство, что мы описываем его движение с точки зрения наблюдателя, находящегося на Земле и вращающегося с ней. Для него маятник Фуко движется так, как если бы на шарик, кроме силы тяжести и силы натяжения нити, действовала дополнительная сила, аналогичная силе Лоренца, которая была бы пропорциональна скорости и перпендикулярна ей. Эта сила называется силой Кориолиса и представляет собой частный случай сил инерции — дополнительных сил, которые надо учитывать при использовании неинерциальных (в том числе вращающихся) систем отсчета.

Д. А Купцов, М. М Цылин

Поправка

В июньском номере «Кванта» в разделе «Задачник «Кванта» на рисунке к задаче Ф1062 пропала точка C. Не имея возможности привести правильный рисунок, вносим уточнение в условие задачи: прибор находится в точке C такой, что $|AC|:|AB|:|BC| = 3\cdot2\cdot4\ 5$

Участникам конкурса «Задачник «Кванта» сообщаем, что срок присылки решения этой задачи продлевается до 1 октября.


Сколько стоит дыня?
Однажды Ходжа Насреддин и его друг Али, отдав последние деньги в уплату за землю, на которой они выращивали дыни, поехали на бухарский базар продавать урожай. У Али было 104 дыни, у Насреддина – 17.
У городских ворот их остановили стражники и потребовали налог за ввоз дынь в Бухару.
Узнав величину налога и цену за дыню на бухарском базаре, Али отдал стражникам в уплату налога 19 дынь, переплатив при этом одну таньга.
Получите с меня три дыни...
С тебя ещё одна таньга
Я не стану платить тебе одну таньга, но освобождаю тебя от долга в одну таньга Али.
Достопочтеннейшие! Сколько же стоит дыня? Я бессилен найти ответ, кувшин моих мыслей показывает дно.

Дорогие читатели!

В будущем году, как и прежде, журнал «Квант» будет распространяться только по подписке. Если вы захотите стать нашими подписчиками, вы сможете оформить подписку в агентствах «Союзпечати», на почтамтах или в отделениях связи, начиная с любого номера (но не позднее первого числа предподписного месяца).

Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465, цена одного номера 40 копеек.

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Пусть A и B — две разные цифры, цифра A не равна нулю. Будем рассматривать числа, составленные из этих цифр. Покажите, что соотношение $\overline{AB}\cdot\overline{AAA}=\overline{ABA}\cdot\overline{AA}$ не выполняется ни при каких A и B, соотношение $\overline{AB}\cdot\overline{AAA}=\overline{ABA}\cdot\overline{AA}+1$ выполняется лишь для одной пары чисел A и B, а соотношение $\overline{AB}\cdot\overline{AAAA}=\overline{ABAB}\cdot\overline{AA}$ выполняется всегда.

2. Попробуйте разложить все 28 косточек домино в четыре кучки так, чтобы суммы очков в кучках были четырьмя последовательными простыми числами.

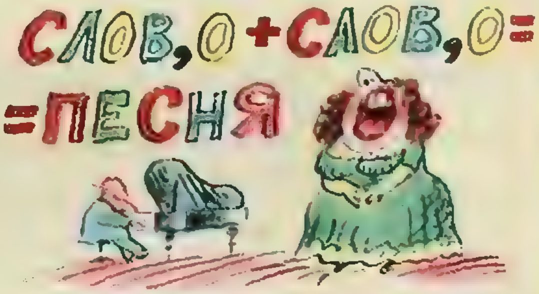
3. Решите числовой ребус (см. рисунок). Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

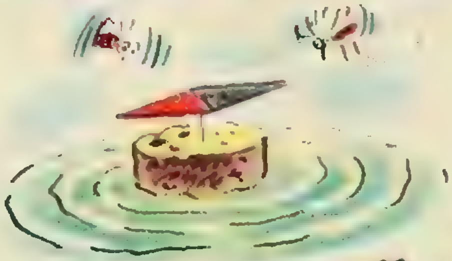
4. Стрелку компаса укрепили на плоской пробке и опустили пробку в воду. Как будет вести себя пробка?

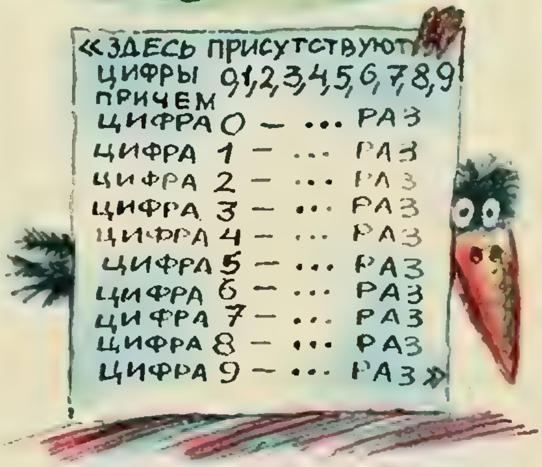
5. Подставьте вместо многоточий на рисунке цифры так, чтобы предложение оказалось верным.

Эти задачи нам предложили *А. А. Азамов, А. М. Домашенко, А. Г. Гейн и Ф. Л. Толстов, С. С. Кротов, А. П. Савин.*

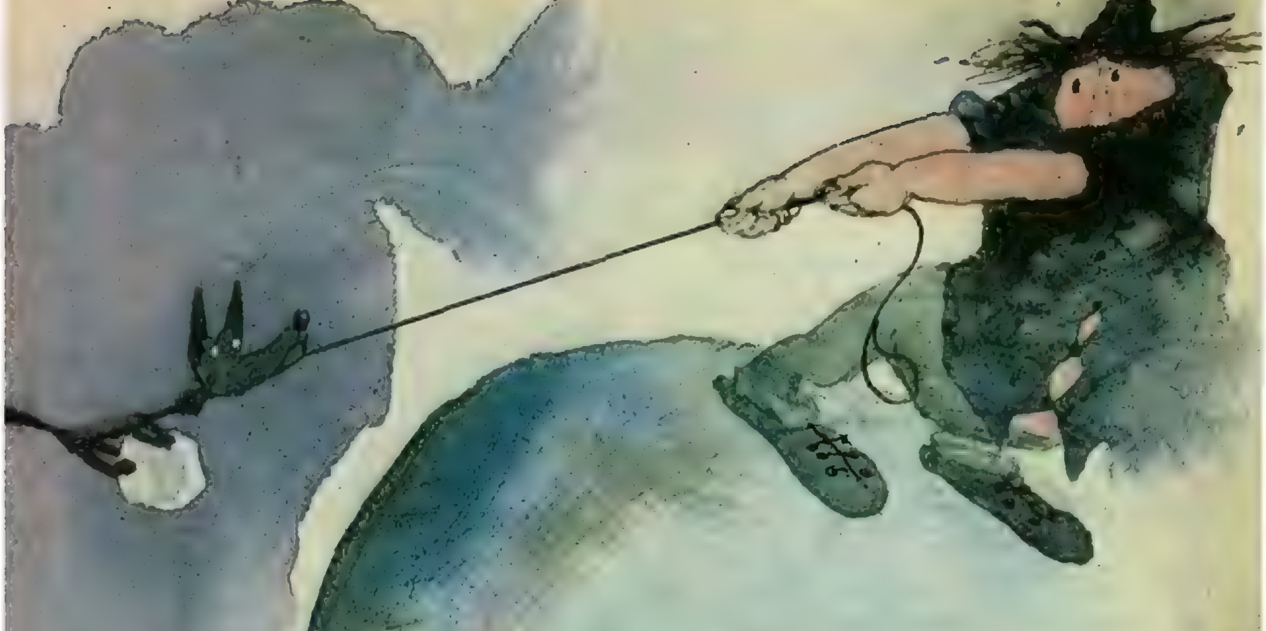
ABBA
HEAVY METAL







«Здесь присутствуют
цифры 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
причем
цифра 0 — ... раз
цифра 1 — ... раз
цифра 2 — ... раз
цифра 3 — ... раз
цифра 4 — ... раз
цифра 5 — ... раз
цифра 6 — ... раз
цифра 7 — ... раз
цифра 8 — ... раз
цифра 9 — ... раз»



ЛУННЫЙ ТОРМОЗ

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Издавна люди считали, что морские приливы связаны с Луной. Луна притягивает воду Мирового океана, и в том месте океана, над которым находится Луна, образуется водяной «горб». Горб «стоит» под Луной, а Земля вращается вокруг своей оси; поднявшаяся вода «наползает» на берег — наступает прилив, вода отступает — отлив. Казалось бы, такое объяснение выглядит вполне естественно. Однако признать его удовлетворительным нельзя: из него следует, что приливы должны наблюдаться один раз в сутки, а в действительности они бывают каждые 12 часов, т. е. два раза в сутки.

Первую теорию приливов, объясняющую это явление, создал Ньютон вскоре после открытия закона всемирного тяготения. В океане действительно образуются два горба: один — у ближайшей к Луне поверхности воды, а другой — с противоположной стороны Земли (рисунок 1). Обсудим подробнее причину возникновения второго горба.

Мы привыкли говорить, что Луна вращается вокруг Земли. На самом же деле и Луна и Земля вращаются вокруг общего центра. Если бы этого вращения не было, то под действием силы притяжения Луна упала бы на Землю (точнее, Земля и Луна упали бы друг на друга — ведь Луна тоже притягивает Землю). Как же происходит это вращение? Представим себе, что массы Земли и Луны одинаковы. Тогда они будут двигаться вокруг точки, которая лежит на середине отрезка, соединяющего их центры. Теперь давайте мысленно «наращивать» массу Земли. Тогда центр вращения будет смещаться в сторону Земли. Поскольку масса Земли гораздо больше массы Луны (в 81 раз), то центр вращения C оказывается лежащим внутри земного шара (но он обязательно смещен относительно центра Земли).

Это вращение существенно влияет на картину приливов. Вода отступает от центра вращения. (Нечто подобное происходит в стакане воды, когда, размешивая воду ложкой, вы приводите

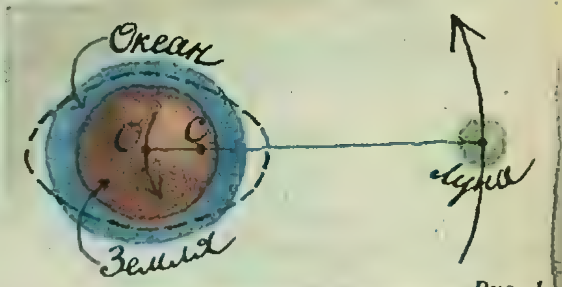


Рис. 1.

ее во вращение, — вода отходит от центра стакана и поднимается у краев.) На дальней от Луны стороне Земли, где наименьшая сила притяжения, образуется водяной горб.

Конечно, приведенное нами объяснение приливов является весьма упрощенным. Мы не принимали во внимание неравномерность распределения воды по поверхности Земли, не учитывали влияния сил притяжения к Солнцу и других факторов, способных существенно изменить описанную картину. Однако ответ на главный вопрос мы получили: притяжение к Луне и вращение Земли вокруг общего с Луной центра *С* приводят к образованию двух приливных горбов в океане.

А теперь самое время объяснить принцип действия лунного тормоза. Оказывается, что водяные горбы находятся не на линии, соединяющей центры Земли и Луны (как для простоты показано на рисунке 1), а несколько смещены в сторону (рисунок 2). Происходит это по следующей причине. Земля, вращаясь вокруг своей оси, увлекает за собой и воду в океане (это происходит потому, что существует трение). В результате этого по мере поворота Земли в приливные горбы должны вовлекаться все новые и новые массы воды. Деформация, однако, всегда запаздывает по отношению к вызывающей ее силе (ведь сила создает ускорение, и должно пройти какое-то время, чтобы частицы приобрели скорость и сместились на заметные расстояния). Поэтому точка максимального поднятия воды (вершина горба) и точка на линии центров, где на воду действует максимальная сила притяжения к Луне, не совпадают. Образование горба происходит с некоторым запаздыванием, и он смещается в сторону вращения Земли. А в таком случае, как видно из рисунка 2, сила притяжения Луны уже не проходит через центр собственного вращения Земли и как бы стремится «повернуть» ее в противоположную сторону, иными словами — тормозит ее вращение. Длительность суток каждодневно увеличивается!

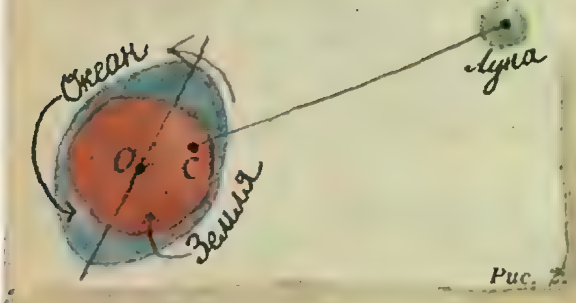
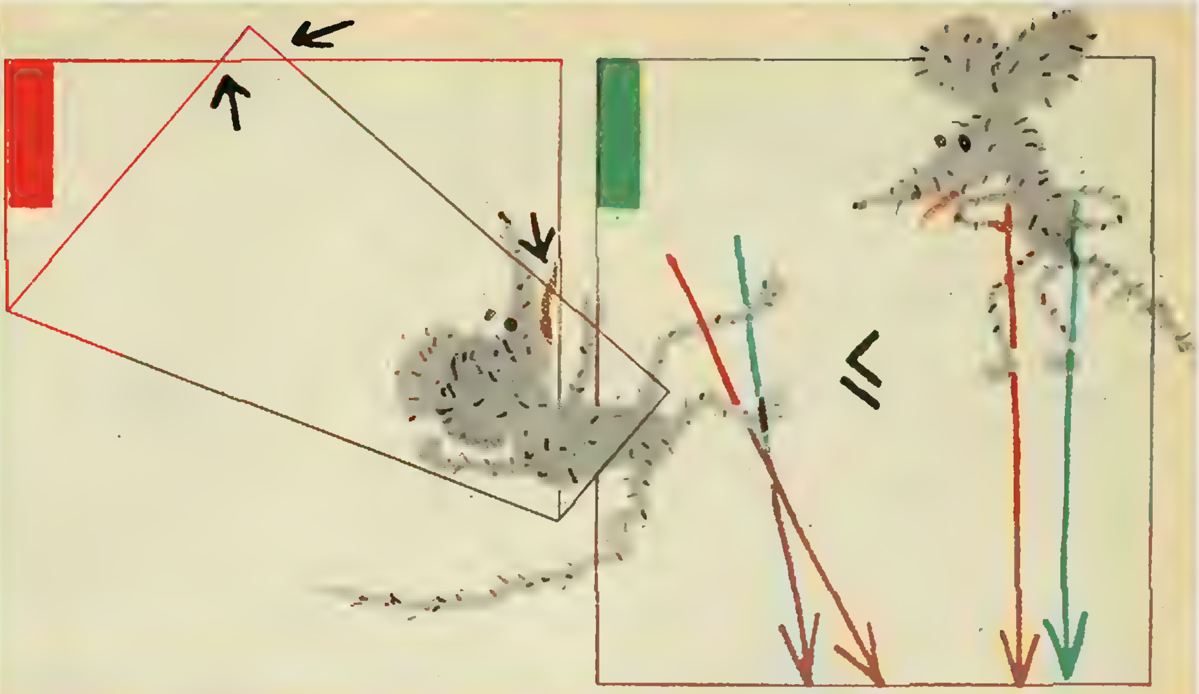


Рис. 2.

«Лунный тормоз» безотказно работает уже многие миллионы лет. У окаменевших кораллов, живших в океане около 400 миллионов лет назад, ученые обнаружили структуры, связанные с суточным и годичным ростом кораллов. Структуры эти назвали суточными и годичными кольцами. Когда кольца подсчитали, то оказалось, что на каждый год приходится 395 суточных колец. Продолжительность года — времени, за которое Земля совершает полный оборот вокруг Солнца,— с тех пор, по-видимому, не изменилась. Значит, тогда — 400 миллионов лет назад — в сутках было только 22 часа!

Лунный тормоз продолжает работать и сейчас, увеличивая длительность суток. К чему это может привести в отдаленном будущем? В конце концов время обращения Земли вокруг своей оси может сравняться со временем обращения Луны вокруг Земли, и тогда торможение прекратится. Земля будет обращена к Луне всегда одной стороной, точно так же, как обращена к нам одной стороной Луна (попробуйте сами объяснить, почему это произошло). Длительность суток на Земле увеличится, и в результате может измениться климат. Земля будет долго оставаться обращенной к Солнцу одной стороной, а на другой стороне в это время будет господствовать долгая ночь. Горячий воздух с нагретой стороны с огромной скоростью устремится к холодной, на Земле задуют сильные ветры, поднимутся песчаные бури... Но такой прогноз может и не сбыться — ведь эти возможные времена столь далеки, что предсказать все изменения, которые произойдут в системе Земля—Луна—Солнце, просто невозможно. А если такая картина и окажется реальной, то люди обязательно придумают, как предотвратить бедствие.



Школа в „Кванте"

Математика 8, 9

Статья «Преобразования плоскости в задачах на построение» предназначена в первую очередь для восьмиклассников, а статья «Неравенство Коши — Буняковского» — для девятиклассников.

Преобразования плоскости в задачах на построение

В этой заметке мы расскажем об одном способе применения преобразований в задачах на построение — самом простом, но, пожалуй, и самом распространенном. Начнем с обсуждения двух задач из «Кванта» № 1 (с. 36).

Задача 1. *Даны прямая и две окружности по разные стороны от нее. Постройте квадрат, диагональ которого лежит на данной прямой, а концы другой диагонали — на данных окружностях.*

Пусть вершины A и C искомого квадрата $ABCD$ лежат на данной прямой l, а вершины B и D на данных окружностях ω_1 и ω_2 (рис. 1; мы предполагаем, что окружности ω_1 и ω_2 не симметричны относительно прямой l). Поскольку точки B и D должны быть симметричны относительно прямой l и $D \in \omega_1$, точка B должна лежать на окружности ω_1', симметричной окружности ω_1 относительно l. Построив окружность ω_1' и найдя ее точки пересечения с ω_2 (их может быть две, одна или ни одной — и столько же решений имеет задача), получим возможные положения вершины B. После этого найти остальные вершины уже совсем легко.

Задача 2. *Даны точка A, окружность и прямая. Постройте квадрат $ABCD$ такой, что на данной окружности лежит его вершина B, а на данной прямой — вершина C.*

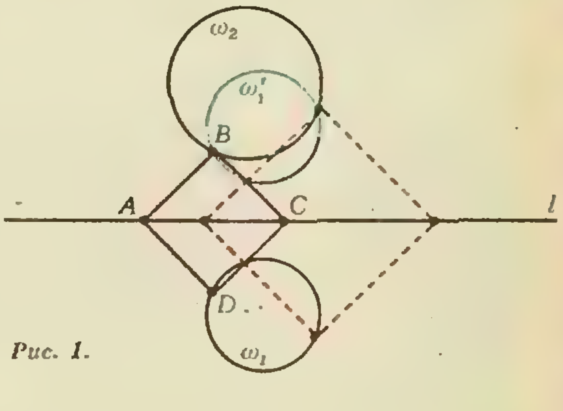


Рис. 1.

Здесь, как и в задаче 1, нужно догадаться, что вершина C получается из вершины B при вполне определенном преобразовании F плоскости; это преобразование состоит в последовательном выполнении поворота на 45° вокруг центра A ($\angle BAC = 45°$) и гомотетии с коэффициентом $AC/AB = \sqrt{2}$ и центром A (порядок, в котором выполняются поворот и гомотетия, в данном случае роли не играет; говорят, что F — это *композиция* указанных поворота и гомотетии*)). Таким образом, для решения задачи достаточно построить окружность $\omega' = F(\omega)$, т. е. образ данной окружности ω при преобразовании F, и взять в качестве вершины C любую из точек пересечения окружности ω' с данной прямой. Центр O' окружности ω' можно построить как вершину прямоугольного равнобедренного треугольника AOO' ($\angle AOO' = 90°$), а радиус окружности ω' в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса окружности ω. Отметим, что поворот на 45° можно делать как по, так и против часовой стрелки; при этом получаются два преобразования F_1 и F_2, которым отвечают две окружности ω' и ω'', так что задача может иметь от 0 до 4 решений (рис. 2).

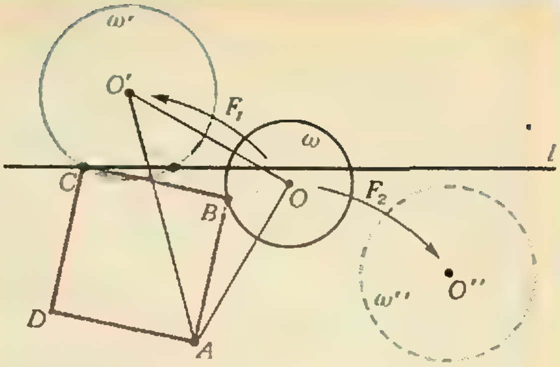


Рис. 2.

Обе эти задачи укладываются в следующую схему (рис. 3):

Заданы две фигуры M_1 и M_2 и некоторое преобразование плоскости F; требуется найти на этих фигурах такие точки X (на M_1) и Y (на M_2), что при преобразовании F точка X переходит в точку Y.

Для решения надо построить фигуру $F(M_1)$, в которую переходит фигура M_1 при преобразовании F, и найти ее пересечение с фигурой M_2; тогда Y — это любая из точек пересечения фигур M_2 и $F(M_1)$, а $X = F^{-1}(Y)$, где F^{-1} — преобразование, обратное к F.

Конечно, преобразование F, а часто и фигуры M_1 и M_2 не задаются в явном виде. Их надо уметь «выудить» из условия — и здесь все уже зависит от искусства решающего. Чтобы нашим читателям было легче ориентироваться, приведем полный список, названия и обозначения всех преобразований подобия и, в частности, движений плоскости. (Некоторые из них не изучаются в школе, но являются композициями преобразований, известных из курса 7-го класса.)

Движения:

параллельный перенос $T_{\vec{a}}$ *на вектор* $\vec{a}$;

поворот R_O^{α} *на угол* α *вокруг центра* O;

осевая симметрия S_l *с осью* l;

скользящая симметрия $S_{l,\vec{a}} = T_{\vec{a}} \circ S_l$, *где* $l \parallel \vec{a}$, — *композиция осевой симметрии и параллельного переноса вдоль оси* ($\circ$ — знак композиции).

Преобразования подобия, не вошедшие в список движений:

гомотетия H_O^k с центром O и коэффициентом k;

поворотная гомотетия (по другой терминологии *спиральное подобие*) с центром O, углом α и коэффициентом k — это композиция $H_O^k \circ R_O^{\alpha}$ гомотетии и поворота с общим центром;

зеркальная гомотетия с центром O, осью l ($l \in O$) и коэффициентом k — это композиция $H_O^k \circ S_l$ гомотетии и симметрии относительно оси, проходящей через центр гомотетии.

Для удобства некоторые преобразования мы включили в этот список фактически дважды (поворот, осевая симметрия и гомотетия являются частными случаями других преобразований — каких?), однако можно доказать, что здесь перечислены все возможные преобразования подобия плоскости.

По нашей схеме фигуры M_1, M_2 и преобразование F в задаче 1 — это данные окружности и симметрия относительно данной прямой, а в задаче 2 — окружность, прямая и поворотная гомотетия $H_A^{\sqrt{2}} \circ R_A^{\pm 45°}$.

Рассмотрим теперь две задачи, в ко-

---

*) О композиции преобразований можно прочитать, например, в учебном пособии: *Геометрия 6—8* под ред. А. Н. Колмогорова.— М.: Просвещение, 1980.— С. 191.

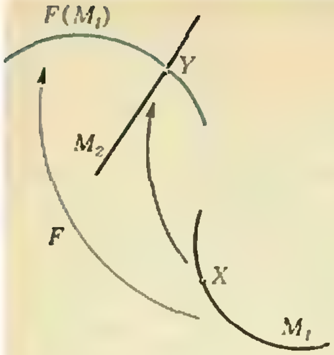


Рис. 3.

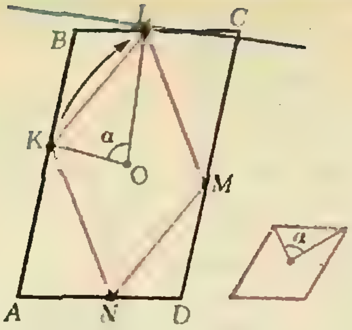


Рис. 4.

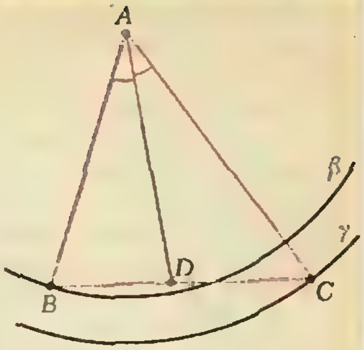


Рис. 5.

торых наша схема просматривается не столь явно.

Задача 3. *Впишите параллелограмм, подобный данному, в другой данный параллелограмм так, чтобы на каждой стороне описанного параллелограмма лежала одна вершина вписанного.*

Пусть $ABCD$ — данный описанный параллелограмм, а $KLMN$ — искомый вписанный (рис. 4). Их центры должны совпадать, поскольку при центральной симметрии относительно центра параллелограмма $KLMN$ параллелограмм $ABCD$ должен перейти в себя. Следовательно, центр O искомого параллелограмма нам известен; известны также $\angle KOL=\alpha$ и отношение $LO:KO=k$, поскольку задана форма параллелограмма $KLMN$. А это значит, что можно применить нашу схему, взяв за M_1 и M_2 прямые AB и BC, за F — поворотную гомотетию $H_O^k \circ R_O^\alpha$, а за X и Y — искомые точки K и L ($L=F(K)$). Дальнейшее в разъяснениях не нуждается. Отметим только, что в этой задаче интересно провести полное исследование.

Задача 4. *Постройте треугольник ABC, если известны длина его биссектрисы AD и длины сторон AB и AC.*

Построим отрезок AD и проведем окружности β и γ радиусов AB и AC с центром A (рис. 5). Это и будут множества M_1 и M_2, а точки B и C — это точки X и Y в нашей схеме. Что же будет преобразованием F? Согласно теореме о биссектрисе (см., например, «Квант» № 2 за 1985 г., с. 29) отношение $k=CD:DB$, в котором делится сторона CB основанием биссектрисы, равно отношению $AC:AB$ сторон треугольника, и следовательно, нам известно. А так как $C=H_D^{-k}(B)$, в качестве F можно взять гомотетию H_D^{-k}, т. е. C — это точка пересечения окружностей γ и $H_D^{-k}(\beta)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте треугольник по биссектрисе и отрезкам, на которые основание биссектрисы делит сторону треугольника.

2. Постройте окружность с данным центром так, чтобы один из отрезков, соединяющих точки ее пересечения со сторонами данного угла, был параллелен данной прямой.

3. В два известных момента времени с корабля были замерены углы между направлениями на два маяка, отмеченные на карте. Направление и скорость движения корабля также известны. Как найти на карте положения корабля в эти моменты?

4. Постройте треугольник ABC по медианам AA_1 и BB_1 и углу C.

5 (для читателей, знакомых с *инверсией*). Впишите в данный параллелограмм ромб данной площади так, чтобы на каждой стороне параллелограмма лежала одна вершина ромба.

В. Н. Дубровский

Неравенство Коши — Буняковского

Неравенство Коши — Буняковского смело можно отнести к числу популярнейших в математике. Не раз появлялось оно и на страницах нашего журнала (см., например, «Квант», 1986, № 12, с. 31). Выглядит неравенство Коши — Буняковского так:

$$|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}. \quad (1)$$

Тем не менее мало где приводится его доказательство. Здесь мы дадим одно весьма простое доказательство неравенства Коши — Буняковского, обсудим его геометрический смысл и с его помощью еще раз решим одну задачу, предлагавшуюся в 1984 году в «Кванте» (см. № 5, с. 37, Избранные школьные задачи, задача 15). Попутно мы обсудим вопрос о «точности» неравенства.

Итак, если хотя бы один из радикалов, например $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$, равен нулю, тогда $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$, левая часть в (1) также равна нулю и неравенство справедливо. Пусть оба корня положительны и пусть

$$A=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2},$$
$$B=\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}.$$

Перепишем неравенство (1) в виде

$$\frac{|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n|}{AB}\leqslant 1.$$

Воспользовавшись тем, что $|x+y|\leqslant \leqslant|x|+|y|$ и $|xy|\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, напишем цепочку неравенств:

$$\frac{|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n|}{AB}\leqslant\frac{|a_1b_1|}{AB}+$$
$$+\frac{|a_2b_2|}{AB}+\ldots+\frac{|a_nb_n|}{AB}=$$
$$=\frac{|a_1|}{A}\cdot\frac{|b_1|}{B}+\frac{|a_2|}{A}\cdot\frac{|b_2|}{B}+\ldots$$
$$\ldots\frac{|a_n|}{A}\cdot\frac{|b_n|}{B}\leqslant\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a_1}{A}\right)^2+\left(\frac{b_1}{B}\right)^2\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a_2}{A}\right)^2+\left(\frac{b_2}{B}\right)^2\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a_n}{A}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{b_n}{B}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{B^2}(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\right)=1$$

— неравенство (1) доказано. Заметим, что мы доказали более сильное неравенство: $|a_1b_1|+\ldots+|a_nb_n|\leqslant AB$. Равенство в нем достигается при

$$\frac{|a_1|}{A}=\frac{|b_1|}{B},\ \frac{|a_2|}{A}=\frac{|b_2|}{B},\ \ldots,\ \frac{|a_n|}{A}=\frac{|b_n|}{B},$$

т. е. при $\left|\frac{a_1}{b_1}\right|=\left|\frac{a_2}{b_2}\right|=\ldots=\left|\frac{a_n}{b_n}\right|$ (если a_i, b_i отличны от нуля; если же некоторое $b_i=0$, то и соответствующее $a_i=0$). В (1) равенство достигается, когда к тому же произведения a_1b_1, ..., a_nb_n одного знака, т. е. когда

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

При $n=3$ неравенство Коши — Буняковского принимает вид

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2},\qquad(1')$$

и нетрудно понять его геометрический смысл. Рассмотрим два вектора $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$. Тогда в левой части (1′) записана абсолютная величина скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а в правой части — произведение их длин $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$. Но скалярное произведение векторов равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними; поскольку $|\cos(\widehat{a,b})|\leqslant 1$, мы получаем неравенство (1′).

В случае произвольного n неравенство Коши — Буняковского имеет тот же геометрический смысл в пространстве размерности n, где вектор, длина вектора и скалярное произведение векторов определяется аналогично тому, как это делается в трехмерном пространстве:

$$\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$
$$\vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n,$$
$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2};$$
$$\text{a}\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Теперь возьмем «Квант», 1984, № 5 и посмотрим на задачу 15 из «Избранных школьных задач»:

а) *Пусть* $a+b+c=1$. *Докажите, что* $a^2+b^2+c^2\geqslant 1/3$.

б) *Пусть* $a+b+c=1$ *и, кроме того, известно, что* a, b, c *— длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что* $a^2+b^2+c^2<1/2$.

Решение. а) По неравенству Коши — Буняковского

$$1=a\cdot1+b\cdot1+c\cdot1\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times$$
$$\times\sqrt{1^2\cdot1^2\cdot1^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Отсюда $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$.

Если $a=b=c=1/3$, то $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=1/3$. Это означает, что наше неравенство точное.

Вопрос о точности неравенства имеет большое значение. Поэтому мы дадим строгое определение.

Пусть неравенство

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\geqslant c$$

выполнено для всех допустимых значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Говорят, что константа c в правой части точная, если ее нельзя увеличить, т. е. не существует такого $k>c$, чтобы при всех допустимых значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполнялось неравенство

$$f(x_1, \ldots, x_n)\geqslant k.$$

Аналогично про константу c в правой части неравенства

$$b(x_1, x_2, \ldots, x_n)\leqslant c,$$

справедливого при всех допустимых $x_1, x_2, \ldots, x_n$, говорят, что она точная, если ее нельзя уменьшить.

Вернемся к нашей задаче. Докажем б) в чуть более общей постановке: *пусть* a, b, c ($a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$) *— длины векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *таких, что* $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, *и* $a+b+c=1$. *Тогда* $a^2+b^2+c^2<1/2$.

Возведем обе части векторного равенства $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ в скалярный квадрат. Получим

$$\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}\vec{c}+2\vec{a}\vec{c}=0,$$

где $\vec{a}\vec{b}=ab\cos\alpha$, $\vec{b}\vec{c}=bc\cos\beta$, $\vec{a}\vec{c}=ac\cos\gamma$, α, β, γ — углы между соответствующими векторами.

Отсюда

$$a^2+b^2+c^2=-2(\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{c})\leqslant \leqslant 2(|\vec{a}\vec{b}|+|\vec{b}\vec{c}|+|\vec{a}\vec{c}|)< <2(ab+bc+ac)=(a+b+c)^2- -(a^2+b^2+c^2)=1-(a^2+b^2+c^2)$$

(подумайте, почему в нашем рассуждении появилось строгое неравенство).

Таким образом, $2(a^2+b^2+c^2)<1$, $a^2+b^2+c^2<1/2$, что и требовалось.

Это неравенство также точное, т. е. нельзя взять константу $k<1/2$, чтобы при этом неравенство $a^2+b^2+c^2<k$ выполнялось для всех векторов, удовлетворяющих условию задачи. В самом деле, пусть $k=1/2-\varepsilon$. Возьмем три коллинеарных вектора длиной ε, $1/2-\varepsilon$, $1/2$ соответственно, причем векторы длиной ε и $1/2-\varepsilon$ одного направления, а вектор длиной $1/2$ — противоположного. Они удовлетворяют условию задачи, но в то же время

$$\varepsilon^2+\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2= =\frac{1}{2}+2\varepsilon^2-\varepsilon>\frac{1}{2}-\varepsilon=k.$$

Задача, которую мы обсуждали, допускает следующее естественное обобщение:

Докажите, что сумма квадратов сторон n-угольника периметра 1:

а) не меньше $1/n$;

б) меньше $1/2$;

в) можно ли усилить утверждение пункта б)?

А. А. Конюшков

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Найдите все целые значения x, при которых выражение $\frac{7x+1}{3x+4}$ принимает целые значения.

2. Докажите, что число $2^{10}+5^{12}$ — составное.

3. Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике можно выбрать три диагонали так, что из них можно составить треугольник.

4. Дан правильный пятиугольник P_1, вписанный в окружность, и правильный пятиугольник P_2, описанный вокруг этой окружности и касающийся ее в вершинах пятиугольника P_1. Проведем через вершины пятиугольника P_1 перпендикуляры к его сторонам. Они составят правильный пятиугольник P_3. Докажите, что если a_1, a_2, a_3 — стороны пятиугольников P_1, P_2, P_3, то $a_3^2=a_2^2-a_1^2$.

5. Основания трапеции имеют длины 3 и 15. Может ли радиус окружности, вписанной в трапецию, иметь длину 4?

Девятый класс

6. Докажите, что уравнение $xy+yz+zx=1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

7. Решите в положительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=3, \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=3. \end{cases}$$

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в точке H. Докажите формулу для радиуса R описанной окружности:

$$R=\frac{1}{2}AH^2\cdot\frac{A_1H}{B_1H\cdot C_1H}.$$

9. Точки C и D лежат на прямой, а точки A и B не лежат на ней. С помощью циркуля и линейки найдите на этой прямой точку M такую, что $\angle BMD=2\angle AMC$.

10. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\operatorname{tg}\alpha_2\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}\alpha_n=1$. Найдите наибольшее возможное значение произведения $\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_n$.

Десятый класс

11. Решите систему уравнений

$$x_1^{x_2}=x_3,\ x_2^{x_3}=x_4,\ \ldots$$
$$x_{n-2}^{x_{n-1}}=x_n,\ x_{n-1}^{x_n}=x_1,\ x_n^{x_1}=x_2.$$

12. Из квадрата $ABCD$ со стороной a вырезали четверть круга радиусом r с центром в точке C. Требуется из оставшейся части вырезать прямоугольник наибольшей площади, причем так, чтобы прямоугольник и квадрат имели общий угол A. Каковы размеры прямоугольника наибольшей площади?

13. Можно ли любой трехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник?

14. Из точки O в пространстве выходят четыре луча так, что угол между любыми двумя лучами один и тот же. Найдите этот угол.

15. При каком натуральном n число $\frac{n^2}{(1,1)^n}$ будет наибольшим?

Задачи 2, 3, 6, 9—11, 13, 15 нам предложил *Л. Д. Курляндчик*, задачи 1, 5 — *П. П. Горнуша*, задачу 4 — *Т. Н. Демина*, задачу 8 — *Ю. Н. Хохленко*, задачи 7, 14 — *В. А. Ясинский*, задачу 12 — *Э. Г. Готман*.

Лаборатория „Кванта"

Вихри... на патефоне

Кандидат физико-математических наук
Б. М. БУБНОВ

В настоящее время у физиков заметно повысился интерес к изучению вихревых движений жидкости и газа. И это не случайно. Уже давно известно, например, что именно вихревое движение циклонов и антициклонов в атмосфере определяет погоду на Земле.* (Теперь с аналогичной картиной столкнулись и океанологи.**) Оказалось, что океан, как и атмосфера, весь пронизан вихрями (самых разных размеров — от сантиметров до сотен километров), и если их не учесть, это приведет к неправильному пониманию многих важных явлений.

Чем же характеризуется вихревое движение? Главное — наличие вращательного движения относительно некоторого центра, который, в свою очередь, также может двигаться. Дополнительно к вращательному могут быть и другие виды движений, и в зависимости от этого вихри могут быть или плоскими (например, циклон часто можно рассматривать как плоский вихрь, так как его горизонтальные размеры много больше вертикальных), или такими, в которых вертикальные движения соизмеримы с горизонтальными (смерчи, тайфуны, «пыльные дьяволы» и т. п.).

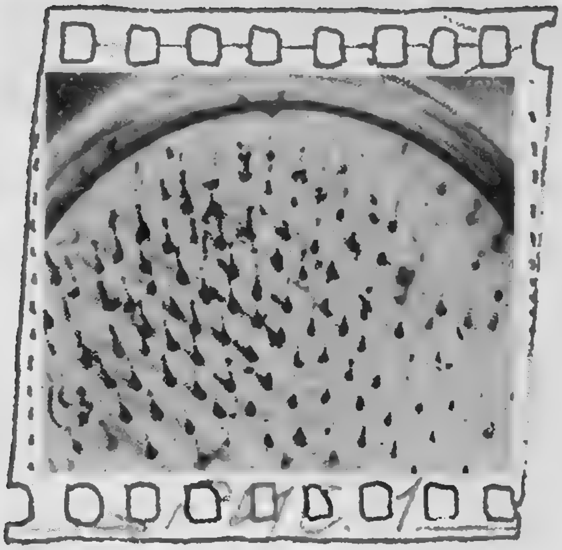
Естественно, что существуют общие закономерности для вихревых движений, независимо от их размеров. Изучение этих закономерностей позволяет ответить на многие важные вопросы: в какую сторону будет двигаться тайфун? как изменится погода за счет взаимодействия двух циклонов? Попробуем рассмотреть некоторые особенности вихревых движений в простых «домашних» экспериментах.

Для проведения этих экспериментов требуется банка, в которую можно налить воду, и проигрыватель. Банка должна иметь вертикальные, желательно прозрачные, стенки, а проигрыватель — скорость вращения 33 об/мин. Наливаем в банку теплой воды и устанавливаем ее на проигры-

---

*) Об этом можно прочитать в статье Л. Алексеевой «Вихри, которые «делают погоду»» («Квант», 1977, № 8).

**) Об этом рассказывается в статье Л. М. Бреховских и В. М. Куртепова «Акустика в Океане» («Квант», 1987, № 3).



ватель. Включаем его и наблюдаем за движением жидкости в банке.

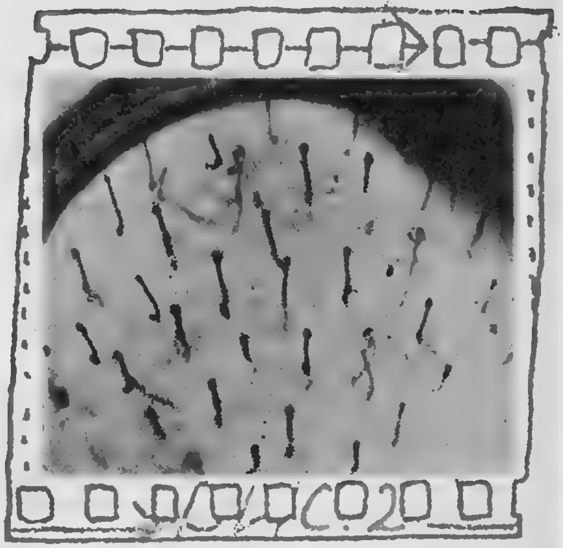
Сначала происходит постепенное раскручивание жидкости, а через несколько минут жидкость в банке разбивается на отдельные вихри — в системе устанавливается картина движений, изображенная на рисунке 1. Естественно, что в прозрачной воде увидеть эту картину нельзя, поэтому надо как-то сделать эти движения видимыми. Самое простое — аккуратно капнуть в воду чернил или зеленки, для более эффектной картины на поверхность жидкости можно насыпать мелкий краситель. Прежде чем изучать свойства этой вихревой системы, попробуем ответить на вопрос: почему в теплой воде, вращающейся с постоянной скоростью, образуются вихри?

Теплая жидкость, налитая в открытую банку, непрерывно испаряется. За счет испарения на поверхности жидкости непрерывно образуется тонкая холодная пленка, которая обладает большей плотностью, чем остальная жидкость. Эта холодная вода стремится опуститься вниз, причем в невращающейся жидкости такое опускание носит нерегулярный характер и пленка «стекает» отдельными струйками — «термиками». Таким образом в жидкости происходит непрерывное конвективное перемешивание *), т. е. перемешивание, вызванное различием в плотности отдельных частей жидкости.

Если жидкость начать вращать, то нерегулярное конвективное движение упорядочивается и в системе образуется вихревая решетка. В общем случае вращение стремится запретить или ослабить движения, которые происходят в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и если жидкость вращается с очень большой скоростью, то движения в ней вообще не будет. Если скорость уменьшить, то образуется указанная выше структура, а при еще меньшей скорости эта структура разрушается и возникает нерегулярный вихревой режим.

Все эти эффекты можно наблюдать, и не меняя скорость вращения, но изменяя температуру воды и ее глубину. При скорости вращения 33 об/мин и глубине 3—4 см для воды с температурой 25—35 градусов наблюдается вихревая решетка, для воды с температурой 50 градусов она начинает разрушаться, причем переход от регулярной структуры к нерегулярной происходит через взаимодействие отдельных пар вихрей. В этом случае вихри сплетаются, образуя двойную спираль (похожую на спираль ДНК), которая со временем сжимается в один вихрь (рис. 2).

Если вы научились получать вихревую решетку, то можно перейти к более тонким экспериментам и рассмотреть этапы образования решетки. Вихри в системе образуются не сразу, а через некоторое время после начала вращения. Для наблюдения образова-



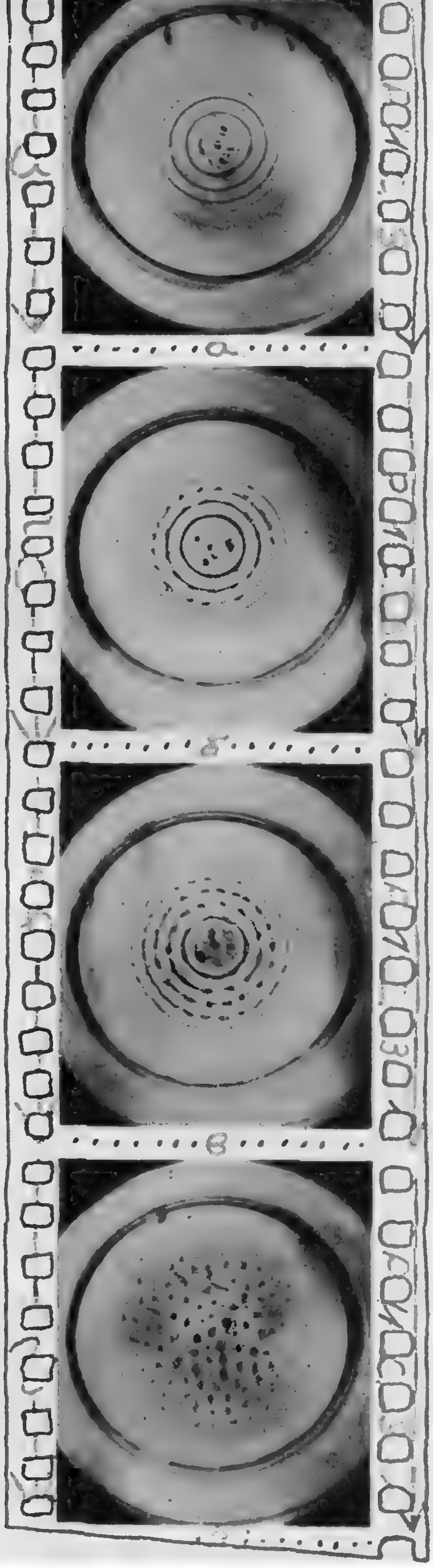
---

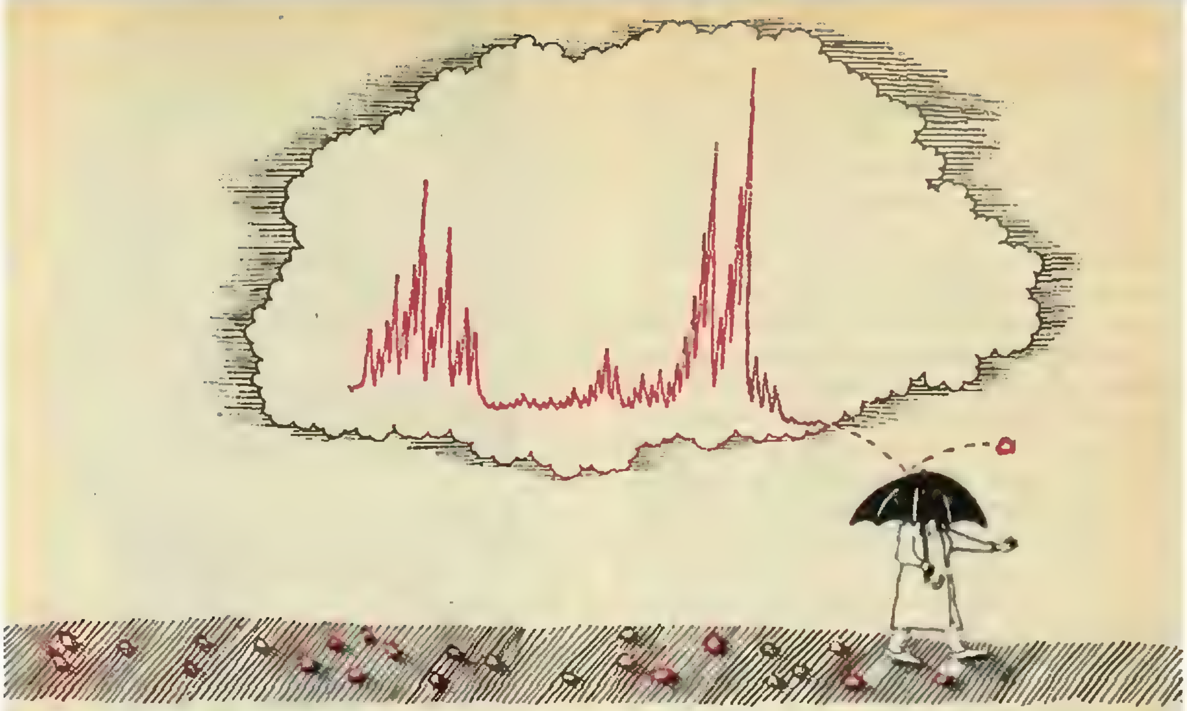
*) О конвекции (о ее возникновении и условиях существования) и о том, как благодаря конвекции неупорядоченные системы приходят в упорядоченное состояние, можно прочитать в статье Е. Е. Городецкого и В. С. Есипова «Конвекция и самоорганизующиеся системы» («Квант», 1985, № 9).

ния вихрей краситель надо посыпать на поверхность примерно через 1 минуту после старта. При хорошей центровке сосуда (т. е. ось сосуда должна совпадать с осью вращения) в жидкости образуется промежуточная картина — конвективные кольца (рис. 3). Эти кольца образуются за счет действия двух механизмов — конвекции и неравномерности вращения жидкости, обусловленной тем, что не вся жидкость закрутилась сразу с одной скоростью. Холодная жидкость опускается вниз по кольцам, а теплая поднимается вверх между кольцами. За счет этого на кольцах возникает так называемая сдвиговая неустойчивость, т. е. неустойчивость, вызванная тем, что с одной стороны кольца жидкость движется в одну сторону, а с другой — в другую. Такой тип неустойчивости в природе наблюдается повсеместно: в океане, в атмосфере на границе встречных течений. Граница в этом случае постепенно разрушается. Так, в наших экспериментах на кольцах начинают образовываться вихри, которые потом выстраиваются в определенную структуру.

Отметим, что одним из определяющих параметров в системе является глубина жидкости. Если взять сосуд, в котором глубина в одном месте отличается от глубины в другом (поставить промежуточное дно в одной половине), то в разных частях банки возникают вихри с различными структурами и на границе раздела решеток также происходят интенсивные вихревые взаимодействия.

Теоретические исследования даже самых простых вихревых движений очень сложны. Эксперимент позволяет изучить основные простейшие «кирпичики», из которых складывается сложное движение. Так, взаимодействие «пыльных дьяволов» в пустынях происходит аналогично наблюдаемому в простейших экспериментах, т. е. по двойной спирали. Эти же эксперименты позволяют ответить на вопрос: когда вихри будут жить в мире друг с другом, а когда один поглотит другой, что постоянно наблюдается в атмосфере и легко видно на так называемых картах погоды.





Искусство программирования

Об одной рекуррентной последовательности

В. В. ГУРАРИЙ, К. А. СТЫРКАС
(ученики 10 кл.)

В журнале «В мире науки» № 3 за 1984 год была опубликована статья Брайана Хэйеса «Взлеты и падения чисел-градин». В этой статье рассказывалось об одной интересной задаче о числовых последовательностях. Мы хотели бы рассказать о ней и о некоторых любопытных результатах, связанных с попытками ее решения.

Формулировка этой задачи предельно проста. Возьмем некоторое натуральное число. Если оно четное, разделим его на 2, в противном случае умножим на 3 и прибавим 1. С полученным числом снова повторим те же операции. Вопрос задачи состоит в следующем: как будет выглядеть полученная последовательность в зависимости от начального числа?

Вообще можно ожидать две возможности: либо данная последовательность является расходящейся, то есть получаемые числа будут неограниченно увеличиваться, либо после какого-то количества операций мы получим число, уже ранее встречавшееся в нашей последовательности. В этом случае числа в ней начнут периодически повторяться, и данная последовательность «зациклится».

Рассмотрим самое первое натуральное число — единицу. Наша последовательность будет такой: 1→4→2→→1. Далее все повторяется сначала. Числа 2 и 4 рассматривать не имеет смысла, так как они уже встречались, и новой последовательности чисел мы не получим.

Перейдем к числу 3. Как нетрудно убедиться, за ним следуют числа 10, 5,16,8,4,2,1,... Мы снова пришли к замкнутому циклу 1,4,2,1,...

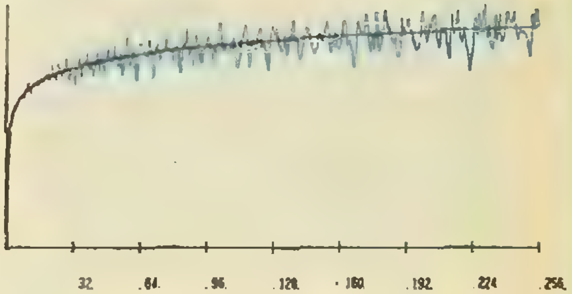


Рис. 1.

Числа 5 и 6 не представляют интереса: 5 уже встречалось ранее, а число 6 сразу же переходит к уже исследованному числу 3.

Следующее число — 7. За ним следуют числа 22,11,34,17,52,26,13,40,20, 10,5,16,8,4,2,1,...

Пропустим теперь несколько чисел и остановимся на числе 27. Здесь уже не происходит быстрого спуска к единице, как в предыдущих примерах. Если продолжить вычисления, то мы получим по пути такие числа, как 214,484,700,1186,2158. На 77 шаге мы получим очень большое число: 9232. Но все-таки и этот процесс заканчивается: после 111 шагов последовательность опускается к единице.

В Токийском университете была произведена «проверка» всех чисел до 2^{40}, то есть примерно до 10^{12}. Результат проверки был одним и тем же для всех чисел — все они в конце концов приходили к числу 1.

Однако строго доказать, что любая последовательность приходит к единице, пока не удалось никому.

Когда эта задача была поставлена в Йельском университете, на целый месяц прекратились математические исследования, так как все математики безуспешно пытались решить эту проблему. Такая же история произошла и в Чикагском университете. Ходила шутка, что эта задача использовалась с целью дезорганизовать американскую математическую науку.

Продолжим наше экспериментальное исследование. Попытаемся найти число операций, за которое «среднее» число приходит к единице. Будем считать, что с вероятностью 1/2 оно является четным, а с вероятностью 1/2 является нечетным. В первом случае оно уменьшается вдвое. Во втором случае оно сначала увеличивается примерно в 3 раза (прибавлением единицы можно пренебречь), но затем обязательно делится на 2. Следовательно, во втором случае число увеличивается примерно в полтора раза за две операции. Итак, за 3 шага «среднее» число уменьшается в среднем в 4/3 раза.

Отсюда напрашивается вывод, что число операций, необходимое, чтобы привести среднее число n, равно $3 \cdot \log_{4/3} n$. Насколько верна эта гипербола, можно проверить на ЭВМ.

На рисунке 1 представлен результат этой работы. Машина исследовала группы, состоящие из 256 последовательных натуральных чисел: от 1 до 256, от 257 до 512 и т. д. Для каждой группы считалось среднее количество операций и среднее значение величины $3 \cdot \log_{4/3} n$. Всего было исследовано 256 таких групп. Для наглядного сравнения приводится график (рис. 1), в котором по оси x откладывался порядковый номер группы, а по оси y — две величины (средний логарифм и среднее количество шагов). Красная кривая — ожидаемая логарифмическая зависимость, синяя — экспериментально полученная зависимость количества операций. Видно, что синяя кривая хоть и колеблется вокруг красной, но в среднем значения искомых величин совпадают. Следовательно, можно считать, что формула количества операций «среднего» числа довольно точно описывает поведение больших групп реальных чисел, по крайней мере в пределах первой сотни тысяч.

Любопытная картина получается и при выводе на график траекторий чисел. Если мы по оси x будем откладывать номер операции, а по оси y — число, получающееся после проведения этой операции, то возникает этот график (рис. 2). Он похож на траекторию градины в грозовой туче, которая то поднимается в воздушных по-

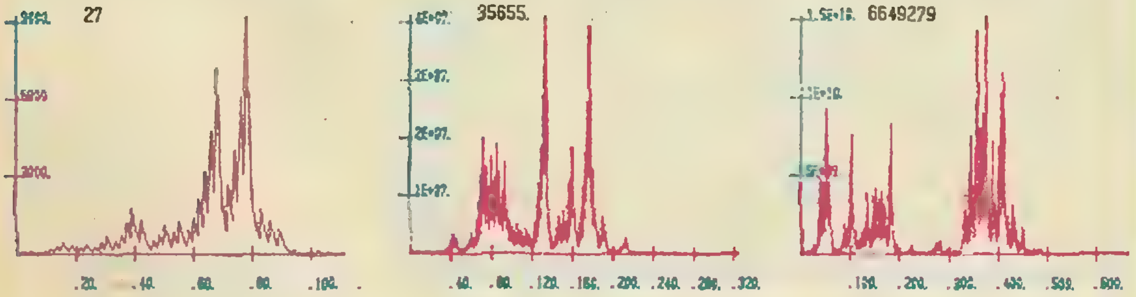


Рис. 2.

токах, то опускается вниз, но в конце концов все-таки падает под действием силы тяжести. Отсюда одно из названий проблемы — проблема «чисел-градин».

Особый интерес представляют собой так называемые *числа-рекордсмены*. Рекордсменами мы будем называть числа, у которых количество операций, за которое они приходят к единице, больше, чем соответствующее количество операций любого меньшего их числа. Так, первыми рекордсменами являются числа 2, 3, 6, 7, 9, 18 и т. д. (см. таблицу)

Заметим, что быстрее всего приходят к единице степени двойки. Если $n=2^k$, то длина траектории равна $\log_2 n$, т. е. такое число приходит к единице в

$$\frac{3\cdot\log_{4/3}n}{\log_2 n}=3\cdot\log_{4/3}2\approx7{,}23$$

раз быстрее, чем «среднее» число.

Довольно интересно было бы найти правило, позволяющее определить, рекордсмен данное число или нет. Для этого можно попытаться найти закономерность в распределении чисел-рекордсменов, для чего желательно найти как можно больше таких чисел. Эту задачу снова приходится решать на ЭВМ.

Если использовать персональные компьютеры с относительно малым быстродействием, можно получить первые 30 рекордсменов. Но для дальнейшего поиска такие ЭВМ становятся непригодными, так как расстояние между числами-рекордсменами очень быстро увеличивается с увеличением их порядкового номера. Например, расстояние между десятым и девятым рекордсменами равно 73—54=19, а между 30-м и 29-м рекордсменами равно уже 26623—23529=3094. Поэтому для поиска следующих рекордсменов необходимо использовать либо более мощные ЭВМ, либо более эффективные, чем простой перебор, алгоритмы. С использованием этих ресурсов мы смогли найти 55 рекордсменов. По-видимому, здесь наступает предел нашим реальным возможностям. Дальнейший счет становится «нерентабельным», так как даже на мощных ЭВМ за сутки непрерывной работы можно получить не более 4—5 новых рекордсменов, а в дальнейшем на поиск одного рекордсмена потребуются недели работы.

Можно заметить, что количество рекордсменов, приходящихся на каждый разряд, примерно одинаково. Отсюда может показаться, что между числами-рекордсменами и количеством их операций существует логарифмическая зависимость. Это предположение было высказано в статье Брайана Хэйеса.

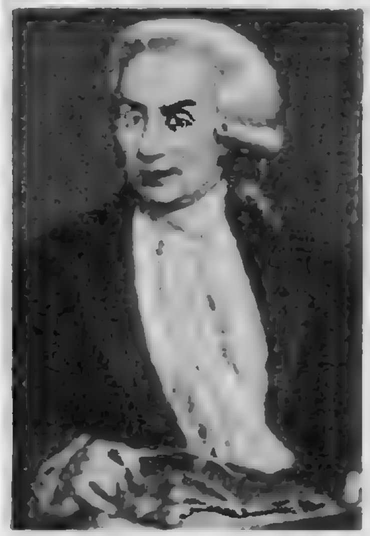
Но простая экспериментальная проверка этого предположения для всех известных нам 55 рекордсменов (Брайану Хэйесу их было известно около 30) показывает, что эта зависимость возрастает быстрее логарифма, по крайней мере в пределах 15 миллионов чисел. Пока не ясно, какая зависимость имеет место в действительности.

Наряду с числами-рекордсменами, которые имеют количество операций большее, чем у каждого из предыдущих, можно рассматривать числа — «рекордсмены в высоту». Это такие числа, которые в процессе взлетов и падений достигают максимума, большего, чем соответствующие максимумы любого из меньших чисел. Для новых рекордсменов можно проводить анализы, подобные уже проведенным для обычных.

	Число	Шаги	Высота
1.	2.	1.	2.
2.	3.	7.	16.
3.	6.	8.	16.
4.	7.	16.	52.
5.	9.	19.	52.
6.	18.	20.	52.
7.	25.	23.	88.
8.	27.	111.	9232.
9.	54.	112.	9232.
10.	73.	115.	9232.
11.	97.	118.	9232.
12.	129.	121.	9232.
13.	171.	124.	9232.
14.	231.	127.	9232.
15.	313.	130.	9232.
16.	327.	143.	9232.
17.	649.	144.	9232.
18.	703.	170.	250504.
19.	871.	178.	190996.
20.	1161.	181.	190996.
21.	2223.	182.	250504.
. . .	. . .	. . .	. . .
51.	5649499.	612.	1017886660.
52.	6649279.	664.	15208728208.
53.	8400511.	685.	159424614880.
54.	11200681.	688.	159424614880.
55.	14934241.	691.	159424614880.
56.	15733191.	704.	159424614880.

Таблица чисел-рекордсменов

Наш календарь



Луиджи Гальвани

(к 250-летию со дня рождения)

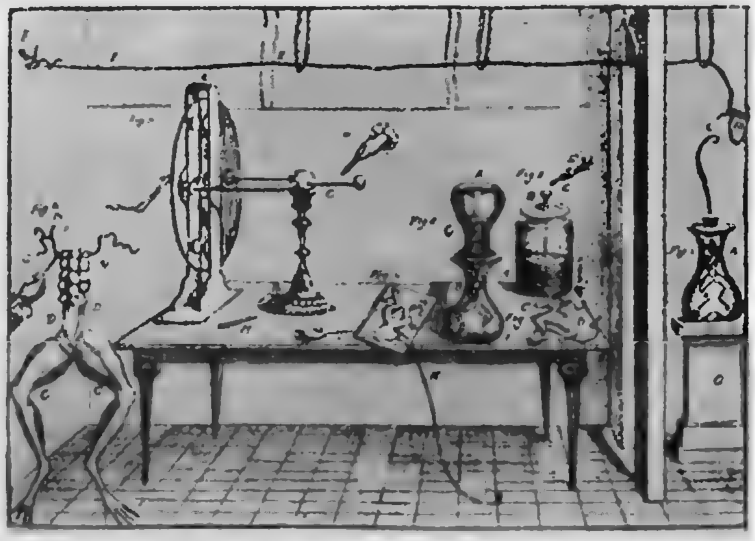
Известный итальянский физик и физиолог Л. Гальвани родился в 1737 году в Болонье. В 1759 году он окончил старейший в Европе Болонский университет, получив ученое звание доктора медицины и философии. Потянулись годы напряженной работы — врачебная практика, преподавание медицинских дисциплин в университете, собственные медико-биологические изыскания.

Сначала научные интересы Гальвани сосредоточивались на сравнительной анатомии — главным образом птиц, но к 70-м годам ученый постепенно переключается на исследования по физиологии нервов и мышц. Эксперименты подобного рода удобнее всего проводить на препаратах лягушки. Уже в 1773 году появляется работа по сокращению мышц лягушки, а через год — исследование влияния, оказываемого на ее нервы опиумом.

Неудивительно, что заинтересовался Гальвани и действием на лягушечьи нервы и мышцы электрических разрядов. Еще в середине века широкое распространение получили электростатические машины и лейденские банки (накопители электричества), а опыты по действию электрических разрядов на живые организмы захватили и лаборатории естествоиспытателей, и великосветские салоны. Чаще всего объектом такого экспериментирования — порой небезопасного! — становился человеческий организм. Многих медиков занимала возможность применения электричества в лечебных целях.

Гальвани поставил перед собой более скромную задачу — определение количественных характеристик действия электрического разряда на нервы и мышцы. В опытах, начатых, по-видимому, в 1780 году, он прикасался к лягушечьей лапке проводником, соединенным с кондуктором электростатической машины, и пытался установить связь между интенсивностью конвульсивных сокращений мышцы и силой электрического разряда. Ученый провел множество экспериментов и уже склонялся к мысли, что основные характеристики явления выяснены. Но, как писал он впоследствии, «легко ошибиться в исследовании и считать виденным и найденным то, что мы желаем увидеть и найти». Неожиданно обнаружилось, что при разряде электростатической машины лягушечья лапка дергается и в том случае, когда к ней прикасаются проводником, не соединенным с кондуктором,— нужно лишь, чтобы этот проводник был заземлен. Гальвани был необычайно удивлен новым эффектом: «Я зажегся страстным желанием исследовать это явление и выяснить его скрытые причины». (Сейчас нам ясно, что этот эффект связан с электризацией лягушечьего препарата «через влияние» и стеканием наведенного заряда на землю).

Эксперименты с заменой электростатической машины на лейденскую банку и лягушечьих лапок на препараты других животных приводили к тем же результатам, но никак не углубляли понимание явления. И Гальвани решил перейти от экспериментов с «искусственным» электричеством (т. е. электричеством натертых изоляционных палочек, электростатических машин и лейденских банок) к опытам с «естественным» электричеством молний. Естественно, были получены совершенно аналогичные результаты: «Как только появлялись молнии, тотчас же мышцы (лягушечьих препаратов) приходили в сильные сокращения, которые совпадали по времени с молнией и предшествовали грому». Не явилось неожиданным и то обстоятельство, что лягушечьи лапки подергивались — хотя и не так активно — и без молний, когда небо заволакивали темные тучи или низко проплывали облака. Казалось бы, все ясно: подергивания про-



Первые опыты Гальвани.

исходят под действием атмосферного электричества.

Однако столь определенного вывода Гальвани все же не сделал. Дело в том, что даже в тихую безоблачную погоду ему нередко доводилось наблюдать конвульсивные сокращения лягушечьих препаратов, подвешенных к железной решетке балкона на проволочных крючках, протыкавших спинной мозг животного (вероятно, это происходило, когда дуновение ветра приводило лапку в контакт с прутьями решетки). Но, как это часто бывает, когда возникла мысль специально понаблюдать за этим эффектом, он *почти перестал появляться*: «Я стал наблюдать препараты в разные часы в течение многих дней, но едва заметил несколько мышечных сокращений. Утомленный ожиданием, я изогнул и плотно прижал к решетке крючок, пропущенный через спинной мозг... Теперь сокращения появлялись нередко, однако вне всякой связи с изменением атмосферы или электричества».

Поскольку выходило так, как будто атмосферное электричество роли, во всяком случае главной, не играет, Гальвани решил по возможности вообще освободиться от его влияния и перенес опыты в помещение. Дальнейшие систематические наблюдения привели его к следующим выводам: а) при соединении проводником бедренного нерва (он проходит в области спинного мозга) с мышцей лягушечьей лапки наблюдаются, но не всегда, слабые сокращения препарата; б) если соединительный проводник составлен из двух разных металлов, например из меди и цинка, всегда *наблюдаются сильные* сокращения.

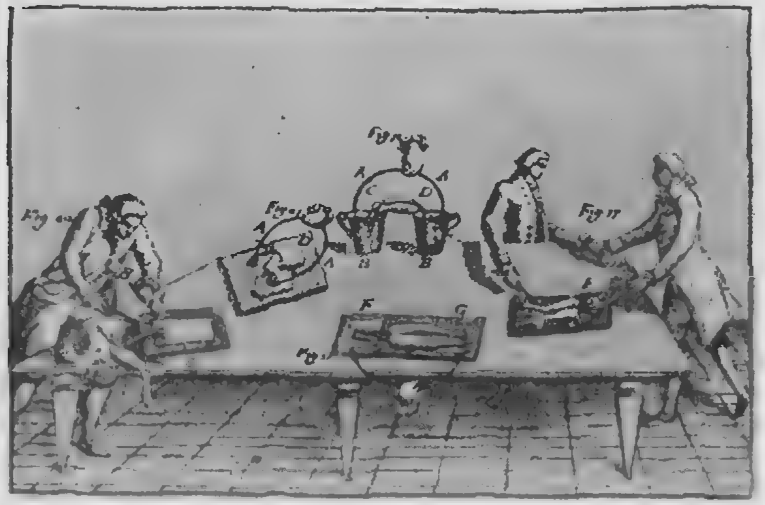
Результаты десятилетних исследований Гальвани опубликовал в 1791 году в «Трактате об электрических силах при мышечных движениях». Эта работа быстро получила широкую известность среди итальянских и зарубежных медиков и естествоиспытателей, которые сразу же принялись повторять описанные эксперименты. Для объяснения всего комплекса наблюдавшихся явлений Гальвани выдвинул теорию «животного» электричества, т. е. электричества, во всем подобного «искусственному» или «естественному», но вырабатывающегося самим организмом животного. Ученый полагал, что изученные им сокращения лягушечьих препаратов являются следствием электрического разряда, происходящего, когда металлический проводник соединяет нервы и мышцы, которые функционируют как накапливающие «электрическую жидкость» обкладки лейденской банки.

Теория Гальвани была встречена с энтузиазмом большинством ученых, в том числе его соотечественником А. Вольтой (1745—1827), считавшимся одним из ведущих специалистов по электричеству. Однако в рассуждениях своего болонского коллеги Вольта сразу же обнаружил *весьма существенное упущение*. В самом деле, как это ни странно, но Гальвани не только не попытался истолковать, но и вообще не придал значения тому твердо установленному им удивительному факту, что мощные сокращения *препаратов наблюдаются* лишь в том случае, если соединительный проводник состоит из двух разнородных металлов! Занявшись решением этой загадки, Вольта уже в 1793 году пришел к выводу о том, что из опытов Гальвани «никоим образом нельзя заключить о действительном существовании животного электричества». «Я произвел опыты,— писал он далее,— которые обнаруживают такой же переход электрической жидкости в случае, когда металлы разных родов приложены не к животным тканям, а к каким-либо влажным предметам, например к бумаге, коже, сукну и т. д.» Прошло еще семь лет, и начавшиеся с «загадки Гальвани» исследования Вольты привели его к великому открытию — к изобретению «вольтова стол*ба», первого гальванического* элемента, открывшего человечеству эру электрического тока.

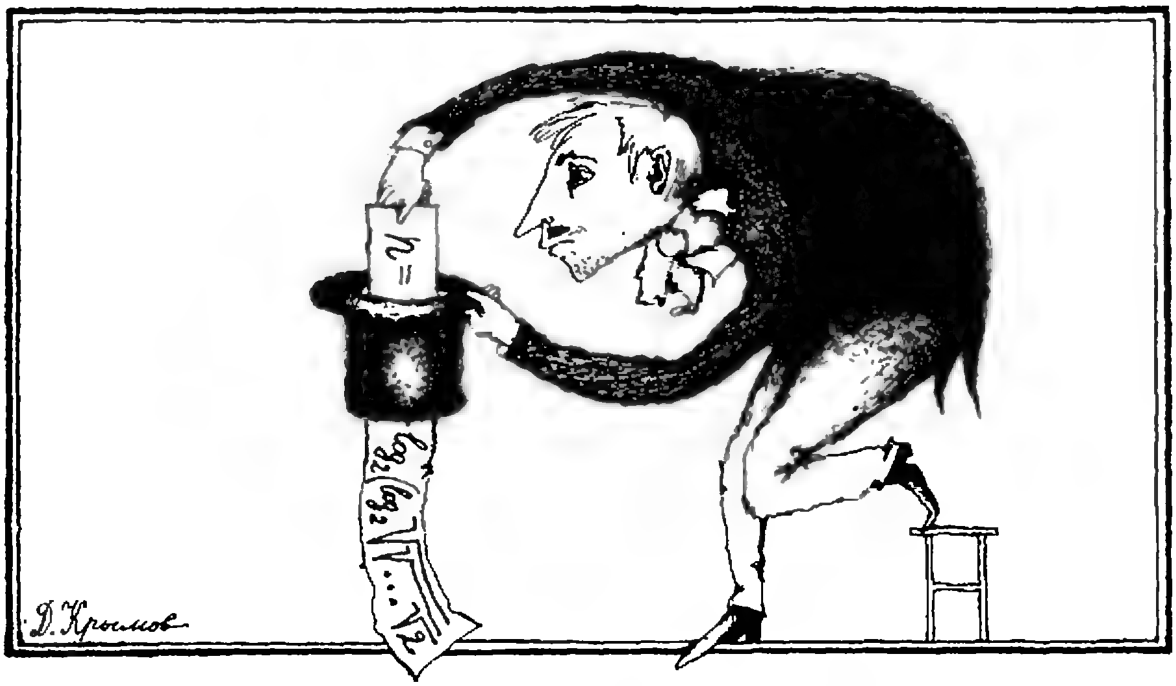
Гальвани в это время уже не было в живых — он умер в Болонье в 1798 году. До последних дней Гальвани оставался верным своей теории животного электричества — теории, представлявшейся большинству ученых полностью опровергнутой работами Вольты и других физиков. А между тем еще в 1794 году Гальвани описал опыты, в которых электрические эффекты в лягушечьих препаратах наблюдались без применения каких-либо металлических приспособлений (даже само препарирование он производил стеклянным скальпелем!).

Только через полстолетия ученые начали осознавать, что представления *Гальвани о животном* электричестве далеко не беспочвенны. Возникла обширная медико-биологическая дисциплина — электрофизиология, и подобно тому, как физики причисляют Гальвани к зачинателям учения об электричестве, электрофизиологи считают его основоположником своей науки. При этом стоит еще добавить, что электрические явления в биологических тканях оказались гораздо более сложными, чем в неживой природе, и реальных успехов в выяснении их «механизмов» удалось достичь лишь в наше время.

Б. Е. Явелов



Различные опыты Гальвани.



Игры и головоломки

Из чего угодно — что угодно

Л. А. ШТЕЙНГАРЦ

Однажды мне нужно было произвести кое-какие вычисления. Я достал свой старенький калькулятор, заглянул в тетрадь — первым стояло число 23 — и нажал на клавишу с цифрой 2. Клавиша не работала. Попробовал нажать на клавишу с цифрой 3 — опять не получилось. Нажал на клавишу «1» — все в порядке, на табло засветилась зеленая единица. Проверил клавиши со знаками операций — работают. Как же быть? Пришло в голову, что $23=11\times(1+1)+1$, и я, быстро нажав в нужной последовательности пять раз на клавишу «1», два раза — на «+», и один раз — на $\times$, увидел на табло 23.

Увлекшись, я вскоре забыл про первоначальные нужные мне вычисления. Меня уже волновал «принципиальный» вопрос — *можно ли любое натуральное число изобразить при помощи какого-нибудь одного произвольного числа?* Здесь я должен объяснить читателю, какой смысл я вкладываю в слова «изобразить при помощи одного числа...». Я рассуждаю, как человек, у которого в руках калькулятор: я считаю, что в записи $\sqrt{2}$ используется только **одна** двойка, в записи $\lg\sqrt{2}$ — тоже одна двойка, хотя на самом-то деле $\sqrt{2}$ — это $\sqrt[2]{2}$, а $\lg\sqrt{2}$ — это $\log_{10}\sqrt[2]{2}$. Но у меня есть клавиши, на которых, в частности, есть значки $\sqrt{\ }$ и lg: нажал на них — получил результат!

Если читатель согласен на такие «правила», то я могу предложить ему поиграть в игру «из чего угодно — что угодно». Я приведу цепочку своих рассуждений, а читателю предоставляется убедиться в их «справедливости».

1. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи* ***трех*** *двоек:*

$$n=-\log_2\Bigl(\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{n\ \text{раз}}\Bigr).$$

2. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи* ***двух чисел***, 2 *и* 10:

$$n=-\log_2\Bigl(\lg\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{10}}}}_{n\ \text{раз}}\Bigr).$$

3. *Число 10 можно изобразить при помощи одной двойки:*

$$10=\left[\sqrt{\left|\left[-\sqrt{\left|\left[-\arccos\left(-\left[\sqrt{2}\,\right]\right)\right]\right|!}\right]\right|!}\right]$$

(здесь $[x]$ — это *целая часть* числа x).

4. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи двух двоек.*

5. *При любом натуральном n между числами $\frac{n}{\lg 2}$ и $\frac{n+1}{\lg 2}$ существует хотя бы одно натуральное число k:*

$$\frac{n}{\lg 2}<k<\frac{n+1}{\lg 2};$$

при этом $[\lg 2^k]=n$.

6. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи одной десятки:*

$$n=\left[-\lg\left(\lg\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{10}}}}_{k\ \text{раз}}\right)\right],$$

где k таково, что $\frac{n}{\lg 2}<k<\frac{n+1}{\lg 2}$.

7. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи одной двойки.*

8. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи одной единицы.*

9. *Единицу можно изобразить при помощи одного произвольного числа:*

$$1=[|\sin x|]!$$

(напомним, что $0!=1!=1$).

10. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи одного произвольного числа.*

К этой не совсем серьезной игре можно сделать одно серьезное замечание: к сожалению, в наших утверждениях нельзя пропустить слово «натуральное». Дело в том, что множество всех чисел, которые могут быть изображены при помощи одного числа (или конечного количества чисел), является *счетным*. А множество действительных чисел, увы, *несчетно*...

Упражнения

1. Изобразите при помощи цифр 1, 9, 8, 7 (взятых ровно по одному разу) все натуральные числа от 1 до 1987.

2. Изобразите при помощи одного единственного числа 1987 число 1988.

3. Верно ли, что любое натуральное число можно изобразить при помощи одного произвольного числа, если клавиша с символом lg не работает (автору статьи это неизвестно)?

Информация

Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых познакомиться с основными направлениями современной физики. Для желающих организуются факультативные занятия по математике и основам информатики. Успешно закончившие обучение получают свидетельство об окончании ВФШ.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 23 сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 7 по 19 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса.

Адрес ВФШ: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 939-26-56.

Поправка

В ответах к вариантам вступительных экзаменов по математике были допущены ошибки (см. «Квант», № 5, 1987). На с. 61 в ответах к задаче 2 варианта 1 должно быть $x\in[{}^1/_{27};\ 1)\cup[9;\ \infty)$, к задаче 2 варианта 3 первая серия $x=2\pi k$, к задачам 2 и 5 варианта 4 соответственно $x\in[4;\ \infty)$ и

$$Q=\sqrt[3]{\frac{9v^2}{8\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha}}$$

На с. 62 в ответе к задаче 2 варианта 1 Московского станкоинструментального института $k_1=-{}^6/_{19}$. Редакция приносит читателям свои извинения.

Практикум абитуриента

Работа, энергия, тепло

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

Значительное число задач на вступительных экзаменах по физике касается процессов превращения механической энергии в тепловую и наоборот. Впервые цикл таких задач появляется в разделе «Механика» школьного курса физики при изучении механических движений, в которых необходимо учитывать силы трения, при рассмотрении неупругих соударений тел и т. п. Второй раз школьники встречаются с аналогичными задачами в разделе «Тепловые явления. Молекулярная физика» при знакомстве с различными тепловыми процессами, с работой тепловых двигателей и т. д.

Превращение механической энергии в тепловую

В основе решения задач на эту тему лежит закон сохранения энергии, сформулированный в виде: при взаимодействии тел в замкнутой системе выделившееся количество теплоты равно разности механической энергии системы до и после взаимодействия.

Задача 1. *Пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v, застревает в мешке с песком, движущемся ей навстречу со скоростью u. Определите выделившееся при этом количество теплоты.*

При решении этой задачи будем считать, что процесс застревания пули в мешке с песком происходит настолько быстро, что изменением потенциальной энергии пули можно пренебречь (это будет иметь место, если сила, действующая на пулю со стороны мешка с песком, значительно больше силы тяжести пули). Тогда, в соответствии с законом сохранения энергии, выделившееся при «торможении» пули количество теплоты будет определяться изменением только кинетической энергии пули и мешка.

Если систему отсчета связать с мешком и предположить, что масса мешка с песком много больше массы пули, и поэтому его скорость не изменяется за время застревания пули в песке, то выделившееся количество теплоты найдем по формуле

$$Q_1 = \frac{m}{2}(v+u)^2.$$

Здесь мы учли, что пуля и мешок до соударения двигались навстречу друг другу, а после взаимодействия скорость пули относительно мешка стала равной нулю.

Если же в качестве системы отсчета выбрать землю и снова считать, что при соударении с пулей скорость мешка не изменяется, то количество теплоты будет равно разности кинетических энергий пули до и после взаимодействия с мешком:

$$Q_2 = \frac{m}{2}v^2 - \frac{m}{2}u^2 = \frac{m}{2}(v^2-u^2).$$

Итак, $Q_1 \neq Q_2$. Но этого быть не может, поскольку количество теплоты не должно зависеть от выбора системы отсчета. Чтобы «снять» парадокс, рассмотрим процесс взаимодействия пули с мешком в системе отсчета, связанной с землей, более детально. Будем считать, что масса мешка M хотя и много больше массы пули m ($M \gg m$), но все же величина конечная. Запишем для системы пуля — мешок закон сохранения импульса (в проекциях на ось координат, совпадающую по направлению с начальной скоростью пули $\vec{v}$):

$$mv_x + Mu_x = (M+m)u'_x,$$

или

$$mv - Mu = -(M+m)u',$$

где u' — скорость системы после застревания пули, и закон сохранения энергии:

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{M}{2}u^2 = \frac{(M+m)}{2}u'^2 + Q.$$

Отсюда находим выделившееся при соударении количество теплоты:

$$Q = \frac{Mm}{2(M+m)}(v+u)^2 \approx \frac{m}{2}(v+u)^2.$$

Таким образом, получаем, что никакого недоразумения действительно нет, в обеих системах отсчета получается один и тот же результат. Однако при расчете выделившегося количества теплоты в данном примере проще и разумнее было воспользоваться системой отсчета, связанной с мешком, а не с землей.

Легко показать (сделайте это самостоятельно), что и в более общем случае абсолютно неупругого соударения двух тел произвольных масс m_1 и m_2, движущихся по одной прямой с произвольными скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, выделившееся количество теплоты определяется аналогично и оказывается равным

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(v_{1x}-v_{2x})^2,$$

где v_{1x} и v_{2x} — проекции скоростей на соответствующую ось координат.

Задача 2. *Небольшому грузу массой m, лежащему на длинной горизонтальной доске массой M, сообщили скорость $\vec{v}$, направленную вдоль доски (рис. 1). Найдите количество теплоты, которое выделится к моменту окончания скольжения груза по доске. Доска по плоскости может двигаться без трения.*

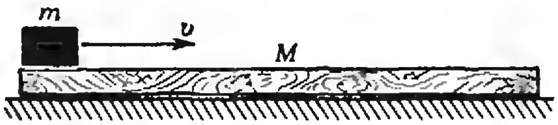


Рис. 1.

В данном случае выделившееся количество теплоты будет определяться работой сил трения скольжения. Однако для ответа на вопрос задачи достаточно воспользоваться готовой формулой, приведенной в конце решения предыдущей задачи:

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(v_{1x}-v_{2x})^2 = \frac{mM}{2(m+M)}v^2.$$

Здесь мы предположили, что доска достаточно длинная, так что груз успевает «затормозиться» на ней.

В заключение первого раздела статьи — два вопроса для самостоятельного обсуждения.

Вопрос 1 (который был одно время популярен на вступительных экзаменах по физике на химический факультет МГУ). *Металлическую пружину растворяют в кислоте. Один раз в сжатом состоянии, другой — в свободном. Чем будут отличаться последствия таких растворений?*

Вопрос 2 (с которым приходилось сталкиваться поступающим на геологический факультет МГУ). *На что идет кинетическая*

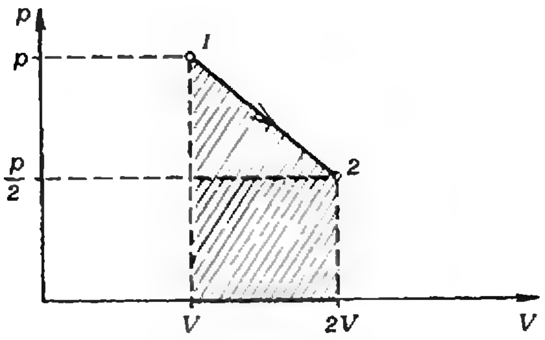


Рис. 2.

энергия метеорита, сгорающего в атмосфере Земли?

Как «работает» первый закон термодинамики

Напомним, что этот закон является частным случаем закона сохранения энергии в применении к тепловым процессам. Вот его формулировка: изменение внутренней энергии (ΔU) термодинамической системы при переходе ее из одного состояния в другое равно сумме количества теплоты (Q), переданного системе, и работы (A) внешних сил, т. е.

$$\Delta U = Q + A.$$

Первый закон термодинамики можно записать несколько иначе:

$$Q = \Delta U + A',$$

где A' — работа системы над внешними телами.

Про каждое состояние системы можно сказать, что ему отвечает тот или иной запас внутренней энергии. Однако нельзя сказать, что в системе содержится определенное количество теплоты или работы. Как количество теплоты, так и работа характеризуют *процесс* изменения энергии системы, и поэтому для одного и того же ΔU, но для разных процессов и Q и A разные.

Задача 3. *В теплоизолированном цилиндре с поршнем находится азот массой $m = 0{,}2$ кг при температуре $t = 20\ ^\circ C$. Азот, расширяясь, совершает работу $A' = 4{,}47$ кДж. Найдите изменение внутренней энергии азота и его температуру после расширения. Удельная теплоемкость азота при постоянном объеме $c_V = 745$ Дж/(кг · К).*

Подвода тепла к газу не производится — ведь цилиндр теплоизолирован. Поэтому первый закон термодинамики позволяет записать:

$$0 = \Delta U + A',$$

т. е.

$$\Delta U = -A' = -4{,}47 \text{ кДж}.$$

В этом случае изменение внутренней энергии газа отрицательно — азот охлаждается.

Зная теплоемкость при постоянном объеме и изменение внутренней энергии, мы легко можем найти изменение температуры газа. Действительно, при постоянном объеме газ работы не совершает ($p\Delta V = 0$), и подводимое количество теплоты $Q = c_V m \Delta T$ совпадает с изменением внутренней энергии ΔU:

$$\Delta U = c_V m \Delta T.$$

Отсюда найдем изменение температуры газа $\Delta T = t_2 - t_1$ (здесь все равно, какой температурной шкалой пользоваться — Цельсия или Кельвина) и температуру азота после расширения:

$$t_2 = t_1 + \frac{\Delta U}{c_V m} = t_1 - \frac{A'}{c_V m} = $$
$$= -10\ ^\circ C \text{ (или } T_2 = 263 K).$$

Задача 4. *На p—V-диаграмме (рис. 2) изображен процесс расширения газа, при котором он переходит из состояния 1 с давлением p и объемом V в состояние 2 с давлением $p/2$ и объемом $2V$. Найдите количество теплоты, которое сообщили этому газу. Линия 1—2 — отрезок прямой.*

Основным моментом при решении этой задачи является вывод о том, что начальная и конечная температуры газа одинаковы. Действительно, произведения pV и $(p/2)(2V)$ равны, а значит, равны и температуры (вспомним закон Менделеева—Клапейрона). Но коль скоро не изменилась температура газа, не изменилась также и его внутренняя энергия (см. решение предыдущей задачи): $\Delta U = 0$. Тогда из первого закона термодинамики следует, что сообщенное газу количество теплоты равно работе, совершенной газом: $Q = A'$. На p—V-диаграмме работа изображается заштрихованной на рисунке площадью трапеции, поэтому

$$A = \frac{1}{2}\left(p + \frac{p}{2}\right)(2V - V) = \frac{3}{4}\, pV.$$

Задача 5. *Над газом совершают два тепловых процесса, переводя его из одного и того же начального состояния и нагревая до одинаковой*

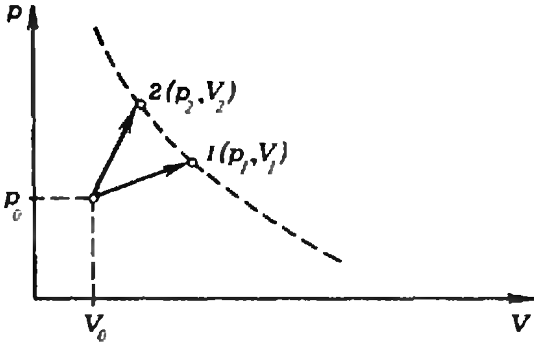


Рис. 3.

конечной температуры (рис. 3). При каком процессе газу сообщается большее количество теплоты?

Прежде всего представим процессы на $p-V$-диаграмме. Заметим, что конечные точки $1(p_1, V_1)$ и $2(p_2, V_2)$ лежат на одной изотерме (пунктирная линия на рисунке). В соответствии с первым законом термодинамики подводимое к газу количество теплоты равно сумме совершенной газом работы и изменения его внутренней энергии. Поскольку и начальные, и конечные температуры для обоих процессов одинаковы, изменения внутренней энергии тоже одинаковы. Следовательно, подводимое количество теплоты будет больше в том процессе, в котором газ совершает бóльшую работу.

Вычисляя площади соответствующих трапеций (см. решение предыдущей задачи), находим, что работа в первом процессе равна

$$A_1=\frac{1}{2}(p_0+p_1)(V_1-V_0),$$

а во втором —

$$A_2=\frac{1}{2}(p_0+p_2)(V_2-V_0).$$

Учитывая, что конечные точки 1 и 2 лежат на одной изотерме, т. е. $p_1V_1=p_2V_2$, можем записать

$$2(A_1-A_2)=p_0(V_1-V_2)+V_0(p_2-p_1)=$$
$$=(V_1-V_2)\left(p_0+p_1\frac{V_0}{V_1}\right).$$

Таким образом, разность работ положительна, если $V_1>V_2$, и полный ответ на поставленный вопрос следующий: большее количество теплоты подводится в том процессе, где конечный объем газа больше.

Задача 5. *Тепловая машина имеет коэффициент полезного действия (КПД) $\eta=20$ %. Каким станет ее КПД, если количество теплоты, потребляемое за цикл, увеличится на 40 %, а количество теплоты, отдаваемое холодильнику, уменьшится на 20 %?*

Напомним, что коэффициент полезного действия (η) равен отношению работы (A), совершаемой тепловой машиной за цикл, к величине получаемого ею количества теплоты ($Q_п$): $\eta=A/Q_п$. Из закона сохранения энергии следует, что работа (A) равна разности получаемого от нагревателя ($Q_п$) и отдаваемого холодильнику ($Q_{от}$) количеств теплоты: $A=Q_п-Q_{от}$. Тогда КПД машины

$$\eta=\frac{A}{Q_п}=\frac{Q_п-Q_{от}}{Q_п}=1-\frac{Q_{от}}{Q_п}.$$

Вначале $\eta=20$ %, и отношение $Q_{от}/Q_п$ равно 0,8. Затем количество теплоты, потребляемое за цикл, увеличилось на 40 % и стало равным $Q'_п=1{,}4Q_п$, а количество отдаваемой холодильнику теплоты уменьшилось на 20 %, т. е. стало равным $Q'_{от}=0{,}8Q_{от}$. Таким образом, новое отношение $Q'_{от}/Q'_п=0{,}8Q_{от}/1{,}4Q_п\approx0{,}46$, и КПД машины стал

$$\eta'=1-0{,}46\approx0{,}54,$$

т. е. увеличился и теперь составляет примерно 54 %.

Упражнения

1. Моль идеального одноатомного газа с начальной температурой $T=600$ К адиабатически увеличивает свой объем в 3 раза. Какую работу совершает при этом газ, если в тепловом процессе, при котором давление линейно изменяется с объемом, газу при расширении из того же начального в то же конечное состояние было подведено количество теплоты $Q=1{,}9$ кДж?

2. В цилиндрическом сосуде под поршнем при температуре T находится насыщенный водяной пар. При изотермическом вдвигании в сосуд поршня выделилось количество теплоты Q. Найдите совершенную при этом работу. Молярная масса пара M, удельная теплота парообразования воды r.

3. За время $\tau=1$ ч в холодильнике превращается в лед при температуре $t_0=0$ °C масса воды $m=3{,}6$ кг, имевшая начальную температуру $t=20$ °C. Какая мощность потребляется холодильником от электросети, если он отдает в окружающее пространство в единицу времени энергию $Q_t=840$ Дж/с? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=0{,}33$ МДж/кг.

Информация

X Турнир юных физиков

Науки юношей питают,
Отраду старым подают,
В счастливой жизни украшают,
В несчастной — случай берегут...

М. В. Ломоносов

Турнир проводится физическим факультетом МГУ им. М. В. Ломоносова с сентября 1987 по февраль 1988 года.

Решения задач заочного коллективного конкурса необходимо отправить не позднее 16 ноября 1987 года по адресу: 119899 Москва ГСП, МГУ, физический факультет, кафедра физики колебаний, Оргкомитет ТЮФ-Х. В графе «Кому» напишите: заочный конкурс ТЮФ-Х и номера задач, решения которых вы посылаете. В конверт вложите анкету:

1. Почтовый адрес школы.
2. Фамилия, имя, отчество руководителя команды.
3. Список авторов решений.

В начале решения каждой задачи обязательно укажите город, номер школы, класс, фамилии и имена авторов решения. К экспериментальным задачам приложите подробные описания установок, их схемы, желательно фотографии и экспериментальные данные. Наиболее удачные решения задач и самостоятельно сформулированные проблемы будут отмечены грамотами турнира и предложены для публикации в журнале «Квант».

Более подробную информацию о ТЮФ-Х можно получить в Оргкомитете ТЮФ по вышеуказанному адресу.

Задания заочного коллективного конкурса ТЮФ-Х

1. Придумай сам. Предложите оригинальные проекты технического и научного использования высокотемпературной сверхпроводимости.

2. «Вечприемник». Сконструируйте и изготовьте переносной радиоприемник, не использующий источников питания. Зачетный параметр: $\varkappa=P/Lm$, где P — звуковое давление на расстоянии 1 м от приемника, L — максимальный линейный размер приемника, m — масса приемника.

3. Camera obscura. Выполните групповой портрет вашей команды с помощью камеры-обскуры. Обоснуйте физические принципы получения качественного снимка с помощью такого приспособления.

4. Электрическая цепь. Несколько узлов ($n<10$) соединены между собой батарейками с известными ЭДС и r. Составьте программу вычислений на ЭВМ для определения разности потенциалов между первым и вторым узлами. Критерием качества программы считайте время от начала ввода данных в компьютер (таблицы значений ЭДС и r) до момента выдачи правильного результата.

5. Метрология. Определите предельную точность измерения длины стальной линейкой.

6. Продавец вакуума. Предприимчивый звездоплаватель решил поставлять в физические лаборатории мира вакуум из космического пространства. Каковы шансы на успех его предприятия?

7. Солнце на закате. Видимый диск Солнца на закате сплющен. Экспериментально измерьте и опишите эти искажения. Рассчитайте теоретическое отношение горизонтального и вертикального размеров солнечного диска, касающегося линии горизонта.

8. Цветное телевидение. Вам надо сконструировать четырехцветный телевизор. Какие цвета вы бы выбрали в качестве основных? Должна ли измениться при этом съемочная аппаратура?

9. Девятый вал.

«Передо мною волны моря.
Их много. Им немыслим счет.»

Б. Пастернак

Существует ли «девятый вал»? Внесите ясность в этот вопрос. В качестве отправной точки можете использовать идеи, изложенные в статье «Тройка, семерка, туз ...» (Знание — сила, 1987, № 1; с. 97—104).

10. Самовозгорание.

«Но и от ветра, когда, раскачавшись, деревья ветвями,
Сильно шатаясь, начнут налегать одно на другое,
Мощное трение их источает огонь, и порою,
Вспыхнувши, вдруг заблестит и взнесется горячее пламя,
Если взаимно они и стволами, и сучьями трутся.»

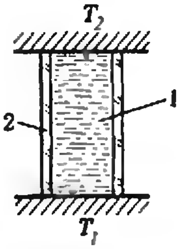
Лукреций Кар.

Так римский философ объяснял происхождение лесных пожаров. Оцените вероятность такого возгорания и его место в ряду факторов, вызывающих возникновение пожаров в природе, т. е. не являющихся следствием деятельности человека.

11. Лампа накаливания. Утверждают, что две лампочки по 60 Вт дают больше света, чем три лампочки по 40 Вт. Так ли это? Исследуйте, как изменяются светоотдача и срок службы лампы накаливания при небольшом изменении напряжения питания.

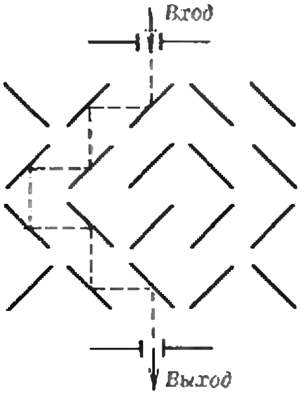
12. Весна в городе. Весна в городе наступает раньше, чем в сельской местности. Опишите основные факторы, приводящие к этому, и произведите численные оценки. В частности, что будет, если однажды вывезти весь снег из Москвы за город?

13. Теплопередача. Исследуйте теплопередачу через вертикальный столб воды в двух случаях: $T_1<T_2$ и $T_1>T_2$.



1 — водяной столб,
2 — теплоизоляционная труба.

14. Мезоскопика. Один из мезоскопических эффектов состоит в том, что сопротивление двумерного металлического образца при низких температурах может существенно измениться при изменении положения всего лишь одного атома решетки. Наглядное представление об этом эффекте можно получить, рассматривая следующую модель: в узлах двумерной решетки $n\times n$ ($n\gg10$) расположены маленькие плоские зеркала с коэффициентом отражения, равным единице. Каждое зеркало может пребывать лишь в двух положениях: с наклоном под углом 45° либо вправо, либо влево.



Состояние зеркал хаотически изменяется, поэтому лазерный луч, попадающий на узел решетки, с равной вероятностью отражается в одну или другую сторону на 90°. Оцените, как изменится световая мощность на выходе системы, если в один из узлов вместо зеркала поместить элемент, полностью поглощающий свет.

15. Медный грош. Монета в 1 копейку «выпала» из космической ракеты и стала искусственной планетой Солнечной системы. Оцените время ее существования как планеты, учитывая взаимодействие с солнечным светом.

16. Электроны в ловушке. Несколько электронов ($2\leqslant n\leqslant 30$) могут свободно перемещаться внутри круга радиуса R. Какое взаимное расположение электронов устойчиво?

17. Резистор Калиостро. Для школьного тестера даже человек — это резистор. Исследуйте с помощью школьного тестера законы последовательного и параллельного соединения таких резисторов (традиционно задача № 17 имеет шуточный оттенок).

Советы дебютантам турнира

Как решать турнирную задачу. Условия турнирных задач часто ставят дебютанта в тупик. Иногда ему даже не ясно, что, собственно, решать, и совсем не понятно, как решать! В таком случае нужно поступать так, как это делают физики. Задачу нужно максимально упростить, сузить, ограничить в рамках простых и ясных допущений, поставить четкий и ясный вопрос, на который можно отвечать. Затем постараться получить качественный ответ — здесь вам помогут соображения подобия, метод размерностей и ваша интуиция. Но ограничиваться этим нельзя. В решении должна быть строгость и полнота. Смело экспериментируйте. Помните, что почти все задания турнира допускают проведение экспериментального исследования. Предостерегаем вас от чрезмерного увлечения аппаратом высшей математики. Турнир не преследует таких целей. В первую очередь должны быть освещены именно качественная сторона и физическая суть проблемы.

Как можно работать коллективно. Для этого организуйте рабочие заседания (встречи). Первая встреча — организационная. На нее пригласите всех, кто интересуется турниром. Здесь прочтите задания турнира, и пусть желающие выберут себе задачи для решения. Не беда, если некоторые задачи захотят решать многие, а часть задач остается не выбранной. Главное содержание первой встречи — начало работы. Вряд ли стоит сразу же находить капитана и оговаривать состав команды, но «координатор» ваших встреч совершенно необходим. Он должен знать все о состоянии дел: когда состоится следующая встреча, какие задачи будут обсуждаться, что уже решено и кем, что в стадии решения, что еще совсем не решается и т. д.

Следующие встречи — рабочие. На них заслушиваются решения задач и после критических замечаний и уточнений принимаются или отправляются на доработку. Если какое-то решение принимается, то желательно, не откладывая на завтра, окончательно оформить его и положить в папку готовых решений. На таких встречах складываются творческие коллективы и постепенно определяется состав команды. Скоро выяснится, что одни участники встреч приносят много решенных задач, другие сильны в организационном плане, третьи не решают задач, но выдвигают свежие и здравые идеи, а некоторые сильны своими критическими замечаниями или же просто умеют создавать атмосферу эмоционального подъема и творческого накала. Все они на своем месте и необходимы коллективу. В середине октября нужно будет проверить, что же сделано — подвести итог. Если окажется, что некоторые задачи не решены или не решались вовсе, то теперь их уже надо распределить по рабочим группам и назначить сроки исполнения с тем, чтобы выработать совместное решение этих задач (возможно, в упрощенном виде — правила турнира это допускают).

На последней встрече необходимо сформировать команду и выбрать капитана.

Кто ваши помощники. В первую очередь — ваши учителя физики. Решать за вас задачи они не будут, но посоветовать или покритиковать ваши решения могут. В организационном плане их помощь совершенно необходима — собрать вас, вовремя отправить домой, кого-то подбодрить или утешить, а кого-то предостеречь, что-то вам дать из оборудования и научить с ним работать и т. д.

Помочь могут родители. От них вы можете ждать нетрадиционных подходов, помощи в том, что сейчас не может дать вам школа. Это в большой степени относится и к вашим родственникам и друзьям.

Помочь могут студенты — выпускники вашей школы. Разумное взаимодействие с ними принесет вам много пользы. Однако поиски помощников и упование на них не должны подменять вашу самостоятельную и активную работу над решениями задач. Если вам удалось «найти» решение задачи, не решая ее, то цена такому «подвигу» не высока.

Наконец, книга — ваш главный помощник. Многие проблемы, затронутые в задачах ТЮФ, в какой-то степени, возможно, уже решены. Творчески используйте уже полученные результаты (при этом не забудьте дать ссылку на источник). Книга может многое подсказать и многому научить.

Желаем вам удачи и творческих успехов.

Т. П. Корнеева, Е. Н. Юносов,
И. В. Яминский

Ответы, указания, решения

Преобразования плоскости в задачах на построение

1. Вершина B треугольника ABC переходит в вершину C при преобразовании $S_l \circ H_A^k$, где l — биссектриса угла A, $k = AC/BC$.

2. Рассматриваемый отрезок симметричен относительно перпендикуляра к данной прямой, проведенного через центр окружности.

3. Фигуры M_1 и M_2 — дуги, из точек которых отрезок между маяками виден под данными углами, преобразование F — параллельный перенос на вектор, изображающий перемещение корабля между моментами измерения.

4. Постройте отрезок AA_1 и найдите геометрические места точек B и C; воспользуйтесь тем, что они симметричны друг другу относительно A_2.

5. Вершина ромба переходит в соседнюю вершину при композиции поворота на 90° вокруг его центра O и инверсии с центром O и коэффициентом $S/2$, где S — площадь ромба.

Избранные школьные задачи

1. -3, -1, 7. **Указание.** Если $x \leqslant -6$ или $x > 7$, то $2 < \dfrac{7x+1}{3x+4} < 3$.

2. $2^{10}+5^{12} = (2^5+5^6)^2 - 2\cdot 2^5\cdot 5^6 = (2^5+5^6)^2 - (2^3\cdot 5^3)^2 = (2^5+5^6+2^3\cdot 5^3)(2^5+5^6-2^3\cdot 5^3)$.

3. Пусть AD — наибольшая диагональ (рис. 1). Тогда годятся диагонали AD, AC и BD, так как $AC+BD > AO+DO > AD$.

4. Положим $\alpha = 18°$. Легко видеть, что

$$a_2 = \frac{a_1}{\cos 2\alpha}, \quad a_3 = \frac{a_1}{\cos \alpha} - a_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Заметив, что $\cos 4\alpha = \cos 72° = \sin 18° = \sin \alpha$, производим выкладку:

$$a_1^2 + a_3^2 = a_1^2 + \frac{a_1^2(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} = a_1^2\,\frac{2-2\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{2a_1^2}{1+\sin\alpha} = \frac{2a_1^2}{1+\cos 4\alpha} = \frac{2a_1^2}{2\cos^2 2\alpha} = a_2^2.$$

5. Не может. **Доказательство.** Пусть $ABCD$ — трапеция, удовлетворяющая условиям задачи (рис. 2), и пусть $CE \parallel AB$. Тогда у треугольника CED основание ED имеет длину $15-3=12$, высота (опущенная на основание) — длину 8. Сумма $CE+CD$ будет наименьшей, если $CE=CD$ (потому что $CE+CD=CE+CD'$), а в этом последнем случае $CE=\sqrt{8^2+6^2}=10$. Таким образом, $AB+CD=CE+CD \geqslant 20 > 18 = AD+BC$, что противоречит возможности вписать в трапецию $ABCD$ окружность.

6. **Указание:** положите $x=k$, $y=1-k$ и найдите z.

7. Если $n \geqslant 4$ или $n=1$, то решений нет; если $n=3$, то $x_1=x_2=x_3=1$; если $n=2$, то

$$x_1 = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3\mp\sqrt{5}}{2}.$$

Решение. Сложим наши уравнения:

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)=6.$$

Но $x+\dfrac{1}{x} \geqslant 2$ при $x>0$, причем $x+\dfrac{1}{x}=2$ только при $x=1$. Значит, $n \leqslant 3$, и если $n=3$, то $x_1=x_2=x_3=1$. Случаи $n=2$ и 1 труда не представляют.

8. **Указание.** Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC, AHB, AHC и BHC, имеют один и тот же радиус R. Выразите AH, A_1H, B_1H, C_1H через R и синусы углов α, β, γ (рис. 3) и подставьте эти выражения в правую часть доказываемого равенства.

9. **Построение.** Пусть A' — точка, симметричная точке A относительно данной прямой. Проведем окружности с центрами A и A', касающиеся данной прямой, и к каждой из этих окружностей проведем касательные из точки B. Точки пересечения этих касательных с данной прямой обозначим через M_1, M_2, M_3, M_4. Условиям задачи могут удовлетворять только точки M_1, M_2, M_3, M_4 (докажите!) и каждая из них удовлетворяет или не удовлетворяет им в зависимости от расположения точек C и D. Если, например, точки A и B расположены, как показано на рисунке 4, то $\angle BM_1X=2\angle AM_1Y$, $\angle BM_2Y=2\angle AM_2Y$, $\angle BM_3Y=2\angle AM_3X$ и $\angle BM_4X=2\angle AM_4X$. Так, скажем, если точка C лежит между M_2 и M_3, а точка D лежит между M_3 и M_4, то решений три: M_2, M_3, M_4; если же точка C лежит правее M_4, а точка D — между M_1 и M_2, то решений нет вовсе.

Замечание. Точка B может попасть внутрь одного из построенных кругов; тогда из нее нельзя провести касательной к соответствующей окружности. Если точка B попадет на окружность, то к этой окружности проводится одна касательная. Кроме того, проведенная касательная может быть параллельна прямой CD. Разберите эти случаи самостоятельно.

10. $(1/\sqrt{2})^n$. **Решение.** Из условия $\sin\alpha_1\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_n=\cos\alpha_1\cdot\ldots\cdot\cos\alpha_n$. Поэтому $2^n(\sin\alpha_1)^2\cdot\ldots\cdot(\sin\alpha_n)^2 = \sin 2\alpha_1\cdot\ldots\cdot\sin 2\alpha_n \leqslant 1$ и $\sin\alpha_1\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_n \leqslant (1/\sqrt{2})^n$. Равенство достигается при $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=\pi/4$.

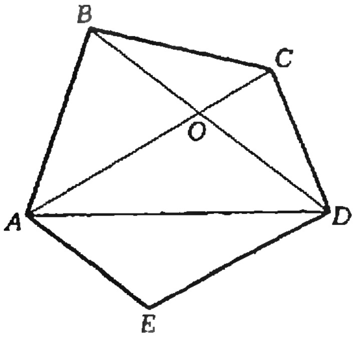


Рис. 1.

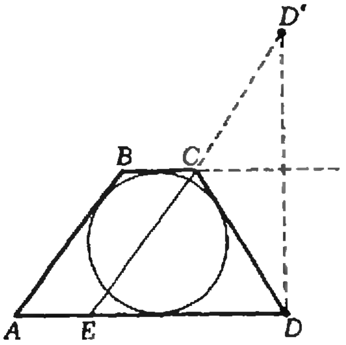


Рис. 2.

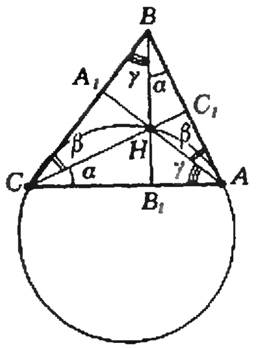


Рис. 3.

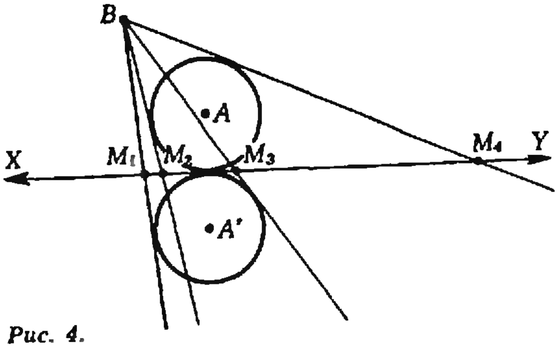


Рис. 4.

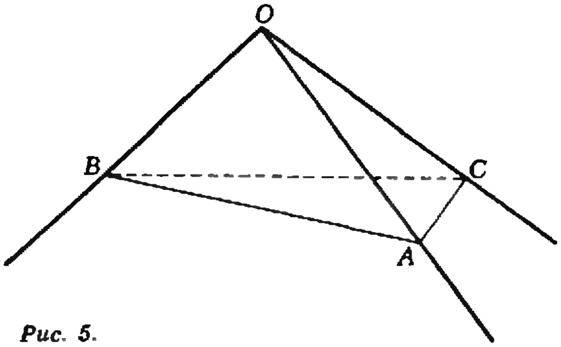


Рис. 5.

11. Если n нечетно, то $x_1 = \ldots = x_n = 1$. Если n четно, то $x_1 = x_3 = x_5 = \ldots$, $x_2 = x_4 = x_6 = \ldots$ и либо $x_1 = 1$, либо $x_2 = 1$. Доказательство. Пусть n нечетно. Если $x_1 = 1$, то $x_3 = 1$, $x_5 = 1, \ldots, x_n = 1$, $x_2 = 1$, $x_4 = 1, \ldots, x_{n-1} = 1$. Если $x_1 > 1$, то все x_i больше 1, и $x_1 = x_n^{x_{n-1}} > x_{n-1} = x_{n-2}^{x_{n-3}} > x_{n-3} = \ldots > x_1$; случай $x_1 < 1$ аналогичен. Пусть n четно. Если $x_1 = 1$, то $x_3 = x_5 = \ldots = 1$ и $x_2 = x_4 = x_6 = \ldots$ Если $x_2 = 1$, то $x_4 = x_6 = \ldots = 1$ и $x_1 = x_3 = x_5 = \ldots$ Предположим, что $x_1 \neq 1$ и $x_2 \neq 1$. Если, скажем, $x_1 < 1$, то $x_3 < 1$, $x_5 < 1, \ldots$ и $x_1 x_3 x_5 \ldots < 1$, что противоречит вытекающему из уравнений равенству $x_2^{x_1 x_3 x_5 \ldots} = x_2$.

12. Наибольшую площадь имеет прямоугольник, вершина E которого, противоположная A, лежит на границе нашей четверти круга и среди точек этой границы наиболее удалена от диагонали BD. Именно, если $r \geqslant 2(\sqrt{2}-1)a$, то в качестве E можно взять точку пересечения границы с диагональю AC; прямоугольник будет в этом случае квадратом со стороной $a - r\sqrt{2}/2$. Если же $r \leqslant 2(\sqrt{2}-1)a$, то в качестве E можно взять точку пересечения границы четверти круга со стороной BC или со стороной CD; прямоугольник в этом случае будет иметь стороны длиной a и $a-r$. (Таким образом, в случае $r = 2(\sqrt{2}-1)a$ задача имеет три решения.)

Указание. Выведите формулу

$$2S = (x+y-a)^2 + a^2 - r^2,$$

где S — площадь прямоугольника, x, y — длины его сторон. Проведите через точку E (лежащую на границе нашей четверти круга) прямую, параллельную диагонали BD квадрата, пересекающую прямую AB в точке K. Тогда $BK = |x+y-a|$, так что площадь S искомого прямоугольника имеет наибольшее значение тогда и только тогда, когда расстояние BK является наибольшим. Вычислите S для случаев, когда точка E есть точка пересечения границы четверти круга со стороной квадрата и с диагональю AC квадрата. Сравните результаты вычислений.

13. Нет, не любой. Рассмотрим трехгранный угол с плоскими углами 100°, 100°, 50°. Предположим, что сечением его некоторой плоскостью служит правильный треугольник ABC (рис. 5). Так как углы AOB и BOC тупые, AB и BC — это наибольшие стороны в треугольниках OAB и OBC соответственно. В таком случае сторона AC наибольшая в треугольнике AOC. Но это не так, ибо угол AOC меньше 60°.

14. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. Указание. Постройте на лучах равные отрезки OA, OB, OC, OD. Тогда $ABCD$ — правильный тетраэдр, а точка O — его центр тяжести (делит высоту тетраэдра в отношении 3:1).

15. 21. Решение. Из условия следует, что $\frac{n^2}{(1,1)^n} \geqslant \frac{(n-1)^2}{(1,1)^{n-1}}$ и $\frac{n^2}{(1,1)^n} \geqslant \frac{(n+1)^2}{(1,1)^{n+1}}$. Значит,

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^2 \geqslant 1{,}1 \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{1{,}1}-1}+1 \geqslant n \geqslant \frac{1}{\sqrt{1{,}1}-1}.$$

Так как $1{,}048 < \sqrt{1{,}1} < 1{,}05$, то

$$21{,}9 > \frac{1}{0{,}048}+1 > n > 20.$$

Работа, энергия, тепло

1. $A' = (3/11)(4RT - 3Q) \approx 3{,}9$ кДж.
2. $A = pV = \frac{m}{\mathrm{M}}RT = \frac{Q}{r\mathrm{M}}RT$.
3. $N = Q_\tau - \frac{m}{\tau}(c(t-t_0)+\lambda) = 426$ Вт.

Сколько стоит дыня?

Пусть x — налог на одну дыню, y — цена дыни. Тогда

$$\begin{cases} (104-19)x = 19y - 1, \\ (17-3)x = 3y + 1. \end{cases}$$

Отсюда $x = 2$, $y = 9$.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 7)

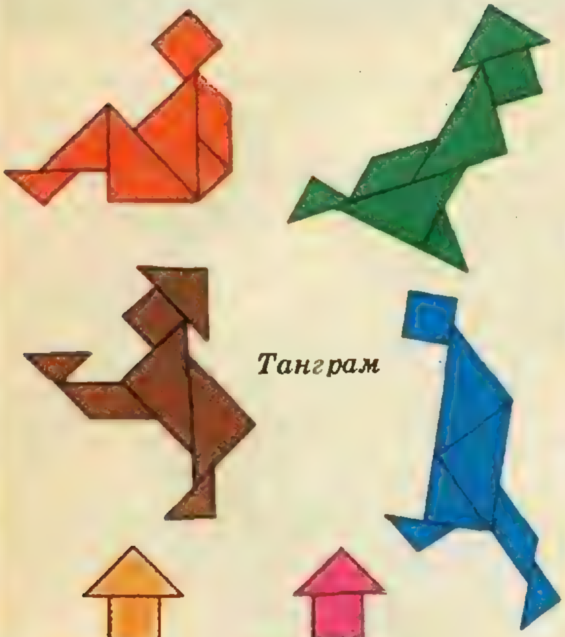
Редакция уверена, что читатель успешно справился с заданиями «Калейдоскопа». Однако если сам читатель в этом не уверен, мы советуем ему обратиться к книге Я. И. Перельмана «Занимательная физика».

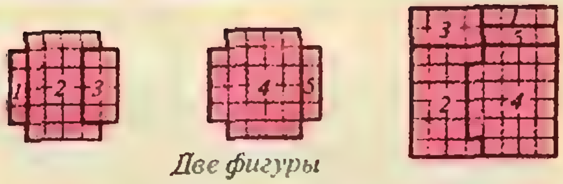
Задачи на разрезание
(см. «Квант» № 7)

Решения всех задач — на рисунке справа.

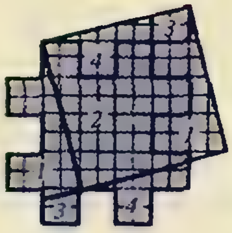
«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 7)

1. Дяде Алеше 34 года, мне 17 лет.
2. Открытые двери в салоне электрички сами закрываются, скатываясь по направляющим под действием силы тяжести.
3. Заметим, что $100000 = 10^5 < {*}{*}198{*}7 < 30^5 = 24300000$. Кроме того, заметим, что всякое целое число в пятой степени оканчивается

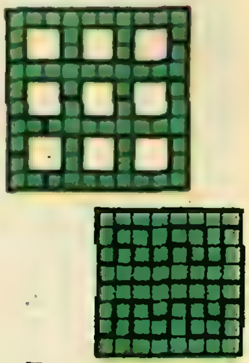

Танграм

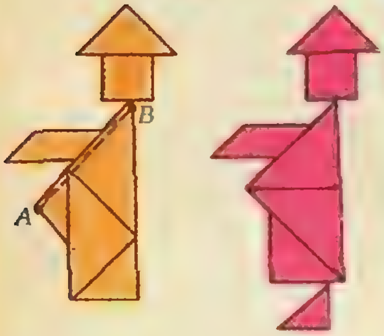


Две фигуры

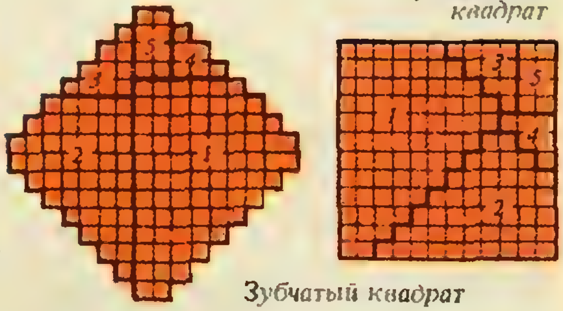


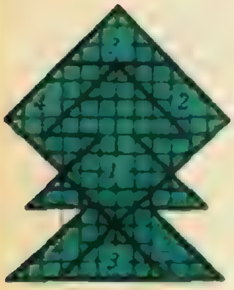
Квадрирование фигуры


Продырявленный квадрат

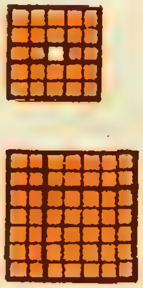


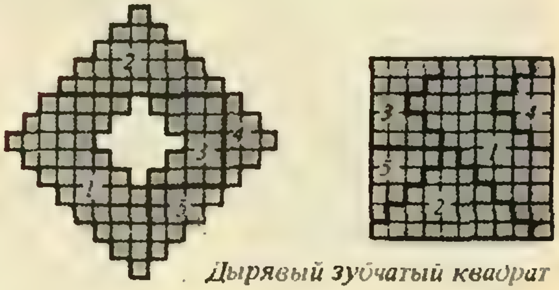
Откуда взялась нога

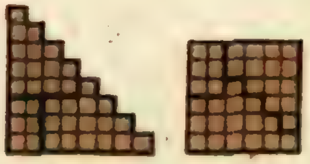

5
4
3
2
1
3
5
1
4
2
Зубчатый квадрат

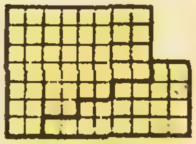


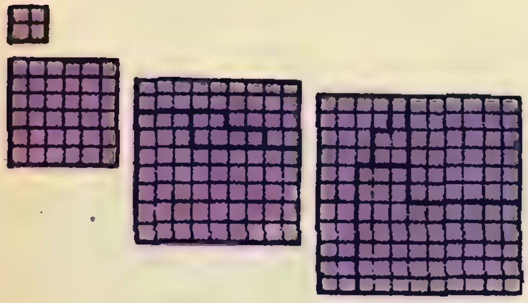
Елочка

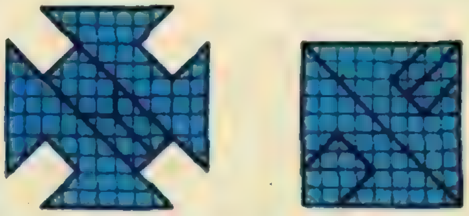

Из двух – один


2
4
3
1
5
3
4
5
1
2
Дырявый зубчатый квадрат


Лесенка


Ступеньки


Из трех – один


Мальтийский крест

на ту же цифру, что и само число. Поэтому, казалось бы, нужно проверить лишь два числа: 17 и 27. Однако уже 26^5 — восьмизначное число. Так что на доске было написано $17^5=1419857$. На самом деле можно было стереть шесть цифр, оставив ******7. А Антон оставил 1987 — ведь карнавал был новогодний!

4. Пусть мы начали шнуровать с правой верхней дырочки. Затем мы можем пропустить шнурок в любую из дырочек, кроме второй верхней дырочки, т. е. 8 разными способами. Следующим шагом продеваем шнурок в дырочку напротив, и снова у нас выбор, теперь уже из 6 возможностей, потом, после еще двух пропусканий шнурка, у нас останется 4 возможности, потом 2, и наконец, пропускаем шнурок в левую верхнюю дырочку. Всего $8\cdot 6\cdot 4\cdot 2=384$ способа.

5. Сначала нетрудно убедиться, что написано не более одного верного утверждения. Если бы их было больше, то любые два из них противоречили бы друг другу и, следовательно, не могли быть одновременно верными. Все утверждения не могут быть неверными, так как в таком случае последнее утверждение было бы верным, что противоречит нашему предположению. Итак, верно лишь одно утверждение, а именно 99-е, которое утверждает, что неверно 99 утверждений, а верно одно — оно само.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 5)

Задание 9 (Гилл — Орбах, 1925 г.). 1. Лg1! Ф:g1 2. Кg5+ Ф:g5 (2...Крg7 3. Фе7+ Лf7 4. Ф:f7+ Крh6 5. Фh7×) 3. hg с простым выигрышем.

Задание 10 (В. Алайков, 1986 г.). Ход 1. Лf3, перекрывающий слону g4 доступ к полю е2, опровергается путем 1...Л:с4!, а на 1. Сf3 с той же угрозой 2. Ке2× следует 1...С:с3! Правильно 1. b7! Теперь грозит 2. b8К! и 3. К:с6×. После 1...Сb4 уже решает 2. Лf3! (2. b8К Лa6) и 2...Л:с4 невозможно, так как слон перегородил дорогу ладье. На 1...Лb4 решает 2. Сf3! и защита 2...С:с3 пропала из-за ладьи, перекрывшей дорогу слону. Изящная трактовка известной в композиции геометрической темы Гримшоу. Редкий случай, когда перекрытия в задаче осуществляются и белыми, и черными фигурами.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Сдано в набор 17.06.87. Подписано к печати 24.07.87.
Т-12188. Бумага 70×108/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,38
Тираж 200 048 экз. Цена 40 коп. Заказ 1633

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Номер подготовили:
А. И. Виленкин, А. А. Егоров, И. Н. Клумова,
Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов,
Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров,
А. М. Пономарева, П. И. Чернуский, В. В. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор М. Л. Медведская

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

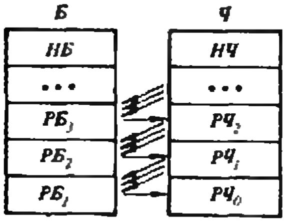
Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

РЕТРОСПЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ

На «шахматной страничке» уже не раз сообщалось о достижениях компьютеров в анализе шахматных окончаний. Как же компьютер это делает? В основе алгоритма лежит *ретроспективный анализ позиций*, на котором мы сейчас и остановимся.

Будем рассматривать окончания, в которых белые стремятся к победе, а черные — к ничьей. Предполагается, что уже известны оценки всех «младших эндшпилей», возникающих из исследуемых при изменении материала (взятии фигуры или превращении пешки). Введем важное определение. *Рангом* выигрышной для белых позиции назовем наименьшее число ходов, за которое белые могут поставить мат или перейти в выигрышный младший эндшпиль, независимо от того, как играют черные.

Схема ранжирования приведена на следующем рисунке.



Прежде всего позиции исследуемого плана разбиваются на два множества: Б — с ходом белых и Ч — с ходом черных. Позиции из Ч, в которых король черных заматован или они вынуждены перейти в проигранный младший эндшпиль, отнесем к нулевому рангу. Множество этих, уже ранжированных позиций обозначим через РЧ$_0$. Удалим его из Ч. Оставшиеся позиции образуют множество НЧ — неранжированные черные.

Выделим в Б все позиции, в которых у белых есть *хоть один* ход, ведущий в РЧ$_0$. Это позиции ранга 1 (выигрыш белых в 1 ход), множество их — РБ$_1$. Удалим его из Б, оставшиеся позиции — НБ, неранжированные белые.

Выделим в НЧ все позиции, в которых *любой* ход ведет в РБ$_1$. Это также позиции ранга 1 (ход черных, но как бы они ни сыграли, белые выигрывают в 1 ход), их множество — РЧ$_1$. Удалим его из НЧ. Первый шаг алгоритма закончен, и все готово для следующего, на котором возникают классы позиций РЧ$_2$, РБ$_2$ и новые (меньшие) НЧ, НБ.

Процесс ранжирования заканчивается, когда очередное построенное множество РБ$_k$ или РЧ$_k$ оказывается пустым. Позиции, оставшиеся в НБ и НЧ, не имеют ранга, в них белые не в состоянии выиграть, они либо ничейны, либо даже верх берут черные.

Описанный алгоритм анализа в самом деле ретроспективный — для оценки позиций мы идем не «вперед», как обычно, а «назад». Полный перебор вариантов при этом не производится, а рассматриваются лишь важнейшие ветви дерева игры, т. е., если некоторая позиция охвачена перебором, то алгоритм предлагает в ней только такие ходы белых, которые приближают к цели.

Любопытно, что впервые ретроспективный анализ был применен доктором физико-математических наук А. Брудно и кандидатом физико-математических наук И. Ландау для решения шахматной головоломки, о которой у нас уже не раз шла речь. Она называется задачей о неприкосновенном короле.

У белых король на c3 и ферзь, у черных — один король. Могут ли белые поставить мат, не делая ходов королем?

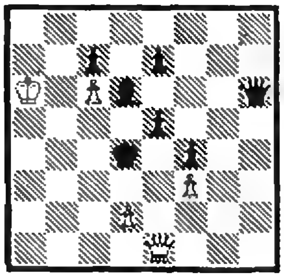
Обсудим возможность решить задачу обычным перебором, «вперед». У белых всякий раз выбор примерно из 20 ходов, у черных — из пяти. Вариантов ход-ответ около 100. Всего вариантов просмотра на глубину 20 ходов порядка $100^{20}=10^{40}$. Если машина будет просматривать даже миллиард (10^9) позиций в секунду, то анализ займет миллиарды миллиардов лет. Мы специально привели эти вычисления, чтобы показать, насколько бесполезен полный перебор вариантов для анализа даже такой простой позиции.

Теперь покажем, как упрощается дело, если за него взяться с умом. Заметим, что всего положений фигур не так много. Белый король прикован к полю c3, а в распоряжении белого ферзя и черного короля меньше 64 полей. Таким образом, общее число позиций не превосходит 64^2, т. е. около 4000, с учетом очереди хода — 8000. Сведения о таком числе ситуаций легко поместить в память компьютера. Ранг выигрышной позиции в данном случае — это наименьшее число ходов, за которое белый ферзь ставит мат, в частности, матовые позиции образуют множество РЧ$_0$.

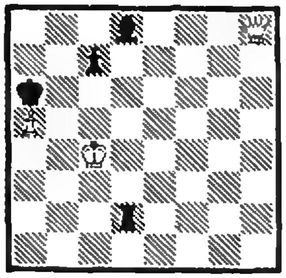
Задача решалась на ЭВМ для всевозможных положений неприкосновенного короля, и выяснилось, что решение существует только при короле на c3 или на симметричных ему полях c6, f3 и f6. При этом максимальный ранг равен 23 — мат дается не позднее 23-го хода при любом начальном положении белого ферзя и черного короля.

Осталось сказать, что идея ретроспективного анализа используется при решении различных переборных задач, но ее шахматная иллюстрация, пожалуй, наиболее наглядна.

Конкурсные задания



15. Белые начинают и выигрывают.



16. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 октября 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 15, 16».

v~10³ r_u
a_t ~ 4π ε² · Δp/m
a_n ~ F_n/m*
v~10² r_u

Цена 40 коп.
Индекс 70465

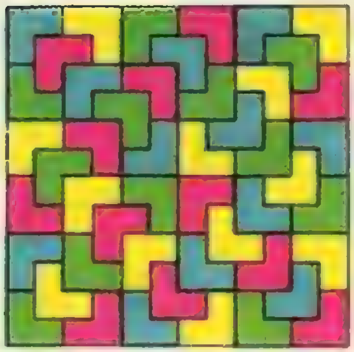


Рис. 1.

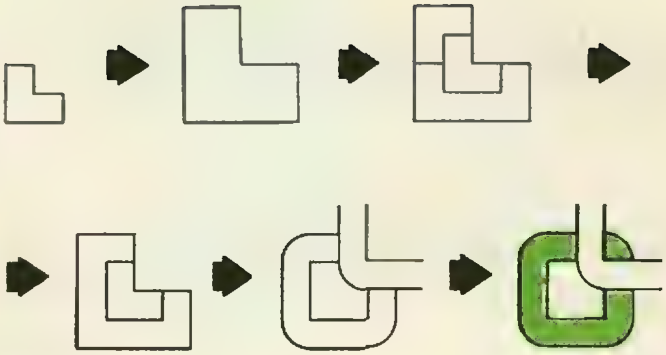


Рис. 2.

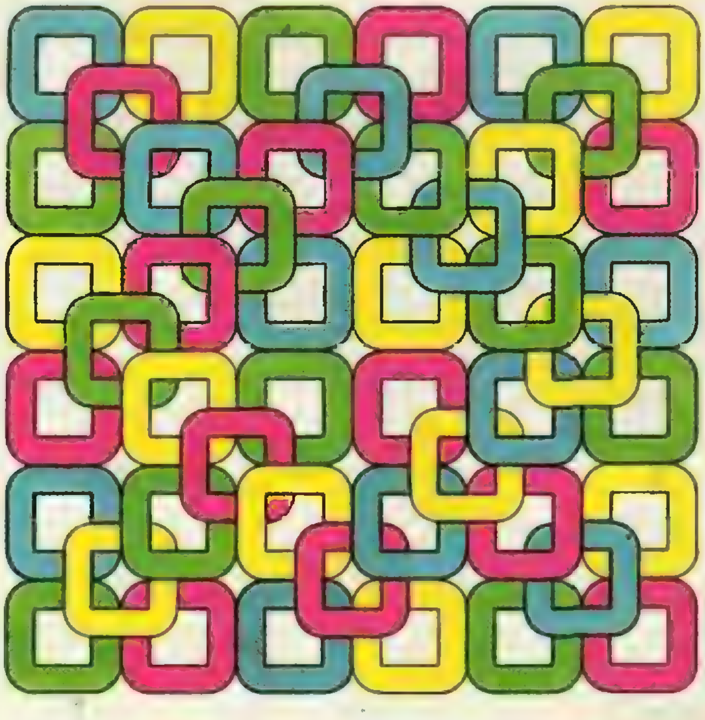


Рис. 3.

В решении задачи М1038, опубликованном в этом номере журнала, говорится, что любой прямоугольник $6k\times 2n$, где $k\geqslant 1$, а $n\geqslant 3$, можно разбить на «уголки» из трех клеток так, что «уголки» не составляют ни одного прямоугольника меньшего размера.

В решении утверждается, что при этом обязательно существуют и центрально-симметричные разбиения — одно из них показано на рисунке 1. Это разбиение квадрата 12×12 интересно еще и тем, что при поворотах на 90° циклически меняются цвета «уголков»: зеленый цвет переходит в красный, красный — в желтый, желтый — в синий, синий — в красный.

На рисунке 2 показана эволюция «уголка», после которой рисунок 1 превращается в мозаику колец, изображенную на рисунке 3.

М. Х.

НОМЕР
9

Квант

Основан в 1970 году

1987 9

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 Интервью с академиком А. С. Боровиком-Романовым
8 *А. С. Михайлов.* Волны в сердце
15 *А. В. Дорофеева.* Рене Декарт и его «Геометрия»

Задачник «Кванта»

21 Задачи М1061—М1065, Ф1073—Ф1077
24 Решения задач М1041—М1045, Ф1053—Ф1057
29 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

31 Задачи
34 Угадай число

32 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»

38 Физика 8, 9, 10:
Легко ли описывать движение?
Вокруг одной задачи
Давление газа в сосуде
Гармонические колебания и равновесие

Математический кружок

45 *С. Л. Табачников.* Соображения непрерывности

Практикум абитуриента

51 *Г. В. Дорофеев, Н. Х. Розов.* Функции периодические и непериодические

Информация

55 II Научно-техническая конференция школьников в МФТИ
56 Новосибирск — Андовер

Олимпиады

59 Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике
60 Задачи пятидесятой Московской городской математической олимпиады

62 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(20, 37)*
Шахматная страничка
Статистика эндшпиля (*3-я с. обложки*)

Наша обложка

На обложке сентябрьского номера, как и на улице, появились первые желтые листья; среди них затерялся декартов лист — видимо, он выпал из статьи о «Геометрии» Декарта в этом номере.

Фотографии, воспроизведенные на второй странице обложки, сделаны на Московской городской олимпиаде по физике (февраль — март 1987 года).

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1987

Наш корреспондент обратился к видному советскому ученому директору Института физических проблем им. С. И. Вавилова АН СССР академику А. С. Боровику-Романову с просьбой ответить на несколько вопросов, которые, как нам кажется, интересны читателям «Кванта». Сегодня мы предлагаем вам запись этой встречи.

ИНТЕРВЬЮ С АКАДЕМИКОМ А. С. БОРОВИКОМ-РОМАНОВЫМ

— Андрей Станиславович, расскажите, пожалуйста, об Институте физических проблем, который вы возглавляете. О его истории, традициях, основных направлениях проводимых научных исследований.

— Наш институт весьма необычен по сравнению с большинством существующих в СССР институтов физического профиля. Главной его особенностью является то, что при небольшом числе сотрудников в ИФП собраны очень сильные исследователи. Основан он был в 1934 году Петром Леонидовичем Капицей, создавался под его непосредственным руководством. Создавался на протяжении достаточно долгого времени, не сразу, не одним махом. И в течение всего этого времени закладывались основы будущих направлений научных исследований.

С самого начала главным предметом исследований в ИФП стала физика низких температур, физика, связанная с проявлением квантовых закономерностей в твердых телах, а также в жидком гелии. Именно здесь в 1938 году П. Л. Капицей было открыто одно из самых удивительных проявлений квантовых законов в макроскопическом масштабе — явление сверхтекучести. Открытие сверхтекучести — это целый цикл необычайно остроумных и тонких экспериментов, приведших к созданию новой области физики — квантовой физики конденсированного состояния, ставшей сегодня фундаментом целого ряда прикладных направлений.

Следующим важнейшим достижением ученых ИФП явилось открытие промежуточного состояния сверхпроводников. Так называют особое состояние сверхпроводящего образца в магнитном поле, когда он «расслаивается» на нормальные и сверхпроводящие области. Далее последовал ряд замечательных открытий в области сверхпроводимости. В пятидесятые годы Львом Давидовичем Ландау, работавшим в ИФП, совместно с В. Л. Гинзбургом создается феноменологическая теория сверхпроводимости; А. А. Абрикосов открывает сверхпроводники второго рода, ставшие основой всех сегодняшних практических применений этого удивительного явления.

Затем, после столь интенсивных исследований сверхтекучести и сверхпроводимости, в этой области наметился некоторый спад. Однако в настоящее время, в связи с рядом блестящих открытий последних лет, эти исследования опять активизировались.

Еще одним важным направлением, с которым связаны большие достижения ИФП, явилось изучение энергетических спектров электронов в металлах. Были разработаны тончайшие методики изготовления чрезвычайно чистых монокристаллических образцов, в которых электрон «пробегал» без столкновений расстояния в миллиметры! В обычных, «грязных», образцах при комнатной температуре этот пробег не превышает нескольких межатомных расстояний. Учеными института было разработано много оригинальных методов изучения поведения электронов в металлах, которые позволили открыть совершенно новую увлекательную область физики низких температур.

Интересные результаты были получены и при изучении магнитных свойств твердых тел при низких температурах. Например, было обнаружено новое физическое явление — пьезомагнетизм — возникновение в некоторых веществах намагниченности под давлением.

Следует отметить, что последние тридцать пять лет научной деятельности самого Петра Леонидовича Капицы не были связаны с физикой низких температур. Он занимался электроникой больших мощностей, построил рекордный по мощности СВЧ-генератор — ниготрон, изучал плазменный разряд и другие связанные с плазмой физические явления. И сейчас в Институте есть лаборатория, которая под руководством С. П. Капицы занимается электроникой и ускорительной техникой. Говоря о П. Л. Капице, нельзя не упомянуть еще и о его инженерной деятельности. Все действующие в мире установки для получения кислорода путем криогенного разделения воздуха, все машины для сжижения гелия работают на принципах, предложенных Петром Леонидовичем.*)

Будучи директором ИФП, П. Л. Капица уделял большое внимание поддержанию тесных контактов между физиками-теоретиками и экспериментаторами. В Институте был создан теоретический отдел, который на протяжении многих лет возглавлял выдающийся советский физик Л. Д. Ландау. Активное сотрудничество Капицы и Ландау привело к ряду блестящих открытий в физике низких температур. Впоследствии в Институте сформировалась целая «школа Ландау», из которой вышли многие лучшие физики-теоретики нашей страны. В шестидесятых годах Академией наук СССР был организован Институт теоретической физики (носящий теперь имя Л. Д. Ландау), и часть учеников и сотрудников Ландау перешли работать туда. С этим институтом и сегодня мы сохраняем тесные связи.

Другая часть теоретиков по-прежнему работает в теоретическом отделе ИФП. В настоящее время его возглавляет Я. Б. Зельдович. Это очень разносторонний человек, много сделавший в самых различных областях физики и оборонной техники — не зря он является трижды Героем Социалистического Труда. Из последних учеников Ландау в нашем институте работают такие крупные ученые как Л. П. Питаевский и А. Ф. Андреев. Л. П. Питаевский — теоретик очень широкого профиля, которому принадлежат важные открытия в области

---

*) Жизнь и научная деятельность П. Л. Капицы заслуживают отдельной беседы. Интересующиеся читатели могут прочесть сборник статей П. Л. Капицы «Эксперимент и практика». (*Примеч. ред.*)

сверхтекучести и в физике плазмы. А. Ф. Андреев в прошлом году вместе с сотрудниками ИФП А. Я. Паршиным и К. О. Кешешевым был удостоен Ленинской премии. Несколько лет назад они сделали крупную работу, которой положили начало совершенно новой области физики — физике квантовых кристаллов.

Сотрудниками теоретического отдела являются также Л. А. Вайнштейн, М. И. Каганов, другие ученые. Л. А. Вайнштейн — специалист в области радиофизики — обладает удивительными способностями в математической физике. С помощью карандаша и бумаги он находит решения таких задач, которые обычно решаются лишь при помощи мощных компьютеров. М. И. Каганов — известный специалист в области электронной теории металлов.

Я перечислил только старшее поколение теоретиков, работающих в ИФП, имеются и следующие эшелоны. Основные направления их научной деятельности — физика низких температур, космология, физика плазмы.

В последние годы мы понесли большие утраты. Умерли выдающиеся физики-теоретики И. М. Лифшиц и Е. М. Лифшиц. Илья Михайлович, основатель большой научной школы в области физики твердого тела, многие годы возглавлял теоретический отдел нашего института. Евгений Михайлович Лифшиц являлся крупнейшим специалистом в космологии. Он пришел в ИФП вместе с Ландау и был не просто его учеником, но и на протяжении многих лет неизменным соавтором — ими написан классический курс теоретической физики. Совсем недавно мы потеряли замечательного ученого и человека, одного из старейших сотрудников ИФП А. И. Шальникова. Александр Иосифович работал в Институте со дня его основания, обладал огромным талантом экспериментатора и был учителем почти всех сегодняшних сотрудников.

И сегодня в институте работает целый ряд прекрасных физиков-экспериментаторов. Так, например, Ю. В. Шарвин, который совсем недавно сделал очень важное открытие, связанное с совершенно новой областью физических исследований. Его работы, по сути дела, также начинают новую область физики — так называемую мезоскопику. Суть ее объяснить достаточно трудно. Не вдаваясь в излишние подробности, скажу, что под этим названием подразумеваются сугубо квантовые эффекты, достаточно неожиданно проявляющиеся на фоне известных классических законов, скажем, закона Ома. Как я уже говорил, до сравнительно недавнего времени физики-экспериментаторы, изучающие электронные свойства твердых тел, объектом своих исследований выбирали чистейшие металлы, идеальные монокристаллы. В последнее время интерес физиков заметно переместился к «грязным» материалам. Поначалу создавалось впечатление, что теоретическая физика здесь бессильна. Однако оказалось, что и в этой области можно предсказывать очень тонкие эффекты, связанные со спецификой движения электронов в грязном металле, когда они испытывают многочисленные рассеяния на примесях чуть ли не в пределах межатомных расстояний. В силу квантовой природы самого электрона отдельные акты рассеяния оказываются хитрым образом связанными между собой, возникает специфическая интерференция. Электрон как бы обладает памятью — испытав рассеяние на одном центре, он несет до следующего соударения соответствующую информацию, и характер очередного рассеяния зависит от того, каким было предыдущее.

Тут я хотел бы еще раз подчеркнуть, что очень многое в современной физике зависит от взаимодействия экспериментаторов и теоретиков. Так, работы по мезоскопике проводились совместно с теоретиками Ленинградского института ядерной физики А. Г. Ароновым и Б. Л. Альтшулером. У нас вообще очень часто возникают связи с теоретиками других институтов.

Из старшего поколения экспериментаторов еще хотел бы назвать М. С. Хайкина и Н. В. Заварицкого. М. С. Хайкин — виртуоз экспериментальной техники. Он конструирует тончайшие приборы, которые позволяют решать сложнейшие физические задачи. В настоящее время им создано несколько так называемых туннельных микроскопов, которые как бы «ощупывают» поверхность образца*) Наиболее чувствительный из них с помощью подключенной к нему ЭВМ рисует рельеф поверхности, образованный отдельными атомами. Н. В. Заварицкий сделал много открытий в области сверхпроводимости и в области изучения взаимодействия электронов с тепловыми колебаниями ионной решетки металла. Из экспериментаторов упомяну также Н. Е. Алексеевского, автора ряда классических работ по физике металлов.

Я мог бы и дальше перечислять имена и работы ученых ИФП, но всех все равно не перечислю, поэтому остановлюсь. Скажу только, что, в общем, наши сотрудники — это яркие личности в науке.

— Что вы можете сказать о сегодняшнем молодом поколении ученых ИФП?

— Петр Леонидович Капица неоднократно подчеркивал, что настоящий ученый не может работать без молодежи. Он был одним из основателей Московского физико-технического института — вуза нового типа, призванного воспитывать будущих ученых. Связи с этим вузом у нас традиционно крепки. Ежедневно в лабораториях и на научных семинарах в ИФП можно увидеть студентов и аспирантов «физтеха». Со времени основания МФТИ наш институт является базовым для кафедры физики низких температур. Лучшие студенты этой кафедры, проявившие себя в процессе обучения, оставляются в нашем институте стажерами, а затем и аспирантами. Лучших из лучших мы после аспирантуры зачисляем в штат.

К сожалению, подобная практика работы с молодежью не повсеместна. В нашей стране в настоящее время сложилась такая ситуация, что Академия наук — высший научный орган страны — очень сильно отдалилась от высшего образования. В то же время во многих странах, в особенности в США, Канаде, Англии, Японии, наука делается в большой степени в научных учреждениях, которые являются лабораториями университетов. При этом на одного научного сотрудника приходится два-три аспиранта и несколько студентов. У нас в институте это соотношение значительно хуже — на пятьдесят сотрудников приходится около тридцати стажеров, аспирантов и студентов. Но по сравнению с другими научными учреждениями страны это еще очень хорошо.

Я считаю, что если зрелый научный сотрудник работает без молодежи, без учеников, то он очень скоро теряет свою форму. При тесной работе с молодежью сказывается эффект обратной связи, причем роль его может оказаться куда более важной, чем просто обучение. Процесс обучения всегда связан с более глубоким пониманием предмета самим обучающим. А потом, именно молодежь находит новые пути в науке. Так и у нас, за последние 10—15 лет ряд выпускников физтеха, ставших сотрудниками ИФП, создали новые научные направления, о некоторых из них я упоминал выше.

И вот еще что я хотел сказать. Очень много сейчас говорят о внедрении научных достижений в технику, практику, в жизнь. Это, несомненно, одна из главных задач сегодняшнего дня. Но что касается фундаментальных наук, то, с моей точки зрения, здесь важнейшим внедрением является передача накопленных знаний, всего накопленного опыта. Фундаментальная наука — это как раз то, что хранится в первую очередь в мозгах ученых и передается из одного поколения в другое.

— К какой области физики относятся ваши научные интересы?

— На этот вопрос ответить очень просто. Мои интересы лежат в области магнетизма и низких температур. Трудно сказать, что перевешивает,— в разные годы по-разному. Я всегда старался, еще когда был студентом, брать пошире. Считаю, что нельзя долго заниматься одним узким вопросом, потому что, когда к чему-то привыкаешь, резко падает вероятность сделать что-то новое, неожиданное. Возникает ощущение завершенности, полной ясности. А это — застой.

— В каких областях физики, по вашему мнению, можно ожидать значительных результатов в ближайшем будущем?

— Известно, что такой крупнейший физик как Резерфорд считал, что энергия атома никакого применения в нашем веке не найдет. Я думаю, что предсказывать что-то в наше время не-

---

*) О принципе работы туннельного микроскопа рассказывалось в «Кванте» № 7 за этот год (с. 19) (*Примеч. ред.*)

возможно. Ярким примером, предостерегающим от прогнозов, является сегодняшний «бум» с высокотемпературной сверхпроводимостью.*)

— Как вы можете прокомментировать последние достижения в этой области?

— Сверхпроводимость, о которой сейчас идет речь, чрезвычайно интересна как с точки зрения фундаментальной науки, так и, главным образом, с точки зрения открывающихся перспектив технических применений. Перед физиками стоит непростая задача объяснить природу обнаруженной высокотемпературной сверхпроводимости в новых материалах. Сегодня уже всем ясно, что она отличается от привычной, есть несколько альтернативных гипотез о механизме обнаруженной высокотемпературной сверхпроводимости, но однозначного решения проблемы пока нет. Может быть, вскоре удастся повысить температуру перехода в сверхпроводящее состояние еще на 100—200 К. Теперь уже нет причин отрицать эту возможность. Но уже и достигнутые успехи открывают невиданные перспективы. В ближайшие несколько лет, может быть пять — семь, благодаря обнаруженному явлению совершится колоссальный переворот во многих областях техники. Но для его реализации нужны специальные кадры — не те, что занимаются физическими проблемами, а кадры химиков-технологов, которые ищут новые материалы. Деятельность их порой даже «антинаучна», т. е. ход мысли этих ученых невероятен с точки зрения обычного научного подхода. В качестве примера я могу привести шутку, которую мне недавно рассказал нидерландский физик-теоретик Хендрик Казимир. Он долгое время работал в исследовательских лабораториях радиотехнической фирмы и хорошо разбирается в инженерном деле. Эта шутка, в каком-то смысле, отражает способ мышления технологов. Долгое время не удавалось напылить франций на германий. И тогда Казимир сказал, что необходимо в качестве промежуточного слоя поместить рений. Логика выбора рения состояла в том, что... между Францией и Германией в качестве «скрепляющего» природного элемента протекает Рейн.

Суть дела в том, что у технологов, создающих новые материалы, свое видение, иногда очень странное (с точки зрения физика), какие-то свои условные фигуры, своя, не всем понятная, логика — тем не менее приводящая к цели. Как во всяком творчестве, особенно связанном с поиском, здесь оказывается очень важным, помимо прочего, иметь какое-то специфическое чутье. Надо сказать, что на Западе такие ученые идут, что называется, номером один. Я думаю, что и у нас где-то, скажем, в металлургии, известны подобные уникумы. А вот в области физики назвать таких я затрудняюсь. И не потому, что их нет. Уверен, что есть. Но их не примечают, не выделяют. Это большой недостаток в организации нашей науки.

— Когда вы обнаружили у себя интерес к физике? Было ли что-нибудь запоминающееся в школьные, студенческие годы в плане вашего становления как физика?

— Мне трудно ответить на первый вопрос, потому что у меня и отец, и мать — физики. Отец многим занимался дома. Сначала это была вакуумная техника. Он был очень хорошим стеклодувом и почти все приборы делал своими руками, дома. Когда мне было лет шесть, он делал первые детекторные радиоприемники... Так что выделить какой-то особый момент я затрудняюсь, скорее всего это было «в крови». Мой старший брат пошел учиться в Ленинградский политехнический институт, что также сказалось на моем выборе. Я могу похвастаться, что десяти лет отроду слушал лекции знаменитого Паули на съезде русских физиков. Я, конечно, ничего не понял, просто родителям некуда было меня деть, а теперь могу гордиться этим событием в моей жизни.

До седьмого класса я учился в Ленинграде, потом мы переехали в Москву. Большинство наших учителей преподавали еще в старой гимназии. В целом это были очень хорошие учителя. Вообще, профессия учителя очень трудная. Она требует таланта. Ведь чтобы удержать внимание класса в течение целого урока, несомненно нужен особый талант.

У меня был очень хороший друг, с которым почти каждый вечер мы ходили в библиотеку Политехнического музея. А кроме того, мы с ним вече-

---

*) Об открытии высокотемпературной сверхпроводимости можно прочесть в майском номере «Кванта» (с. 44). (*Примеч. ред.*)

рами, а иногда и ночами, экспериментировали в школе. Больше по химии. Бывало, пожарные приезжали...

Мои студенческие годы — я учился в МГУ — разбились войной. Они мне очень памятны.

В университете у нас была очень хорошо поставлена математика. Курс анализа нам читал профессор И. В. Арнольд. Он был просто артист, настоящий художник, мы восхищались его лекциями. У нас был замечательный профессор и по дифференциальной геометрии — А. П. Норден. Это был такой педант! Он начинал записи на лекции в верхнем левом углу доски, а последнюю формулу записывал к концу второго часа в правом нижнем углу. Читал очень хорошо. Лекции по физике вел профессор А. Б. Млодзеевский, и мне они не очень нравились. А вот физический практикум был очень интересный. Его вели В. И. Иверонова и М. П. Шаскольская.

Моим непосредственным научным руководителем был Петр Георгиевич Стрелков. У него было два удивительных достоинства. Во-первых, он был очень искусным экспериментатором, а во-вторых, он предоставлял нам большую свободу в работе, поощрял нашу самостоятельность. Он очень вдохновлял нас, пропагандировал наши первые успехи, всячески способствовал нашему самоутверждению в науке. Этот человек мне очень много дал, и я ему очень благодарен. Из нашей учебной группы шесть человек были прикреплены к Институту физических проблем. Я считаю, что мне очень повезло, что еще в студенческие годы я попал в институт П. Л. Капицы. Петр Леонидович создал в Институте физических проблем особый климат, удивительно благоприятный для научного творчества и особенно — для воспитания молодежи. Это был климат, в котором на первом месте в жизни стояла любовь к науке — стремление к научному поиску. Все мы посещали необыкновенный семинар, которым руководил Александ Иосифович Шальников. Доклады на семинаре носили методический характер и растягивались иногда на месяц, а то и больше. По ходу возникали разные вопросы, и мы все очень внимательно их разбирали, обсуждали... А Александр Иосифович непрерывно задавал каверзные вопросы, заставлял нас на ходу объяснять все тонкости установки, о которой рассказывал докладчик, и придумывать конструкции новых приборов. Благодаря его темпераменту все дискуссии проходили очень бурно.

Потом я работал в Московском государственном институте мер и измерительных приборов (МГИМИП'е), и в этом была, я думаю, своя польза. Я был совершенно самостоятелен в выборе направления исследований, в создании лаборатории, я все начинал сам сначала. А в ИФП я «вернулся» в 1956 году.

— Каковы ваши жизненные увлечения помимо физики?

— Очень люблю путешествовать. Раньше это были путешествия с рюкзаком — 40 кг за спиной и две недели палаточной жизни... Урал, Памир, Алтай, Кавказ — мы много исходили. Много путешествовали с женой на байдарке.

Увлекался радио — спаял четыре телевизора; занимаюсь фотографией.

— Какой путь молодого человека, решившего посвятить себя физике, представляется вам наиболее эффективным?

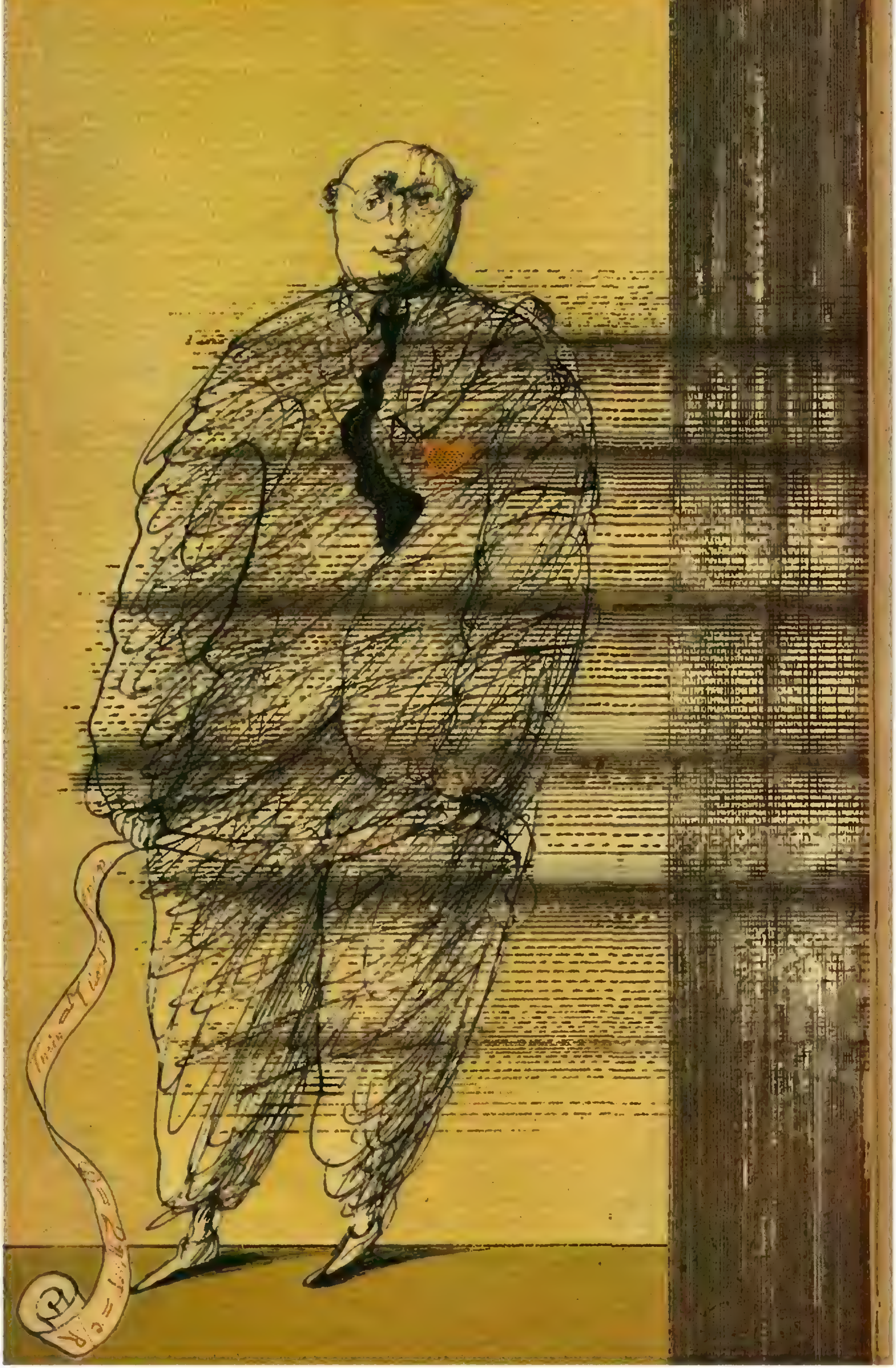
— Главное — по своему опыту сужу — чтобы было больше хорошей научно-популярной литературы. Я со школьных лет помню книгу Роберта Милликена об измерении заряда электрона. Ее стоило бы переиздать. Вообще было бы замечательно, если бы популярную литературу писали ведущие ученые, чтобы наука попадала к любознательным, что называется, из первых рук. Но всем сейчас некогда. Вот если бы появился современный Я. И. Перельман.

Очень важным делом я считаю всякое «рукоделие» — радио, планеры, столярничанье, фото...

Было бы, несомненно, полезно, чтобы в ведущих вузах страны школьникам, хотя бы раз в месяц, читали лекции ведущие ученые.

Но все-таки главную роль в привлечении молодежи в науку должна играть научно-популярная литература. В этом смысле «Квант» — очень полезное дело. Раньше, когда сын был школьником, я читал его часто. И сейчас читаю и считаю, что журнал хороший, очень нужный. Лучшего, пожалуй, в этом ряду и нет.

Интервью вел С. С. Кротов



ВОЛНЫ В СЕРДЦЕ

Доктор физико-математических наук
А. С. МИХАЙЛОВ

Раз в секунду по сердцу пробегает автоволна — волна временного уменьшения разности потенциалов между наружной и внутренней сторонами мембраны сердечных клеток. Эта волна возбуждается периодически действующим источником, расположенным в сердечной мышце,— синусовым узлом, который представляет собой группу клеток, работающих в автоколебательном режиме. Распространяясь по сердцу, волна возбуждения вызывает сокращение сердечной мышцы — биологического насоса, перекачивающего кровь по сосудам. Прохождение по сердцу такой волны изменяет электрический потенциал различных участков тела. Регистрируя эти небольшие изменения на электрокардиограмме, можно судить о правильности сокращений сердечной мышцы.

На рисунке 1 показано, как распространяется волна электрического возбуждения по правому предсердию. Так выглядит нормальный режим работы сердца. Картина распространения волн в больном сердце может резко меняться. На смену редким волнам, регулярно отходящим от области синусового узла, приходят волны, быстро вращающиеся вокруг определенных центров. В таком состоянии, которое медики называют приступом пароксизмальной тахикардии, нормальные сокращения сердца нарушаются — оно бьется очень часто и «неправильно». Сокращения сердца как целого могут вообще прекратиться, так что будет происходить лишь хаотическое подергивание его отдельных участков — фибрилляция. Возникновение фибрилляции означает остановку работы сердца. Пароксизмальная тахикардия и фибрилляция являются основными причинами смертельных исходов при инфаркте миокарда.

Почему возникают тахикардия и фибрилляция? Каков механизм нарушения регулярной волновой картины в сердце? На эти вопросы дает ответ математическая теория волн в возбудимых средах. Мы же попытаемся качественно объяснить механизм возникновения опасных сердечных аритмий.

Волны возбуждения

Вы видели, как горит бикфордов шнур? Волна горения бежит вдоль шнура, не затухая. «Форму» такой волны можно представить в виде зависимости температуры от времени в различных точках вдоль пути распространения. При прохождении фронта горения происходит резкое, ступенчатое повышение температуры, а после израсходования запаса горючего в данном месте температура возвращается к начальному значению. Понятно, что при встрече две волны горения гасят друг друга.

Волны в живых организмах напоминают волну горения. Хорошим примером такой биологической волны служит импульс возбуждения, распространяющийся по нервному волокну. Этот электрический импульс бежит без затухания и искажений по нервному волокну диаметром менее 0,025 мм и длиной до 1,5 м с постоянной скоростью, составляющей обычно десятки метров в секунду. Нервное волокно — проводник,

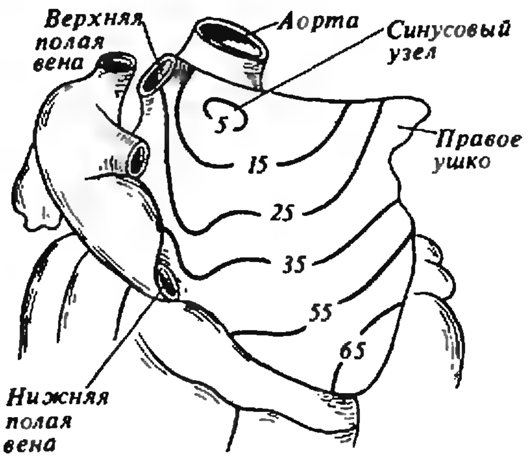


Рис. 1. Распространение волны электрического возбуждения по правому предсердию. Показаны последовательные положения фронта волны: цифрами указано время в миллисекундах

но очень плохой. Электрическое сопротивление на единицу его длины составляет примерно 10^9—10^{10} Ом/см, что в сто миллионов раз больше сопротивления медного провода того же диаметра. Если бы по мере движения нервного импульса к нему не подводилась непрерывно энергия, он бы затух очень быстро. Электрохимические механизмы, обеспечивающие подвод энергии и устойчивое распространение импульса, довольно сложны, и мы не будем их касаться.

Волны, распространяющиеся без затухания и сохраняющие свои характеристики постоянными за счет непрерывного подвода энергии извне, называют автоволнами. Наглядным аналогом автоволнового процесса служит распространение волны горения в среде, которая способна к последующему восстановлению своих свойств. Простейший пример подобного явления — это горение степи. При каждом прохождении волны пламени вся трава сгорает, но затем она медленно отрастает вновь, так что степь можно поджечь еще раз. Степь как «возбудимая среда» обладает свойством восстановления.

Отдельные мышечные волокна сердца по своим электрическим характеристикам аналогичны нервному волокну. Мышечная ткань сердца состоит из плотно переплетенных волокон, электрически связанных друг с другом в участках контакта. Импульс возбуждения может переходить с одного волокна на другое, так что волны возбуждения способны распространяться по сердечной ткани в любом направлении. В этом смысле сердечная ткань является возбудимой средой.

Аксиоматическая модель возбудимой среды

Летом 1945 года американский ученый Норберт Винер (тот самый Винер, который сформулировал основные положения кибернетики) гостил на даче у своего друга Артура Розенблюта, директора Мексиканского института кардиологии. К тому времени было уже хорошо известно, что по сердцу распространяются волны электрического возбуждения (они были открыты еще в начале нашего столетия) и что некоторые сердечные аритмии связаны с циркуляцией волн возбуждения вокруг анатомических препятствий. Заинтересовавшись этим вопросом, Винер построил совместно с Розенблютом математическую модель, позволившую им в упрощенном виде объяснить основные особенности процессов в возбудимых средах.

В модели Винера и Розенблюта постулируется, что возбудимая среда образована сетью из элементов, каж-

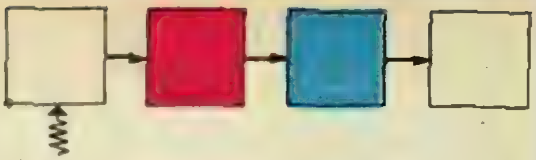


Рис. 2. Последовательность смены состояний элемента возбудимой среды; белым показано состояние покоя, красным — возбуждения, синим — рефрактерности.

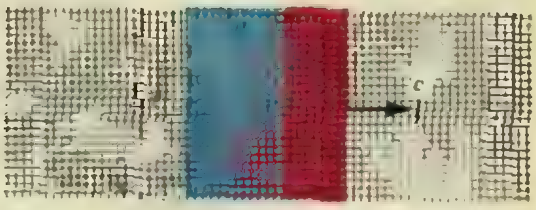


Рис. 3. Волна возбуждения в аксиоматической модели возбудимой среды.

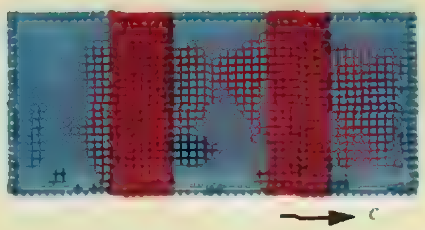


Рис. 4. Максимально частая последовательность волн возбуждения.

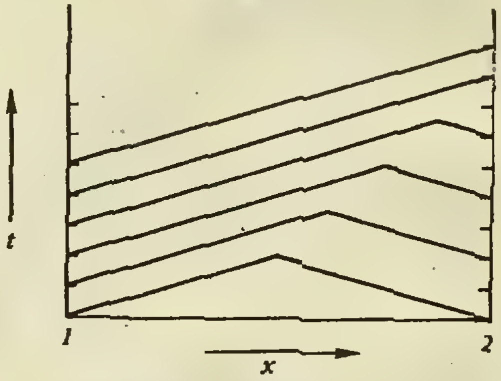


Рис. 5. Эффект подавления «медленных» источников. Показана временная развертка картины фронтов волн, испускаемых двумя источниками, которые имеют различные периоды. Левый высокочастотный подавляет правый низкочастотный источник. Вверх отложено время t, по горизонтали — координата x вдоль прямой, соединяющей центры двух источников.

дый из которых способен пребывать в трех состояниях — покоя, возбуждения и рефрактерности; переходы между состояниями осуществляются скачком, подчиняясь определенным правилам.

Как реализуются эти состояния? В отсутствие внешних воздействий элемент неограниченно долго сохраняет состояние покоя. Внешним воздействием его можно перевести из этого состояния в состояние возбуждения. Пробыв определенное время $\tau_{\text{возб}}$ в таком состоянии, элемент переходит к состоянию рефрактерности, в котором он является невозбудимым. Состояние рефрактерности длится время $\tau_{\text{реф}}$; по прошествии этого времени способность к возбуждению восстанавливается — элемент переходит в состояние покоя. (Все эти переходы схематически изображены на рисунке 2.)

Дополнительное предположение модели состоит в том, что возбуждение может передаваться от возбуждаемых элементов к соседним, находящимся в состоянии покоя. В результате по среде распространяются волны возбуждения (рисунок 3). Скорость c распространения этих волн постоянна.

Модель Винера — Розенблюта задает определенное поведение волн возбуждения в среде.

1. Существует минимальный временно́й интервал следования волн возбуждения. Этот период $T_{\min}$ равен сумме длительностей состояний возбуждения и рефрактерности: $T_{\min}=\tau_{\text{возб}}+\tau_{\text{реф}}$. Если волны следуют с минимальным периодом, т. е. с максимально возможной частотой, то все элементы среды находятся в двух состояниях: одни — в возбужденном, другие — в состоянии рефрактерности (рисунок 4). Минимальный пространственный интервал следования волн — $L_{\min}=cT_{\min}=c(\tau_{\text{возб}}+\tau_{\text{реф}})$.

2. При столкновении волны гасят друг друга. Это легко понять — ведь при столкновении возбужденные элементы оказываются «зажатыми» между двумя надвигающимися областями рефрактерности.

3. Волны возбуждения не отражаются от границ. Это утверждение доказывается аналогично предыдущему.

4. «Быстрые» источники волн подавляют деятельность всех более «медленных» источников. («Быстрые» — это источники, испускающие волны часто, через малые промежутки времени.) Убедимся в этом.

Пусть в среде имеются два периодически действующих источника, которые испускают волны через интервалы времени T_1 и T_2. На рисунке 5 изображена временна́я развертка картины волн от этих двух точечных источников. Левый источник испускает волны возбуждения чаще, чем правый (т. е. $T_1<T_2$). С течением времени точка встречи и гашения двух фронтов смещается в направлении к низкочастотному правому источнику, пока он не окажется полностью подавленным. Таким образом, по прошествии достаточно большого времени в среде «выживает» лишь самый «быстрый» из источников.

5. Волна возбуждения может неограниченно долго циркулировать по кольцу или вокруг отверстия в возбудимой среде.

Возьмем узкую полоску возбудимой среды и свернем ее в кольцо. Если длина полоски $l>L_{\min}$, то по кольцу неограниченно долго может циркулировать волна возбуждения (рисунок 6,*а*). Период ее циркуляции $T=l/c$.

Станем теперь увеличивать внешний радиус кольца и устремим его к

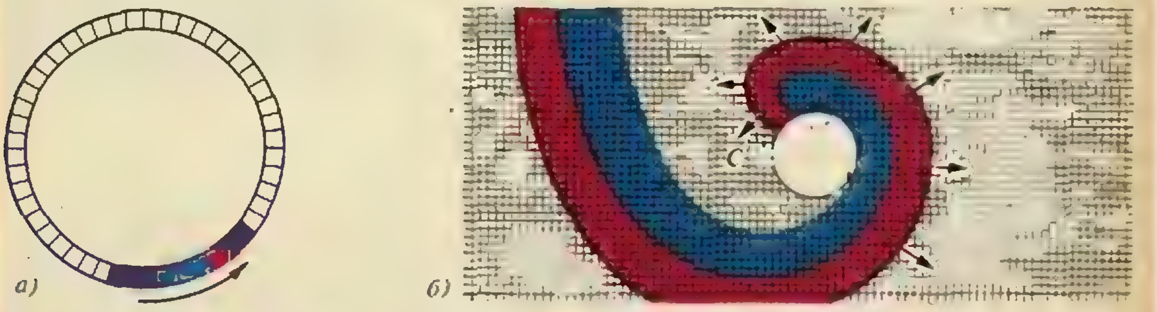


Рис. 6. Циркуляция волны возбуждения. а) — одиночная волна, вращающаяся в кольце; б) — спиральная волна, вращающаяся вокруг отверстия в возбудимой среде.

бесконечности. Тогда вместо кольца мы получим отверстие в возбудимой среде (рисунок 6,*б*). Что произойдет с волной возбуждения в кольце, когда мы будем растягивать его таким образом? Она будет продолжать вращение, но ее фронт изогнется.

Действительно, фронт волны возбуждения не может представлять собой прямую радиальную линию, вращающуюся вокруг отверстия с какой-то угловой скоростью ω. Ведь в таком случае на расстоянии r от центра отверстия скорость фронта равнялась бы $c=\omega r$ и неограниченно возрастала с увеличением r. Однако скорость распространения волн c постоянна. Это означает, что удаленные участки фронта станут отставать, и он примет со временем форму спирали.

Таким образом, вокруг отверстия в возбудимой среде может сколь угодно долго вращаться без затухания спиральная волна. Период ее вращения — это время, затрачиваемое на прохождение импульса возбуждения по всему периметру l отверстия, т. е. $T=l/c$. Если отверстие круглое и радиус его R, то $T=2\pi R/c$, а частота вращения $\omega=2\pi/T=c/R$.

Итак, мы познакомились с моделью Винера — Розенблюта. Как же объяснить с ее помощью возникновение сердечных аритмий?

Спиральные волны и сердечные аритмии

Стенки предсердия достаточно тонкие, поэтому ткань сердца здесь можно считать двумерной возбудимой средой. В результате нарушения кровоснабжения после инфаркта миокарда небольшие области сердечной ткани могут отмирать, теряя способность к проведению волн возбуждения. Эти *области играют роль отверстий в возбудимой среде сердечной ткани.*

К чему приведет циркуляция волны возбуждения вокруг одного из этих отверстий? Ответ зависит от того, как соотносятся период циркуляции с частотой волн, испускаемых синусовым узлом. Если частота вращения спиральной волны выше, чем частота генерации волн синусовым узлом, то *спиральная волна является более быстрым источником* и подавляет деятельность синусового узла. Поскольку радиусы отверстий — пораженных

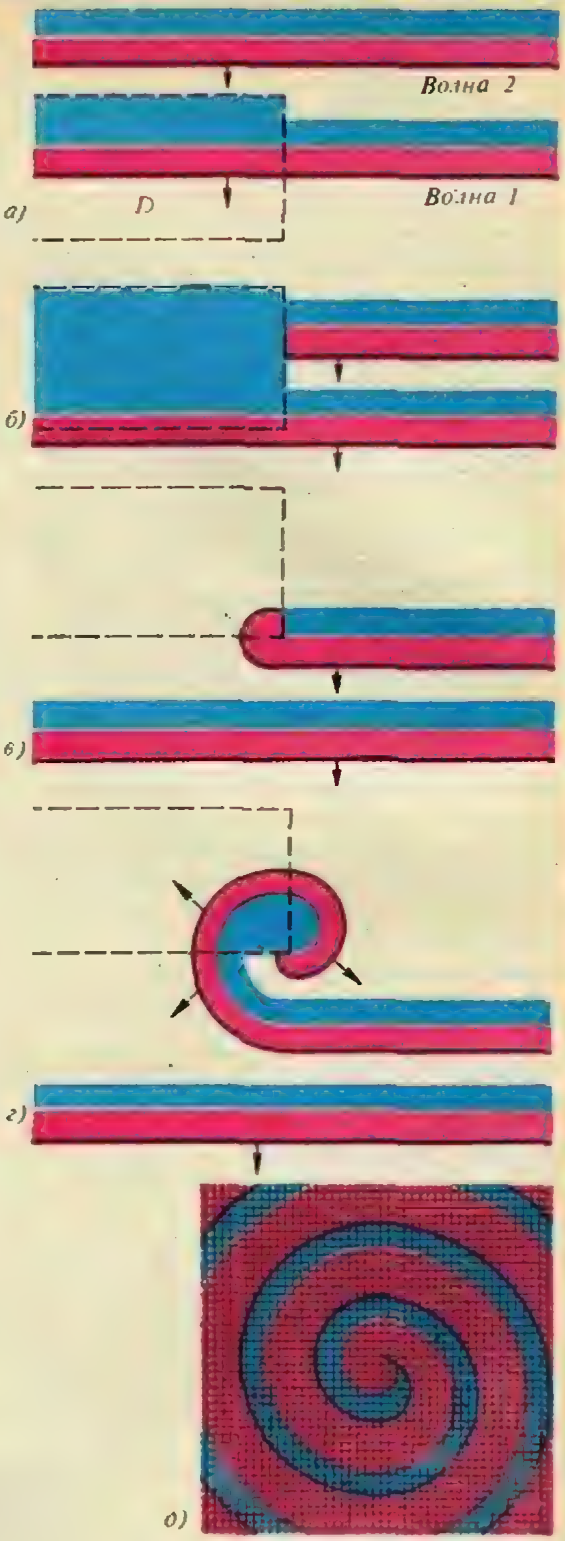


Рис. 7. Рождение спиральной волны (D — область с повышенной рефрактерностью). а) — исходное положение двух волн; б) — вторая волна не входит в область D, возник разрыв фронта; в) — возбуждение начинает распространяться внутрь области D; г) — возникла спиральная волна; д) — спиральная волна через достаточно большой промежуток времени.

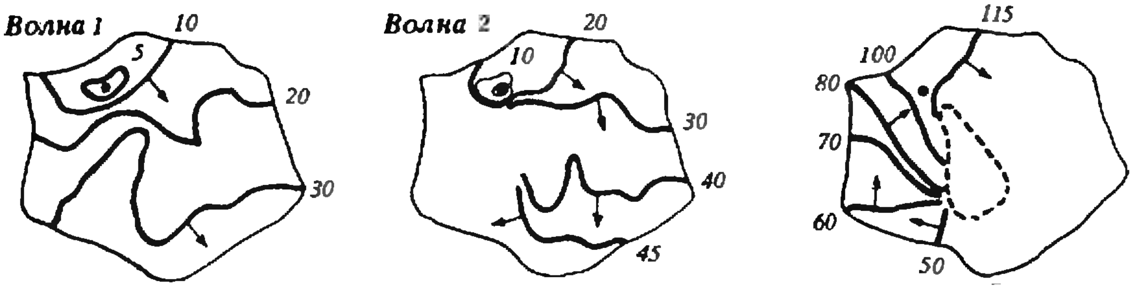


Рис. 8. Образование спиральной волны в полоске сердечной ткани кролика. Цифрами указано время в миллисекундах. Волна 2 рвется на области с повышенной рефрактерностью и образует спиральную волну. Из-за малого размера полоски в ней помещается лишь небольшая часть спирали.

участков сердца — достаточно малы, а частота циркуляции волны обратно пропорциональна радиусу отверстия, так обычно и происходит. Волна, вращающаяся вокруг отверстия, захватывает все предсердие. Нормальный режим работы сердца нарушается. На смену ему устанавливается «трепетание» предсердия, т. е. развивается сердечная аритмия.

Спиральные волны могут рождаться из разрывов фронта волн возбуждения. Предположим, что в среде имеется область *D*, элементы которой обладают повышенной длительностью рефрактерного состояния. Пусть по среде движутся подряд друг за другом две волны возбуждения, отделенные небольшим временным интервалом (рисунок 7,*а*). После прохождения первой волны через область *D* находящиеся в ней элементы надолго остаются в состоянии рефрактерности. Возбуждение от второй волны не может проникнуть в эту область — фронт волны рвется (рисунок 7,*б*). Через какое-то время состояние рефрактерности в области *D* закончится и элементы, находящиеся в этой области, вновь приобретут способность к возбуждению. Если к этому времени вторая волна еще не миновала область *D*, то возбуждение от фронта этой волны начнет распространяться внутрь области *D* (рисунок 7,*в*). Затем волна будет закручиваться вокруг области разрыва (рисунок 7,*г*), и с течением времени сформируется спиральная волна, показанная на рисунке 7,*д*.

Сердечная ткань неоднородна по своим свойствам, в том числе и по длительности рефрактерного состояния. Неоднородность еще более возрастает в результате нарушения нормального питания клеток после инфаркта. При обычном режиме работы сердца интервал между очередными волнами возбуждения составляет 1 секунду, а длительность рефрактерного состояния — порядка 0,1 с. Поэтому разброс в значениях рефрактерности, свойственный живой ткани, не приводит в обычных условиях к разрыву фронта волн возбуждения. При некоторых поражениях сердечной ткани, однако, в ней генерируется синусовым узлом дополнительная волна, отделенная от предыдущей очень малым временным интервалом. Если этот временной интервал достаточно короток (меньше суммы максимальной продолжительности рефрактерного состояния и длительности состояния возбуждения), фронт такой волны разорвется на границе области с повышенной рефрактерностью, и родится спиральная волна. На рисунке 8 показано образование спиральной волны из разрыва фронта в эксперименте с полоской ткани, взятой из сердца кролика.

Время жизни спиральной волны в неоднородной среде конечно. Из-за неоднородности среды центр волны со временем смещается, блуждает по среде. Рано или поздно волна выходит на границу среды и исчезает. С исчезновением спиральной волны приступ учащенного сердцебиения заканчивается.

Возможен, однако, и другой исход. На фронте волны возбуждения — на рукаве спиральной волны — могут образовываться вторичные разрывы при прохождении областей с повышенной рефрактерностью. В результате будет происходить размножение спиральных волн. Если скорость размножения волн превышает скорость их исчезновения на границах, число спиральных волн будет возрастать со временем, пока вся среда не будет заполнена короткими «обрывками» спиральных волн. Этот хаотический волновой режим наблюдается при фибрилляции — сокращения сердца как целого прекращаются и происходит лишь хаотическое подергивание отдельных его участков.

Экспериментально было установлено, что для возникновения фибрилляции необходимо превышение «критической массы» сердечной ткани: вплоть до некоторого размера полоски такой ткани создать в ней самоподдерживающуюся фибрилляцию невозможно. (Например, для ткани предсердий кролика критическая масса составляет около 20 мг.)

Этот эффект нетрудно объяснить. Если принять, что распределение рефрактерности по среде случайно, то вероятность рождения новой спиральной волны из разрыва фронта одной из уже существующих волн примерно одна и та же для любой точки среды. Полное число новых спиральных волн, рождающихся в среде за единицу времени, пропорционально площади, занимаемой средой, и числу уже имеющихся спиральных волн: $n_+=\alpha L^2N$, где L — линейный размер среды (мы считаем ее двумерной), N — число уже существующих волн, α — некоторый постоянный коэффициент. Число спиральных волн, которые за единицу времени исчезают на границах среды, равно $n_-=\beta NL$ (оно пропорционально длине границы), β — постоянный коэффициент. Хаотический режим, наблюдающийся при фибрилляции, соответствует ситуации, когда скорость размножения спиральных волн превышает скорость их исчезновения, т. е. когда $n_+>n_-$. Как видно из приведенных выше рассуждений, это возможно в том случае, когда линейный размер среды L выше критического значения $L_{\text{кр}}=\beta/\alpha$. В средах меньшего размера размножение спиральных волн подавлено процессом их ухода на границы.

Зная механизмы возникновения опасных сердечных аритмий, можно гораздо успешнее искать способы борьбы с ними или их предотвращения.

* * *

В этой короткой статье нам пришлось ограничиться только самыми простыми и наглядными объяснениями. Аксиоматическая модель Винера — Розенблюта сыграла свою роль в создании теории автоволновых явлений. Большой вклад в развитие этой теории внесли советские ученые — физики, биологи, математики, медики. Модель Винера — Розенблюта была подробно исследована и развита в работах участников семинара, организованного в 60-х годах советским математиком И. М. Гельфандом. В настоящее время для описания волн в возбудимых средах, в том числе — в ткани сердца, используют более детальные модели, формулируемые на языке дифференциальных уравнений в частных производных. Однако модель Винера — Розенблюта продолжает оставаться полезной во всех случаях, когда необходимо быстро получить качественную картину интересующего нас эффекта.

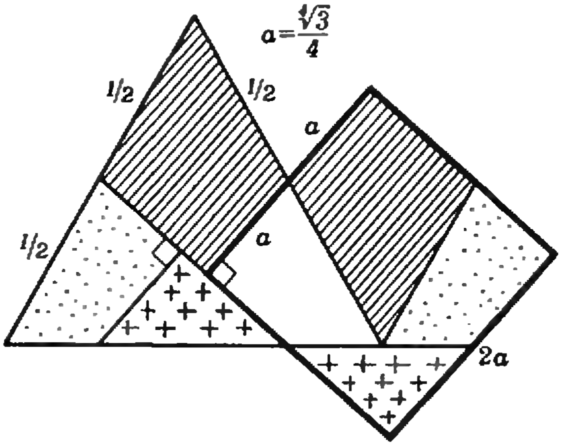
Возвращаясь к напечатанному

В «Кванте» № 7 на с. 3 допущена арифметическая ошибка при вычислении формулы (5). Должно быть

$$y^2(27y-26)=0,$$

а координаты рационального решения (в тексте и на рисунке 2) должны быть (17/9; 26/27).

В статье «Задачи на разрезание» на рисунке 1 (см. с. 45) показывается разрезание равностороннего треугольника на четыре части, из которых складывается ромб, а не квадрат. Конструкция, дающая квадрат, выглядит так:



РЕНЕ ДЕКАРТ И ЕГО «ГЕОМЕТРИЯ»

Кандидат физико-математических наук
А. В. ДОРОФЕЕВА

Восьмого июня 1637 г. в голландском городе Лейдене в типографии Жана Мэре появилась на свет книга с длинным по обычаю своего времени названием «Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода». Автора этой книги звали Рене Декарт. Ему шел тогда сорок второй год и он по праву считался одним из крупнейших в Европе математиков; однако «Рассуждение о методе» было его первым печатным трудом. Впереди у него были еще тринадцать лет жизни, удивительные сочинения, но даже одной небольшой части первого печатного труда — геометрии — оказалось достаточно, чтобы навсегда обессмертить его имя. Вместе с «Геометрией» Декарта в науку вошел метод координат.

Рене Декарт в юности.

Жизненный путь

Декарт родился в 1596 г. в провинции Турень на юге Франции в семье, принадлежащей знатному, но обедневшему роду. В 1597 г. умерла его мать. Когда Рене исполнилось восемь лет, отец отправил его в коллéж г. Ла-Флеш, незадолго до этого открытый католическим орденом иезуитов для просвещения привилегированного дворянства.

В течение первых пяти лет в коллеже преподавали латинский и греческий языки, историю, литературу, а затем в течение трех лет — философию, логику, математику и физику. Вспоминая годы учебы, Декарт в «Рассуждении о методе» писал:

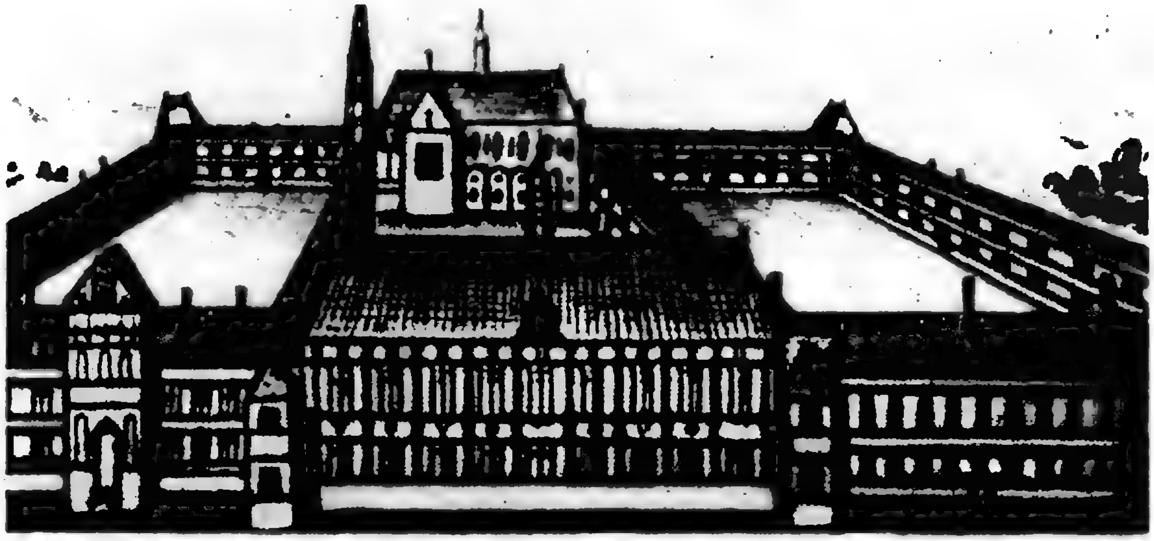
«Я изучал там все, что изучали другие, и, не довольствуясь преподаваемыми сведениями, пробегал все попадавшие мне под руки книги, трактовавшие о наиболее редкостных и любопытнейших науках... Особенно нравилась мне математика верностью и очевидностью своих рассуждений».

Он рано начал проявлять необычайную самостоятельность суждений.

«Признаюсь, я родился с таким умом, что главное удовольствие при научных занятиях для меня заключалось не в том, что я выслушивал чужие мнения, а в том, что я всегда стремился создать свои собственные».

Прилежно изучая все, что предлагала школа, прочитывая самостоятельно попадавшие к нему научные книги, юный Декарт в то же время испытывал глубокое разочарование. Он сомневался в достоверности полученных знаний. Обучение в школах и университетах было в то время схоластическим. Оно предполагало веру в церковное учение, наследие античности, научные авторитеты, имена, догмы.

Окончив коллеж в 1614 г., юноша обдумывал план дальнейшей жизни.



Коллеж, в котором учился Декарт.

В путешествиях, наблюдениях, экспериментах, размышлениях он видел путь, который приведет его к познанию тайн природы. Декарт писал впоследствии:

«Я совсем оставил книжные занятия и решился искать только ту науку, которую мог обрести в самом себе или же в великой книге мира, и употребил остаток моей юности на то, чтобы путешествовать, увидеть дворы и армии, встречаться с людьми разных нравов, положений и собрать разнообразный опыт, испытать себя во встречах, которые пошлет судьба, и повсюду поразмыслить над встречающимися предметами так, чтобы извлечь какую-нибудь пользу из таких занятий».

По окончании коллежа Декарт некоторое время провел в семье отца, а затем отправился в Париж, где вначале вел обычную для молодого и знатного дворянина светскую жизнь. Вскоре наступил перелом — Декарт уединился в предместье Парижа Сен-Жермен и предался занятиям наукой. В 1616 г. он получил в Пуатье степень бакалавра права.

В 1618 г. Декарт вступил добровольцем в армию, сражавшуюся против общего врага Франции и Голландии — испано-австрийских войск. С 1619 г. он нес военную службу в армии герцога Баварии. В 1620 г. Декарт находился в Богемии, в следующем году в Венгрии. В это время он принял решение оставить военную службу и вернулся во Францию, посетив Германию и Голландию.

Навестив отца, Декарт продолжил свои странствия. Он побывал в Швейцарии и Италии и, таким образом, в полной мере осуществил задуманный в юности план общеобразовательных путешествий. С 1625 г. Декарт обосновался в Париже. Все эти годы он постоянно встречался с учеными, главным образом, математиками и философами, а также с мастерами-практиками, изготовлявшими оптические инструменты.

В Париже Декарт разработал основы своего научного метода. Слава молодого ученого быстро росла. О нем говорили как о создателе новой философской системы. Декарт почувствовал необходимость полного уединения, чтобы завершить исследования. Он решил, «удалиться от всех мест, где мог иметь знакомства».

В 1628 г. Декарт переехал в Голландию, переживавшую тогда пору экономического и культурного расцвета. Ее моряки совершали дальние путешествия. В стране росли морские порты и крупные города, развивались ремесла, возникали университеты. В типографиях Голландии печатались лучшие научные труды, в том числе сочинения Коперника, «Диалоги» Галилея. А главное, страна отличалась необычной в то время религиозной терпимостью и значительной свободой от цензуры.

Декарт прожил в Голландии двадцать лет, заполненных непрерывным трудом. Его время распределялось так: утром — продолжительные размышления и решение математических задач, затем опыты по оптике, анатомии, медицине, ботанике, вечерами — письма. Он вел обширную переписку с выдающимися учеными Франции и Голландии.

Результаты философских раздумий и естественнонаучных экспериментов Декарт изложил в ряде сочинений, которые принесли ему широкую известность. Он отдавал много сил пропаганде учения, стремясь распространить его в школах и университетах Голландии. Новизна и смелость научных идей все-таки привели Декарта к столкновению с протестантскими богословами. Он был вынужден покинуть Голландию.

В 1649 г. Декарт принял предложение шведской королевы Христины, желавшей собрать при своем дворе выдающихся ученых Европы. В одном из писем он говорил о том, как трудно человеку, «родившемуся в садах Турени», переехать в Швецию — «страну медведей, снегов и льдов». Вскоре после переезда Декарт простудился, заболел воспалением легких. 11 февраля 1650 г. он умер. В 1663 г. сочинения Декарта были внесены в список книг, запрещенных католической церковью. Несмотря на это, научные идеи Декарта быстро распространялись по Европе, оказывая глубокое воздействие на умы его современников.

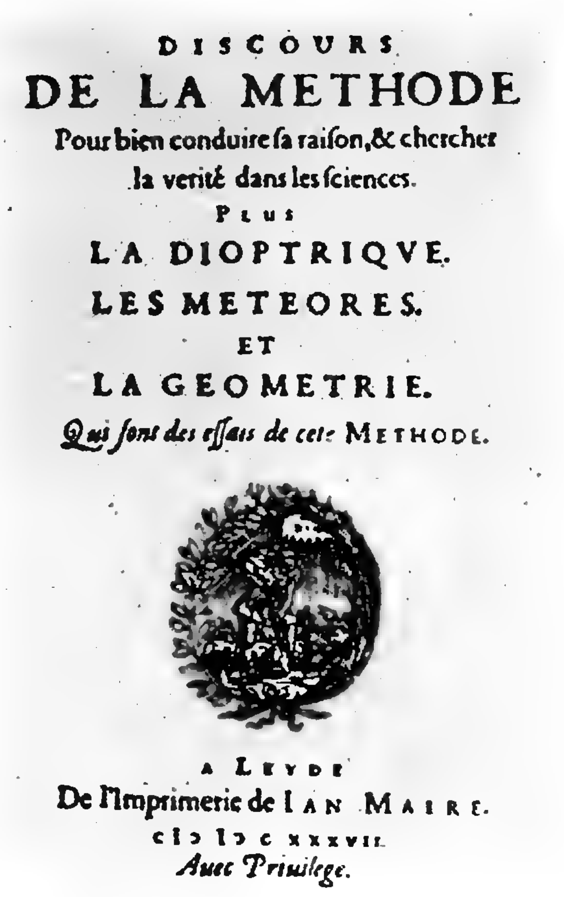
Основоположник нового научного метода

В «Рассуждении о методе» Декарт сформулировал «главные правила метода» и отметил: «Я принял твердое решение постоянно соблюдать их без единого отступления». Вот эти правила.

Первое: не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т. е. старательно избегать поспешности и предубеждения и включать в свои суждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчетливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Второе: делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, на сколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье: руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQUE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIƆ IƆ C XXXVII.
Auec Priuilege.

Титульный лист первого издания «Рассуждения о методе».

И последнее: делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено».

Декарт подчеркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы. Необходимо изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчеты. Изучая природу, нужно полагаться лишь на свои силы, а не ждать помощи свыше, божественного откровения. Эти взгляды ученого были несовместимы с теологией и схоластикой.

К сочинению «Рассуждение о методе» Декарт написал три приложения, которые должны были разъяснить и проиллюстрировать его научный метод,— «Диоптрику», «Метеоры» и «Геометрию». Проблемы опти-

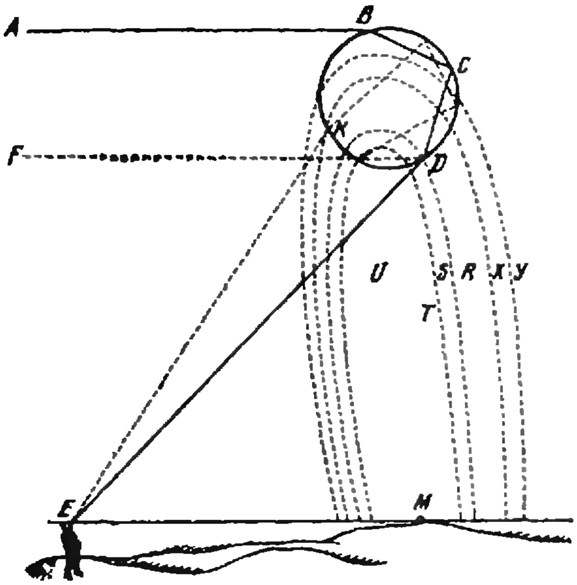


Рис. 1.

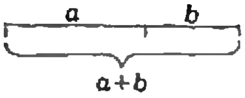


Рис. 2.

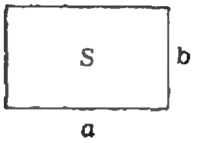


Рис. 3.

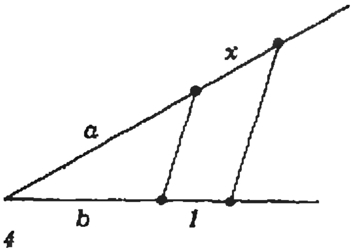


Рис. 4

Рис. 5.

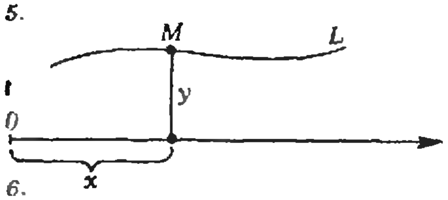


Рис. 6.

ки, теории метеорологических явлений, математики были тесно связаны с практическими задачами, стоящими в то время перед мореплавателями, инженерами, астрономами, мастерами по изготовлению оптических инструментов.

«Диоптрика» и «Метеоры»

В начале XVII столетия в науку вошли зрительные трубы и микроскопы, открывшие широчайшие возможности проникновения в просторы вселенной и в тайны микромира. Внимание ученых привлекли теоретические основы оптики. Голландец В. Снеллиус (1580—1620) открыл закон преломления света на границе двух сред и излагал его в лекциях, которые он читал в Лейденском университете. Этот же закон Декарт открыл, по-видимому, независимо от Снеллиуса, опубликовал и обосновал в своей «Диоптрике». Используя его, он создал теорию радуги.

В «Метеорах» Декарт объяснил происхождение радуги благодаря тому, что правильно построил ход лучей в дождевой капле (см. рисунок 1, принадлежащий Декарту). Эти объяснения, дополненные Ньютоном, приводятся во всех современных учебниках. Декарт проводил эксперименты со сферическим стеклянным сосудом, помещенным на солнце, и на их основе построил свою теорию цветов. Если для наблюдателя, находящегося в точке E (см. рис. 1), луч DE образует с солнечным лучом FD угол, примерно равный 42°, то эта часть сосуда кажется наблюдателю яркокрасной; при уменьшении угла появляются другие цвета радуги. Наряду с Кеплером, Гюйгенсом и Ньютоном Декарт является создателем современной оптики.

В приложении «Метеоры» ученый стремился выяснить законы образования облаков, снега, града, молнии, исследовать природу ветра. Он не мог сколько-нибудь полно решить поставленную перед собой задачу уже потому, что в ту эпоху еще ничего не знали об электрических явлениях. Главная заслуга Декарта заключается в том, что он объяснял явления природы с помощью науки, не оставляя места домыслам, предрассудкам и суевериям.

«Геометрия» Декарта

Это третье приложение к «Рассуждению о методе» обессмертило имя ученого в большей степени, чем другие его открытия. Декарт создал *метод координат*, с помощью которого установил тесную связь геометрии и алгебры. Его метод учил решать алгебраические задачи с помощью геометрии и, наоборот, использовать теорию алгебраических уравнений при решении геометрических задач.

Основной элемент «Геометрии» — отрезок. Если к отрезку a приложить отрезок b, то получится новый отрезок $a+b$ — сумма отрезков a и b (рис. 2). А как определить *произведение* отрезков ab? У древних греков ab — это площадь прямоугольника со сторонами a и b (рис. 3). Декарт нарушил эту многовековую традицию, приводящую ко многим неудобствам. У него ab — это тоже отрезок; он находится из пропорции $x/a=b/1$. На рисунке 4 показано, как Декарт построил отрезок $x=ab$. Аналогично из пропорции $x/1=a/b$ видно, как можно *разделить* отрезок a на отрезок b.

Декарт ввел *ось абсцисс* — прямую, на которой отмечена точка O, являющаяся началом отсчета, и выбрал некоторый отрезок за единичный (рис. 5). С его помощью можно измерить длину любого отрезка. Значит, у Декарта каждому отрезку соответствует положительное число — его длина. Он проводит операции с отрезками, а по существу,— это операции с положительными действительными числами: длины отрезков складываются, перемножаются, длина одного отрезка *делится на длину другого*.

Наличие оси абсцисс позволяет установить связь между линиями и уравнениями. Пусть $F(x,y)=0$ — *алгебраическое уравнение* *), например, $3y-2x-6=0$. Отложим на оси абсцисс отрезок, длина которого равна x. Из уравнения $F(x,y)=0$ найдем соответствующее значение y и отложим его на прямой, перпендикулярной оси. Получаем точку M (рис. 6). Числа x и y называются *координатами* точки M.

Если значения x меняются, то меняются соответствующие значения y и точка M при своем движении описывает некоторую линию L.

Вывод Декарта: алгебраическому уравнению $F(x,y)=0$ соответствует некоторая линия L на плоскости.

Например, нашему уравнению $3y-2x-6=0$ *соответствует прямая*, уравнению $xy-1=0$ — гипербола.

До исследований Декарта отрицательные числа встречались в математике лишь при решении алгебраических уравнений. Они не были равноправны с положительными числами. Метод координат привел Декарта к геометрической интерпретации отрицательных чисел.

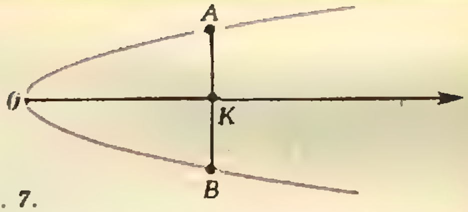


Рис. 7.

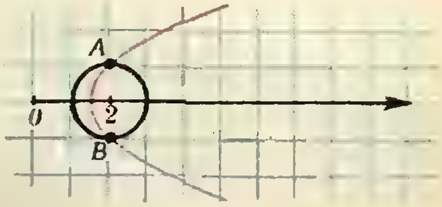


Рис. 8.

Рассмотрим уравнение $y^2=x$. Каждому положительному числу x здесь соответствуют два значения y. Соответствующая линия изображена на рисунке 7. Отрезки AK и KB лежат по разные стороны от оси абсцисс. Они наглядно убеждают нас в том, что отрицательные координаты имеют такое же право на существование, как и положительные.

Основная идея геометрии Декарта состоит в том, что геометрические свойства линий можно выяснить, производя алгебраические преобразования их уравнений. Например, чтобы найти точки пересечения окружности $(x-2)^2+y^2=1$ и параболы $y^2=2x-3$, нужно решить систему

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=1,\\ y^2=2x-3.\end{cases}$$

Используя приемы алгебры, получаем $(x-2)^2+2x-3=1$. Отсюда $x_1=0$, $x_2=2$. Затем находим $y^2=-3$ или $y^2=1$.

Уравнение $y^2=1$ имеет два корня: $y_1=1$ и $y_2=-1$. По терминологии Декарта, $y_1=1$ — «истинный» корень, а $y_2=-1$ — «ложный» корень. Но, как показывает рисунок 8, с точки зрения геометрии оба корня совершенно равноправны.

Уравнение $y^2=-3$, *по терминологии* Декарта имеет два «воображаемых» корня. Так он называл комплексные числа (см. о них статью Л. С. Понтрягина в «Кванте» № 2, 1985).

«Воображаемым» корням не соответствуют никакие точки на рисунке 8. Зачем же тогда о них говорить? Что они дают математике? На эти вопросы Декарт ответил так: с помощью «воображаемых» корней можно построить общую теорию алгебраических уравнений.

---

*) То есть уравнение вида $F=0$, где F — многочлен.

В «Геометрии» Декарт изложил и свою теорию алгебраических уравнений. Он начал ее с указания, что их удобнее всего записывать в форме, ставшей теперь для нас привычной,— с правой стороны равной нулю:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0.$$

Он сформулировал теорему о том, что алгебраическое уравнение степени n имеет ровно n корней, если учитывать положительные, отрицательные и комплексные («воображаемые») корни. Это основная теорема алгебры, которую до Декарта, в начале XVII века, высказали П. Роте и А. Жирар.

Декарт первым стал обозначать данные величины начальными буквами алфавита a, b, c, неизвестные — последними буквами x, y, z. Он упростил обозначение степеней, и оно приняло знакомый нам вид a^3, x^2 и т. п.

Распространение и влияние «Геометрии»

Сочинение «Рассуждение о методе» было опубликовано в 1637 г. на французском языке. Современники Декарта восприняли его «Геометрию» с большим энтузиазмом. Вскоре она была переведена на латинский язык — международный язык науки той эпохи. За короткое время «Геометрия» выдержала четыре издания. В семнадцатом столетии она была настольной книгой каждого творчески работающего математика.

Декарт считал, что математика должна изучать лишь кривые, заданные алгебраическими уравнениями, потому что для исследования других линий нет общего метода. Примером алгебраической кривой может служить декартов лист. Его уравнение $x^3+y^3-3ax\,y=0$, $a\neq 0$. Между тем в математике большую роль играют и неалгебраические (трансцендентные) кривые: спираль Архимеда, квадратриса, трактриса, циклоида и другие. Декарт не включил их в свою «Геометрию».

Это ограничение Декарта преодолели Ньютона и Лейбниц, разработавшие во второй половине XVII века общие приемы исследования трансцендентных кривых. С помощью метода координат они стали изучать синусоиду, логарифметическую, показательную и другие функции.

Метод координат плодотворно развивался дальше. Вскоре появилась ось ординат, а в XVIII веке и стереометрия; в XIX веке возникла «многомерная» геометрия, «бесконечномерная» геометрия в XX веке. Сегодня без метода координат невозможно себе представить ни математику, ни физику.

Труды Декарта, его философские, математические и космологические идеи вызывают глубокий интерес и обсуждение в наши дни. В этом его величие ученого.

Задачи на исследование

Предлагаем читателям несколько задач о средних величинах проекций многоугольников и многогранников. С их помощью можно, в частности, получить решение задачи М1030, отличающееся от помещенного в «Кванте» № 6.

а) Обозначим через $p_M(l)$ длину проекции выпуклого многоугольника M на прямую l. Докажите, что среднее значение $p_M(l)$ по всем прямым, проходящим через заданную точку, равно p/π, где p — периметр многоугольника M. (По определению, это среднее значение равно

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_M(l_\alpha)d\alpha,$$

где l_α — прямая, составляющая с фиксированной осью l_0 угол α.)

В следующих двух задачах рассматриваются средние по всем направлениям в пространстве; о том, что под ними понимается, рассказывалось в статье Ю. Ионина и А. Плоткина «Среднее значение функции» («Квант», 1977, № 7, с. 26).

Обозначим через $s_M(P)$ и $t_M(l)$ соответственно площадь проекции выпуклого многогранника M на плоскость P и длину его проекции на прямую l.

б) Чему равно значение $s_M(P)$, усредненное по всем плоскостям P, проходящим через заданную точку?

в*) Чему равно значение $t_M(l)$, усредненное по всем прямым l в пространстве, проходящим через заданную точку?

Подсказка: нетрудно понять, что ответ в задачах а) — в) имеет размерность см, см^2, см^3 соответственно. Какие «геометрические величины», связанные с многоугольником или многогранником, имеют такую размерность?

А. Б. Гончаров

Задачи

M1061 — M1065, Ф1073 — Ф1077

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 декабря 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9 — 87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1061» или «Ф1073». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи Ф1073—Ф1077 предлагались на заключительном этапе XXI Всесоюзной олимпиады по физике (Таллин, 1987).

M1061. В стране, где больше двух городов, некоторые пары городов соединены непересекающимися дорогами. Известно, что для любых трех городов A, B, C по этой сети дорог можно проехать из A в B, не заезжая в C. Докажите, что на всех дорогах можно установить одностороннее движение так, что из каждого города можно будет проехать в любой другой, двигаясь по установленным направлениям.

В. Е. Колосов

M1062. а) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки E и D. Прямые BD и CE пересекаются в точке M, AM и BC — в точке P, AM и DE — в точке N. Докажите, что

$$\frac{PN}{NA}=2\cdot\frac{PM}{MA}.$$

б) На ребрах SA, SB и SC тетраэдра $SABC$ взяты точки D, E и F. Плоскости ABF, BCD и CAE пересекаются в точке M, прямая SM пересекает плоскости ABC и DEF в точках P и N. Докажите, что

$$\frac{PN}{NS}=3\cdot\frac{PM}{MS}.$$

Т. А. Джортменадзе, Е. Я. Глейбман

M1063. Сколько существует различных целых чисел, которые можно представить в виде разности $a-\bar{a}$, где a — n-значное натуральное число $(10^{n-1}\leqslant a<10^n)$, $\bar{a}$ — число, полученное при записи цифр a в обратном порядке? Например, если $a=1917$, то $a-\bar{a}=1917-7191=-5724$. Укажите ответ для: а) $n=4$; б) $n=5$; в) любого натурального n.

Г. О. Эльстинг

M1064. Какое максимальное количество точек самопересечения может иметь замкнутая n-звенная плоская ломаная, если: а) n нечетно; б)* n четно? (Предполагается, что никакие три вершины не лежат на одной прямой и что никакие три звена не пересекаются в одной точке.)

Д. Б. Фукс

M1065*. Будем рассматривать векторы $(x; y)$ с целыми неотрицательными координатами, причем хотя бы одна из координат отлична от 0. Назовем такой вектор *образующим*, если $|x-y|=1$.

а) Докажите, что рассматриваемый вектор $(x; y)$ можно представить в виде суммы образующих (или он сам — образующий) тогда и только тогда, когда величина

$$k(x, y)=x+y-(x-y)^2$$

неотрицательна.

б) Докажите, что число $n(x, y)$ различных (с точностью до порядка) представлений вектора $(x; y)$ в виде суммы образующих зависит только от числа $k=k(x, y)$. Найдите $n(13, 18)$.

Ф. В. Вайнштейн

Ф1073. Маленький упругий мячик отпускают с высоты $H=1$ м над полом, а на его пути закрепляют пластинку, от которой он отскакивает. Какая скорость будет у мячика в момент удара о пол? Как нужно расположить пластинку, чтобы мячик ударился о пол как можно дальше от начальной точки? Чему равно это максимальное расстояние?

А. В. Хельвас

Ф1074. Папа Карло сделал для Буратино колпак из тонкой жести. Колпак имеет форму конуса высотой $H=20$ см с углом $\alpha=60°$ при вершине. Будет ли этот колпак держаться на голове у Буратино, если эта голова — гладкий шар диаметром $D=15$ см?

С. С. Кротов

Ф1075. Выполняя лабораторную работу, студент опустил в сосуд с водой кипятильник, включил его в сеть и стал каждые три минуты записывать температуру. Данные этого опыта приведены в таблице 1. Затем он охладил воду, положил в сосуд небольшой металлический образец и вновь провел измерения. Результаты этого опыта приведены в таблице 2.
Определите по этим данным теплоемкость образца. Напряжение в сети $U=35$ В, ток через кипятильник $I=0{,}2$ А, температура в комнате $t_0=20$ °С.

Л. П. Баканина

Таблица 1
t, °С
25,2
26,4
27,6
28,7
29,7
30,6
31,5
32,3
33,1

Таблица 2
t, °С
22,6
23,8
25,0
26,0
27,0
28,0
28,9
29,8
30,6

Ф1076. Для исследования солнечной батареи используется многопредельный вольтметр (он состоит из чувствительного микроамперметра и набора добавочных резисторов). Подключив его к батарее на пределе 1 В мы получаем показание $U_1=0{,}7$ В. Переключив вольтметр на предел 10 В, мы получим показание $U_2=2{,}6$ В. Что получилось бы на пределе 100 В? Известно, что при неизменном освещении солнечная батарея ведет себя как обычный источник, последовательно к которому подключен резистор большого сопротивления.

А. Р. Зильберман

Ф1077. По одной из гипотез звезды образуются из межзвездной среды (космическая пыль) путем сжатия под действием гравитационных сил. Оцените время образования звезды из гигантского сферического облака космической пыли плотностью $\rho=2\cdot10^{-20}$ г/см^3. Можно считать, что при сжатии частицы не обгоняют друг друга. Гравитационная постоянная $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

В. Е. Скороваров

Problems

M1061—M1065, P1073—P1077

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than December 1st, 1987, to the follo-

M1061. In a country of more than two cities some pairs of cities are connected by non-intersecting roads. It is known that for any three cities A, B, C it is possible to travel from A to B on these roads without going through C. Prove that it is possible to choose directions of one — way traffic on all the roads so that any city may be reached from any other along the roads in the chosen directions.

V. K. Kolosov

M1062. a) Points E and D are chosen on sides AB and AC of triangle ABC. The lines BD and CE intersect at the point M, AM and BC at P, AM and DE at N. Prove that

$$\frac{PN}{NA}=2\cdot\frac{PM}{MA}.$$

b) Points D, E and F are chosen on the sides SA, SB and SC of the tetrahedron $SABC$. The planes ABF, BCD and CAE intersect at the point M, the line SM intersects planes ABC and DEF at P and N. Prove that

$$\frac{PN}{NS}=3\cdot\frac{PM}{MS}.$$

T. A. Djortmenadze, E. Ya. Gleibman

wing address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1 «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. *If* you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

Problems P1073—P1077 in this issue are from the All-Union Physics Olympiad (Tallin, 1987).

M1063. Find the number of distinct integers which can be represented in the form $a - \bar{a}$, where a is an n digit integer ($10^{n-1} \leqslant a < 10^n$), $\bar{a}$ is the number obtained by writing the digits of a in reverse order. For example, if $a = 1917$, then $a - \bar{a} = 1917 - 7191 = -5724$. Indicate the answer for a) $n = 4$; b) $n = 5$; c) arbitrary n.

G. O. Elsting

M1064. What maximal number of self-intersection points can a plane polygonal line of n sides have, if a) n is odd; b)* n is even? (*It is assumed that no three vertices are collinear and no three sides intersect at one point.*)

D. B. Fuks

M1065.* Consider vectors $(x;\ y)$ with non-negative integer coordinates, at least one of which is non-zero. Call such a vector generating, if

$$|x - y| = 1.$$

a) Prove that one of the vectors $(x;\ y)$ under consideration can be represented as the sum of generating vectors (or is itself one) if and only if the expression

$$k(x,\ y) = x + y - (x - y)^2$$

assumes a non-negative value.

b) Prove that number $n(x,\ y)$ of distinct (up to order) representations of the vector $(x;\ y)$ as a sum of generating vectors depends only on the number $k = k(x,\ y)$. Find $n(13,\ 18)$.

F. V. Vainshtein

P1073. A small elastic ball is dropped from height $H = 1$m above the floor; a small flat plate is placed on its way, so the ball bounces off it. What will the ball's velocity be when it reaches the floor? How should the plate be placed in order to insure that the ball will hit the floor as far as possible from the initial point? Find this maximal distance.

A. V. Helvas

P1074. Papa Collodi made a tin cap for Pinnocchio. The cap was shaped like a hollow cone of altitude $H = 20$cm and vertex angle $\alpha = 60°$. Will the cap hold on Pinnocchio's head, if his head is a smooth sphere of diameter $D = 15$ cm?

S. S. Krotov

P1075. Carrying out laboratory work, a student places a heating apparatus in a receptacle filled with water, turns on the heater and measures the water temperature every three minutes, obtaining the data shown on Table 1 (p. 22). Then he lets the water cool, places a small metal sample in the receptacle and repeats the measurements, with the results shown on Table 2. Find the heat capacity of the sample. The voltage on the heater is $U = 35$ V, the current through it is $I = 0.2$ A, the room temperature $t_0 = 20°$C.

L. P. Bakanina

P1076. A multirange voltmeter (consisting of a sensitive microammeter and a series of different resistors) is used to study a solar battery. Connecting the battery to the voltmeter in the 1 V range, we get a reading of $U_1 = 0.7$ V. In the 10 V range we get $U_2 = 2.6$ V. What will we get in the 100 V range? It is known that under constant illumination the solar battery behaves like an ordinary source to which a high resistance capacitor has been connected consecutively.

A. R. Zilberman

P1077. According to one of the cosmological hypotheses, stars were formed from interstellar medium (space dust) by gravitational contraction. Estimate the length of time necessary to form a star in this way from a giant space dust cloud of density $\rho = 2 \cdot 10^{-20}$ g/cm^3. It may be assumed that particles do not overtake one another during the contraction. The gravitational constant is $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N$\cdot$m^2/kg^2.

V. E. Skorovarov

Решения задач

М1041 — М1045, Ф1053 — Ф1057

М1041. *На плоскости заданы: а) четыре, б) три вершины правильного пятиугольника. С помощью двусторонней линейки восстановите остальные его вершины. (Двусторонней линейкой можно делать то же, что и обычной линейкой без делений, а также проводить прямую, параллельную данной на расстоянии, равном ширине линейки.)*

Ключевой элемент решения — построение биссектрисы угла, показанное на рисунке 1. Мы будем также пользоваться тем, что любая сторона правильного пятиугольника видна из любой его вершины (за исключением концов этой стороны) под углом $\pi/5$. Искомый пятиугольник обозначим через $ABCDE$.

а) Пусть даны вершины A, B, C, D. Для построения E достаточно заметить, что AE — биссектриса угла, смежного с углом BAC ($\angle BAC=\pi/5$, $\angle CAE=2\pi/5$) и аналогично DE — биссектриса угла, смежного с CDB (рис. 2).

б) Очевидно, достаточно рассмотреть 2 случая: 1) заданы вершины A, B, C, 2) заданы вершины A, B, D. В случае 1 (рис. 3) строим AE — биссектрису угла, смежного с BAC, и AD — биссектрису угла EAC; вершина D находится на пересечении AD и биссектрисы угла, смежного с ACB. Аналогично строим E. В случае 2 (рис. 4) можно воспользоваться тем, что AC и DC — биссектрисы углов BAD и BDF, где DF — биссектриса угла, смежного с ADB. Это позволяет построить вершину C, а затем и E.

Некоторые читатели не обратили внимания на последнюю фразу условия и посчитали, как это принято во многих книгах о геометрических построениях, что двусторонняя линейка позволяет проводить две параллельные прямые на расстоянии, равном ее ширине, через две заданные точки A и B (как на рисунке 5). При таком понимании оказываются разрешимыми все задачи на построение, которые можно решить традиционным набором инструментов — циркулем и линейкой (но окружность следует считать построенной, если указан ее центр и отрезок, равный радиусу). Интересно выяснить, верно ли это для «двусторонней линейки» в смысле нашей задачи.

М. И. Гринчук

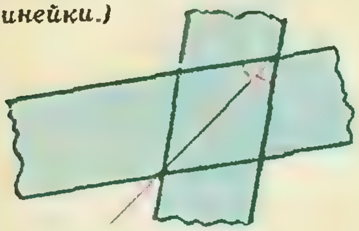


Рис. 1.

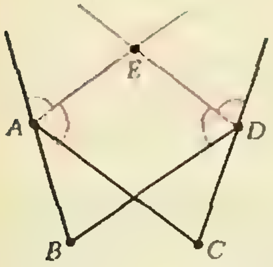


Рис. 2.

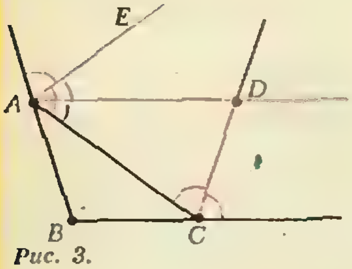


Рис. 3.

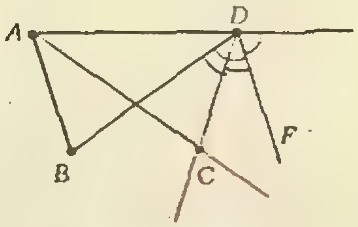


Рис. 4.

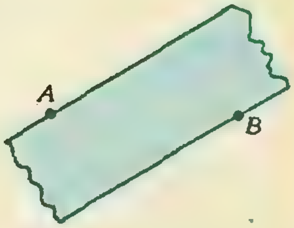
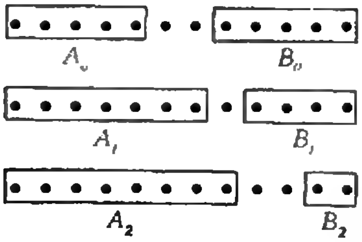


Рис. 5.

М1042. *В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (из одного, двух и т. д. человек, кроме команды всего класса). Докажите, что каждая*

Назовем две команды дополнительными, если одна из них состоит из всех учеников, не вошедших в другую. Каждый ученик класса входит только в одну из двух дополнительных команд, следовательно, он входит ровно в половину всех команд. Но половина числа всех команд равна числу всех предстоящих соревнований. Таким образом, число соревнований совпадает с числом выступлений каждого ученика, а значит, в каждом соревновании будут выступать все ученики, т. е. две дополнительные команды.

Приведем еще одно решение. Допустим, что в одном *команда будет соревноваться с командой всех остальных учеников класса.*



из соревнований должны участвовать не дополнительные команды A_0 и B_0. Пусть A_1 — команда, дополнительная к B_0, а B_1 — команда, встречающаяся с A_1, тогда $A_1 \supset A_0$, $A_1 \neq A_0$, а $B_1 \subset B_0$ и $B_1 \neq B_0$ (так как команда B_0 уже выступает с A_0; см. рисунок). Рассмотрим далее команду A_2, дополнительную к B_1 и ее соперника B_2; как и выше, $A_2 \supset A_1$, $A_2 \neq A_1$ и $B_2 \subset B_1$, $B_2 \neq B_1$. Продолжая это построение, получим бесконечную последовательность команд $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, число участников которых строго возрастает, что, конечно, невозможно.

И. Н. Сергеев

M1043. *Можно ли разбить множество всех целых чисел на три подмножества так, чтобы для любого целого числа n, $n-50$, $n+1987$ принадлежали трем разным подмножествам?*

Ответ: нельзя. Доказательство проведем от противного. Предположим, что указанное в условии разбиение существует. Будем писать $m \sim k$, если целые числа m и k принадлежат одному и тому же подмножеству разбиения, и $m \not\sim k$, если нет. Докажем, что

$$n \sim n+1937 \text{ и } n \sim n-150$$

для любого целого n; отсюда будет следовать, что

$$0 \sim 1937 \sim 2\cdot 1937 \sim \ldots \sim 50\cdot 1937 = 646\cdot 150-50 \sim 645\cdot 150-50 \sim \ldots \sim -50,$$

т. е. $0 \sim -50$, а это противоречит условию задачи.

Назовем тройку чисел *представительной*, если она содержит по одному числу от каждого подмножества разбиения. По условию тройки

$$n-50,\ n,\ n+1987;\ n-100,\ n-50,\ n+1937 \text{ и } n+1937,\ n+1987,\ n+2\cdot 1987$$

— представительные при любом n ($1937=1987-50$). В частности, из второй и третьей тройки видно, что $n+1937 \not\sim n-50$ и $n+1937 \not\sim n+1987$, а из первой — что $n \not\sim n-50$ и $n \not\sim n+1987$. Отсюда следует наше первое утверждение: $n \sim n+1937$. Теперь число $n+1937$ во второй тройке можно заменить на n, т. е. тройка $n-100$, $n-50$, n — представительная. Подставляя в нее $n-50$ вместо n, получим еще одну представительную тройку $n-150$, $n-100$, $n-50$. Из сравнения этих двух троек вытекает второе утверждение: $n \sim n-150$.

С. В. Конягин

M1044. *Докажите, что из четырех чисел всегда можно выбрать два числа x и y такие, что*

$$0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 1.$$

Пусть α, β, γ, δ — арктангенсы данных чисел, расположенные по возрастанию; тогда

$$-\pi/2 < \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta < \pi/2 < \alpha+\pi.$$

Точки β, γ, δ разбивают отрезок $[\alpha; \alpha+\pi]$ на четыре отрезка. Длина хотя бы одного из них не превосходит $\pi/4$; в качестве x и y можно взять тангенсы его правого и левого концов. Действительно, если, например, $\beta-\alpha \leqslant \pi/4$, то, учитывая, что $\beta-\alpha \geqslant 0$, имеем $0 \leqslant \operatorname{tg}(\beta-\alpha) \leqslant 1$ и при этом

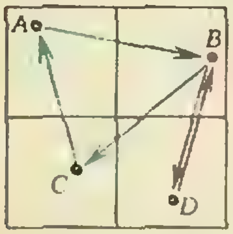
$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha} = \frac{x-y}{1+xy}.$$

(В случае $(\alpha+\pi)-\delta \leqslant \pi/4$ надо еще воспользоваться равенством $\operatorname{tg}(\alpha+\pi-\delta) = \operatorname{tg}(\alpha-\delta)$.)

И. Н. Сергеев

M1045. *В некотором царстве, некотором государстве, территория которого*

Организуем оповещение следующим образом. Разобьем царство на 4 квадрата со стороной 1 км — квадраты 1-го ранга; каждый из этих квадратов разобьем на *имеет форму квадрата со стороной 2 км, царь решает созвать всех жителей к 7 часам вечера к себе во дворец на бал. Для этого он в полдень посылает с поручением гонца, который может передать любое указание любому жителю, который в свою очередь может передавать любое указание любому жителю и т. д. Каждый житель до поступления указания находится у себя дома (в известном месте) и может передвигаться со скоростью 3 км/ч в любом направлении. Докажите, что царь может организовать оповещение так, чтобы все жители успели прийти к началу бала.*



4 квадрата со стороной 1/2 км — квадраты 2-го ранга, эти квадраты в свою очередь на квадраты 3-го ранга (со стороной 1/4 км) и т. д., пока не дойдем до столь большого ранга n, что в каждом квадрате этого ранга будет не более одного жителя царства (жителей, попавших на общую границу нескольких квадратов нужно произвольно распределить по этим квадратам). Оповещение будет происходить поэтапно. Цель 1-го этапа — оповестить по одному жителю в каждом из (населенных) квадратов 1-го ранга, после чего гонец и все посыльные должны вернуться в исходные пункты. На 2-м этапе каждый из уже оповещенных жителей, действуя как гонец на 1-м этапе, устраивает оповещение каждого из квадратов 2-го ранга в своем квадрате 1-го ранга, на 3-м этапе оповещаются по одному жителю в каждом квадрате 3-го ранга и т. д. После n-го этапа будут оповещены все жители.

Оценим время, необходимое для 1-го этапа оповещения. Поскольку расстояние между любыми двумя точками квадрата со стороной 2 км не превосходит $2\sqrt{2}$ км, при скорости 3 км/ч его можно пройти меньше чем за 1 ч. Поэтому по схеме, показанной на рисунке, 1-й этап можно осуществить не более чем за 3 ч (гонец A оповещает жителей B и C, житель B — жителя D; если в одном из квадратов 1-го ранга жителей не окажется, время оповещения может только сократиться). Второй этап повторяет первый одновременно в четырех квадратах с вдвое меньшей стороной — он потребует не более 3/2 ч; вообще, k-й этап осуществляется за $3/2^{k-1}$ ч, а для оповещения всех жителей понадобится $3+3/2+\ldots+3/2^{n-1}<6$ ч.

Таким образом, к 6 часам вечера все жители получат приглашение на бал; еще час им потребуется, чтобы прибыть во дворец.

С. В. Конягин

Ф1053. *В тонком гладком трубопроводе скользит (в поле силы тяжести) гибкий однородный шнур (см. рисунок). Участки AB и BC трубопровода представляют собой полуокружности радиусом R, точки A, B, C лежат на одной вертикали; длина шнура $l=2\pi R$. Найти все точки шнура, в которых натяжение равно нулю в тот момент, когда нижний конец шнура находится в точке C.*

Пусть в тот момент времени, который запечатлен на рисунке, шнур имеет ускорение a. Найдем его.

За малый промежуток времени Δt шнур переместился так, что его конец, находившийся в точке C, сместился на $\Delta x=v\cdot\Delta t$, где v — значение мгновенной скорости шнура. Кинетическая энергия шнура за это время увеличилась на

$$\Delta K=\frac{m(v+\Delta v)^2}{2}-\frac{mv^2}{2}\approx mv\cdot\Delta v$$

(m — масса шнура; слагаемым $\sim(\Delta v)^2$ мы пренебрегли). Потенциальная энергия шнура изменилась на

$$\Delta\Pi=\Delta m\cdot gh=m\frac{\Delta x}{l}gh=m\frac{v}{l}gh\cdot\Delta t,$$

где Δm — масса участка шнура длиной Δx, который как бы «переместился» из точки A в точку C, т. е. опустился с высоты $h=4R$. Согласно закону сохранения энергии $\Delta K=\Delta\Pi$, т. е.

$$mv\cdot\Delta v=m\frac{v}{l}gh\cdot\Delta t.$$

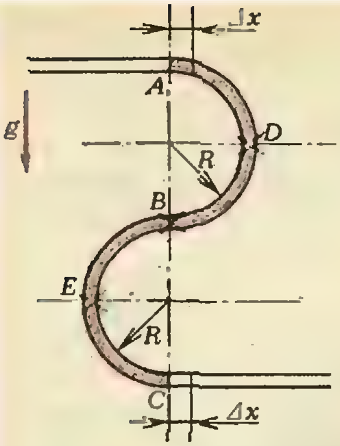
Отсюда находим $\Delta v/\Delta t$, т. е. ускорение a шнура:

$$a=\frac{h}{l}g=\frac{4R}{2\pi R}g=\frac{2}{\pi}g.$$

Теперь мысленно разрежем шнур в какой-нибудь точке и найдем для получившихся отрезков их ускорения (тем же способом, которым мы воспользовались выше). Если ускорения отрезков окажутся одинаковыми, это будет означать, что в данный момент времени натяжение шнура в том месте, где мы мысленно его разрезали, равно нулю. Но ускорения отрезков будут пропорциональны $h_{\text{отр}}/l_{\text{отр}}$. *Следовательно, нужно искать* такие точки на шнуре, где отношения h_1/l_1 и h_2/l_2 для двух кусков шнура, разделенных этими точками, будут одинаковыми. Из рисунка видно, что существуют три такие точки на шнуре — D, B и E.

Итак, *в момент, когда нижний конец шнура находится в точке C, натяжение равно нулю в точках шнура D, B и E.*

И. Ю. Потеряйко



Ф1054. *Два стержня одинаковой формы сделаны из материалов с разными упругими свойствами — модули Юнга материалов равны соответственно E_1 и E_2. Стержни склеены торцами и покрашены одной краской, так что получившийся образец выглядит как однородный стержень. Какой модуль Юнга «вещества» этого стержня измерит экспериментатор, не знающий, что стержень составной?*

Составной стержень представляет собой два последовательно соединенных упругих стержня с жесткостями, равными, соответственно, k_1 и k_2. Удлинение x составного стержня при его растяжении равно x_1+x_2, где x_1, x_2 — удлинения первого и второго стержней. Поскольку растягивающая сила одинакова для обоих стержней (стержни покоятся), то из закона Гука следует, что

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2},$$

где k — жесткость составного стержня.

Жесткости связаны с модулями Юнга материалов стержней:

$$k_1=E_1\frac{S}{l},\quad k_2=E_2\frac{S}{l},\quad k=E\frac{S}{2l},$$

где l — длина каждого стержня, S — площадь поперечного сечения, E — модуль Юнга «вещества» составного стержня. *Следовательно, значение E, которое получит в измерениях экспериментатор,*

$$E=k\frac{2l}{S}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\frac{2l}{S}=\frac{2E_1E_2}{E_1+E_2}.$$

В. А. Давыдов

Ф1055. *Электрический прибор П подключен к сети переменного тока с напряжением 220 В через конденсатор емкостью $C=0{,}5$ мкФ (рис. 1). Амперметр показывает ток $I=0{,}01$ А, показание вольтметра — $U=180$ В. Найти мощность, потребляемую от сети прибором. Считать амперметр и вольтметр идеальными.*

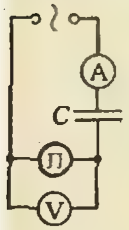


Рис. 1.

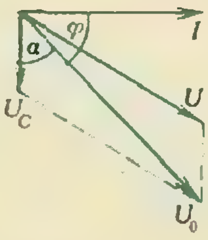


Рис. 2.

Найдем сначала действующее значение напряжения на конденсаторе:

$$U_C=IX_C=I\frac{1}{2\pi\nu C}=63{,}7\text{ В}$$

(здесь $\nu=50$ Гц — частота колебаний переменного тока в сети). Теперь нарисуем векторную диаграмму*) токов и напряжений для данной цепи (рис. 2). Из диаграммы легко найти сдвиг фаз φ между током I и напряжением U_0:

$$\varphi=90^\circ-\arccos\alpha=90^\circ-\arccos\frac{U_0^2+U_C^2-U^2}{2U_0U_C}\approx46^\circ.$$

Активная мощность, потребляемая прибором П, равна активной мощности, которая выделяется во всей цепи (в конденсаторе тепло не выделяется), т. е.

$$P=U_0J\cos\varphi\approx1{,}53\text{ Вт}.$$

А. Р. Зильберман

---

*) О том, что такое векторные диаграммы и как они строятся, можно прочитать, например, в статье «Цепи переменного тока» («Квант», 1986, № 9).

Задачник „Кванта"

Ф1056. *В схеме, изображенной на рисунке 1, ключ K_3 сначала замкнут, а ключи K_1 и K_2 разомкнуты. В некоторый момент времени замыкают ключ K_1, а спустя время $t_1=0{,}1$ с замыкают ключ K_2. Еще через время $t_2=0{,}2$ с размыкают ключ K_3. Найти: 1) максимальное напряжение на конденсаторе; 2) ток через катушку L_1 через время $t_3=1$ с после замыкания ключа K_1. Сопротивлением проводов пренебречь, диод считать идеальным; $L_1=1$ Гн, $L_2=0{,}5$ Гн, $C=10$ мкФ, $U_0=10$ В.*

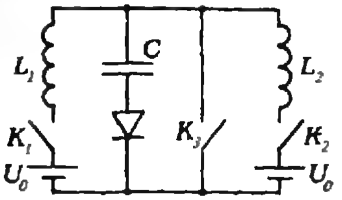


Рис. 1.

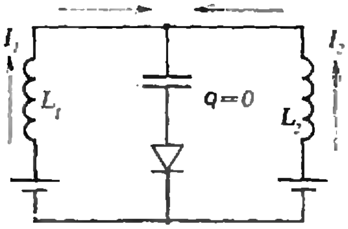


Рис. 2.

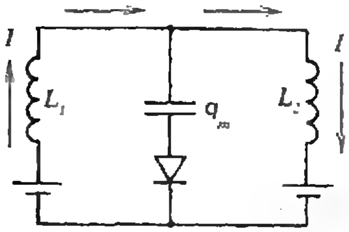


Рис. 3.

Ф1057. *Гантель, состоящая из двух шариков массой m каждый, закрепленных на концах легкого стержня длиной $2b$, подвешена в горизонтальном положении на двух нерастяжимых нитях длиной l, расстояние между которыми $2a$ (рис. 1). Найти период малых крутильных колебаний гантели.*

После замыкания ключа K_1 в катушке L_1 появляется ток, который с течением времени увеличивается по линейному закону

$$I_1=\frac{U_0}{L_1}t.$$

То же происходит и в катушке L_2 после замыкания ключа K_2. В момент размыкания ключа K_3 (рис. 2)

$$I_1=\frac{U_0}{L_1}(t_1+t_2)=3\text{ А},$$

$$I_2=\frac{U_0}{L_2}t_2=4\text{ А},$$

а заряд на конденсаторе равен нулю.

В тот момент, когда заряд конденсатора станет максимальным (он будет оставаться таким и в дальнейшем — диод не дает конденсатору разрядиться), через обе катушки будет течь один и тот же ток I, не равный нулю (рис. 3). Контур, состоящий из двух катушек и двух батареек, сверхпроводящий, а батарейки компенсируют друг друга, поэтому магнитный поток, пронизывающий контур, со временем не изменяется:

$$L_1I_1-L_2I_2=L_1I+L_2I.$$

Отсюда получаем ответ на второй вопрос задачи:

$$I=\frac{L_1I_1-L_2I_2}{L_1+L_2}=\frac{2}{3}\text{ А}.$$

Начиная с момента размыкания ключа K_3 и до момента установления максимального заряда q_m на конденсаторе батарейки совершили работу

$$A=q_mU_0.$$

Тогда, записав закон сохранения энергии

$$\frac{L_1I_1^2}{2}+\frac{L_2I_2^2}{2}+A=\frac{(L_1+L_2)I^2}{2}+\frac{q_m^2}{2C},$$

или

$$q_m^2-2CU_0q_m-C(L_1I_1^2+L_2I_2^2-(L_1+L_2)I^2)=0,$$

находим ответ на первый вопрос:

$$q_m\approx1{,}3\cdot10^{-2}\text{ Кл},\ U_m=q_m/C\approx1300\text{ В}.$$

Решение может стать более очевидным, если заметить, что две батарейки можно заменить одной (т. е. объединить положительные полюсы батареек).

А. Р. Зильберман

При крутильных колебаниях гантель поворачивается вокруг вертикальной оси OO_1. Выясним, как зависит потенциальная и кинетическая энергия гантели от угла поворота φ (рис. 2).

Пусть при повороте на угол φ центр тяжести гантели поднимается на высоту Δh (относительно положения равновесия). Как видно из рисунка 2, $\Delta h=l-h$, где

$$h=\sqrt{l^2-|BB_1|^2}\approx\sqrt{l^2-a^2\varphi^2}$$

(поскольку угол поворота φ мал, $|BB_1|\approx a\varphi$). Отсюда получаем:

$$l^2-h^2\approx a^2\varphi^2 \Leftrightarrow \Delta h\cdot(l+h)\approx a^2\varphi^2,$$

откуда

$$\Delta h\approx\frac{a^2\varphi^2}{l+h}\approx\frac{a^2\varphi^2}{2l}$$

(при малых φ Δh мало, и $l+h\approx2l$).

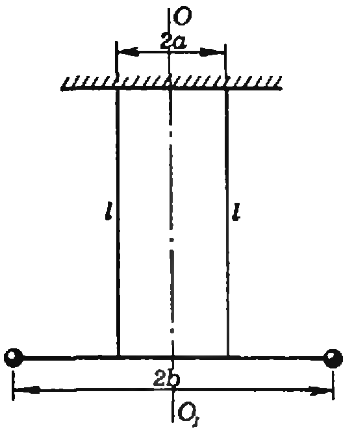


Рис. 1.

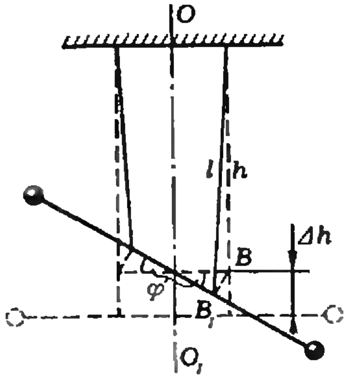


Рис. 2.

Следовательно, потенциальная энергия гантели (измеряемая по отношению к положению равновесия) зависит от угла поворота как

$$\Pi_\varphi = 2mg\cdot\Delta h = \frac{mga^2}{l}\varphi^2. \qquad (1)$$

Вычислим теперь кинетическую энергию. При малых колебаниях можно пренебречь вертикальными составляющими скоростей шариков и считать, что векторы скоростей лежат в горизонтальной плоскости и равны по модулю $v = b\omega_\varphi = b\varphi'$ (ω_φ — угловая скорость шариков в тот момент, когда угол поворота гантели равен φ). Таким образом, кинетическая энергия зависит от угла поворота как

$$K_\varphi = 2\,\frac{mv^2}{2} = mb^2(\varphi')^2. \qquad (2)$$

Заметим, что формулы (1) и (2) аналогичны формулам, описывающим потенциальную и кинетическую энергию груза, колеблющегося на пружине жесткостью k:

$$\Pi_x = \frac{1}{2}kx^2, \quad K_x = \frac{1}{2}M(x')^2,$$

где x — отклонение от положения равновесия. Пользуясь этой аналогией, можем записать:

$$\Pi_\varphi = \frac{mga^2}{l}\varphi^2 = \frac{mga^2}{l}\left(\frac{x}{b}\right)^2 = \frac{1}{2}kx^2,$$

где $x = b\varphi$ — отклонение шарика от положения равновесия, а

$$k = \frac{2mg}{l}\frac{a^2}{b^2};$$

соответственно,

$$K = mb^2(\varphi')^2 = m(x')^2 = \frac{1}{2}M(x')^2,$$

где

$$M = 2m.$$

Таким образом, гантель будет совершать крутильные колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2mlb^2}{2mga^2}} = 2\pi\,\frac{b}{a}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

М. М. Цыпин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1016—М1030, Ф1028—Ф1042, справились с задачами М1021, М1026, М1027, Ф1028, Ф1031, Ф1034, Ф1037—Ф1039, Ф1041, Ф1042. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

А. Абдрахманов (Алма-Ата) 16; *А. Аветисян* (с. Геганист АрмССР) 22; *С. Агневич* (Барановичи) 23; *А. Акимов* (Евпатория) 22, 25; *Д. Алиевский* (Свердловск) 16; *В. Андрющенко* (Винница) 22, 23, 25; *К. Аношкин* (Саратов) 24, 25; *И. Аржанцев* (Киев) 22; *Ф. Арзыкулов* (с. Балыкчи Андижанской обл.) 20; *Д. Aроцкер* (Киев) 18; *А. Афонин* (Брест) 22, 23; *А. Бабкин* (Киев) 25, 28, 29; *З. Бандик* (Белград, СФРЮ) 17—19, 22; *С. Барон* (Целиноград) 22, 23; *Ю. Безгачева* (Красноярск) 22, 24; *А. Бейянку* (СРР) 17—19, 28; *И. Белозеров* (Серпухов) 16, 18, 20, 25; *В. Бергман* (Баку) 22; *Р. Бочев* (Враца, НРБ) 22—25, 28, 29; *Ф. Бразгун* (п. Гирей Краснодарского края) 22; *В. Бугайко* (Киев) 22; *Е. Бураковский* (Киев) 23; *К. Вербицкий* (Москва) 22, 24, 28—30; *А. Винничук* (Винница) 18, 20, 22—25; *А. Винцюк* (Киев) 16, 28; *А. Витяев* (Новосибирск) 16, 18—20, 22, 28; *В. Вологодский* (Омск) 16—20, 22—24, 28; *В. Волчков* (Шахтерск) 22—24; *Д. Вольпер* (Омск) 28, 29; *Я. Воробец* (Львов) 22, 23; *М. Выборнов* (Киев) 28; *С. Герасимов* (Харьков) 28; *М. Гольдшейд* (Челябинск) 16—20, 29; *А. Гороховский* (Киев) 22, 25, 28, 29; *Н. Григорьева* (Целиноград) 22; *Р. Гринив* (Львов) 18, 22, 23, 28, 29; *З. Джабиева* (с. Махмудавар АзССР) 23; *Т. Дидук* (Целиноград) 22, 23; *Н. Дохолян* (Тбилиси) 23; *С. Дронов* (Пущино) 25, 29; *А. Дубинский* (Москва) 16; *Г. Дятлов* (Новосибирск) 28; *П. Евсельев* (Майкоп) 22; *В. Завражний* (Фрунзе) 22; *А. Залеский* (Харьков) 28; *С. Зелик* (Краматорск) 22; *Е. Зельцер* (Киев) 16, 18, 23; *И. Зефиров* (Химки Московской обл.) 16, 18, 22, 23, 25; *В. Иванов* (Тбилиси) 22; *С. Измалков* (Харьков) 22—25, 28; *И. Исрафилов* (Баку) 23; *А. Калинин* (Саратов) 22; *В. Калошин*

(Харьков) 22—25, 28, 29; *В. Кальницкий* (Калининград) 18, 20; *Л. Каминштейн* (Киев) 22; *В. Каневский* (Киев) 29; *Л. Карахалина* (Целиноград) 22, 23; *А. Каргава* (Дидиналзи) 22; *А. Карачев* (Ангарск) 22, 23; *Т. Касумов* (Баку) 20; *О. Кирнасовский* (Винница) 22—25, 29; *С. Ковáценко* (Винница) 28; *О. Коврижкин* (Майкоп) 22; *А. Козачко* (Винница) 28; *В. Козуб* (Киев) 22; *И. Кокарев* (Ленинград) 29; *Г. Колесницкий* (Тбилиси) 22; *С. Комаров* (Киев) 28; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 22; *Д. Коростелкин* (Киев) 23; *А. Коршков* (Мозырь) 16, 20, 22—24; *Д. Косоня* (Белорецк) 22, 23, 25, 29; *П. Кострикин* (Караганда) 16, 18, 22, 23; *В. Крепец* (Новосибирск) 22; *А. Кулик* (Киев) 25, 28; *М. Ласку* (Залау, СРР) 24; *С. Лаусмаа* (Кохтла-Ярве) 16, 18, 23; *М. Лежин* (Горький) 23; *Е. Липовая* (Целиноград) 23; *Б. Лобынцев* (Ангарск) 16; *А. Лозан* (Борислав) 22, 23; *О. Лугуев* (Махачкала) 23; *В. Лысенков* (Белорецк) 22; *А. Магащук* (Москва) 28; *А. Макогон* (Киев) 22; *М. Малхасян* (Ереван) 24; *В. Манукян* (Ереван) 24; *А. Мельников* (Краснодар) 22, 23; *Ю. Мельников* (Киев) 25; *А. Мельцер* (Ленинград) 16, 18—20, 22—25, 28, 29; *Ю. Морозов* (Тбилиси) 22; *С. Морозов* (Заволжье) 22; *М. Мостов* (Одесса) 23; *Я. Мустафаев* (Баку) 16—20, 22—25, 29; *А. Назарян* (Тбилиси) 16, 19, 29; *С. Несторов* (Пловдив, НРБ) 16, 17; *Е. Никишина* (Целиноград) 22, 23; *О. Павлов* (Новосибирск) 22; *В. Павлунин* (Фрунзе) 22; *М. Панков* (Львов) 22, 23; *М. Пасуманский* (Ленинград) 22; *О. Пелевин* (Кострома) 17, 18, 23; *А. Пиковский* (Киев) 22—24, 29; *Д. Плешивцев* (Кокчетав) 22; *В. Полинов* (Магнитогорск) 16—18; *А. Полищук* (Москва) 28; *И. Полищук* (Москва) 22, 23; *В. Помаз* (Семеновка) 22; *А. Постников* (Москва) 22, 23, 29; *Д. Прокофьев* (п. Сертолово Ленинградской обл.) 16—19, 22—25, 29; *Ш. Рагимов* (Ульяновск) 22; *В. Рагулин* (Челябинск) 16—20, 22—24, 29; *Д. Румынин* (Красноярск) 29; *А. Сарычев* (Москва) 23; *А. Сибиряков* (Томск) 22, 23; *А. Сидоров* (Москва) 22—25, 28, 29; *Д. Симонян* (Рига) 22; *К. Сингалевич* (Ленинград) 22; *А. Синицкий* (Гатчина) 22—24, 28, 29; *Д. Синицкий* (Ленинград) 22, 24, 25; *В. Скворцов* (Черновцы) 18; *М. Скворцов* (п. Черноголовка Московской обл.) 22, 23; *В. Слитинский* (Киев) 22—25, 28, 29; *Л. Смирнова* (Киров) 22; *Л. Смирнова* (Киев) 29; *И. Соголов* (Черновцы) 20, 22, 23, 28; *И. Солтан* (Павлодар) 18, 22; *А. Строев* (Москва) 22; *А. Таджибаев* (Пскент) 22; *Ш. Талыбов* (п. Лагич АзССР) 22; *Г. Тер-Сааков* (Баку) 22, 28; *С. Тер-Сааков* (Баку) 28; *Р. Тетерук* (Киев) 25; *Д. Ткаченко* (Донецк) 23; *Ю. Томилов* (Киев) 28; *Д. Туляков* (Жданов) 16, 18—20; *Д. Усачева* (Саратов) 16; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 16—20, 22—24, 29; *Ф. Фот* (Томск) 16, 18—20. 22, 25; *Е. Хаустова* (Евпатория) 22; *М. Хачатрян* (с. Цаккар Арм. ССР) 24; *О. Христенко* (Караганда) 16, 28, 22, 23; *Д. Цуй* (Павлодар) 18; *С. Черенков* (Апрелевка) 16; *А. Шаповал* (Киев) 25; *Ф. Шейнерман* (Киев) 29; *И. Шехтман* (Киев) 22, 25; *Е. Шубин* (с. Романовка Красноярского края) 22; *К. Щербаков* (Арзамас) 29; *Я. Эфендиев* (Баку) 24; *А. Яврян* (Ереван) 22.

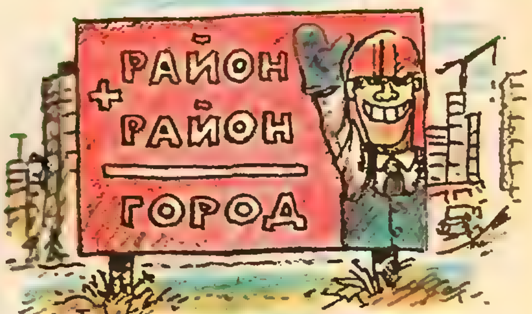
Физика

С. Абдулазизов (Махачкала) 32, 33; *В. Адамия* (Тула) 33, 35; *А. Антонов* (Москва) 32; *Ф. Асмандьярова* (Целиноград) 29, 32; *А. Бабкин* (Киев) 33, 35, 40; *А. Белецкий* (Канев) 33, 35, 40; *С. Белоусов* (Ленинград) 32, 33—36; *Д. Белянкин* (Москва) 35; *А. Билибин* (Боровичи) 40; *С. Бобровник* (Черновцы) 36; *С. Бобылев* (Березники) 33—36, 40; *И. Брик* (Донецк) 40; *С. Бурдаков* (Киев) 40; *М. Бурцев* (Алма-Ата) 33; *С. Бусленко* (Тула) 33, 35, 36; *С. Валюх* (Киев) 36; *И. Велиев* (Баку) 33; *К. Вербицкий* (Москва) 33, 36; *В. Вергелес* (Винница) 29; *Р. Вергелес* (Винница) 29; *А. Винцюк* (Киев) 33; *Д. Виткуп* (Киев) 40; *В. Вовк* (Барвенково) 33, 35; *П. Вольфбейн* (Киев) 32, 33, 36, 40; *В. Гениевский* (Алма-Ата) 35; *Р. Герасимов* (Ломоносов) 33, 36; *С. Гирис* (Омск) 40; *А. Гончаров* (Новосибирск) 33, 36; *М. Гончаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 35, 40; *Г. Горбель* (Арзамас) 32, 35, 40; *Д. Горелик* (Электросталь) 35; *Ю. Гордиенко* (Винница) 32; *Г. Гороховский* (Киев) 35, 36; *П. Горьков* (п. Черноголовка Московской обл.) 36; *А. Гришин* (Кемерово) 35, 40; *Т. Гумерова* (Киев) 35; *Б. Гуревич* (Саратов) 29; *С. Гурский* (Новый Роздол) 40; *П. Гусак* (Киев) 33, 35; *С. Гусев* (Лобня) 29, 33; *С. Дворник* (п. Сарыозек Талды-Курганской обл.) 33, 35, 40; *Е. Демлер* (Новосибирск) 29, 33, 35, 36, 40; *К. Демьяненко* (Киев) 33, 35; *Д. Драчев* (Киев) 35; *С. Дронов* (Пущино) 35, 40; *П. Дудин* (Москва) 35; *Г. Дятлов* (Новосибирск) 29; *А. Езерский* (Минск) 33, 35; *В. Елагин* (Донецк) 40; *А. Елжов* (Дубна) 33; *А. Ельяшевич* (Минск) 33, 35; *С. Еремин* (Пенза) 35; *М. Етонов* (Улан-Удэ) 36; *А. Жарков* (Канев) 35; *Д. Житний* (Киев) 36; *В. Захаров* (Кемерово) 40; *Д. Звонов* (Челябинск) 33, 35; *Д. и С. Зеленские* (Семипалатинск) 33, 40; *Е. Зельцер* (Киев) 33, 40; *А. Зискинд* (Винница) 29, 33—36, 40; *К. Зуев* (Вологда) 33, 36; *В. Иванов* (Москва) 33; *И. Илиев* (Плевен, НРБ) 32; *К. Ильенко* (Харьков) 35; *А. Калашников* (Киев) 32; *В. Каменькович* (Харьков) 35; *В. Камчатный* (Киев) 33, 35, 36, 40; *С. Канатов* (Кузнецовск) 32; *А. Капустин* (Москва) 36, 40; *И. Карп* (Киев) 33; *А. Клочанов* (Алма-Ата) 33, 35, 40; *Р. Кобзев* (Канев) 33, 35, 40; *С. Комаров* (Киев) 35, 36; *Я. Коренной* (Новокузнецк) 40; *Е. Корсунский* (Харьков) 35, 36; *А. Кошеков* (Алма-Ата) 40; *П. Кравченко* (Новокузнецк) 33, 35; *С. Кравченко* (Ростов-на-Дону) 33, 35; *Ю. Кравченко* (Москва) 35, 40; *К. Краснов* (Киса) 33—36, 40; *С. Курдюков* (Москва) 32; *А. Курило* (Целиноград) 40; *А. Лебедев* (Киев) 35; *В. Лебё* (Винница) 29; *Ю. Левин* (Харьков) 35, 36; *В. Лендерман* (Киев) 33, 40; *Д. Литвинов* (Донецк) 40; *И. Лохтин* (Москва) 32; *С. Луганский* (Москва) 35; *О. Лугуев* (Махачкала) 35; *Г. Лысов-Чайников* (Донецк) 40; *А. Мазуренко* (Минск) 33, 35; *А. Майков* (Старый Оскол) 33, 40; *И. Максутов* (Тула) 35; *Р. Малков* (Саратов) 33, 36; *К. Малуреану* (Яссы, СРР) 40; *Ю. Малькин* (Целиноград) 40; *А. Мамаев* (Заволжье) 33, 40; *Н. Мамедов* (с. Аркиван АзССР) 32; *Д. Маркель* (Свердловск) 33; *А. Мацко* (Киев) 35, 36, 40; *Р. Меладзе* (Тбилиси) 35; *О. Мельников* (Красноярск) 35; *А. Мина* (Киев) 33; *Н. Михайловский* (Красноярск) 33, 35, 36, 40; *И. Мишенев* (Минск) 35; *А. Мищенко* (Киев) 29, 32; *В. Молодченко* (Одесса) 35, 36; *В. Мороз* (Ленинград) 33—36, 40; *С. Мороз* (Киев) 33, 36; *М. Мостов* (Одесса) 35, 40; *А. Муравьев* (Рига) 29; *А. Мусияченко* (Киев) 40; *В. Мытько* (Минск) 35, 40; *А. Никитин* (Тихвин) 33;

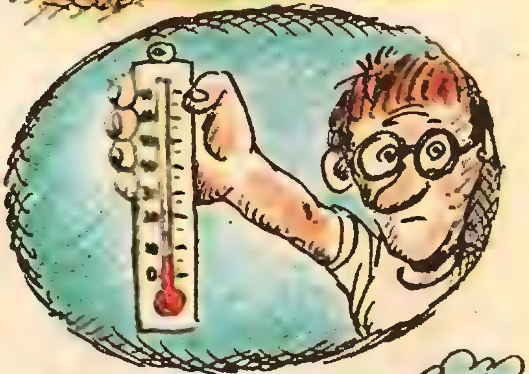
(Окончание см на с 44)

„Квант" для младших школьников.

Задачи



1. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.)



2. Как-то раз я уронил термометр, которым обычно измеряю температуру фотореактивов (см. рисунок). Термометр не разбился, но столбик спирта «разорвался». Как починить термометр?

БЕРЕГИТЕ ХЛЕ

3. Коля купил в буфете 3 пакетика ирисок. Витя — 2 пакетика. Когда пришел в буфет Алеша, ирисок уже не было. Друзья разделили купленные ириски поровну. Выяснилось, что Алеша должен друзьям 25 копеек. Сколько стоил пакетик ирисок и сколько Алеша должен Коле, а сколько — Вите?

4. Городские часы отбивают каждый час положенное число раз, и кроме того бьют один раз в половину каждого часа. Анатолий Павлович любит читать книгу, сидя в скверике около курантов. Однажды за время, пока он читал, часы принимались бить пять раз; а всего он насчитал 11 ударов. С последним ударом часов Анатолий Павлович встал и пошел домой. В какое это было время?

5. Может ли какая-нибудь степень двойки содержать в своей записи поровну нулей, единиц, двоек, ..., девяток?

Эти задачи нам предложили ученик 3-го класса школы № 63 г. Омска *Паша Радзвиловский*, *И. И. Мазин*, *А. П. Савин*, *С. В. Дворянинов*, *Г. А. Гальперин*

Калейдоскоп „Кванта"

Вопросы и задачи

1. Как объяснить явление, выражаемое словами «дым тает в воздухе»?

2. Почему сливки на молоке отстаиваются быстрее в холодном помещении?

3. Отчего броуновское движение не наблюдается для чаинок в стакане?

4. Почему в горячей воде сахар растворяется скорее, чем в холодной?

5. Скорости теплового движения многих молекул при комнатной температуре близки к скорости пули. Почему же запаху духов требуется заметное время, чтобы распространиться по комнате?

6. Почему шар, выточенный из сырого дерева и покрытый лаком, сохраняется целым, в то время как точно такой же шар, не покрытый лаком, растрескивается?

Любопытно

...в 1845 году в Королевское общество (Академия наук Англии) была представлена работа некоего Ватерстона, в которой показывалось, что давление [illegible]

[illegible] на стенки сосуда [illegible]

> *...теплота состоит во внутреннем движении материи...*
>
> *М. В. Ломоносов. «Размышления о причине теплоты и холода»*

> *Движение молекул ускользает от нашего непосредственного восприятия, как легкая зыбь на поверхности моря для наблюдателя, находящегося на очень далеком расстоянии.*
>
> *Жан Перрен. «Атомы»*

Вопросы и задачи

7. На высоте нескольких сотен километров над Землей молекулы атмосферы обладают скоростями, которым соответствуют температуры в несколько тысяч градусов. Почему же не плавятся летающие на таких высотах искусственные спутники Земли?

8. Почему у Луны нет атмосферы?

9. Почему разбитый стакан нельзя собрать, соединив осколки, хотя между молекулами существуют силы сцепления?

10. Отчего трудно отвинтить гайку, долгое время находящуюся в туго завинченном состоянии, несмотря на то, что болт и гайка сделаны из нержавеющего металла?

11. За счет какой энергии возможны капиллярные явления?

12. Подумайте, как изменилось бы давление в сосуде с [illegible] газом, если бы внезапно исчезли

за на стенки сосуда можно объяснить ударами атомов. Идею о том, что упругие свойства газа можно свести к классической механике атомов, не восприняли всерьез, и работа Ватерстона была отклонена членами ученого общества. Лишь много позже ее обнаружил в архиве английский физик Рэлей и опубликовал в 1892 году в журнале «Философские сообщения Королевского общества».

То, что было сделано одним человеком и осталось незамеченным, было открыто впоследствии лишь в результате работы нескольких человек, а окончательная формула, связывающая давление газа со скоростью молекул, была написана Максвеллом в 1859 году.

●

...в конце прошлого столетия Людвигу Больцману приходилось столь часто отражать постоянные нападки со стороны многих противников молекулярно-кинетической теории, что одну из своих статей он заключил, перефразируя Галилея, словами «И все-таки они движутся», имея в виду, конечно, молекулы.

А так ли хорошо знаете вы,

КАК ДВИЖУТСЯ МОЛЕКУЛЫ

?

Свое начало молекулярно-кинетическая теория вещества, изучаемая в школе, берет в глубокой древности — с атомистической гипотезы. Пройдя долгий и тернистый путь, эта теория приобрела законченный вид в конце XIX — начале XX века благодаря трудам выдающихся ученых — Р. Клаузиуса, Дж. Максвелла, Л. Больцмана, А. Эйнштейна, Я. И. Френкеля. Микроскопический, или молекулярный, подход к исследованию тепловых явлений оказался чрезвычайно плодотворным и позволил нарисовать впечатляющую по своим масштабам картину процессов, происходящих в природе и в созданных человеком машинах. В этом выпуске «Калейдоскопа» предлагаем вам разобраться с некоторыми вопросами на основе представлений молекулярно-кинетической теории.

если бы внезапно исчезли силы притяжения между его молекулами?

●

Пробейте в стенке пустой консервной банки на небольшом расстоянии друг от друга три отверстия диаметром около 1 мм каждое. Налейте в банку воды и «сдавите» вытекающие из отверстий струйки пальцами, проведя ими по стенке банки. Что произойдет со струями? Почему?

●

Что читать в «Кванте»

о движении молекул (публикации последних лет)

1. «Простой способ определения размеров молекул» — 1983, № 9, с. 29;
2. «Давление идеального газа» — 1983, № 10, с. 35;
3. «Об агрегатных состояниях вещества» — 1984, № 9, с. 20;
4. «Хаотичность молекулярного движения и тепловые машины» — 1985, № 9, с. 24;
5. «Осмос» — 1985, № 11;
6. «О явлениях переноса» — 1986, № 9, с. 27;
7. «Ван-дер-Ваальс и его уравнение» — 1987, № 7, с. 34.

1987
9

УГАДАЙ ЧИСЛО

Вы играли в игру «Угадай число»? Даже не слышали? Это очень простая игра. Скажем, я загадываю натуральное число, меньшее 100, записываю его на бумаге (чтобы не было возможности сжульничать), а вы пытаетесь его отгадать, задавая вопросы, на которые можно отвечать лишь «да» или «нет». Потом вы загадываете число, а я пытаюсь его отгадать. Кто угадает за меньшее число вопросов — тот выиграл.

За сколько вопросов вы беретесь угадать мое число? Не знаете? Говорите, что, может быть, сразу, а может быть, понадобится сто вопросов? Я берусь угадать ваше число всего за семь вопросов. Как? А вот, например, как. Пусть вы загадали число. Я спрашиваю: «Оно меньще, чем 64?» — «Да». — «Меньше, чем 32?» — «Да». — «Меньше, чем 16?». — «Да». — «Меньше, чем 8?» — «Нет». — «Меньше, чем 12?» — «Нет». — «Меньше, чем 14?» — «Да». — «Меньше, чем 13?» — «Нет». — «Задумано число 13».

Понятно? Я делю набор возможных чисел пополам, потом оставшуюся половину снова пополам и т. д., пока в оставшейся части не окажется всего одно число. Почему я начал с числа 64, а не с числа 50? Об этом чуть позже; можно было начинать и с числа 50. Нетрудно проверить, что для чисел, меньших 64, достаточно уже шести вопросов, а за семь вопросов можно угадать любое число, не превосходящее 128.

А вот с помощью трех таблиц *А*, *Б*, *В* с цветными цифрами я берусь угадать задуманное число, меньшее 64, всего за три вопроса. Первый вопрос: «Какой цвет имеет ваше число в таблице *А*?» Второй вопрос: «Какой цвет имеет это число в таблице *Б*?» Разумеется, третий вопрос — о его цвете в таблице *В*. Получив ваши от-

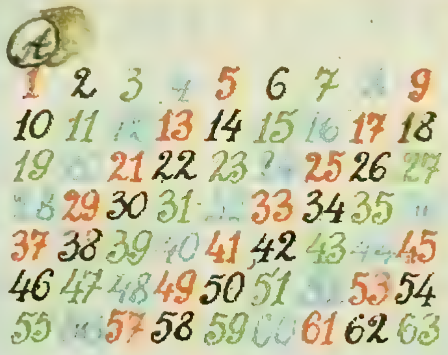
веты, я заглядываю в такую вот шпаргалку:

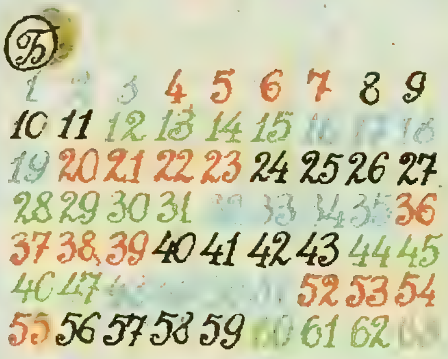
	синий	красный	черный	зеленый
1	0	1	2	3
2	0	4	8	12
3	0	16	32	48

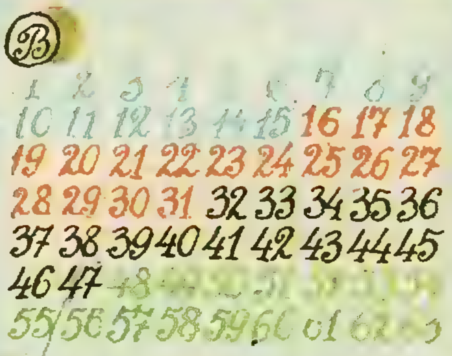
Если вы ответили на вопросы скажем так: «Синий, зеленый, красный», я складываю три числа 0, 12, 16, стоящих на пересечении столбцов и строк, соответствующих названным цветам в соответствующих таблицах. Проверьте, что число 28 действительно имеет названные цвета в таблицах (и только оно).

А теперь откроем секрет этого фокуса. С раннего детства мы привыкли записывать числа в десятичной системе счисления. Например, последовательность цифр 1987 мы расшифровываем как $1\cdot10^3+9\cdot10^2+8\cdot10^1+7\cdot10^0$. Счет ведется десятками, десять единиц одного разряда является единицей следующего разряда. Если же за основание системы счисления взять число 4, а не 10, понадобится всего 4 цифры: 0, 1, 2 и 3. Хотя почему именно цифры? Можно, например, использовать цветные кружочки: (с) — для нуля, (к) — для 1, (ч) — для 2 и (з) — для 3. Число 28 запишется в четверичной системе счисления как $1\cdot4^2+3\cdot4^1+0\cdot4^0=130_4$ (четверка снизу числа 130 означает, что запись сделана в *четверичной* системе счисления). А в нашей цветовой записи оно запишется, как (к)(з)(с).

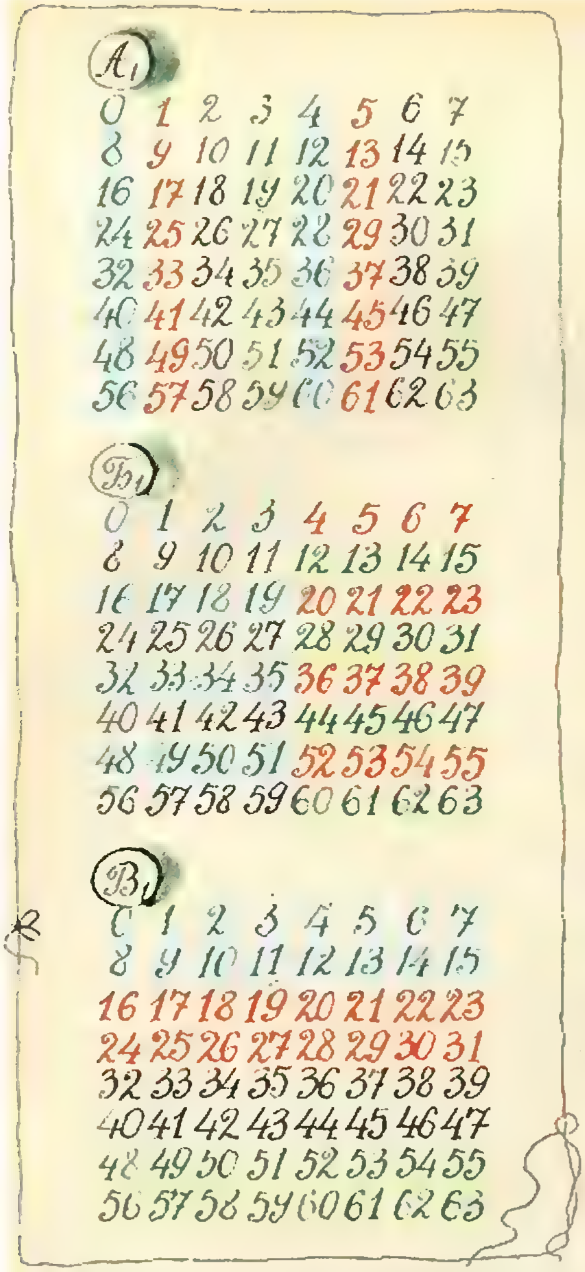
Если прочесть эту запись «справа налево», получится «синий — зеленый — красный». Это сочетание цветов мы и называли, когда, задумав число 28, сообщали его цвета в таблицах *А*, *Б*, *В*!







Взглянем еще раз на наши таблицы. В таблице *А* цвета чисел периодически чередуются через четыре. Таким образом, у синих чисел в четверичной записи стоит на конце число 0, у красных — 1, у черных — 2, у зеленых — 3. Цвета чисел в таблице *Б* точно таким способом определяют вторую цифру в четверичной записи числа, а в таблице *В* — третью цифру. То же самое говорит и «шпаргалка», с помощью которой мы определяли число по его цветам в таблицах. (Мы поместили числа в таблицы *А*, *Б*, *В* размером 7×9 для того, чтобы вас немного запутать: если использовать



таблицы A_1, $Б_1$, $В_1$ размером 8×8, систему можно обнаружить гораздо быстрее.) Таблицы, составленные подобным образом, но использующие 3 цвета, будут соответствовать представлению числа в *троичной* системе счисления; использующие 2 цвета — в *двоичной*. Как запишется в двоичной системе счисления число 100? Это

$$64+32+4=1\cdot2^6+1\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0,$$

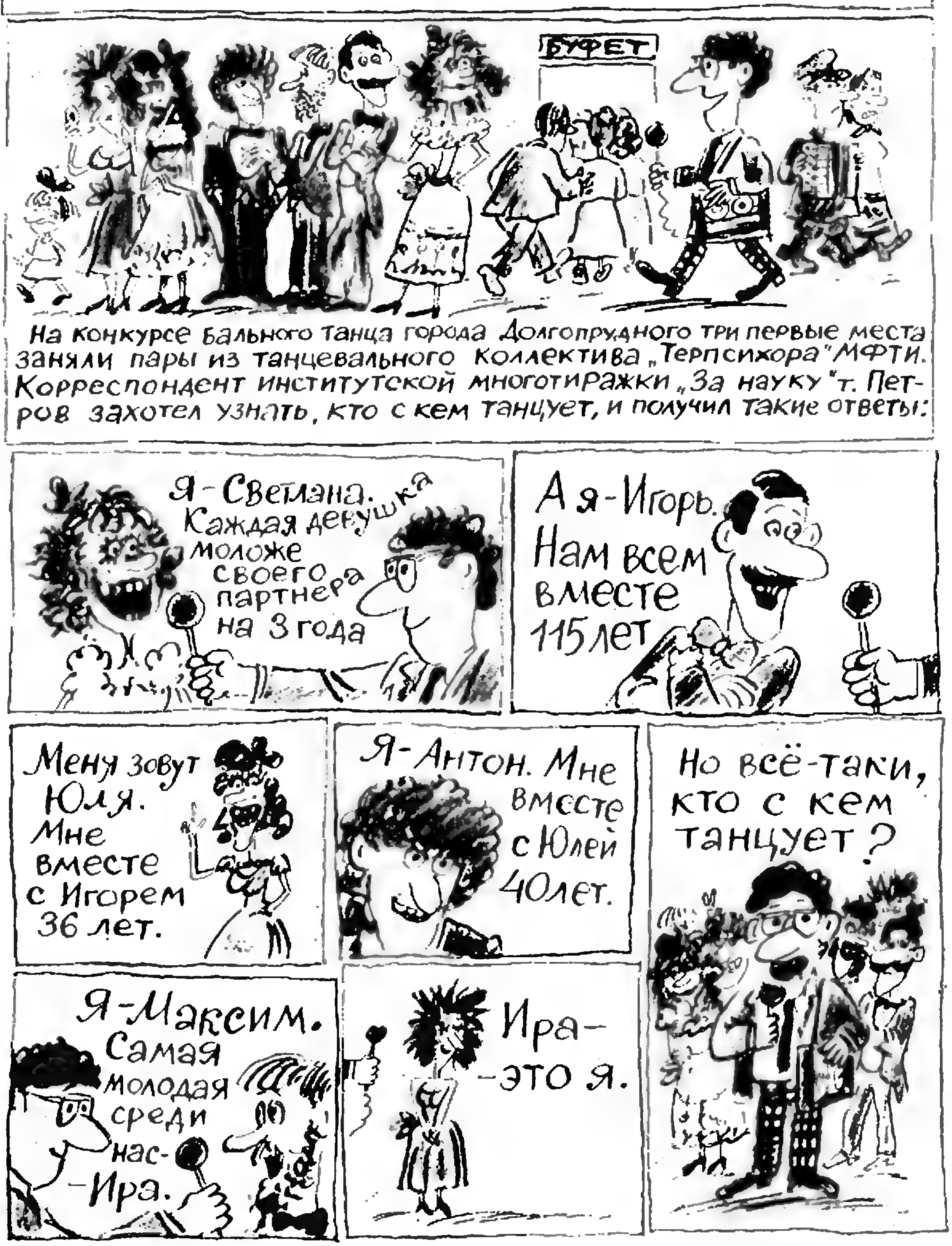
т. е. 1100100_2. Мы видим, что числа, меньшие ста (даже меньшие 128), записываются в двоичной системе счисления не более, чем семью знаками. Вспомните, что я брался угадать число меньшее 100, за семь вопросов! Для числа 13 получилась такая последовательность ответов: да—да—да—нет—нет—да—нет. Запишем число 13 в двоичной системе счисления и добавим впереди три нуля: 0001101_2. Какая связь между последовательностью ответов «да—нет» и полученными цифрами? Ну, конечно же, совершенно прямая: ответу «да» соответствует цифра 0, а ответу «нет» — цифра 1.

Таким образом, вместо моих вопросов «больше—меньше» можно было бы предъявить семь таблиц с синими и красными цифрами. Не знаю, как вам, а мне метод деления пополам нравится больше. Между прочим, он довольно часто используется на практике. Скажем, мне нужно найти в задачнике задачу № 1372. Я раскрываю его посредине и смотрю какой-нибудь номер задачи на этой странице. Если он больше, чем 1372, я делю пополам первую половину задачника и смотрю на номера там; а если меньше, то проделываю эту процедуру со второй половиной. Количество страниц, которые могут содержать эту задачу, каждый раз вдвое уменьшается, и я довольно быстро нахожу то, что искал. Этот метод носит название «дихотомия» от греческого «диха» — на две части — и «тома» — сечение.

Принцип дихотомии заложен и в олимпийской системе выявления чемпиона: сначала все участники разбиваются на пары, и в каждой паре определяется сильнейший, дальше побежденные — половина участников — исключаются из соревнований, а победители вновь разбиваются на пары и т. д. Пока не останется всего одна пара, во встрече которой и определяется чемпион. Эта система совершенна, если количество участников является степенью числа 2; тогда в каждом «круге соревнований» заняты все участники, а если в некотором круге число участников нечетно? Тогда одна из команд переходит в следующий круг без соревнования с другим участником. Любопытно, что если число участников на единицу больше степени двойки, то описанная ситуация будет возникать в каждом круге соревнований (например, при 9 или 17 участниках), и нужно следить, чтобы одна и та же команда не оказывалась «лишней» в каждом круге и таким образом не вышла бы в финал, не сыграв ни одной игры.

(Окончание см. на с. 50)

Кто с кем танцует?

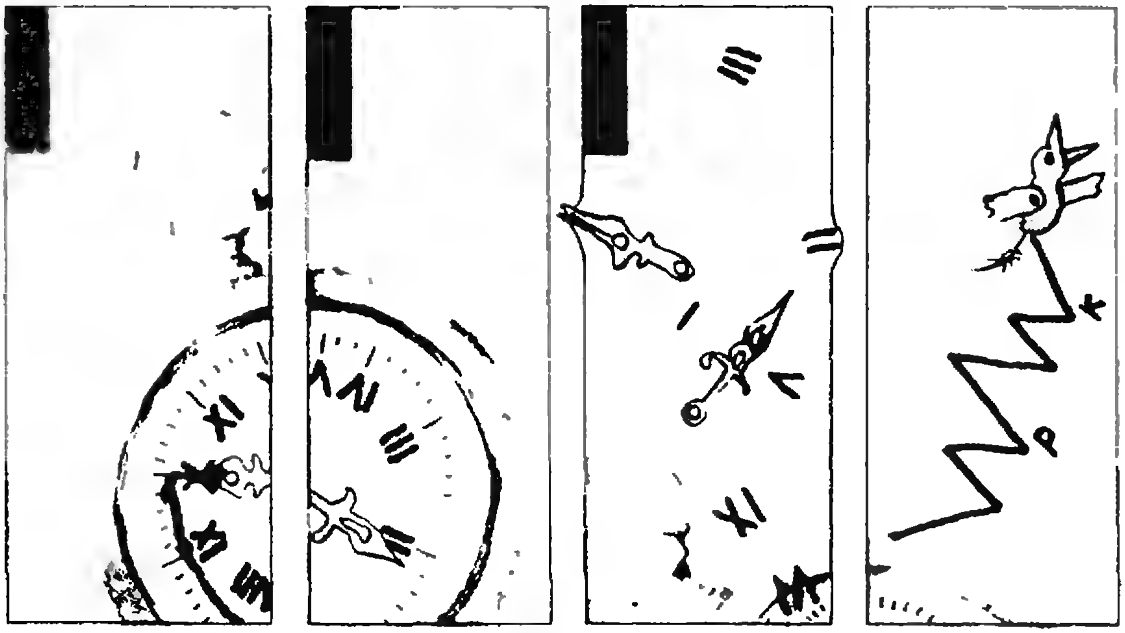

БУФЕТ
На конкурсе бального танца города Долгопрудного три первые места заняли пары из танцевального коллектива „Терпсихора" МФТИ. Корреспондент институтской многотиражки „За науку" т. Петров захотел узнать, кто с кем танцует, и получил такие ответы:
Я - Светлана. Каждая девушка моложе своего партнера на 3 года
А я - Игорь. Нам всем вместе 115 лет.
Меня зовут Юля. Мне вместе с Игорем 36 лет.
Я - Антон. Мне вместе с Юлей 40 лет.
Но всё-таки, кто с кем танцует?
Я - Максим. Самая молодая среди нас - Ира.
Ира - это я.

Я обращаюсь ко всем, кто обучается математике, элементарной или высшей, и заинтересован в овладении ею, и говорю: «Конечно, будем учиться доказывать, но будем также учиться догадываться».

Д. Пойа

Математике дóлжно учить в школе ещё с тою целью, чтобы познания, здесь приобретаемые, были достаточны для обыкновенных потребностей в жизни.

Н. И. Лобачевский



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемые ниже заметки «Легко ли описывать движение?» и «Вокруг одной задачи» предназначены восьмиклассникам, заметка «Давление газа в сосуде» — девятиклассникам, «Гармонические колебания и равновесие» — десятиклассникам.

Легко ли описывать движение?

Многие понятия кинематики — раздела механики, посвященного изучению движений тел без выяснения их причин,— кажутся нам очень простыми, даже элементарными. Однако потребовались века, чтобы наука выработала эффективные методы описания движений. Остановимся несколько подробнее на истории формирования представлений о двух кинематических величинах — о скорости и ускорении.

Движение любого тела связано с изменением его положения в пространстве с течением времени. Эта привычная для нас мысль не столь уж однозначна. Действительно, что, например, следует принять за независимую переменную при описании движения — путь или время? Ученые начала XVII века не были единодушны в ответе на этот вопрос. И если это различие во взглядах не приводило к серьезным расхождениям при исследовании равномерного прямолинейного движения, то в случае неравномерного движения оно оказывалось весьма существенным. Попробуйте, скажем, установить закон движения, предположив пропорциональность скорости пройденному пути ($v \sim s$), и вы убедитесь, что это гораздо более трудная задача, чем описание равноускоренного движения, при котором скорость пропорциональна времени ($v \sim t$).

Заслуга систематического рассмотрения задач кинематики прямолинейного равноускоренного движения принадлежит Г. Галилею (1564—1642). Экспериментально изучив свободное падение тел и их движение по наклонной плоскости с малым трением, Галилей сформулировал закон равноускоренного движеиия, который звучал так: «Если тело, выйдя из состояния покоя, падает равномерно-ускоренно, то расстояния, проходимые им за определенные промежутки времени, относятся между собою как квадраты времен».

Мысль Галилея о том, что свободное падение происходит равноускоренно, воспринималась современниками с трудом. Один из героев книги Галилея «Беседы и математические доказательства» приводит против нее такое, представляющееся ему убедительным, возражение: «Если тяжелое падающее тело выходит из состояния покоя таким образом, что скорость его увеличивается пропорционально времени, истекшему от начала движения, то отсюда следует, что тело должно двигаться с любой степенью скорости или любой большой степенью медленности, выходя из состояния покоя... — явление, которое весьма трудно себе представить, когда наши чувства показывают, что тяжелое падающее тело сразу приобретает большую скорость». Кажущееся противоречие «показаний чувств» и теории Галилей снимает с помощью остроумного опыта (подумайте — какого).

Галилею же принадлежит и идея о представлении сложного движения как результата сложения относительно простых движений. «Пробным камнем» для ее проверки послужила задача о движении тела, брошенного под углом к горизонту, которая (будучи важной в военном отношении) издавна привлекала внимание ученых. Еще Леонардо да Винчи (1452—1519) в целом правильно представлял вид траектории такого тела (рис. 1). Однако и во времена Галилея в трактатах по военному делу можно было встретить ошибочное описание траектории снаряда как совокупности двух отрезков прямых и части окружности (рис. 2). Доказетельство Галилеем теоремы о том, что «при сложном движении, слагающемся из равномерного горизонтального и естественно-ускоренного движений, бросаемое тело описывает полупараболу», представляло крупное научное достижение.

Следует отметить, что Галилей в своих рассуждениях никогда не пользовался понятием «скорость» и соответствующим выражением $v=s/t$. Все его теоремы посвящены анализу отношений однородных (т. е. имеющих одинаковую размерность) величин. (Вспомним, например, формулировку утверждения, касающегося свободного падения тела.) Такой способ изложения определяется традицией, берущей начало еще в эпохе Античности. Интересно, что и И. Ньютон (1643—1727) в своих знаменитых «Началах» не пользовался выражением $v=s/t$. Первым, кто осмелился ввести скорость таким образом, был Л. Эйлер (1707—1783). В сочинении «Теория движения твердых тел» (1765 г.) он дал ей такое определение: «При равномерном движении отношение путей к промежуткам времени, в течение которых они прохо-

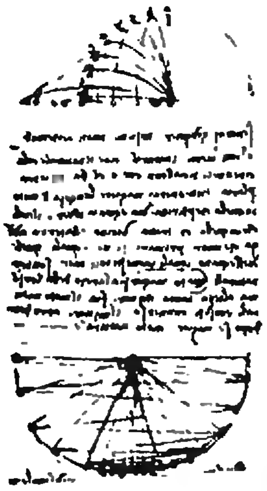


Рис. 1. Семейство баллистических траекторий, каким его представлял Леонардо да Винчи (рисунок из его записных книжек). Общий вид этих траекторий изображен верно, однако зависимость дальности полета от угла бросания показана неправильно.

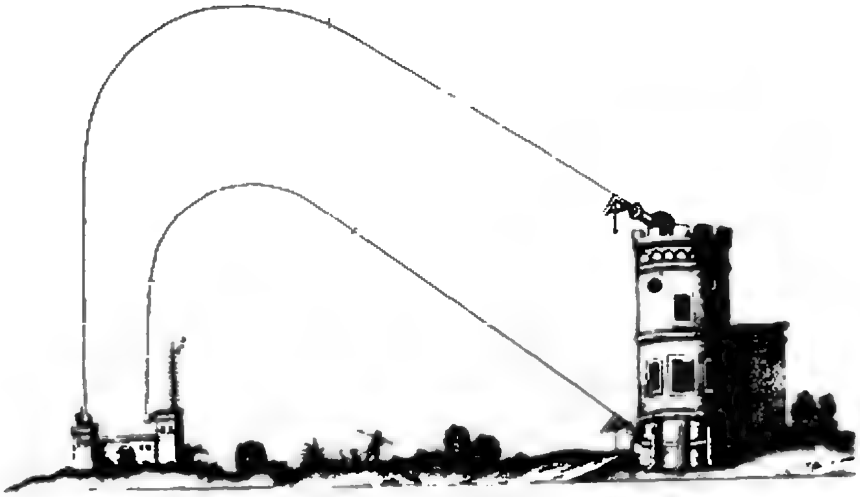


Рис. 2. Схема из военного трактата XVII века. Вид изображенной здесь траектории снаряда гораздо сильнее отличается от реальной, чем на рисунке Леонардо да Винчи.

дятся, называется быстротой или скоростью. ⟨...⟩ Итак, если при равномерном движении за время, равное t, проходится путь, равный s, то скорость равна s/t. Если скорость обозначить буквой v, то $v=s/t$». Как видите, даже обозначения переменных, использованные Эйлером, сохранились до наших дней.

Но, может быть, мы преувеличиваем значимость шага, сделанного Эйлером? Скорее всего нет. Насколько необычным для XVIII века был его подход к определению физической величины, свидетельствуют пояснения, которые Эйлер счел необходимым сделать далее: «Здесь может, пожалуй, возникнуть сомнение по поводу того, каким образом можно делить путь на время, так как ведь это — величины разнородные, и, следовательно, невозможно указать, сколько раз промежуток времени, например, в 10 минут, содержится в пути длиной, например, в 10 футов. ⟨...⟩ Если для измерения путей мы изберем определенную длину в качестве единицы и точно так же для времени изберем в качестве единицы определенный промежуток времени и если мы будем постоянно пользоваться этой мерой, то все пути и времена выразятся в отвлеченных числах, и тогда для деления первых на вторые не будет никаких препятствий». Вот какие простые вещи приходилось разъяснять в фундаментальных сочинениях по механике в середине XVIII века.

Но и Эйлера нельзя считать в полной мере автором современного определения скорости — он не пользовался понятием скорости как вектора, а отдельно определял модуль скорости и ее направление. Представление о скорости как о направленном отрезке вошло в физику примерно через сто лет после публикации сочинения Эйлера, когда в математике были разработаны основы векторного исчисления.

После рассказа о длинной и сложной истории понятия скорости уже не столь удивительным представляется тот факт, что понятие ускорения вошло в науку еще позже. Впервые физическую величину «ускорение» ввел в своих лекциях по механике французский математик и инженер Ж. Понселе (1788—1867) лишь в 1841 году. Это не значит, однако, что в сочинениях авторов XVIII и даже XVII веков не встречается термин «ускорение». Им пользовались, но подразумевали не физическую величину, а процесс изменения скорости. (Отметим попутно, что в физике можно найти и другие примеры такого смешанного словоупотребления — вспомним хотя бы термины «перемещение», «давление», «сопротивление».) Правда, Эйлер уже рассматривал вторую производную пути по времени, имеющую с современной точки зрения смысл касательного ускорения, но он интерпретировал ее по-другому. Эйлер писал, что эта производная «выражает собою тот отрезочек пути, на который тельце перемещается сверх того расстояния, которое пройдено им в силу бывшего у него раньше движения».

Широкое использование ускорения в работах по механике началось лишь после выхода в свет (1851 г.) сочинения «Элементы механики» француза А. Резаля, ученика Понселе.

Итак, история основных понятий кинематики показывает, что выработка научного языка для описания движения потребовала преодоления многих трудностей принципиального характера. И то, что мы теперь с легкостью пользуемся этим языком, лишний раз подчеркивает заслуги ученых прошлого.

С. Р. Филонович

Вокруг одной задачи

На одном из занятий кружка по решению задач наш учитель предложил такую задачу:

За пятую секунду равнозамедленного движения тело проходит 5 см и останавливается. Какой путь тело прошло за третью секунду?

Никто из нас не смог к ней подступиться. Тогда учитель сказал: «Сегодняшнее занятие кружка мы посвятим решению этой задачи, хотя она решается... устно. Для этого лишь нужно знать... Впрочем, решите сначала другую задачу». Вот ее условие:

За последние полсекунды свободно падающее тело проходит путь, равный 30 м. Найдите скорость тела в момент приземления.

Эту задачу мы решили легко:

$$s=v_0t+\frac{gt^2}{2},\ v_t=v_0+gt,$$

откуда

$$v_t=\frac{s+gt^2/2}{t}=$$

$$=\frac{30\text{ м}+(10\text{ м/с}^2)(0{,}5\text{ с})^2/2}{0{,}5\text{ с}}=62{,}5\text{ м/с},$$

но связи с предыдущей задачей не обнаружили. Однако как только учитель записал конечную формулу иначе:

$$s=v_tt-\frac{gt^2}{2},$$

мы сразу же увидели обратимость движения. (Это как в кино, когда снятый эпизод прокручивают в обратном порядке.)

Теперь нашу задачу можно сформулировать так:

За первую секунду равноускоренного движения без начальной скорости тело проходит 5 см. Найдите путь за третью секунду.

Мы быстро нашли несколько путей решения. Учитель же остановился на одном из них, в котором было получено выражение для пути, пройденного за любую секунду:

$$s_n=(2n-1)\frac{a\tau^2}{2},$$

где $\tau=1$ с, n — номер секунды. Обратив наше внимание на множитель $(2n-1)$ — рекуррентную формулу нечетного числа, учитель записал:

$$s_1:s_2:\ldots:s_n=1:3:\ldots:(2n-1).$$

И тогда всем стало ясно, что нашу задачу действительно можно было решить устно:

$$s_3=5s_1=25\text{ см}.$$

В. А. Бодик

Давление газа в сосуде

Зависит ли давление газа на стенку сосуда от материала стенки и ее температуры? Попробуем ответить на этот вопрос.

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеального газа в учебнике «Физика 9» (§ 7) предполагается, что стенка абсолютно гладкая и столкновения молекул со стенкой происходят по закону абсолютно упругого удара. Другими словами, кинетическая энергия молекулы при ударе не меняется, и угол падения молекулы равен углу отражения. Является ли это предположение оправданным и необходимым?

Коротко можно сказать так: предположение оправдано, но не необходимо.

На первый взгляд кажется, что считать стенку абсолютно гладкой ни в коем случае нельзя — стенка сама состоит из молекул и, значит, гладкой быть не может. Из-за этого угол падения не может при любом соударении равняться углу отражения. Кроме того, молекулы стенки совершают хаотические колебания около положений равновесия (участвуют в беспорядочном тепловом движении). Поэтому при столкновении с какой-либо молекулой стенки молекула газа может передать часть энергии стенке или, наоборот, увеличить свою кинетическую энергию за счет стенки.

Тем не менее предположение об абсолютно упругом характере соударения молекулы газа со стенкой оправдано. Дело в том, что при вычислении давления в конечном счете важны средние значения соответствующих величин. При условии теплового равновесия между газом и стенкой сосуда кинетическая энергия молекул газа в среднем остается неизменной, т. е. соударения со стенкой не меняют среднюю энергию молекул газа. Если бы это было не так, то тепловое равновесие самопроизвольно нарушалось бы. А это невозможно согласно второму закону термодинамики. Также не может быть преимущественного отражения молекул в каком-либо определенном направлении — иначе сосуд с газом начал бы двигаться, что противоречит закону сохранения импульса. Значит, среднее число молекул, падающих на стенку под некоторым углом, равно среднему числу молекул, отлетающих от стенки под таким же углом. Предположение о зеркальном отражении от стенки каждой отдельной молекулы соответствует этому условию.

Таким образом, считая соударения молекул газа со стенкой упругими, мы получаем для среднего давления такой же результат, как и без этого предположения. Значит, давление газа не зависит от качества обработки стенки (ее гладкости). Однако предположение об абсолютно упругом характере удара сильно упрощает вычисление давления газа, и поэтому оно оправдано.

А зависит ли давление газа на стенку от ее температуры? На первый взгляд — должно зависеть. Если, например, нет теплового равновесия, то молекулы от холодной стенки должны отскакивать с меньшей энергией, чем от горячей.

Однако, даже если одну стенку поддерживать холодной с помощью холодильной установки, то давление на нее все равно не может быть меньше, чем давление на противоположную горячую стенку. Ведь тогда сосуд начал бы двигаться ускоренно без внешних сил, а это противоречит законам механики: освободив закрепленный сосуд со стенками различной температуры, мы не вызовем его смещения. Дело здесь в том, что при данном неравновесном состоянии газа в сосуде концентрация молекул у холодной стенки больше, чем у горячей. Уменьшение кинетической энергии молекул у холодной стенки компенсируется увеличением концентрации молекул и наоборот. В результате давление на холодную и горячую стенки оказывается одним и тем же.

Рассмотрим еще один вариант опыта. Охладим очень быстро одну из стенок. В первый момент давление на нее уменьшится, и сосуд немного сдвинется с места; затем давления выравняются, и сосуд остановится*). Но при этом движении центр масс системы останется на месте из-за того, что плотность газа у холодной стенки станет чуть больше, чем у горячей.

Следует отметить, что на самом деле давление не остается строго фиксированной величиной. Оно испытывает флуктуации, и поэтому сосуд слегка «дрожит» на месте. Но амплитуда дрожания сосуда крайне мала.

Итак, окончательно мы пришли к выводу, что давление газа на стенки в сосуде не зависит ни от качества обработки стенок, ни от их температуры.

Г. Я. Мякишев

Гармонические колебания и равновесие

Что мы изучаем, рассматривая колебания грузика, подвешенного на нитке или на пружинке? Два конкретных движения или нечто большее?

Оказывается, за «элементарными» движениями грузика стоит огромный, поистине неисчерпаемый мир колебаний. В природе колеблется все. Колеблются электроны внутри атома, атомы внутри молекулы, молекулы внутри кристалла. Колеблются дома, мосты и любые другие механические конструкции. Колеблется количество щук и карасей в водоемах, волков и зайцев в лесах. И так можно было бы продолжать до бесконечности.

Каждое колебание характеризуется своей частотой ω (или периодом $T=2\pi/\omega$), и частота эта является важнейшей характеристикой любой колеблющейся системы. Так, например, частоты колебаний атомов в кристаллах определяют физические свойства кристаллов: их теплоемкость, теплопроводность, электрическое сопротивление и т. д. Частоты колебаний механических конструкций связаны с их прочностью и устойчивостью по отношению ко всякого рода механическим воздействиям. Некоторые электрические системы (генераторы, антенны и т. п.), в сущности, специально создаются для того, чтобы получить колебания определенных, нужных нам частот. Понятно поэтому, как важно уметь находить частоты колебаний, возникающих в различных системах. Но прежде чем рассказать, как это делается, обсудим, почему вообще колебания так распространены в природе.

Мы привыкли к тому, что мир вокруг нас довольно устойчив. Дома и мосты не разрушаются, корабли не переворачиваются, волки и зайцы устойчиво сосуществуют друг с другом. Кажется вполне очевидным, что тело, лежащее на дне ямы, самопроизвольно никогда не «выползет» из нее, в то время как лежащее на вершине горки тело вполне может взять да и скатиться вниз. Так вот, в определенном смысле и дом, и мост, и корабль на воде чрезвычайно похожи на лежащее на две ямы тело. Похожи тем, что все они находятся в положении устойчивого равновесия.

---

*) Остановка сосуда произойдет из-за того, что молекулы газа при ударе передают больший импульс той стенке, которая движется им навстречу.

Оказывается, устойчивость равновесия и колебания тесно связаны друг с другом. Всякий раз когда в физике заходит речь о поведении или свойствах системы вблизи ее положения равновесия, возникает задача о колебаниях, или, как ее часто называют, задача об осцилляторе (от латинского oscillo — качаюсь). К осциллятору сводится большое число проблем современной физической науки.

Устойчивое равновесие характеризуется тем, что потенциальная энергия системы в этом положении минимальна. Именно благодаря этому и возникают колебания. Действительно, отклонив систему из положения равновесия, мы тем самым увеличили ее потенциальную энергию. В системе при этом возникают силы, стремящиеся вернуть ее обратно (уменьшить потенциальную энергию). Если предоставить такую систему самой себе, то она начнет «разгоняться», «скатываясь» к своему положению равновесия (как шарик в ямке). Избыточная потенциальная энергия переходит в энергию, связанную с движением, то есть в кинетическую. При прохождении положения равновесия «скорость» системы максимальна (вся потенциальная энергия перешла в кинетическую), и система проскакивает это положение. В дальнейшем «скорость» начинает уменьшаться, кинетическая энергия вновь переходит в потенциальную и т. д. Возникают колебания.

Мы не случайно слова «разгоняться» и «скорость» поставили в кавычки. Дело в том, что величина $v = \Delta x/\Delta t$ (Δx — «смещение» тела из положения равновесия), которая играет роль скорости, иногда совпадает с настоящей скоростью, а иногда нет (чуть ниже мы поясним это на примерах). Но независимо от этого кинетическая энергия всегда пропорциональна квадрату этой величины, т. е.

$$W_k \sim \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2.$$

Так как для движущегося тела $W_k = mv^2/2$, то и в более общем случае кинетическую энергию принято записывать в виде

$$W_k = \frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2.$$

Величина m здесь часто совпадает с массой, но в принципе может и отличаться от нее.

Потенциальная энергия произвольной системы вблизи положения устойчивого равновесия может быть записана в виде

$$W_p = \frac{k}{2}\Delta x^2.$$

Множитель 1/2 здесь введен просто для удобства (для симметрии с выражением $W_k = mv^2/2$), коэффициент k в каждом конкретном случае свой, а величина Δx, как уже говорилось,— малое «смещение» тела из положения равновесия.

При описании любого физического явления энергия играет, пожалуй, самую фундаментальную роль. Хотя бы потому, что закон ее сохранения сильно ограничивает возможные типы движения. Чрезвычайно важна она и в нашем случае. Сделаем некоторое общее утверждение:

Если полная энергия системы, равная сумме потенциальной и кинетической энергий, в произвольный момент времени записывается в виде

$$W = \frac{k\Delta x^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2,$$

то это означает, во-первых, что система колеблется и, во-вторых, что квадрат частоты колебаний равен отношению коэффициентов, определяющих потенциальную и кинетическую энергии, т. е. $\omega^2 = k/m$.

Вот мы и сформулировали основное правило нахождения частот колеба-

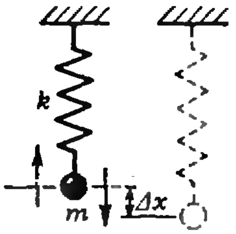


Рис. 1.

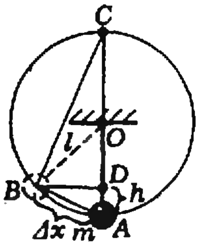


Рис. 2.

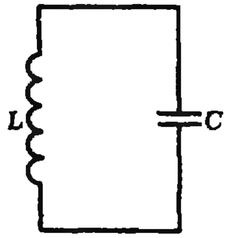


Рис. 3.

ний. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример первый (совсем простой) — тело на пружинке (рис. 1). Роль потенциальной энергии в этом случае играет энергия упругой деформации (k — жесткость пружины). Из общего утверждения получаем

$$W=\frac{k}{2}\Delta x^2+\frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2,\ \omega^2=\frac{k}{m},$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Аналогично находятся частоты любых упругих колебаний: молекул в кристалле, Останкинской телебашни или моста через залив в Сан-Франциско и т. п.

Пример второй (чуть сложнее) — математический маятник (рис. 2). При записи потенциальной энергии материальной точки в поле тяготения надо учесть, что в выражении $W_p=mgh$ величина $h=\Delta x^2/2l$ (это следует из подобия треугольников ABD и ABC на рисунке 2). Тогда из общего утверждения следует:

$$W=\frac{mg}{2l}\Delta x^2+\frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2,\ \omega^2=\frac{g}{l},$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Аналогично находятся частоты колебаний шарика в ямке, корабля на воде и т. д.

Пример третий (электрический) — колебательный контур (рис. 3). В равновесии ни заряда на конденсаторе (C), ни тока через катушку (L) нет. При отклонении от равновесия на конденсаторе появляется заряд ΔQ, а через катушку течет ток $I=\Delta Q/\Delta t$. Роль потенциальной энергии играет энергия заряженного конденсатора: $W_p=(\Delta Q)^2/(2C)$ (ведь именно она связана с взаимным расположением зарядов). Роль кинетической энергии берет на себя энергия, запасенная в катушке: $W_k=LI^2/2=(L/2)(\Delta Q/\Delta t)^2$ (она связана с током, т. е. с движением зарядов; $I=\Delta Q/\Delta t$ играет роль скорости). Итак,

$$W=\frac{1}{2C}(\Delta Q)^2+\frac{L}{2}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)^2,$$

$$\omega^2=\frac{1}{LC},\ T=2\pi\sqrt{LC}.$$

Определение частот колебаний по виду энергии оказывается удобным и в любом другом случае.

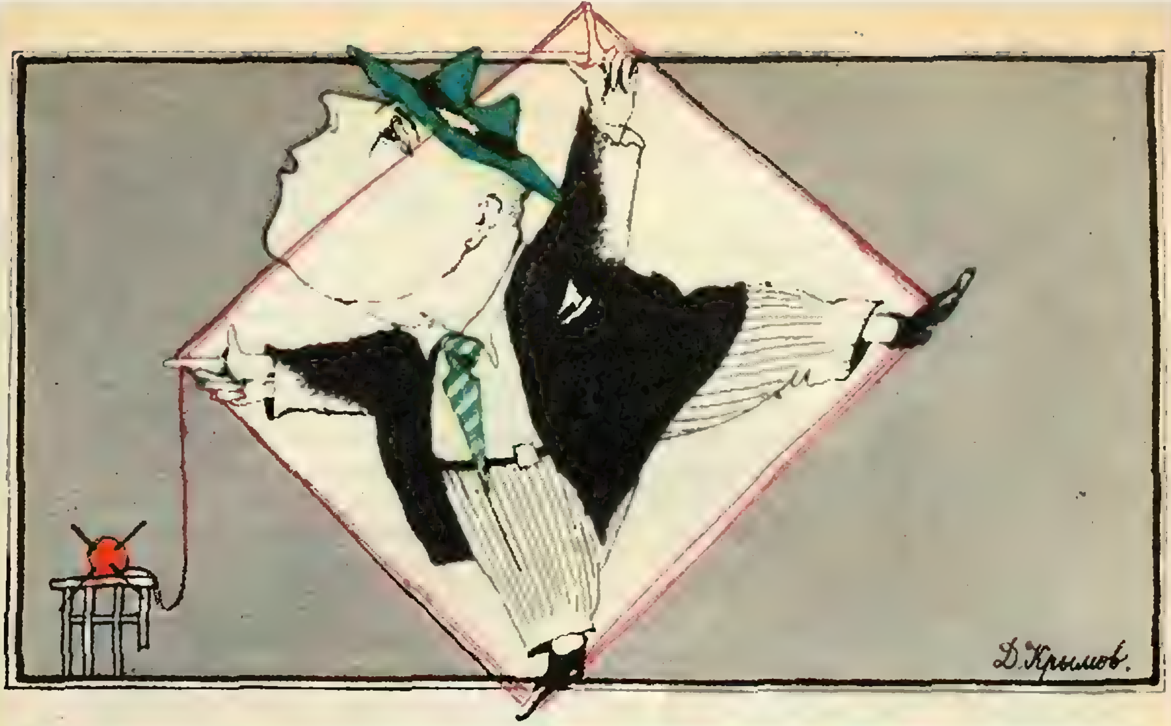
В заключение хочется сказать, что колебания не есть один из типов движения в ряду многих других, а представляют собой фундаментальное явление, элемент того таинственного «алфавита», с помощью которого природа создает все, что нас окружает.

Е. Е. Городецкий

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 29)

К. Николаев (п. Черноголовка Московской обл.) 33—36; *А. Новик* (Мозырь) 33; *Д. Ноготков* (Алма-Ата) 29, 33, 40; *А. Носенко* (Коммунарск) 33, 35; *С. Ночевный* (Запорожье) 33, 35; *Е. Однорогова* (Винница) 29; *К. Ольхин* (Краснодар) 35; *О. Паруш* (Одинцово) 36, 40; *Д. Пастухов* (Москва) 29, 40; *Л. Петько* (Минск) 33, 35, 36, 40; *А. Платонов* (п. Черноголовка Московской обл.) 35; *А. Подтележников* (Харьков) 36; *О. Покрамович* (д. Скоки Брестской обл.) 33; *П. Полынкин* (Тула) 33, 35; *А. Португалов* (Киев) 40; *О. Радичкин* (Наро-Фоминск) 33, 35; *А. Раев* (Бор-Ундур, МНР) 33, 35; *И. Рахманов* (Ленкорань) 33, 35; *Т. Рашник* (Киев) 33, 35; *М. Рзаев* (Баку) 36; *Д. Румынин* (Новосибирск) 33, 40; *Л. Руда* (Киев) 40; *А. Рыбак* (Новосибирск) 40; *Р. Сагайдак* (с. Матусов Черкасской обл.) 33—36; *В. Саенко* (Улан-Удэ) 33; *С. Сазонов* (Климовск) 33, 35; *Ю. Самохвалов* (Омск) 35; *В. Сафонов* (Челябинск) 32; *А. Седлов* (Целиноград) 40; *Е. Семенюта* (п. Ирша Красноярского кр.) 40; *А. Сибиряков* (Томск) 35, 36; *Н. Сидоров* (Киев) 33, 35, 36, 40; *С. Сильвестров* (Киев) 33, 35, 36; *Д. Симонян* (Рига) 35; *В. Синенко* (Канев) 33, 35; *Д. Синицкий* (Ленинград) 36; *В. Скворцов* (Черкассы) 29; *В. Смирнов* (Тихвин) 33; *М. Соколов* (Одинцово) 35; *А. Ставицкий* (Баку) 29, 32, 33, 35; *П. Старков* (п. Черноголовка Московской обл.) 40; *А. Стародубов* (Алма-Ата) 29; *В. Старцев* (Алма-Ата) 32; *А. Степура* (Ивано-Франковск) 29, 32, 33, 35, 36; *А. Субботин* (Алма-Ата) 34; *В. Терещенко* (Киев) 33; *Д. Тильга* (Алма-Ата) 40; *О. Толмачев* (Киев) 40; *А. Толстых* (Днепродзержинск) 29; *Ф. Тринчук* (Москва) 33, 35; *В. Тур* (Киев) 33, 35; *В. Тягнирядно* (Минск) 32; *Г. Фейгин* (Тула) 33, 35; *В. Фирсов* (Москва) 33, 40; *Н. Фатаув* (Белорецк) 33; *Ф. Фот* (Томск) 36; *П. Фурсиков* (Куйбышев) 33, 35; *Ю. Харченко* (Москва) 40; *П. Хиль* (п. Овидиополь Одесской обл.) 40; *Д. Хосид* (Алма-Ата) 40; *С. Храпов* (Коломна) 29; *О. Цодиков* (Артемовск) 33; *И. Чайка* (Кузнецовск) 33; *О. Чанов* (Брест) 29; *М. Чекушина* (Алма-Ата) 35; *Е. Чернышев* (Ташкент) 35; *И. Шагалов* (Долгопрудный) 35; *А. Шигабутдинов* (Димитровград) 35; *С. Штовба* (Винница) 29, 33, 35; *У. Юсупов* (Шават) 40; *И. Ясников* (Тольятти) 35, 40.



Математический кружок

Соображения непрерывности

С. Л. ТАБАЧНИКОВ

В большинстве задач из школьного учебника математики требуется решить уравнение, найти значение какой-либо величины, построить фигуру с заданными свойствами и т. д. Эта статья посвящена задачам другого сорта — в них требуется только доказать, что искомый корень, число, фигура и т. д. существует. Метод решения, которым мы будем пользоваться,— это *соображения непрерывности*.

Задачи о плоских фигурах

Начнем с такой задачи. *На плоскости расположена некоторая фигура. Докажите, что существует вертикальная прямая, делящая ее площадь пополам.*

Возьмем вертикальную прямую, расположенную слева от данной фигуры (рис. 1, *а*), и начнем перемещать ее направо. В некоторый момент прямая коснется границы фигуры (рис. 1, *б*), затем будет скользить по фигуре (рис. 1, *в—д*) и наконец окажется справа от фигуры (рис. 1, *ж*). Как меняется при таком движении площадь *той части фигуры, которая лежит* слева от прямой (синяя часть на рисунке 1)? Эта площадь непрерывно изменяется от нуля (рис. 1, *а*) до площади всей фигуры S (рис. 1, *ж*). Следовательно, в некоторый момент эта площадь равнялась половине площади всей фигуры. В этот момент вертикальная прямая и делила площадь фигуры пополам.

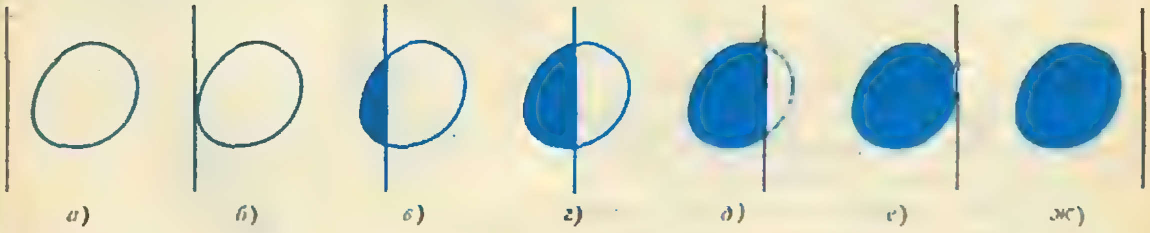


Рис. 1.

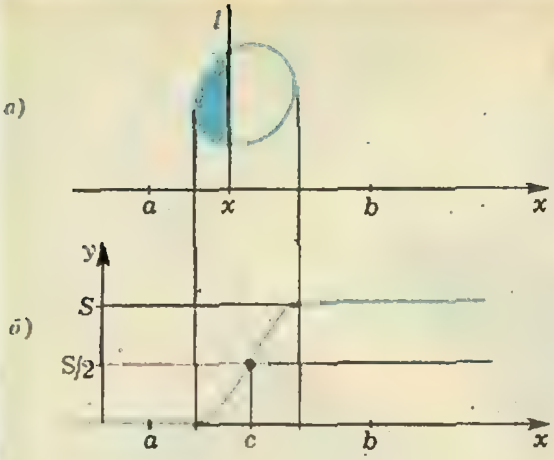


Рис. 2.

Обсудим это решение. Во-первых, оно не дает возможности построить нужную прямую, а только доказывает ее существование. Впрочем, ожидать рецепта построения такой прямой и не приходится — ведь данная фигура совершенно произвольная. Во-вторых, наше решение показывает, что существует прямая произвольного направления, делящая площадь фигуры пополам. Более того, из решения также следует, что прямая, проходящая в данном направлении и делящая площадь фигуры пополам, определяется единственным образом. Этим мы в дальнейшем будем пользоваться.

Взглянем на наше решение несколько с другой точки зрения. Выберем на плоскости горизонтальную числовую ось (рис. 2, *а*). Положение произвольной вертикальной прямой l характеризуется числом x (точкой, в которой прямая l пересекает ось). Рассмотрим площадь части фигуры, лежащей слева от прямой l, как функцию $f(x)$. График этой непрерывной функции показан на рисунке 2, *б*). Найти прямую, делящую площадь фигуры пополам, это значит найти на числовой оси такую точку c, для которой $f(c)=S/2$.

Рассмотрим на рисунке 2, *б*) горизонтальную прямую $y=S/2$. Левый конец графика функции $f(x)$ лежит ниже этой прямой, а его правый конец — выше, так как $f(a)=0<S/2$, а $f(b)=S>S/2$. Следовательно, существует точка пересечения горизонтальной прямой $y=S/2$ с графиком $f(x)$. В этой точке и выполнено равенство $f(c)=S/2$.

Свойство непрерывных функций, которым мы пользовались при решении, называется **теоремой о промежуточном значении:**

> *между двумя своими значениями непрерывная функция принимает все промежуточные значения.*

Более формально: если $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a; b]$ и c — некоторое число, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$, то на отрезке $[a; b]$ найдется такая точка x_0, что $f(x_0)=c$.

Например, в нашей задаче функция $f(x)$ принимает значение $S/2$, заключенное между $f(a)=0$ и $f(b)=S$.

Теорема о промежуточном значении почти очевидна. И как многие очевидные утверждения, доказать ее не совсем просто. Для доказательства пришлось бы углубиться в определение непрерывной функции и действительного числа. Это увело бы нас слишком далеко от темы нашей статьи, поэтому пусть теорема о промежуточном значении останется для нас просто очевидной. И еще одно: мы не доказывали, что площадь части фигуры, лежащей слева от прямой, непрерывно зависит от положения этой прямой (т. е., что $f(x)$ — непрерывная функция). Это тоже почти очевидно; и в других задачах этой статьи мы не будем отдельно доказывать непрерывность возникающих при решении функций.

Задачи

1. а) Дана выпуклая фигура*) и точка вне ее. Докажите, что существует прямая, проходящая через эту точку и делящая площадь фигуры пополам.

б) Во что превратится предыдущая задача, если точка будет стремиться в бесконечность?

в) Решите п. а в случае, когда точка лежит внутри фигуры.

г) Верно ли, что в пп. а и в существует единственная прямая?

2. а) Даны две выпуклые фигуры (может быть, пересекающиеся). Докажите, что существует прямая, делящая площадь каждой из фигур пополам.

б) Во что превратится эта задача, если одна из фигур стянется в точку?

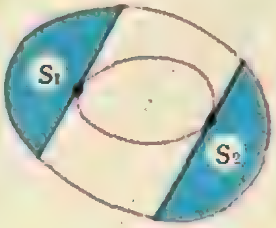


Рис. 3.

---

*) Выпуклая фигура вместе с любыми двумя точками содержит целиком и соединяющий их отрезок. Например, круг — выпуклая фигура, а окружность — нет.

в) Пусть каждая из фигур в п. а — параллелограмм. Постройте требуемую прямую.

3. Дана выпуклая фигура. Докажите, что существует прямая, одновременно делящая пополам ее площадь и периметр.

4. а) Даны две выпуклые фигуры, одна из которых лежит внутри другой. Докажите, что найдутся две параллельные хорды внешней фигуры, касающиеся внутренней фигуры и такие, что $S_1=S_2$ (рис. 3).

б) Во что превратится эта задача, если внутренняя фигура стягивается в точку?

5. Докажите, что у выпуклой фигуры найдутся равные и параллельные хорды, делящие ее площадь на три равные части.

6. Докажите, что вокруг выпуклой фигуры можно описать квадрат.

Почему табурет квадратный?

Представьте себе, что пол на кухне у вас не очень ровный (так обычно и бывает, особенно если он покрыт линолеумом). Поэтому квадратный табурет стоит на полу только тремя ножками, а четвертая ножка висит в воздухе. Можно ли так передвинуть табурет, чтобы он стоял на полу всеми четырьмя ножками или может случиться, что, как его ни двигай, табурет все равно будет качаться? Мы, конечно, предполагаем, что, когда табурет твердо стоит на четырех ножках, его поверхность может быть несколько наклонена по отношению к полу.

(Прежде чем приступить к математическому решению этой задачи, проведите эксперимент у себя на кухне. После того как этот эксперимент даст положительный ответ на наш вопрос, перейдите к математическому решению задачи.)

Будем считать, что поверхность пола, хотя и не является плоской, все же отличается от плоской не слишком сильно. Это предположение позволяет исключить полы «патологической» формы — такой, например, как пол пещеры, покрытый сталагмитами, т. е. известковыми сосульками, растущими вверх.

Итак, пусть у табурета ножки A, B и C стоят на полу, а четвертая ножка D висит в воздухе (рис. 4, *а*). Не отрывая ножек A и C от пола, повернем табурет относительно прямой AC таким образом, чтобы ножки B и D находились в воздухе на равном расстоянии от пола (рис. 4, *б*; расстояние до пола отсчитывается вдоль направления ножек). В таком положении (две ножки табурета стоят на полу, а две другие находятся от пола на равном расстоянии) табурет можно передвигать.

Представим себе, что пол сделан из пластилина и ножки табурета могут свободно пройти сквозь него. Опустим табурет в направлении его ножек так, чтобы ножки B и D оказались на полу, а ножки A и C — ниже поверхности пола и на равном расстоянии от нее (рис. 4, *в*).

Начнем поворачивать табурет вокруг его центра против часовой стрелки из положения 4, *б*, не отрывая ножек A и C от пола и сохраняя равное расстояние от ножек B и D до пола. После поворота на 90° ножки A и C займут положение ножек D и B на рисунке 4, *в*, а ножки B и D — соответственно положения ножек A и C на рисунке 4, *в*. Во время движения табурета расстояние от ножек B и D до пола меняется непрерывно. В начальный момент — рисунок 4, *б* — это расстояние положительно, так как ножки выше поверхности пола, а в конечный момент, изображенный на рисунке 4, *в*,— отрицательно, так как ножки ниже поверхности пола. Следовательно, был момент, когда это расстояние равнялось нулю. *В этот момент табурет и стоял на всех четырех ножках.*

Наше решение имеет не только теоретическую, но и практическую ценность — поворачивая табурет на 90° вокруг его центра, можно найти устойчивое положение. Проверьте это экспериментально. И еще одно замечание. Наше решение основано на том, что ножки табурета расположены в вершинах квадрата. Если бы они были расположены в вершинах прямо-

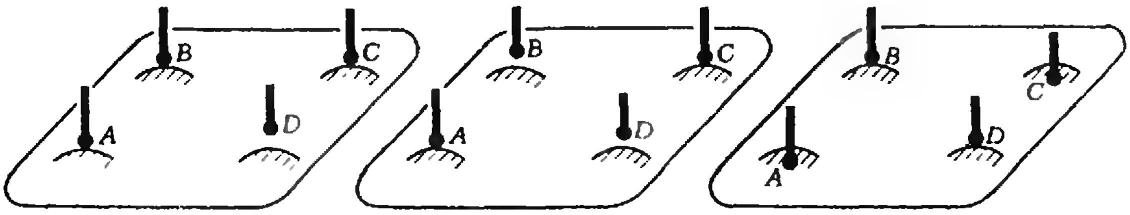


Рис. 4. а) б) в)

угольника или другого четырехугольника, наше рассуждение бы не прошло. Автору не известно, верно ли утверждение задачи для четырехугольников, отличных от квадрата (во всяком случае, ясно, что четырехугольник должен быть вписанным в окружность). Если кто-нибудь из читателей сможет разобраться в этом вопросе, обязательно сообщите нам.

Задачи

7. Учитель попросил доказать, что выпуклую фигуру можно разделить парой взаимно перпендикулярных прямых на четыре равновеликие части. Один ученик предложил такое решение. «В любом направлении можно провести единственную прямую l, делящую площадь фигуры пополам (рис. 5, *а*). Каждую из получившихся половин фигуры можно разделить на две равновеликие части прямыми, перпендикулярными l (рис. 5, *б*). Начнем изменять направление прямой l, сохраняя вид чертежа. После изменения направления на 180° точки A и B поменяются местами. Значит, в некоторый момент они совпадали. В этот момент рисунок 5, *б* превратится в рисунок 5, *в* и мы получим нужную пару перпендикулярных прямых, делящих площадь фигуры на четыре равные части».

а) Найдите ошибку в этом решении.

б) Придумайте правильное решение задачи.

8. Докажите, что в центрально-симметричную выпуклую фигуру можно вписать квадрат.

(На самом деле квадрат можно вписать в любую фигуру. Но для доказательства этой теоремы выдающегося советского математика Л. Г. Шнирельмана (1905—1938) одних соображений непрерывности уже не достаточно.)

9. Даны две выпуклые фигуры, одна из которых лежит внутри другой. Докажите, что:

а) найдутся две параллельные хорды внешней фигуры, касающиеся внутренней фигуры и имеющие одинаковую длину (рис. 6, *а*);

б) найдется точка X внешней фигуры, из которой можно провести две равные касательные хорды к внутренней фигуре (рис. 6, *б*).

Указание. Среди хорд внешней фигуры, касающихся внутренней, есть хорда наибольшей длины. Проведите из ее концов касательные к внутренней фигуре.

10. Даны три выпуклые фигуры, вложенные друг в друга (рис. 7). Докажите, что найдется точка X внешней фигуры, из которой можно провести касательные хорды к внутренней фигуре так, чтобы отрезки, заключенные в средней фигуре, были бы равны.

О корнях многочленов и хордах графиков функций

Вы, конечно, знаете, что квадратный трехчлен может не иметь корней — таков, например, многочлен x^2+x+1. А как обстоит дело с кубическими многочленами? Сейчас мы докажем, что

> *всякий кубический многочлен имеет хотя бы один корень*

Рассмотрим сначала кубический многочлен со старшим коэффициентом 1:

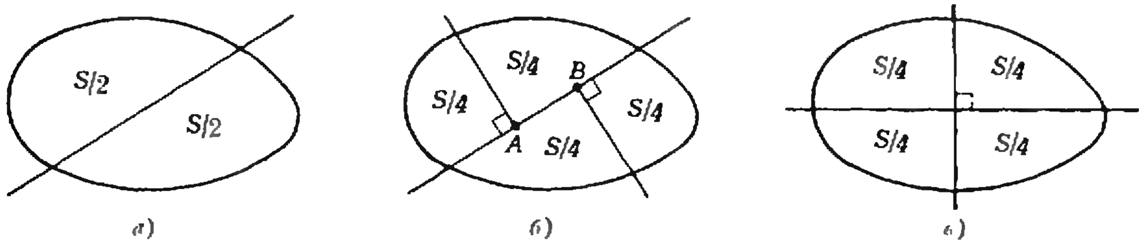
$$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$$

Запишем его в таком виде: $f(x)=x^3(1+b/x+c/x^2+d/x^3)$. Если величина $|x|$ очень велика, то слагаемые b/x, c/x^2 и d/x^3 становятся очень малыми. Поэтому число, стоящее в скобке, близко к 1 и, во всяком случае, положительно. Следовательно, знак $f(x)$ при больших $|x|$ определяется знаком числа x^3. Тем самым $f(x)<0$ при больших по абсолютной величине отрицательных x и $f(x)>0$ при больших положительных x.

Кубический многочлен, как и всякий многочлен, — непрерывная функция. Поэтому можно применить теорему о промежуточном значении. Из нее следует, что найдется такое x, что $f(x)=0$. Следовательно, кубический многочлен имеет корень.

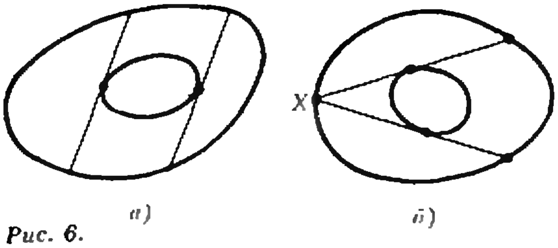
Случай общего кубического многочлена $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ сводится к уже разобранному: достаточно разделить $f(x)$ на a.

Наше доказательство хорошо иллюстрирует силу и слабость соображений непрерывности. Мы почти «даром» получили неочевидное утверждение о существовании корня, однако осталось неясным, как найти корень для конкретного многочлена (формулы для корней кубического многочлена существуют, но ... это уже совсем другой сюжет, и мы его не будем касаться).



а) б) в)

Рис 5.



а) б)

Рис. 6.

Другой пример. *Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция на прямой с периодом T. Докажите, что ее график имеет горизонтальную хорду длины $T/2$.*

Существование горизонтальной хорды длины l равносильно равенству $f(x)=f(x+l)$ (рис. 8). Следовательно, нам нужно доказать, что найдется такое x, что $f(x+T/2)=f(x)$. Иными словами, нужно доказать, что функция $g(x)=f(x+T/2)-f(x)$ имеет корень, т. е. $g(x)=0$ для некоторого x.

Возьмем произвольное число a. Если $g(a)=0$, то все доказано; поэтому предположим, что $g(a)\neq 0$. Для определенности будем считать, что $g(a)<0$. Пусть $b=a+T/2$. Найдем значение $g(b)$:

$$g(b)=g(a+T/2)=f(a+T/2+T/2)-$$
$$-f(a+T/2)=f(a+T)-f(a+T/2)=$$
$$=f(a)-f(a+T/2)=-g(a).$$

Итак, $g(b)>0$.

Функция $g(x)$ непрерывна, как разность непрерывных функций. Поэтому можно воспользоваться теоремой о промежуточном значении. Из этой теоремы следует, что между числами a и b найдется такое x, что $g(x)=0$.

Утверждение о горизонтальных хордах графика периодической функции можно значительно усилить: *график такой функции имеет горизонтальную хорду произвольной длины.*

А вот с графиками непрерывных функций на отрезке дело обстоит иначе. Пусть на отрезке длины T задана непрерывная функция, значения которой в концах отрезка совпадают. Тогда если число l имеет вид T/n для некоторого натурального n, то график функции обязательно имеет горизонтальную хорду длиной l; если же l не такого вида, то существует непрерывная функция с одинаковыми значениями на концах отрезка, график которой не имеет горизонтальных хорд длиной l. (Подробный рассказ об этом вы найдете в статье И. М. Яглома «О хордах непрерывных кривых», «Квант», 1977, № 4.)

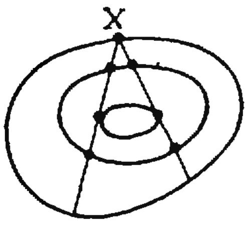


Рис. 7

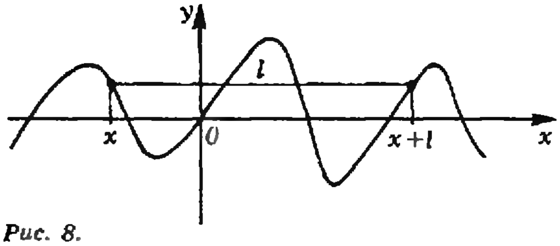


Рис. 8.

Задачи

11. Докажите, что многочлен нечетной степени имеет корень.

12. Вчера в полночь было холоднее, чем в полночь позавчера и сегодня. Докажите, что найдется один и тот же момент времени вчера и сегодня, когда температура была одинаковой.

13. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на некотором отрезке, и все ее значения принадлежат этому же отрезку. Докажите, что найдется такое x, что $f(x)=x$.

14. Многочлен $f(x)=ax^2+bx+c$ таков, что уравнение $f(x)=x$ не имеет решений. Докажите, что уравнение $f(f(x))=x$ тоже не имеет решений.

15. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция на прямой с периодом T. Докажите, что ее график имеет горизонтальные хорды длины l, где:

а) $l=T/3$; б) $l=T/n$; в) $l=T\cdot p/q$;

г) l — любое.

16. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке длины T, значения которой в концах отрезка совпадают. Докажите, что ее график имеет горизонтальную хорду длины l, где:

а) $l=T/2$; б) $l=T/3$; в) $l=T/n$; г) постройте функцию, график которой не имеет горизонтальных хорд длины $2T/3$.

17. *Средним значением функции* $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ называется величина $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Докажите, что если среднее значение непрерывной функции на некотором отрезке равно нулю, то она принимает на этом отрезке нулевое значение.

18. Рассмотрим функцию вида $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ldots+a_n\sin nx+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\ldots+b_k\cos kx$, где $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k$ — некоторые коэффициенты. Докажите, что уравнение $f(x)=0$ имеет корень.

Заключение

Мы разобрали несколько задач, в решении которых основную роль играли соображения непрерывности. В каждой из задач интересующая нас величина зависела от одного параметра — например, площадь части фигуры, лежащей по одну сторону от прямой, зависела от угла наклона этой прямой. Соображения непрерывности можно распространить и на случай, когда параметров больше одного. Подробный рассказ об этом не входит в наши планы; ограничимся формулировкой нескольких теорем.

1. В пространстве произвольным образом расположены три тела. Существует такая плоскость, которая делит объем каждого из тел пополам. Это утверждение известно, как «теорема о сэндвиче с ветчиной» (первое тело — это кусок хлеба, второе — слой масла, а третье — ломоть ветчины).

2. На земле найдутся две такие диаметрально противоположные точки, в которых совпадают температура и давление.

3. Вокруг выпуклого тела можно описать куб. (Эта теорема обобщает на случай пространства утверждение задачи 6).

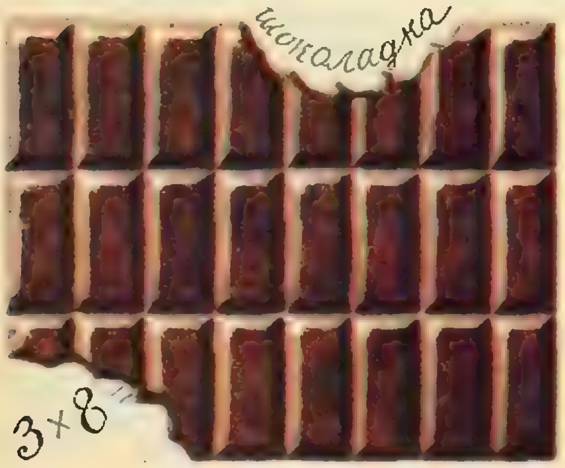
4. Представьте себе шар, покрытый волосами. Можно ли его «причесать» таким образом, чтобы каждый волосок касался поверхности шара, и направления близко расположенных волосков отличались не очень сильно? Оказывается, нельзя — хотя бы один волосок останется перпендикулярным к поверхности шара. Это утверждение известно как «теорема о еже» или «теорема о причесывании шара».

5 (для тех, кто знает комплексные числа). Мы доказали, что многочлен нечетной степени обязательно имеет действительный корень. А как обстоит дело с комплексными корнями? Оказывается, любой многочлен (отличный от постоянного) имеет хотя бы один комплексный корень. Это утверждение настолько важно, что оно называется основной теоремой алгебры. Один из подходов к его доказательству тоже основан на соображениях непрерывности.

Угадай число

(Начало см. на с. 34)

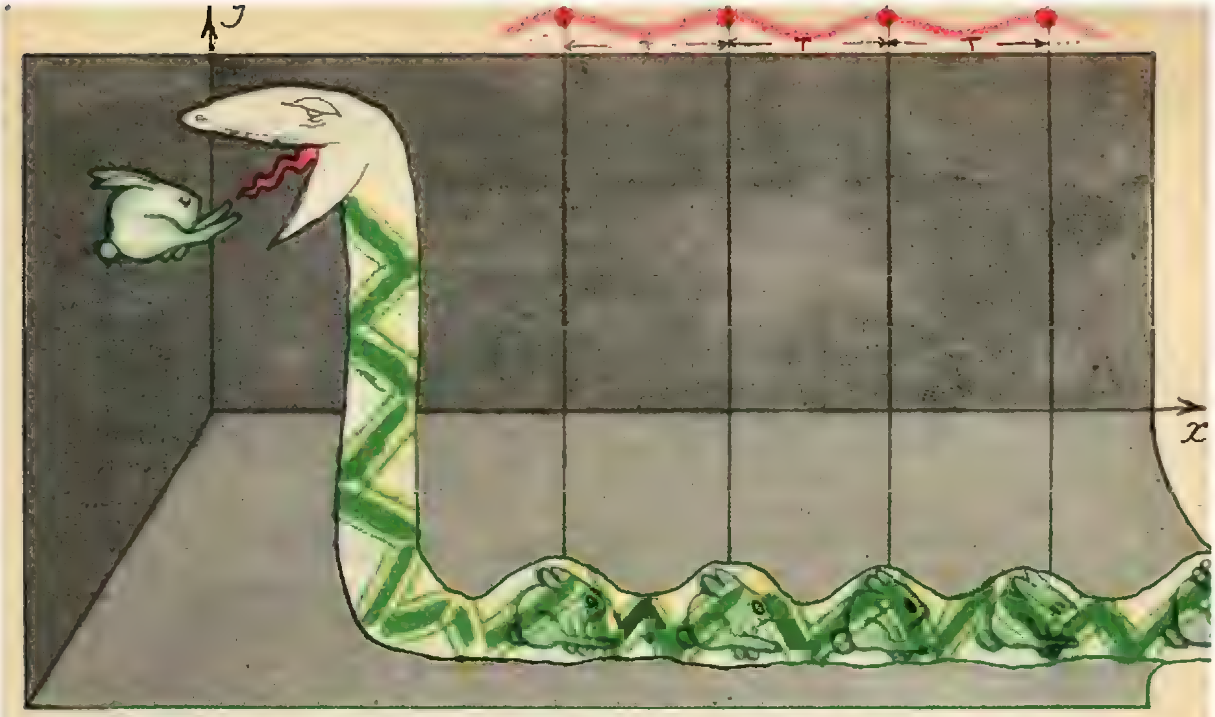
Попробуйте ответить на следующий вопрос: «В соревнованиях на кубок по волейболу участвует 133 команды, соревнования проводятся по олимпийской системе; сколько будет проведено игр для определения победителя?»



Сначала кажется, что нужно очень долго считать, чтобы получить ответ, а решение оказывается чрезвычайно простым. Достаточно заметить, что в каждой игре выбывает ровно одна команда, а нужно, чтобы осталась одна; значит, чтобы выбыло 132 команды, нужно провести 132 игры.

Эта же идея присутствует в решении еще одной популярной задачи. *Шоколадка состоит из 3×8 долек. Сколько нужно сделать разломов по линиям, чтобы полностью разломать ее на дольки?* Сначала решающий встает в тупик: ведь ломать-то можно совсем по-разному! Но давайте четко сформулируем задачу. Есть один кусок шоколада, нужно получить 24 куска, и при каждом разламывании количество кусков увеличивается ровно на один. Значит, ломать придется 23 раза, причем безразлично, в каком порядке это делать.

Публикация подготовлена *А. П. Савиным* по материалам *В. А. Далингера* и *Ф. Н. Фазылова*



Практикум абитуриента

Функции периодические и непериодические

Доктор физико-математических наук
Г. В. ДОРОФЕЕВ,
доктор физико-математических наук
Н. Х. РОЗОВ

Любой человек без труда приведет много примеров процессов, повторяющихся через равные промежутки времени,— мы сталкиваемся с ними буквально на каждом шагу и в природе, и в технике, и просто в быту. Для теоретического описания, изучения таких процессов служит понятие *периодической функции*, относящееся к важнейшим понятиям математики.

С этим понятием старшеклассники уже знакомы по учебнику*), и мы не будем повторять то, что там сказано. Однако все же сделаем два замечания.

Вот что написано (и специально выделено шрифтом) в учебнике:

Определение. *Функция f называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения f значения этой функции в точках x и $x+T$ равны:*

$$f(x+T)=f(x). \qquad (1)$$

Однако полное определение периодической функции этим не исчерпывается. Школьники часто забывают, что в учебнике сделано специальное предположение об области определения $D(f)$ периодической функции f с периодом $T \neq 0$: если число x принадлежит области определения $D(f)$, то и числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат ей.

Указанное требование к области определения является обязательной частью определения периодической функции. Если это требование не учитывать, получится, что, например, функция $y=\sin(\sqrt{x})^2$; (определенная при $x \geqslant 0$) окажется периодической с периодом 2π (она удовлетворяет условию (1)), хотя в математике она таковой не считается. При отсутствии требования к области определения становится неверной и теорема о том, что если число T — период функции f, то и число $-T$ является периодом этой функции.

---

*) См. «Алгебра и начала анализа 9-10».— М.: Просвещение, 1986, § 3, п. 5.

Более тонкое замечание. Приведенное выше определение не дает прямого ответа на вопрос: что такое периодическая функция? Конечно, на основании этого определения каждый догадается, что естественно назвать функцию периодической, если она является периодической с некоторым периодом $T \neq 0$. Но, говоря строго, понятие периодической функции пока не определено.

Чтобы избежать обсуждения перечисленных моментов и исключить возможные недоразумения, остановимся на следующем определении.

Функция f называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения $D(f)$ числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат $D(f)$ и выполняется равенство (1).

Фигурирующее в определении число $T \neq 0$ называется *периодом* функции f. Если функция является периодической, т. е. имеет *хотя бы один* период T, то она имеет *бесконечно много* периодов — ее периодом будет и всякое число nT, где n — *отличное от нуля* целое число. Если же T — *наименьший положительный период* функции, то ее периодами являются все числа вида nT, где $n \neq 0$ — целое, и только они.

Когда заходит речь о конкретных примерах периодических функций, школьники обычно ограничиваются основными тригонометрическими функциям: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Между тем запас периодических функций, встречающихся в школьном курсе, гораздо шире. Вспомним известное утверждение: *если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют один и тот же период T, то их сумма, разность, произведение и частное также имеют период T*. С помощью этого утверждения легко получать примеры периодических функций.

Большое число периодических функций можно строить по формуле $g(f(x))$, если в качестве f взять *периодическую* функцию, а в качестве g — произвольную. Вот несколько примеров:

$$\sin^3 2x;\ \sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}};\ \log_2\cos(x-4);$$

$$\arcsin(\cos x);\ \ln\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}.$$

Пример периодической функции (внешне никак не связанчой с тригонометрическими функциями) — это $y=\{x\}$, т. е. *дробная часть числа x*. Периодической является и всякая постоянная функция (ее периодом служит любое ненулевое число).

* * *

Обычно школьники относительно легко справляются с задачами, в которых требуется *доказать периодичность* некоторой данной функции. В таких случаях, как правило, сначала угадывается период, после чего доказательство сводится к простой проверке определения. Но значительные трудности возникают тогда, когда нужно *доказать непериодичность* конкретной функции.

Дело в том, что определение периодической функции имеет довольно сложную логическую структуру. Поэтому уже саму формулировку определения того факта, что *функция $f(x)$ не является периодической* (то есть *является непериодической*), привести не так просто. Часто складывается парадоксальная ситуация: школьнику совершенно ясно, что предложенная ему функция — непериодическая (и это действительно так!), но доказать это он не может.

Для доказательства непериодичности данной функции часто вовсе и не нужно точно формулировать общее определение непериодической функции. Гораздо более простым и удобным оказывается иной, обходной путь. Именно: мы можем воспользоваться следующим логически очевидным утверждением: *если все периодические функции обладают некоторым свойством, а данная функция этим свойством не обладает, то она не является периодической.*

Чтобы «обходной» путь был эффективным, надо иметь набор общих свойств периодических функций. Мы укажем сейчас несколько таких свойств и продемонстрируем, как их используют для доказательства непериодичности функций.

Свойство I. *Если точка x_0 принадлежит области определения периодической функции с периодом T, то ее области определения принадлежат и все точки x_0+nT, $n \in \mathbb{Z}$.*

Аналогично, *если точка x_0* не *принадлежит области определения периодической функции с периодом T, то ее области определения* не *принадлежат и все точки x_0+nT, $n \in \mathbb{Z}$.*

Свойство I немедленно получается из определения периодической функции.

Следствие. *Область определения периодической функции содержит сколь угодно большие по модулю положительные и отрицательные числа.*

Отсюда, например, вытекает, что логарифмическая функция $y=\ln x$ не является периодической — ее область определения $(0; +\infty)$ не содержит отрицательных чисел. Непериодична и функция $y=\arcsin x$, поскольку в ее области определения $[-1; 1]$ нет чисел, больших 1.

Пример 1. *Доказать непериодичность функций*

$$f_1(x)=\sqrt{x(1-x)};\ f_2(x)=\frac{x-1}{x^2-3x-5}.$$

Область определения функции $f_1(x)$ — отрезок $[0; 1]$. Значит, эта функция не является периодической в силу следствия из свойства I.

Так как квадратный трехчлен x^2-3x-5 имеет два корня, функция $f_2(x)$ не определена лишь в двух точках. Поэтому она не является периодической — по «второй части» свойства I.

Свойство II. *Периодическая функция принимает каждое свое значение при бесконечном числе значений аргумента, среди которых есть сколь угодно большие по модулю положительные и отрицательные числа.*

Это свойство легко вытекает из равенства

$$f(x+nT)=f(x),\ n\in\mathbf{Z}, \qquad (2)$$

справедливого для периодической функции $f(x)$ с периодом T.

Следствие. *Периодическая функция не может быть возрастающей или убывающей на всей своей области определения.*

Отсюда, например, следует, что функция, возрастающая (или убывающая) на всей числовой прямой, не может быть периодической — в частности, непериодической является показательная функция $y=a^x$ (где $a\neq 1$).

Свойство II удобно использовать в переформулированном виде: *если $f(x)$ — периодическая функция, то при любом $a\in\mathbf{R}$ уравнение $f(x)=a$, либо не имеет корней, либо имеет бесконечно много корней.*

Пример 2. *Доказать непериодичность функций*

$f_1(x)=2x-\cos x;\ f_2(x)=e^{-x^2};$

$f_3(x)=\dfrac{3x^2-x+2}{x^2+x+1};$

$f_4(x)=\cos x+\cos(x\sqrt{2})+\cos(x\sqrt{3}).$

Вычислим производную функции $f_1(x)$:

$$f_1'(x)=2+\sin x.$$

Так как $f_1'(x)>0$ при любом $x\in\mathbf{R}$, то функция $f_1(x)$ — возрастающая на всей числовой прямой. Поэтому она не является периодической.

Функция $f_2(x)$ принимает наибольшее значение 1 в единственной точке $x=0$ (убедитесь в этом). Следовательно, эта функция непериодическая.

Уравнение

$$\frac{3x^2-x+2}{x^2+x+1}=a,$$

где $a\in\mathbf{R}$, не может иметь, как нетрудно видеть, более двух корней. Поэтому функция $f_3(x)$ каждое свое значение принимает не более чем в двух точках и, значит, не является периодической.

Функция $f_4(x)$ при $x=0$ принимает значение 3. Решим уравнение

$$\cos x+\cos(x\sqrt{2})+\cos(x\sqrt{3})=3.$$

Так как $\cos t\leqslant 1$, это уравнение равносильно системе

$$\cos x=1,\ \cos(x\sqrt{2})=1,\ \cos(x\sqrt{3})=1.$$

Первое уравнение системы удовлетворяется при $x=2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$, а второе — при $x=\sqrt{2}n\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$; эти серии значений x имеют лишь единственную общую точку $x=0$, которая, очевидно, удовлетворяет и третьему уравнению системы. Таким образом, уравнение $\cos x+\cos(x\sqrt{2})+\cos(x\sqrt{3})=3$ имеет только один корень, а потому функция $f_4(x)$ является непериодической.

Свойство III. *Если $f(x)$ — периодическая функция, то уравнение* (1), *где T — неизвестное, а x — параметр, имеет по крайней мере одно ненулевое решение $T=T_0$ для всех значений параметра $x\in D(f)$.*

Свойство III представляет собой переформулировку определения: ведь если функция $f(x)$ — периодическая, то существует такое число $T_0\neq 0$, что $f(x+T_0)=f(x)$ для любого $x\in D(f)$, а это и означает, что число $T_0\neq 0$ является корнем уравнения (1) *при всяком значении параметра $x\in D(f)$.*

В соответствии со свойством III для доказательства непериодичности функции $f(x)$ достаточно найти такие два значения аргумента $x=a$ и $x=b$, что уравнения относительно T

$$f(a+T)=f(a),\ f(b+T)=f(b)$$

не имеют *общего ненулевого* решения.

Пример 3. *Выяснить, является ли периодической функция*

$$f(x)=|x|+\sin x.$$

Допустим, что $f(x)$ — периодическая с периодом T; тогда при любом $x\in\mathbf{Z}$ справедливо равенство

$$|x+T|+\sin(x+T)=|x|+\sin x.$$

В частности, при $x=0$ получаем уравнение

$$|T|+\sin T=0,$$

а при $x=-T$ — уравнение

$$|-T|-\sin T=0.$$

Складывая эти два равенства, получаем $\{T\}+\{-T\}=0$. Дробная часть $\{x\}$ любого числа x *неотрицательна*. Поэтому последиее равенство возможно только при $\{T\}=\{-T\}=0$, т. е. если T — целое число.

С другой стороны, если $\{T\}=0$, то из равенства $\{T\}+\sin T=0$ следует, что $\sin T=0$, т. е. $T=k\pi$ $(k\in Z)$. Но среди чисел такого вида целым является лишь число 0, так что наши уравнения имеют единственный общий корень $T=0$. А это означает, что функция $f(x)$ — непериодическая.

Свойство IV. *Если для периодической функции $f(x)$ с периодом T на некотором отрезке $[\alpha;\ \alpha+T]$ длиной T выполнено неравенство*

$$|f(x)|\leqslant M, \qquad (3)$$

то это неравенство выполняется и для любого значения аргумента.

Свойство IV вытекает из следующих рассуждений. Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом T и пусть неравенство (3) справедливо при $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha+T$. Тогда, в силу (2), это неравенство справедливо и на всяком отрезке

$$[\alpha+nT;\ \alpha+(n+1)T],\ n\in Z.$$

Однако каждое значение аргумента принадлежит одному из таких отрезков, и, следовательно, неравенство (3) выполняется для любого значения x.

Пример 4. *Доказать непериодичность функции*

$$f(x)=2x\cos(x^2).$$

Допустим, что эта фуикция — периодическая с периодом T. Так как при $x\in[0;T]$

$$|2x\cos(x^2)|\leqslant 2|x|\leqslant 2T,$$

то, согласно свойству IV, при любом $x\in R$ должно выполняться неравенство $|f(x)|=|2x\cos(x^2)|\leqslant 2T$. Но, как легко проверить, это неравенство нарушается, например, в точке $x=\sqrt{2\pi k}$, если только натуральное число k удовлетворяет условию $k>T^2/2\pi$.

Свойство V. *Если периодическая функция дифференцируема в каждой точке своей области определения, то ее производная — периодическая функция с тем же периодом.*

Докажем это свойство. Из предположения, что периодическая функция $f(x)$ с периодом T имеет производную $f'(x)$ в любой точке $x\in D(f)$, следует, что $D(f')=D(f)$. Отсюда ясно, что если $x\in D(f')$, то

$$x-T\in D(f'),\ x+T\in D(f').$$

Поскольку при любом $x\in D(f)$ выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$, то $f(x+T)$ и $f(x)$ — это *одна и та же* функция. Но тогда и их производные тоже равны: $(f(x+T))'=f'(x)$. Функцию $f(x+T)$ можно рассматривать как сложную функцию аргумента x с «внутренней» функцией $x+T$ и «внешней» функцией f. Поэтому по формуле для производной сложной функции

$$(f(x+T))'=f'(x+T)\cdot(x+T)'=f'(x+T)$$

для любой точки $x\in D(f')$. Поэтому $f'(x+T)=f'(x)$ при любом $x\in D(f')$, так что $f'(x)$ — периодическая функция с периодом T.

Пример 5. *Доказать непериодичность функций*

$$f_1(x)=\sin(x^2);\ f_2(x)=3\sin x+5\sin(x\sqrt{2}).$$

Вычислим производные этих функций:

$$f_1'(x)=2x\cos(x^2);$$
$$f_2'(x)=3\cos x+5\sqrt{2}\cos(x\sqrt{2}).$$

Функция $f_1'(x)$ не является периодической (см. пример 4), а потому не является периодической и функция $f_1(x)$. Функция $f_2'(x)$ также непериодическая (это доказывается так же, как и в примере 2); следовательно, $f_2(x)$ — непериодическая функция.

* * *

В заключение два примера посложнее.

Пример 6. *Доказать непериодичность функции*

$$f(x)=e^{\sqrt{\operatorname{arctg}|\sin(x^2)|}}.$$

Функция выглядит устрашающе, на первый взгляд совершенно неясно, какое из свойств здесь «поможет». Мы воспользуемся следующим фактом: *в случае периодичности функции $f(x)$ функция $g(f(x))$ также периодическая.*

Итак, пусть функция $f(x)$ — периодическая. Тогда периодическими должны быть и функции

$$f_1(x)=\ln(f(x))=\sqrt{\operatorname{arctg}|\sin(x^2)|},$$
$$f_2(x)=(f_1(x))^2=\operatorname{arctg}|\sin(x^2)|,$$
$$f_3(x)=\operatorname{tg}(f_2(x))=|\sin(x^2)|,$$
$$f_4(x)=(f_3(x))^2=\sin^2(x^2).$$

Однако производная последней из этих функций $f_4'(x)=2x\sin(2x^2)$ непериодична (см. пример 4). Полученное противоречие показывает, что предположение о периодичности функции $f(x)$ неверно.

Пример 7. *Доказать, что любой многочлен степени $n\geqslant 1$ не является периодической функцией.*

Многочлен первой степени

$$P_1(x)=a_0x+a_1,\ a_0\neq 0,$$

— хорошо знакомая линейная функция, возрастающая или убывающая (в зависимости от знака числа a_0) на всей числовой прямой и потому непериодическая.

Предположим, что многочлен степени $n>1$

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq 0$$

— периодическая функция. По свойству V его производная $f'(x)$ — периодическая функция. Снова применяя свойство V, заключаем, что и его вторая производная $f'(x)=(f'(x))'$ — также периодическая функция, и т. д. Ясно, что периодической будет и его $(n-1)$-я производная; но эта производная

$$f^{(n-1)}(x)=n!a_0x+(n-1)!a_1$$

— линейная функция и потому периодической быть не может.

Упражнения

Определите, являются ли периодическими следующие функции:

1. $f_1(x)=[x]+\cos 2x$; $f_2(x)=[x]+\sin\pi x$.
2. $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$; $f_2(x)=2\pi^x-3e^x$
3. $f_1(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$;
   $f_2(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.
4. $f_1(x)=x\sin x$; $f_2(x)=\sin\sqrt{|x|}$.
5. $$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 1 & \text{при } x=0;\end{cases}$$
   $$f_2(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$
6. $f(x)=\sin(\ln(x^2+1))$.

Литература

1. Рывкин А. *Периодические функции.*— «Квант», 1973, № 5, с. 38—42.
2. Земляков А., Ивлев Б. *Периодические функции.*— «Квант», 1976, № 12, с. 34—39.
3. Гутенмахер В., Ивлев Б., Раббот Ж. *Сложение гармонических колебаний.*— «Квант», 1976, № 11, с. 44—46.

Информация

II Научно-техническая конференция школьников в МФТИ

В «Кванте» № 11 за 1986 год рассказывалось о первой научно-технической конференции школьников в МФТИ и предлагалось присылать рефераты и работы на следующую конференцию, запланированную на апрель 1987 года. Школьники откликнулись очень быстро. В начале марта этого года в МФТИ было прислано 220 работ из 33 городов страны. Омск и Львов, Свердловск и Тула, Киев, Челябинск, Тбилиси, Москва, Саратов, Запорожье и многие другие города были указаны в обратных адресах объемистых бандеролей с рефератами, графиками, схемами и программами для ЭВМ, поступивших в оргкомитет конференции. И вот 19 апреля 1987 года в Московском физико-техническом институте была проведена II Научно-техническая конференция школьников. На нее приехали около 100 участников из РСФСР, с Украины, из Белоруссии и Казахстана.

После торжественного открытия конференции начали работу секции математики, физики, теоретической физики и информатики, на которых участники выступили с докладами по своим работам. Затем состоялся просмотр «стендовых докладов» — работ, не заслушанных на секционных заседаниях.

Выступления школьников показали основное преимущество конференции перед олимпиадами и другими соревнованиями: возможность достаточно долго и глубоко разрабатывать заинтересовавшую тебя тему. Лучшие работы получились у ребят, творчески и аккуратно выполнивших эксперимент или проработавших большое количество литературы по теме реферата, а не у тех, кто за несколько дней переписал главу из вузовского учебника. Кроме того, выступление на конференции максимально приближено к настоящей научной работе, требующей творческого подхода к теме, больших затрат времени и труда.

После просмотра «стендовых докладов» перед ребятами выступили преподаватели МФТИ и специалисты из базовых институтов. Они ответили на многочисленные вопросы школьников. Участникам конференции были продемонстрированы различные физические эксперименты, в том числе эффект высокотемпературной сверхпроводимости, обнаруженный в начале 1987 года, буквально за два месяца до конференции.

Закончилась конференция награждением активных ее участников книгами по физике и математике (с автографами и пожеланиями авторов), грамотами МФТИ, дипломами и значками журнала «Квант». Но главной наградой для школьников было, наверное, само участие в конференции, знакомство с МФТИ — одним из ведущих вузов страны, встречи с учеными.

А теперь оргкомитет конференции ждет новых работ. Участником конференции может стать любой школьник. Для этого надо написать реферат (7—25 страниц), самостоятельно разобрав интересный вопрос по физике, технике, математике или программированию. Один экземпляр реферата надо до 1 февраля 1988 года выслать по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, оргкомитет III Научно-технической конференции школьников, второй оставить себе. Все вопросы по темам рефератов и организации конференции можно выяснить по телефону ЗФТШ: 408-51-45.

А. В. Сапожников,
член оргкомитета
конференции

Новосибирск — Андовер

Весной этого года состоялся обмен делегациями между Новосибирской ФМШ № 165 и известной частной школой США — Академией Филлипс, расположенной в штате Массачусетс в небольшом городке Андовере, в сорока километрах от Бостона. Восемь американских школьников с 17 марта по 14 апреля находились в Новосибирском Академгородке, а восемь сибиряков с 12 апреля по 7 мая — в Андовере. Своими впечатлениями о поездке в США делятся руководитель делегации зам. директора по учебно-воспитательной работе ФМШ № 165 В. Г. Харитонов и члены советской делегации.

В. Г. Харитонов:

Академия Филлипс — одна из старейших (основана в 1778 году) и самых престижных школ США. Обучаются в ней 1200 школьников четырех старших классов из 40 штатов США и 28 зарубежных стран. Отбор довольно строгий.

Городок Академии занимает несколько квадратных километров. По системе образования, принятой в США и, в частности, в Академии Филлипс, учебный год делится на три триместра. В каждом из них ученик должен выбрать пять различных курсов. Таким образом, у каждого школьника только пять предметов в триместре, но зато и уроки каждого предмета проводятся ежедневно. Обучение при этом всегда интенсивное.

Кабинеты естественно-научных дисциплин хорошо оборудованы, много наглядных пособий, которые широко используются. Огромные доски опоясывают стены аудитории. Есть в Академии Филлипс и своя астрономическая обсерватория с двумя вполне приличными телескопами. Школьники, выбравшие курс астрономии, должны провести ряд самостоятельных наблюдений.

Надо учитывать, что, выбирая те или иные курсы, американский школьник может, например, совсем не изучать физику. Различны уровни математических курсов.

Занятия — что-то промежуточное между лекцией и уроком. В группе 15—20 учеников, сидящих по одному за небольшими столиками.

Учитель много рассказывает, объясняет. Основная форма контроля — домашние задания и контрольные работы. Объем домашних заданий довольно велик, а так как уроки по всем предметам проходят каждый день, то ученикам Академии Филлипс приходится много и упорно трудиться.

Большое значение придается в Академии Филлипс занятиям спортом. Каждый ученик, кроме пяти курсов в триместр, обязан выбрать вид спорта, которым будет заниматься. По средам и субботам — встречи с другими школами как у себя, так и на выезде. Мы увидели несколько новых для нас интересных игр: бейсбол, лакросс*). Любопытно, что большинство тренеров — учителя других предметов. Спорт — это, так сказать, их общественная работа.

Итак, днем 12 апреля мы прибыли в Нью-Йоркский аэропорт имени Д. Кеннеди и с большой группой встречающих выехали в Андовер. В нашей делегации были девятиклассники: Ирина Павлова с Сахалина, Федор Бояркин из Бердска, Сергей Смирнов из Томской области и десятиклассники: Оксана Иванченко с Камчатки, Ольга Шуева из Кемерова, Андрей Васильев из Красноярска, иркутянин Александр Косых и алма-атинец Сергей Шаламов. Восемь советских школьников были размещены в восьми разных общежитиях. Все они, как и положено в Академии Филлипс, посещали пять различных курсов. Занятия по английскому языку и по программированию на языке «Паскаль» были организованы специально для гостей. Те курсы, которые мы выбрали по математике и физике, по уровню оказались немного слабее курсов ФМШ, но все же весьма похожими. Правда, из-за несовпадения по времени учебных программ курс математики был весьма прост для советских школьников (тема «Дифференцирование функций» в ФМШ была уже пройдена), а курс физики для девятиклассников был очень сложен (заканчивалась тема «Электромагнетизм», которая в ФМШ изучается в десятом классе). Тем не менее эти занятия были весьма полезны, особенно для совершенствования в английском языке, понимания жизни американских школьников.

Очень интересными оказались уроки искусства. В той части курса, на которую попали мы, изучались основы композиции в фотографии и живописи. При этом основное внимание уделялось развитию фантазии, умению видеть окружающий мир, творческому подходу. Обычно этот курс выбирают те школьники, которые хотят стать художниками, архитекторами, дизайнерами.

Из многих видов спорта, культивируемых в Андоверской школе, С. Шаламов выбрал софтбол*), а остальные — теннис.

Обширной была культурная программа. Мы посетили города Рокпорт и Глостер на берегу Атлантического океана, в Бостоне осмотрели океанский аквариум, дельфиний цирк, музей Науки, побывали на выступлении в том же Бостоне советского поэта Е. Евтушенко. Состоялась экскурсия по всемирно известному Гарвардскому университету. Кроме того, наша делегация участвовала в культурной жизни и самой Академии Филлипс. Многие советские школьники побывали в семьях американцев, живущих неподалеку от Андовера.

Последние три дня советские школьники провели в Нью-Йорке. Мы успели посмотреть довольно много: Метрополитен музей, музей современного искусства, фондовую биржу, побывали на смотровой площадке самого высокого в городе небоскреба, на матче бейсбольных команд, в одном из Бродвейских музыкальных театров.

Важной частью программы обмена были непосредственные контакты между школьниками. Может быть, это было даже главным, ибо позволило нам не только познакомиться друг с другом, но и завязать дружеские связи между отдельными людьми и между школами.

---

*) Лакросс — игра, придуманная североамериканскими индейцами, чем-то напоминающая хоккей на траве, но со своеобразными клюшками в виде сачков.

*) Софтбол — облегченный вариант бейсбола.

Советская делегация в Рокфеллеровском центре в телестудии NBC (Нью-Йорк).

Интерес к представителям СССР в Андовере был очень большой. Абсолютное большинство школьников и учителей, с которыми мы общались, были настроены очень дружелюбно к нашей стране и советским людям. Большое внимание уделяли программе обмена американское телевидение, радио и газеты. Информация о нас и об американской делегации в Сибири публиковалась в газетах «Бостон Глоб», «Лауренс Трибюн», местных андоверских газетах. Информация была в основном объективна и доброжелательна.

Подводя некоторые итоги первого обмена, надо отметить, что накопленный за 200 лет опыт работы одной из самых престижных американских школ может быть полезен для советского народного образования. Заслуживают глубокого изучения отдельные курсы и учебники, особенно по естественно-научным предметам и иностранным языкам, широкое применение компьютерной техники не только в математике, но и в преподавании искусства, языков и т. д. Много интересного можно почерпнуть в области конкретной методики преподавания различных предметов. С другой стороны, у американских партнеров большой интерес вызывает опыт работы Новосибирской ФМШ в условиях крупного научного и университетского центра, в частности, оригинальные курсы математики, физики, совершенно новый курс «Математическое моделирование физических процессов с помощью ЭВМ», система эстетического воспитания и организация жизни большого ученического коллектива в целом.

Обмен решено продолжить. Скоро в Новосибирск и в Андовер должны приехать следующие делегации уже в составе 10 учащихся.

О. Шуева:

Самое, пожалуй, главное — американские ровесники стали нашими очень хорошими друзьями. С ними я могла говорить буквально обо всем, потому что они пытались понять, вслушаться и высказать свою точку зрения. Между девчонками о политике мы говорили довольно мало, обсуждая только какие-то внешние аспекты. Но именно там я поняла, что в США создаются некоторые стереотипы нашей страны, хотя вообще к нам относились очень дружелюбно и гостеприимно.

О том, как мы учились. Каждый день у нас было 5 уроков по 50 минут.

Английский язык — курс, специально подготовленный для нас, где мы читали «Старик и море» и говорили с ребятами-американцами на заданную тему, пытались читать и понимать стихи.

Программирование вел замечательный учитель, не только профессионал своего дела, но и удивительный артист — импровизатор. Очень много работали на машинах, изучая ТУРБО-ПАСКАЛЬ, а главное — имели возможность узнать, какими могут быть уроки программирования в школе.

Курс искусства поразил и заинтересовал меня своей необычностью. Я бы сказала, неординарностью. У нас в ФМШ тоже есть курс истории искусств, но здесь мы чисто теоретически (хотя очень-очень интересно) изучали художников, скульпторов по определенным историческим этапам. В Андовере я была в группе, в которой на все объекты нас учили смотреть как-то со всех сторон, со всеми особенностями. Надо сказать, что этому было не трудно, но важно научиться. Вообще уроки искусства состояли из двух частей: рисования и фотодела. Например, нам нужно было получить фотографии разных типов:

1. Уловить очень интересный момент.
2. Сделать абстрактную фотографию.

При фотографировании мы пользовались самыми простыми фотоаппаратами. В школе есть специально оборудованная лаборатория для проявления пленок и печати фотографий.

Математика — очень часто проводились тесты на основе того, что рассказал учитель. Сдали их с честью!

Физика — в течение всего урока преподаватель доказывал все свои выводы соответствующими опытами.

Учителя Андоверской школы на уроке ведут себя очень раскованно, объясняя до тех пор, пока классу не станет все-все понятно, обладают высокой артистичностью, не вызывают к доске на уроках, но часто проводят не очень сложные тесты. На уроках (на всех) идет обсуждение со всей группой того, что учащиеся уже прочитали.

Андоверские школьники все занимаются каким-то видом спорта, учатся неистово, докапываясь до самой сути (не отстанут от учителя, пока он им все не только объяснит, но и докажет), очень талантливые ребята (это особенность самой школы), главное — думающие.

Без сомнения, поездка в Америку — это и отличная практика в английском языке. Первую неделю в Андовере мы говорили на английском языке гораздо лучше, так как очень аккуратно использовали те правила и основы, что получили на уроках и специальной предварительной подготовке (по английскому языку), которую проводили наши учителя. Но потом, когда стандартных фраз уже стало не хватать, мы стали изъясняться так, что американцы понимали нас с великим трудом. Зато мы уже привыкли, адаптировались и легко воспринимали информацию. Примерно к концу третьей недели я могла свободно и понятно говорить со своими соседями, друзьями.

С. Шаламов:

В Андовере мы помогли американским школьникам получить реальные и правдивые представления о советских школьниках. Оказалось, что между нами не так много различий.

Очень хорошо бы перенять у андоверских учащихся их работоспособность. Они занимаются очень много. Меня поразило поведение на уроках школьников и учителя. При всей своей свободности и раскованности ребята слушают его весь урок, и весь урок в классе тишина. Учителя очень подробно и хорошо объясняют материал, совмещая жесткий контроль с дружеским общением.

А. Васильев:

Все американцы, с которыми мы встречались (особенно в Андовере, где расположена школа), относились к нам очень хорошо. Везде мы встречали и желание понять, и желание помочь, где необходимо. Конечно, возникали у нас трудности с языком, особенно вначале, но и они были преодолимы.

Система образования в Академии Филлипс сильно отличается от нашей. Многое из того, что мы увидели, было бы полезно и у нас. Например, мне понравился урок искусства. На этом уроке учитель учит не мастерству рисования или фотографирования, а умению видеть мир, смотреть на что-то обычное с необычной точки. Кстати, слово «учит» здесь не совсем верно, учитель не дает указания, а советует, никогда не настаивая на своей точке зрения.

О. Иванченко:

За месяц учебы я узнала много нового не только из курсов, которые посещала, но и из жизни учащихся Академии Филлипс.

Отношения между учителем и учеником в этой школе свободнее, чем у нас, нет традиции поднимать руку, вставать перед учителем. Однако чувствовалось огромное уважение с обеих сторон. Ни разу не замечала, чтобы ученики отвлекались во время уроков. Учитель может несколько раз объяснять непонятную вещь, никого этим не смущая. Учащиеся сами выбирают курсы, поэтому у них бо́льшая заинтересованность в их изучении.

Неизгладимое впечатление оставил школьный драматический театр. Андоверские школьники — замечательные артисты.

А. Косых:

Я жил среди американцев, молодых американцев. И я видел, что они подчас думают о нас то же самое, что и мы о них. Сейчас я хорошо понимаю их и гораздо лучше понимаю себя, друзей — нас.

Ф. Бояркин:

Отношение к нам со стороны американских учащихся и жителей Андовера, с которыми мы общались, было очень хорошее и доброе. Нигде мы не встретили ненависти к нам как к советским людям. В разговорах с американцами всегда чувствовалось желание узнать что-то новое о нашей стране, о нашей школе и о многом другом.

Я понял, что у американцев те же мысли и интересы, они хотят дружбы между нашими странами.

И. Павлова:

Мы получили возможность свободного, если можно так сказать, «неофициального» общения с нашими сверстниками в Соединенных Штатах. Мы смогли сами, не из вторых рук узнать друг друга. Я, например, после двух недель пребывания чувствовала себя обыкновенной ученицей этой школы. Между нами и учениками Академии Филлипс не было никакой преграды, затрудняющей общение. Мне очень понравились естественность, ненатянутость наших отношений.

Мы получили прекрасную возможность изучать английский язык. Пожалуй, обмен дал толчок к более интенсивному изучению иностранного языка в школе. Мы на деле убедились, как он необходим.

В Академии Филлипс очень многие ученики играют на каких-либо музыкальных инструментах. У нас есть музыкальные и художественные школы, в которых учатся дети, имеющие способности, но учащиеся старших классов поступить в них уже не могут. Было бы неплохо, если бы в наших школах мы изучали музыку, но не в начальных классах, а в старших.

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

7 класс

1. Мальчик действует на рычаг с силой $F=400$ Н (рис. 1). Какова максимальная масса груза, который он может поднять, используя данное устройство, если $l_1=1$ м, $l_2=6$ м, $R=0{,}5$ м?

2. В прошлом из-за отсутствия транспорта снег из крупных городов не вывозили, а растапливали с помощью специальных печей, которые устанавливались во дворах. Для растапливания снега использовали дрова, теплота сгорания которых $q=1{,}0\cdot10^7$ Дж/кг. Оцените, какое минимальное количество дров требуется на зиму для очистки таким образом двора площадью 500 м^2, если толщина снежного покрова за зиму достигает 40 см. Плотность снега $\rho=700$ кг/м^3, его удельная теплота плавления $\lambda=3\cdot10^5$ Дж/кг.

3. Английский ученый XVIII века Ф. Гауксби поставил такой опыт. Стеклянный шар окружили горизонтально расположенным металлическим ободом, центр которого совпадал с центром шара. К ободу по всему периметру привязали тонкие льняные нити. Когда шар зарядили, нити оказались направленными к центру шара. Гауксби заметил, что если при этом поднести палец к свободному концу одной из нитей, то между нитью и пальцем возникает взаимодействие. Если же поднести палец к участку нити, близкому к точке закрепления, то характер взаимодействия меняется на противоположный. В каком случае Гауксби наблюдал отталкивание нити и пальца, а в каком — притяжение?

4. На лабораторных занятиях учитель собрал цепь из пяти резисторов с одинаковыми сопротивлениями и подключил ее к сети постоянного тока (рис. 2). После этого учащимся Ане, Боре, Вите, Грише и Диме были выданы одинаковые школьные вольтметры, с помощью которых каждый должен был измерить напряжение на резисторе, помеченном соответствующей буквой. Результаты измерений оказались следующими: Аня — 1 В, Боря — 1 В, Витя — 2 В, Гриша — 4 В, Дима — 5 В. Проверяя вольтметры после занятий, учитель обнаружил, что у одного из них смещена шкала. Кто из ребят пользовался неисправным вольтметром?

8 класс

1. Школьная линейка длиной $l=20$ см висит на высоте h над горизонтально направленным лучом лазера (рис. 3). В некоторый момент времени линейку отпускают. Определите h, если известно, что падающая линейка перекрыла луч на время $\tau=0{,}5$ с.

2. Кусок мыла массой m соскальзывает в ванну, профиль которой изображен на рисунке 4. Высота ванны h, радиусы закруглений R. Начертите график зависимости суммарной силы давления куска мыла на ванну от мгновенного положения мыла. Трение между мылом и ванной отсутствует, начальная скорость равнялась нулю.

3. Определите среднюю скорость движения электронов в медном проводе сечением $S=1$ мм^2, когда по нему течет ток $I=1$ А. Плотность меди $\rho=8{,}9$ г/см^3, молярная масса $M=64$ г/моль. Известно, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, заряд которого $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. Число Авогадро (количество молекул в одном моле вещества) $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

4. Схема, изображенная на рисунке 5, собрана из батарейки, двух одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров. Параллельно соединенные приборы показывают $U_1=0{,}25$ В и $I_1=0{,}75$ мА, второй миллиамперметр показывает $I_2=1$ мА. Определите напряжение батарейки и сопротивления приборов.

5. Система состоит из трех подвижных невесомых блоков, соединенных невесомыми нитями (рис. 6). Массы грузов, подвешенных к крайним блокам, одинаковы и равны M. а) При каких значениях массы m груза, подвешенного к центральному блоку, и коэффициента трения μ между крайними блоками и опорами система будет находиться в равновесии? б) Будет ли равновесие устойчивым?

9 класс

1. Система, изображенная на рисунке 7, падает с некоторой высоты h. Во время падения тело массой m неподвижно относительно коробки (масса коробки M). Какой должна быть высота h, чтобы после абсолютно неупругого удара об пол коробка подскочила? Жесткость каждой пружины k.

2. В исходном состоянии схемы (рис. 8) конденсаторы не заряжены и ключ K не замкнут. Какой заряд протечет через резистор сопротивлением $R=800$ Ом, если замкнуть ключ? $\mathcal{E}_1=10$ В, $\mathcal{E}_2=20$ В, $C_1=1$ мкФ, $C_2=2$ мкФ.

3. Один моль идеального одноатомного газа последовательно участвует в двух процессах: *1—2* и *2—3* (рис. 9). В первом из них давле-

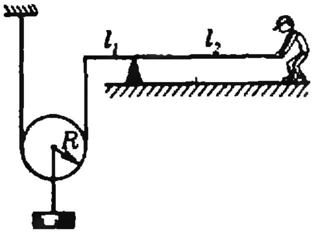


Рис. 1.

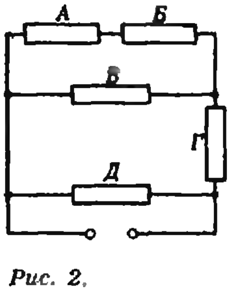


Рис. 2.

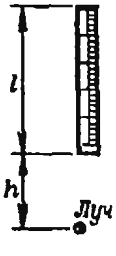


Рис. 3.

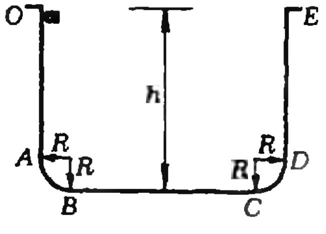


Рис. 4.

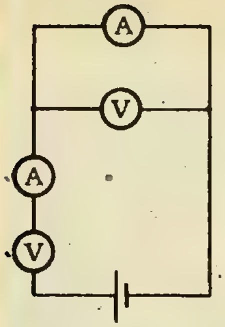


Рис. 5.

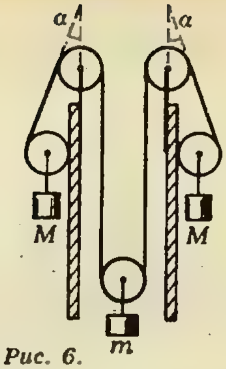


Рис. 6.

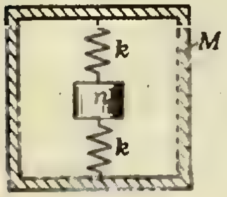


Рис. 7.

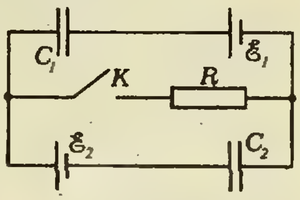


Рис. 8.

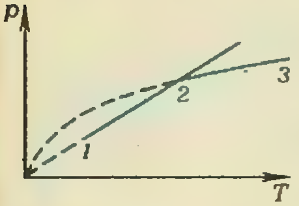


Рис. 9.

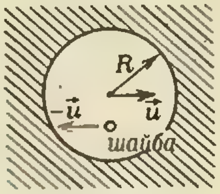


Рис. 10.

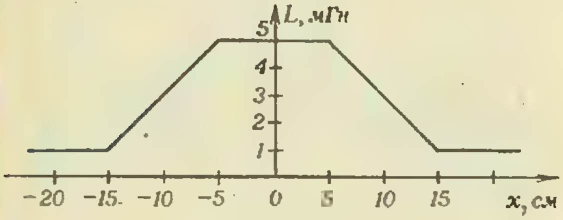


Рис. 11.

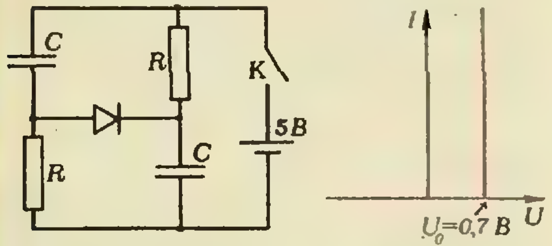


Рис. 12.

ние p пропорционально температуре T, во втором p пропорционально $\sqrt{T}$. Определите теплоемкость газа в каждом из двух процессов.

4. Сфера радиусом R разрезана на две половины, которые равномерно покрыты зарядом с поверхностной плотностью σ_1 и σ_2 соответственно. Сферу окружают проводящей заземленной оболочкой, радиус которой близок к радиусу сферы. Найдите силы, действующие на обе половинки сферы (краевыми эффектами вблизи линии разреза можно пренебречь). Изменятся ли эти силы, если оболочка будет не заземленной, а изолированной?

5. В кастрюлю объемом $V=1{,}5$ л налито $m=200$ г молока. Хорошо известно, что при кипячении молока на его поверхности появляется плотная пенка. Кастрюля стоит на плите и нагревается от $t_1=98\ ^\circ\mathrm{C}$ до $t_2=99\ ^\circ\mathrm{C}$ за $\tau=0{,}5$ мин. Через какое время после этого молоко убежит? Обычное молоко на 90 % состоит из воды, удельная теплоемкость которой $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), а удельная теплота парообразования $r=2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг. Теплоемкостью кастрюли пренебречь.

10 класс

1. Жюри олимпиады заседало в комнате площадью $S=20$ м^2 и высотой $H=3$ м. В результате жарких споров температура воздуха в комнате повысилась от $t_1=17\ ^\circ\mathrm{C}$ до $t_2=21\ ^\circ\mathrm{C}$, а влажность — от $\varphi_1=40\,\%$ до $\varphi_2=60\,\%$. При температуре t_1 давление насыщенных паров воды $p_1=1{,}94$ кПа, а при температуре t_2 — $p_2=2{,}49$ кПа. Молярная масса водяного пара $M=0{,}018$ кг/моль. Сколько воды испарилось в комнате?

2. В цилиндрической коробке радиусом R с гладкими стенками находится маленькая шайба, масса которой совпадает с массой коробки, причем расстояние от центра коробки до шайбы составляет половину радиуса коробки. В некоторый момент времени коробке сообщили скорость $\vec{u}$, направленную вправо, а шайбе — такую же по модулю скорость, направленную влево (рис. 10). Определите траекторию движения коробки по столу. Удары абсолютно упругие, трение отсутствует.

3. Короткозамкнутая сверхпроводящая катушка имеет железный сердечник, который может перемещаться вдоль ее оси. Зависимость индуктивности L катушки от смещения x центра сердечника относительно центра катушки показана на рисунке 11. В начальном состоянии $x=0$ (сердечник вставлен в катушку), ток в катушке $I_н=1$ А. Затем сердечник вынимают. Чему будет равен ток в катушке после этого?

4. В исходном состоянии схемы (рис. 12) конденсаторы не заряжены. В момент $t=0$ ключ K замыкают. Найдите заряд, протекший через диод, если $R=10$ кОм, $C=1$ мкФ, внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь. Вольтамперная характеристика диода приведена на графике на рисунке 12.

Публикацию подготовили
А. И. Буздин, С. С. Кротов, О. Ю. Овчинников

Задачи пятидесятой Московской городской математической олимпиады

Заключительный тур пятидесятой Московской городской математической олимпиады состоялся 15 февраля 1987 года в Московском университете. В нем участвовало 697 школьников 7—10 классов. Ниже приводятся задания этого тура (рассчитанные на 4 часа). Пять из задач этого списка были включены в «Задачник «Кванта», и в этом номере публикуются их решения.

7 класс

1. В марте 1987 года учитель решил провести 11 занятий математического кружка. Доказать, что если по субботам и воскресеньям

кружок не проводить, то в марте найдутся три дня подряд, в течение которых не будет ни одного занятия кружка.

2. Доказать, что из любых 27 различных натуральных чисел, меньше 100, можно выбрать два числа, не являющиеся взаимно простыми.

3. По поляне, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной 100 м, бегает волк. Охотник убивает волка, если стреляет в него с расстояния не более 30 м. Доказать, что охотник может убить волка, как бы быстро тот ни бегал.

4. Пусть AB — основание трапеции $ABCD$. Доказать, что если $AC+BC=AD+BD$, то трапеция $ABCD$ — равнобокая.

5. Али-Баба и 40 разбойников решили разделить клад из 1987 золотых монет следующим образом: первый разбойник делит весь клад на две части, затем второй разбойник делит одну из частей на две части и т. д. После 40-го деления первый разбойник выбирает наибольшую из частей, затем второй разбойник выбирает наибольшую из оставшихся частей и т. д. Последняя, 41-я часть достается Али-Бабе. Для каждого из 40 разбойников определить, какое наибольшее количество монет он может себе обеспечить при таком дележе независимо от действий других разбойников.

8 класс

1. Доказать, что если $a>b>0$ и $\frac{x}{a}<\frac{y}{b}$, то справедливо неравенство $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)>$ $>\frac{x+y}{a+b}$.

2. Школьник хочет вырезать из квадрата размером $2n\times 2n$ наибольшее количество прямоугольников размером $1\times(n+1)$. Найти это количество для каждого натурального значения n.

3. (М1042). В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (кроме команды всего класса). Доказать, что каждая команда учащихся будет соревноваться с командой всех остальных учащихся класса.

4. В пятиугольнике $ABCDE$ углы при вершинах B и D — прямые, $\angle BCA=\angle DCE$, а точка M — середина стороны AE. Доказать, что $MB=MD$.

5. Можно ли выбрать некоторые натуральные числа так, чтобы при любом натуральном значении n хотя бы одно из чисел n, $n+50$ было выбрано и хотя бы одно из чисел n, $n+1987$ не было выбрано?

9 класс

1. Даны 7 различных цифр. Доказать, что для любого натурального числа и найдется пара данных цифр, сумма которых оканчивается той же цифрой, что и число.

2. (М1041). По k вершинам правильного пятиугольника с помощью двусторонней линейки восстановить остальные вершины в случае: а) $k=4$; б) $k=3$. (Двусторонней линейкой можно делать то же, что и обычной линейкой без делений, а также проводить прямую, параллельную данной, на расстоянии, равном ширине линейки.)

3. Найти такие 50 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на любое из оставшихся чисел.

4. Доказать, что для любых чисел $a_1, \ldots$ $\ldots, a_{1987}$ и положительных чисел $b_1, \ldots, b_{1987}$ справедливо неравенство

$$\frac{(a_1+\ldots+a_{1987})^2}{b_1+\ldots+b_{1987}}\leqslant\frac{a_1^2}{b_1}+\ldots+\frac{a_{1987}^2}{b_{1987}}.$$

5. Таня уронила мячик в огромный прямоугольный бассейн. Она хочет его достать с помощью 30 узких досок длиной 1 м каждая, построив из них мостики так, чтобы каждая доска опиралась концами на края бассейна или на уже положенные доски и чтобы в итоге одна из досок прошла над мячиком. Доказать, что Тане не удастся это сделать, если расстояния от краев бассейна до мячика превышают 2 м.

10 класс

1. (ср. М1044). а) Доказать, что из трех положительных чисел всегда можно выбрать такие два числа x и y, что $0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}\leqslant 1$.

б) Верно ли, что указанные два числа можно выбрать из любых четырех чисел?

2. Углы, образованные сторонами правильного треугольника с некоторой плоскостью, равны α, β и γ. Доказать, что одно из чисел $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ равно сумме двух других.

3. На клетчатой бумаге закрашены 17 единичных клеток. Доказать, что их можно покрыть прямоугольниками, сумма периметров которых не превосходит 100, причем расстояние между любыми точками разных прямоугольников не меньше $\sqrt{2}$.

4. (М1043). Можно ли разбить множество целых чисел на три подмножества так, чтобы для любого целого значения n числа n, $n-50$, $n+1987$ принадлежали трем разным множествам?

5. (М1045). В некотором царстве, территория которого имеет форму квадрата со стороной 2 км, царь решает созвать всех жителей к 7 ч вечера к себе во дворец на бал. Для этого он в полдень посылает с поручением гонца, который может передать любое указание любому жителю, который в свою очередь может передать любое указание любому другому жителю и т. д. Каждый житель до поступления указания находится в известном месте (у себя дома) и может передвигаться со скоростью 3 км/ч в любом направлении (по прямой). Доказать, что царь может организовать оповещение так, чтобы все жители успели прийти к началу бала.

Задачи предложили: *А. Андреев* (IX, 4), *С. Гашков* (VIII, 1; IX, 1), *М. Гринчук* (IX, 2; IX, 5), *С. Конягин* (VII, 3; VIII, 5; X, 4; X, 5), *Л. Конягина* (VII, 1), *О. Леонтьева* (IX, 3), *В. Прасолов* (X, 2), *И. Сергеев* (VII, 2; VII, 4; VII, 5; VIII, 3; VIII, 4; X, 1; X, 3). *Публикацию подготовил И. Н. Сергеев.*

Ответы, указания, решения

Соображения непрерывности

1 а), в). Будем поворачивать прямую, проходящую через данную точку, вокруг этой точки и следить за разностью площадей частей фигуры, лежащих по разные стороны прямой. После поворота на 180° эта разность поменяет знак. Поэтому в некоторый момент она была равна нулю.

б). Если точка «уходит» в бесконечность, то семейство прямых, проходящих через нее, превращается в семейство параллельных прямых, а задача 1,а превращается в задачу, разобранную в тексте.

г). В п. а — да; в п. в — нет, как показывает пример точки, расположенной в центре круга.

2 а). В каждом направлении можно провести единственную прямую, делящую площадь первой фигуры пополам. Будем изменять направление, беря всякий раз прямую, делящую пополам площадь первой фигуры, и будем следить за разностью площадей частей второй фигуры, лежащих по разные стороны прямой.

в). Соедините центры параллелограммов.

3. Будем изменять направление прямой, делящей площадь фигуры пополам, и следить за разностью периметров частей границы, лежащих по разные стороны прямой.

4 а). После изменения направления выбранных касательных параллельных хорд на 180° величина S_1-S_2 поменяет знак. Значит, был такой момент, когда $S_1-S_2=0$.

5. В любом направлении можно провести ровно две хорды, каждая из которых делит площадь в отношении 1:2. После изменения направления на 180° эти хорды поменяются местами.

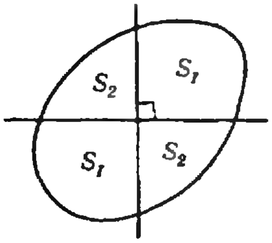


Рис. 1.

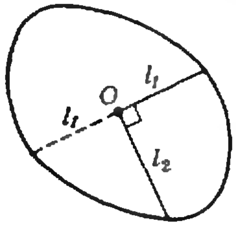


Рис. 2.

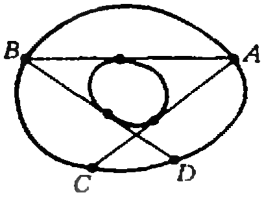


Рис. 3.

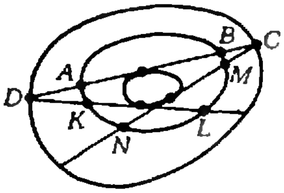


Рис. 4.

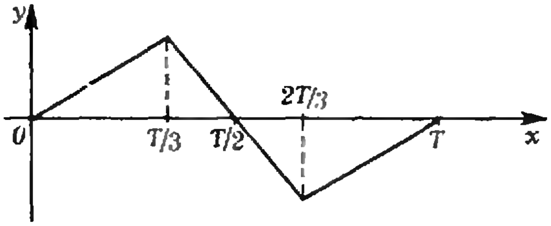


Рис. 5

6. Существует единственный прямоугольник, описанный около фигуры, две стороны которого имеют данное направление. Если изменить это направление на перпендикулярное, пары параллельных сторон прямоугольника поменяются местами.

7 б). Выберем прямую данного направления, делящую площадь фигуры пополам, и проведем перпендикулярную ей прямую, также делящую площадь фигуры пополам. Тогда площади накрест лежащих частей фигуры равны (рис. 1). После изменения направления на 90° части S_1 и S_2 поменяются местами, т. е. изменится знак разности S_1-S_2. Значит, был момент, когда $S_1-S_2=0$, т. е. $S_1=S_2$.

8. Проведем из центра симметрии O два перпендикулярных отрезка l_1 и l_2 (рис. 2). После изменения направления на 90° эти отрезки поменяются местами. Значит, в некоторый момент $l_1=l_2$.

9 а). Можно рассуждать, как в задаче 4,*а*.

б). Пусть AB — касательная хорда наибольшей длины (рис. 3). Тогда $AC \leqslant AB$ и $BD \leqslant AB$. Будем передвигать точку B по внешней кривой и следить за разностью длин правой и левой касательных хорд, проведенных из точки к внутренней кривой. В точке B эта разность неположительна, а в точке A — неотрицательна. Значит, в некоторой точке она равна нулю.

10. Рассуждаем, как в задаче 9. Если AB имеет наибольшую длину (рис. 4), то $MN \leqslant AB$ и $KL \leqslant AB$. Будем передвигать точку C по внешней кривой и следить за разностью длин правой и левой хорд средней кривой, проходящих через эту точку и касающихся внутренней кривой. В точке C эта разность неотрицательна, а в точке D — неположительна.

12. Будем отсчитывать время в часах от позавчерашней полуночи. Пусть $f(t)$ — температура в момент t; $g(t)=f(t+24)-f(t)$. По условию $f(24)<f(0)$ и $f(48)>f(24)$. Значит, $g(0)<0$ и $g(24)>0$. Следовательно, найдется такое t, что $g(t)=0$. В этот момент $f(t+24)=f(t)$.

13. Пусть $[a; b]$ — данный отрезок; $g(x)=f(x)-x$. Тогда $g(a)\geqslant 0$, $g(b)\leqslant 0$ (сделайте рисунок). Значит, найдется такое x, что $g(x)=0$ и $f(x)=x$.

14. Если $f(x)\neq x$ при всех x, то $f(x)>x$ при всех x или $f(x)<x$ при всех x. Если $f(x)>x$, то $f(f(x))>f(x)>x$. Поэтому уравнение $f(f(x))=x$ не имеет решений. Аналогично в случае $f(x)<x$.

15 в). Пусть хорд длиной $l=T\cdot\frac{p}{q}$ не существует. Тогда уравнение $f(x+l)=f(x)$ не имеет решений, т. е. $f(x+l)>f(x)$ для всех x или $f(x+l)<f(x)$ для всех x. Рассмотрим первый случай. Тогда $f(x+ql)>f(x+(q-1)l)>\ldots>f(x)$. Но $f(x+ql)=f(x+pT)=f(x)$, так как T — период. Получилось противоречие. Второй случай рассматривается аналогично.

г). Пусть l несоизмеримо с периодом. Пусть $|f(x+l)-f(x)|\geqslant\varepsilon>0$ для всех x. Тогда $|f(x+nl+kT)-f(x)|\geqslant\varepsilon$ для любых целых n и k. Но числа n и k можно подобрать так, что величина $\delta=nl+kT$ станет настолько малой, что $|f(x+\delta)-f(x)|<\varepsilon$. Получилось противоречие.

16 в). Рассуждение — как в задаче 15,в.

г). См. рис. 5.

17. Если среднее значение функции равно нулю, то у нее есть как неположительные, так и неотрицательные значения. Поэтому мож-

но применить теорему о промежуточном значении.

18. $\int\limits_0^{2\pi} \sin px\,dx = -\frac{\cos px}{p}\Big|_0^{2\pi} = 0$, и аналогично $\int\limits_0^{2\pi} \cos qx\,dx = 0$. Поэтому среднее значение $f(x)$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$ равно нулю.

Функции периодические и непериодические

1. $f_1(x)$ — непериодическая; $f_2(x)$ — периодическая.
2. $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непериодические.
3. $f_1(x)$ — непериодическая; $f_2(x)$ — периодическая (указание: докажите, что $f_2(x)=0$, $x \in R$).
4. $f_1(x)$ — непериодическая; $f_2(x)$ — непериодическая (указание: рассмотрите уравнение $f_2(x+T)=f_2(x)$ относительно T при $x=0$ и при $x=\pi^2$).
5. $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непериодические (указание: решите уравнения $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=0$).
6. $f(x)$ — непериодическая (указание: вычислите производную функции $f(x)$ и докажите ее непериодичность).

Кто с кем танцует?
(см. с. 37)

Обозначим возраст Игоря через x, возраст Антона через y и возраст Максима через z. Тогда всем шестерым танцорам будет $2(x+y+z)-9=115$ лет, так как каждая девушка на 3 года моложе своего партнера. Отсюда следует также, что Юля не может быть партнершей ни Игоря, ни Антона, так как суммы их возрастов — четные числа, и следовательно, возрасты не могут отличаться на 3. Итак, Юля — партнерша Максима, ей $(z-3)$ года, Игорю $(39-z)$ лет, Антону $(43-z)$ лет. Подставляя полученные значения для x и y в первое уравнение, получаем $z=20$, $y=23$, $x=19$. Таким образом, самый молодой — Игорь, с ним танцует Ира, а Светлана танцует с Антоном.

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

7 класс

1. $m_{max}=480$ кг (результат не зависит от радиуса блока).
2. $m_{min}=4200$ кг.
3. Притяжение наблюдалось при поднесении пальца к свободному концу нити.
4. Смещенная шкала была у вольтметра, которым пользовался Дима.

8 класс

1. Перекрытие луча на время, указанное в условии задачи, невозможно — задача не имеет решения.

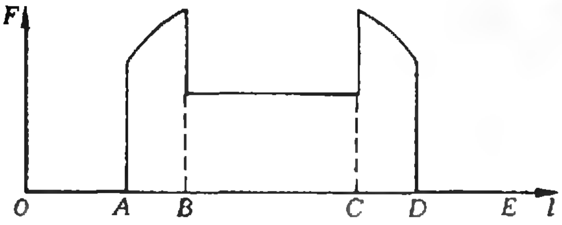


Рис. 6.

2. См. рис. 6.
3. $v=IM/(e\rho SN_A)=0{,}075$ мм/с.
4. $R_A=U_1/I_1=333$ Ом; $R_V=U_1/(I_2-I_1)=1000$ Ом; $U_б=U_1+I_2(R_V+R_A)=1{,}58$ В.
5. а) $m=2M/(1+\cos\alpha)$; $\mu \geqslant 1/\sin\alpha$; б) равновесие устойчивое.

9 класс

1. $h \geqslant \frac{Mg}{2k}\left(1+\frac{M}{2m}\right)$.
2. $Q=C_1\mathscr{E}_1+C_2\mathscr{E}_2=5\cdot10^{-5}$ Кл.
3. $C_1=C_V=\frac{3}{2}R$; $C_2=C_V+\frac{1}{2}R=2R$.
4. $F_1=\pi R^2\sigma_1^2/(2\varepsilon_0)$; $F_2=\pi R^2\sigma_2^2/(2\varepsilon_0)$; силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены противоположно друг другу и перпендикулярно плоскости, разделяющей обе половины сферы.
5. Молоко убежит примерно через 1,5 минуты.

10 класс

1. $\Delta m=\frac{MSH}{R\cdot100\%}\left(\frac{\varphi_2p_2}{T_2}-\frac{\varphi_1p_1}{T_1}\right)=0{,}313$ кг.
2. Центр коробки движется внутри окружности радиусом $R/2$ по траектории в виде равностороннего треугольника.
3. $I_к=I_нL_н/L_к=5$ А.
4. $q=C(\mathscr{E}-U_3)/2=2{,}15\cdot10^{-6}$ Кл.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1. а) Правая часть делится на 11, а левая — нет. б) Левая часть делится на A, а правая — лишь при $A=1$; значит, $A=1$, и из уравнения $(10+B)\cdot111=(101+10\cdot B)\cdot11+1$, получаем, что $B=2$. в) Левая и правая части представляются, как $\overline{AB}\cdot\overline{AA}\cdot101$.
2. Сумма всех очков домино равна 168. В среднем в кучках по 42 очка. Теперь нетрудно подобрать нужные значения сумм очков: 37, 41, 43, 47.
3. 9453,5+9453,5=18 907.
4. Магнитное поле Земли оказывает ориентирующее действие на стрелку компаса. Если бы жестко скрепленную с пробкой стрелку поставили не на воду, а на шероховатую твердую поверхность, то сила трения покоя не дала бы пробке развернуться так, чтобы стрелка указывала на север. В воде же сила трения покоя отсутствует; поэтому под действием магнитного поля Земли опущенная на воду пробка с закрепленной на ней стрелкой компаса начнет совершать колебания около направления на север. В конце концов из-за сопротивления воды эти колебания затухнут, и стрелка будет указывать на север.
5. 2,2,8,4,3,2,2,2,3,2.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 6)

Задание 11 (Д. Годес, 1983 г.). **1. Cg5! a2 2. Cf6 Kpd2 3. c4 Kpd3.** Черные пытаются спастись при помощи геометрического маневра Рети — направляясь одновременно и к слону, и к пешке. Однако их ждет разочарование. **4. c5 Kpe4 5. c6 Kpf5.** Если слон отступает, то черный король попадает в квадрат пешки. Но ... **6. c7! Кр:f6 7. c8Ф a1Ф 8. Фh8+** и **9. Ф:a1.** Теперь понятно, почему не годилось 1. Cd4 или 1. Cf4.

Задание 12 (И. Крихели, 1984 г.) 1. a4 Kf2 2. a5 Ke4 3. a6 Kd6+ 4. Kpd7 Kb5 5. f5 Kpg5 6. Kpc6 Ka7+ 7. Kpb7 Kb5 8. Kpb6 Kd6 9. Kpc6 Kc8 10. Kpd7 Ka7. Кажется, что конь легко удерживает пешку «а», а другая пешка тем более не опасна, так как рядом с ней черный король. И все же, успешно маневрируя, белый король разрушает оборону противника. 11. Kpe6 Kc8 12. f6 Kpg6 13. f7 Kpg7 14. Kpd7 Ka7 15. Kpe8 с победой.

К нашим читателям

Продолжается подписка
на журнал «Квант» на 1988 год.
Журнал рассчитан
на учеников 6—10 классов.
Он полезен учителям,
особенно тем, кто ведет
кружки и факультативные
занятия, и всем
любителям математики
и физики.
Индекс журнала в каталоге
«Союзпечати» 70465.
Подписная цена на год
4 рубля 80 копеек.
Подписка принимается
без ограничений
в течение всего года
в агентствах «Союзпечати»,
на почтамтах
и в отделениях связи.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишкин, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционая коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук,
В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин,
Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин,
Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов,
Г. Н. Яковлев

Номер подготовили
А. Н. Виленкин,
А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили.
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов,
Т. Н. Кольченко, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина,
Э. В. Назаров, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор М. Л Медведская

Сдано в набор 16.07 87. Подписано к печати 20.08.87
Т 17578. Бумага 70×108/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,35
Тираж 200 519 экз. Цена 40 коп. Заказ 1943

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

СТАТИСТИКА ЭНДШПИЛЯ

Оценивая некоторый класс окончаний как ничейный или выигрышный для сильнейшей стороны, мы интуитивно опираемся на некоторую статистику. Например, есть такое известное изречение С. Тартаковера: «Все ладейные эндшпили ничейны». Разумеется, гроссмейстер имел в виду лишь то обстоятельство, что выиграть такое окончание нелегко.

С другой стороны, в борьбе ферзя против ладьи слабейшая сторона иногда добивается ничьей, но эти окончания считаются выигрышными, потому что доля позиций, в которых ферзь справляется с ладьей, близка к 100 процентам.

Итак, статистический подход позволяет охарактеризовать тот или иной вид эндшпиля. Но, понятно, такой подход требует помощи ЭВМ. К. Томпсон, программам которого принадлежат многие рекорды длительности игры, для каждого класса исследуемых окончаний приводит соответствующие статистические данные. При этом наше представление о некоторых видах эндшпиля существенно меняется.

Ладья со слоном против ладьи. Традиционно считается, что это окончание теоретически ничейно, хотя и защищаться довольно скучно. Но вот машинное исследование показало, что среди всех возможных положений с ладьей и слоном против ладьи доля выигрышных составляет 40,1 %! Выражаясь математическим языком, вероятность победы у стороны, владеющей материальным перевесом, равна примерно 0,4. Правда, здесь мы как бы сделали два допущения: а) все позиции данного класса имеют одинаковый шанс возникнуть на доске во время игры; б) при «доигрывании» любой из них обе стороны играют оптимальным образом.

Ферзь с пешкой против ферзя. Вероятность выигрыша существенно зависит от расположения пешки. Наибольший процент выигрышных позиций достигается при пешке на d7 или e7 — 85,6 %. Другой крайний случай — при пешке на a3 (h3), тогда процент почти вдвое меньше — 48,5 %.

Ладья с пешкой против ладьи. Максимальная вероятность выигрыша также достигается при пешке на d7 (e7), причем она еще выше — 89,1 %, а минимальный шанс при пешке на a2 (h2) — 44 %.

Ладья и конь против ладьи. Этот трудный эндшпиль до недавних пор считался совершенно ничейным. Однако компьютерные исследования показали, что процент выигрышных позиций достаточно высок — 35,9 %.

Ферзь со слоном против ферзя, ферзь с конем против ферзя. Эти окончания почти не встречаются на практике. Многие думают, что выигрыш в них маловероятен, но компьютер опроверг эту точку зрения. В первом классе 33,4 % выигрышных позиций, а во втором — 48,4 %.

Два разноцветных слона против коня. Это окончание вызвало много споров, особенно среди этюдистов. Совсем недавно ЭВМ доказала, что сильнейшая сторона почти всегда побеждает — 91,8 % выигрышных положений.

Ферзь против двух легких фигур. Эти окончания можно считать проигранными для слабейшей стороны. А машинная статистика выигрышных позиций такова:

ферзь против двух коней — 89,7 %,

ферзь против двух слонов — 92,1 %,

ферзь против слона и коня — 93,1 %.

Теории известны ситуации, когда две легкие фигуры сооружают неприступную крепость около своего короля. Исследуя эти окончания, машина интересовалась необычными позициями взаимного цугцванга. Оказалось, что в двух случаях из трех такие конфигурации единственны (см. «Квант», 1987, № 2).

Укажем теперь три рекордные позиции, в которых ферзь с королем вынуждены потратить максимальное время, чтобы забрать одну из легких фигур.

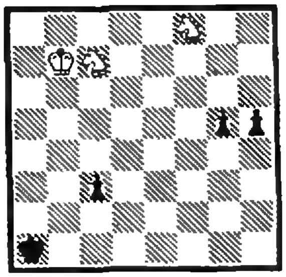
Белые: Кра8, Фb6; черные: Крd7, Сd5, Кe7. Лишь на 42-м ходу белые берут коня или слона.

Белые: Крd8, Фh1; черные: Крd6, Кe5, Кh8. При оптимальной игре обеих сторон конь гибнет лишь на 63-м ходу.

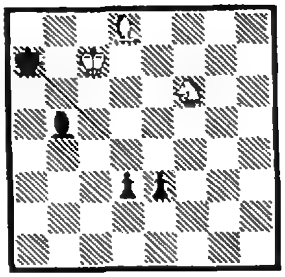
Белые: Кра8, Фа1; черные: Крd7, Сc5, Сd5.

1. Крb8 Сd6+ 2. Кра7 Сc5+ 3. Кра6 Сc4+ 4. Кра5 Крd6 5. Фe1 Крd5 6. Фc3 Сd4 7. Фf3+ Крe5 8. Фg3+ Крe4 9. Фh4+ Крe3 10. Фe7+ Крd3 11. Крb4 Сd5 12. Фe1 Сf3 13. Фh4 Крe3 14. Крc4 Сe2+ 15. Крd5 Сf3+ 16. Крe6 Сe4 17. Фg3+ Крd2 18. Фf4+ Крd3 19. Крd6 Сc3 20. Фg3+ Крd2 21. Фg1 Сd3 22. Крc5 Крc2 23. Фe3 Сb2 24. Крb4 Сc3+ 25. Кра3 Сb2+ 26. Кра4 Сc3 27. Фc5 Сe4 28. Фc4 Сf3 29. Крb5 Сd1 30. Фа2+ Крd3 31. Фg2 Сe2 32. Крc5 Сd1 33. Фh3+ Крd2 34. Крd5 Сb3+ 35. Крe4 Сc2+ 36. Крf4 Сd4 37. Фа3 Сd3 38. Фb4+ Сc3 39. Фа4 Сb2 40. Крf3 Сc3 41. Фа7 Сb2 42. Фc5 Сe2+ 43. Крf2 Сd3 44. Фg5+ Крc2 45. Фd5 Крd2 46. Фа2 Крc3 47. Крe1 Сc4 48. Фа5+ Крb3 49. Фb6+ Крc3 50. Фb7 Крc2 51. Фh7+ Крb3 52. Фb1 Крc3 53. Фe4 Са3 54. Фe3+ Крb2 55. Крd1 Сb3+ 56. Крd2 Сb4+ 57. Крd3 Са2 58. Фe2+ Крb3 59. Фc2+ Кра3 60. Крd4 Сb3 61. Фc1+ Кра2 62. Крd3 Са3 63. Фc7 Сb2 64. Фа7+ Крb1 65. Крd2 Сd5 66. Фb6 Сe4 67. Фb5 Сg2 68. Фe2 Сb7 69. Фf1+ Кра2 70. Фf7+ Кра3 71. Ф:b7. Всем рекордам рекорд!

Конкурсные задания



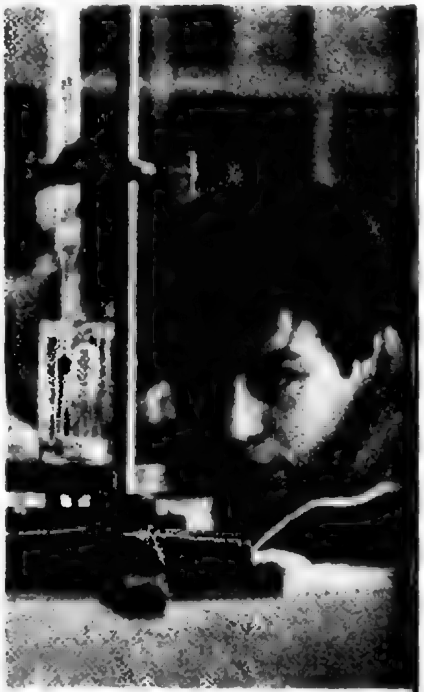
17. **Белые начинают и делают ничью.**



18. **Белые начинают и делают ничью.**

Срок отправки решений — 25 ноября 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 17, 18».

Редакционная коллегия
и редакция журнала «Квант»
поздравляют читателей
с началом нового учебного года
и всенародным праздником —
Днем знаний.
Желаем вам успехов
в труде и учении, знакомства
с увлекательными книгами,
интересных занятий
в школьных кружках,
побед на олимпиадах.
Пусть этот учебный год
поможет вам достичь
новых рубежей
в овладении основами
современных наук,
в развитии самодеятельности
и школьного самоуправления.



Цена 40 коп.
Индекс 70465

Года полтора назад одна из центральных газет опубликовала письмо родителей, которые на волне общего увлечения приобрели сыну новую головоломку. «Запутать» ее, конечно, не составило труда. А вот «распутать»... Головоломка не поддавалась ни сыну, ни отцу, ни учителю в школе. Вконец отчаявшиеся родители обратились к изготовителям злосчастной игрушки. О результате можно судить по тому, что следующей инстанцией была газета.

У нас есть основания предполагать, что предметом, доставившим столько хлопот его счастливым владельцам, была изображенная здесь головоломка (рис. 1). Это 7 дисков с 6 лунками на каждом, во всех лунках кроме одной лежат цветные шарики. Повернув на некоторый угол колесико сбоку головоломки, мы с помощью системы шестеренок поворачиваем одновременно все диски на тот же угол в направлениях, указанных стрелками. При этом «дырку» (пустую лунку) нужно установить против шарика на другом диске, вкатить шарик в «дырку», освободившуюся лунку вращением колесика установить против нового шарика и т. д. Так производится перестановка шариков. А как вернуться в исходное положение?

Найти алгоритм помогает граф головоломки (см. обложки «Кванта» № 5 и № 7). Отметим на плоскости 42 точки — по числу лунок — и соединим линией каждую пару точек, отвечающих «связанным» друг с другом лункам, т. е. лункам, которые можно состыковать вращением колесика (рис. 2). Легко понять, что любая лунка связана ровно с одной лункой на каждом из соседних дисков, т. е. лунки центрального диска (6 точек в центре графа) связаны с 6 лунками каждая, а остальные лунки имеют по 3 «связи». Лунки, непосредственно стыкующиеся с центральными («лунки 1-го уровня»), образуют на графе внутреннее кольцо. При вращении колесика на 60° на их место придут «лунки 2-го уровня» — они изображаются точками следующего кольца. Дальше идет кольцо «лунок 3-го уровня», попадающих на 1-й уровень при повороте на 120°, и т. д. Теперь головоломку можно свести к перемещениям фишек по линиям графа. Такие «путешествия по графам» подробно обсуждались в одноименной статье Д. Вакарелова («Квант» № 7, 1986, с. 50). Главная трудность возникает при переносе теории на практику — слишком уж различаются расположения шариков в головоломке и на графе (на обоих рисунках изображено одно и то же (!) расположение цветов; черным на графе помечена «дырка»).

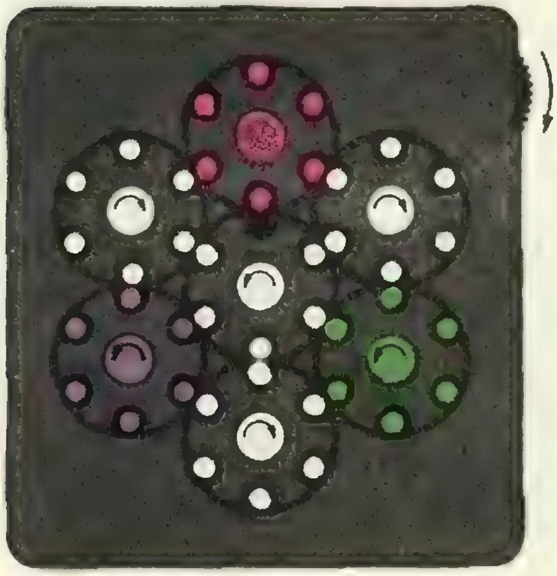


Рис. 1.

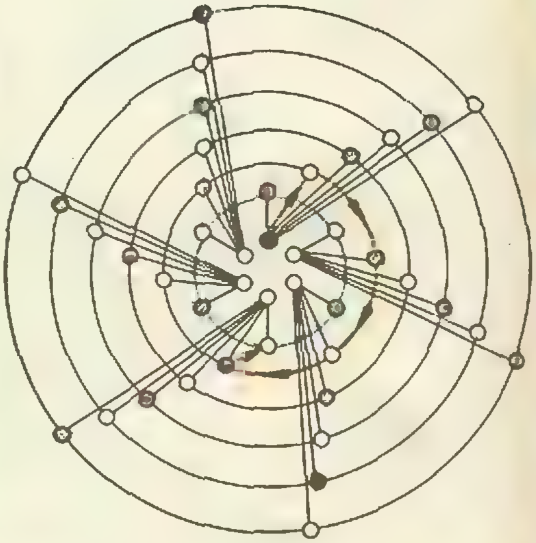


Рис. 2.

Головоломку удобно собирать по уровням; предварительно очередной уровень переводится на место 1-го. Поясним, как переставляются шарики 1-го уровня. Переведем сначала «дырку» через 2-й уровень на одно из мест 1-го уровня (по красным стрелкам), прогоним ее по кругу (синие дуги) и возвратим тем же (красным) путем. В результате 5 шариков 1-го уровня циклически переставляются, а остальные вернутся на свои места (проверьте!). Из таких 5-циклов можно составить любую перестановку цветов на 1-м уровне. Аналогично можно устроить обмен между разными уровнями.

В. Н.

НОМЕР
10

Квант
Основан в 1970 году

1987
10

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

*Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы*

В номере:

2 30 лет космической эры
3 Интервью с академиком Р. З. Сагдеевым
8 *Т. К. Бреус* Встреча с кометой Галлея состоялась!
14 *С. Г. Гиндикин.* Загадка Рамануджана
21 *В. А. Фабрикант.* Зачем мы зимой используем отопление?

Задачник «Кванта»

24 Задачи М1066—М1070, Ф1078—Ф1082
26 Решения задач М1046—М1050, Ф1058—Ф1062

32 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»

36 *В. Л. Гутенмахер.* Основные теоремы

«Квант» для младших школьников

39 Задачи

Лаборатория «Кванта»

40 *В. В Майер.* Может ли белое быть чернее черного?

Искусство программирования

42 *А П Ершов.* Мир языков программирования
48 *А. А. Дуванов, Ю. А. Первин* Язык Лого. Урок 1: Путешествия Черепахи
48 Об открытии Всесоюзной заочной школы программирования

Практикум абитуриента

53 *В В Можаев.* Конденсаторы с «избыточным» зарядом пластин

Олимпиады

60 XIII Всероссийская олимпиада школьников
62 Призеры XIII Всероссийской олимпиады школьников

63 **Ответы, указания, решения**
Наша анкета *(35)*
«Квант» улыбается *(58)*

Шахматная страничка

Компьютер в компании гроссмейстеров *(3-я с. обложки)*

Наша обложка

*На первой странице обложки — общий вид ядра кометы Галлея, полученный в результате обработки на ЭВМ телевизионных изображений ядра, переданных с борта автоматической станции «Вега-2»
О том, что дала ученым встреча с кометой, состоявшаяся в марте прошлого года, рассказывается в этом номере журнала (с 8)*

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1987

[redacted]

30 лет космической эры

В истории величайших научно-технических свершений событие, которое произошло 4 октября 1957 года, занимает особое место. В этот день запуском Первого искусственного спутника Земли человечество вступило в новую эру — эру освоения и использования космического пространства.

При всей грандиозности последующих достижений космонавтики ни одно из них не оказало, по всеобщему признанию, такого огромного воздействия на умы и чувства людей во всех концах планеты, как запуск «простейшего спутника» (как называли его сами создатели). Но запуск спутника — это не только создание аппарата, способного функционировать в условиях космического полета. Это разработка и сооружение огромного ракетно-космического комплекса.

То, что приоритет в его создании принадлежит Советскому Союзу, — показатель мощного научно-технического потенциала нашей страны, способности мобилизовать усилия и ресурсы для решения сложнейших задач. Отечественная космонавтика и сегодня занимает ведущие позиции на многих направлениях изучения и использования космического пространства. Огромная заслуга в ее становлении принадлежит С. П. Королеву, М. В. Келдышу, В. П. Глушко, М. К. Янгелю, В. Н. Челомею, Н. А. Пилюгину и многим другим выдающимся ученым и конструкторам.

В настоящее время космонавтика все в большей степени приобретает интернациональный характер. Десятки стран принимают участие в космических программах, некоторые из них создали собственные ракетно-космические системы.

Без космической техники уже немыслимы ни научная, ни хозяйственная деятельность. Космические аппараты исследуют Землю и дальние планеты, обслуживают геологов и работников сельского хозяйства, обеспечивают связь и обнаруживают терпящих бедствие, помогают создавать новые материалы и медицинские препараты.

Это сегодня. А завтра? Впереди новые проекты и новые маршруты, ведь космос — это дорога без конца!

[redacted]

Директор Института космических исследований АН СССР, член Международной академии астронавтики, научный руководитель проектов «Вега» и «Фобос». Можно ли мечтать о лучшем собеседнике, если вы хотите узнать об итогах и перспективах изучения и освоения космического пространства? И корреспондент «Кванта» обратился с просьбой о встрече к известному советскому физику академику Роальду Зиннуровичу Сагдееву...

ИНТЕРВЬЮ С АКАДЕМИКОМ Р. З. САГДЕЕВЫМ

— Первый искусственный спутник Земли и орбитальный комплекс «Мир» разделяют 30 лет. В технике — это целая эпоха. Нынешняя космическая техника стала уже неотъемлемой частью экономики, одной из наиболее перспективных отраслей народного хозяйства СССР. Каким представлялось будущее космонавтики 30 лет назад? В каком направлении пойдет развитие космической техники в ближайшие годы?

— Очень трудно сравнивать то, что получилось, с тем, что ожидали получить, так как настоящего, коллективно осознанного прогноза не было. Были прогнозы отдельных ученых. Например, очень яркий прогноз К. Э. Циолковского (он был дан еще за несколько десятков лет до запуска первого ИСЗ). Известно, что С. П. Королев много думал о том, в каком направлении будет развиваться космонавтика. Я полагаю, что пионеры космонавтики основные технические, организационные, психологические трудности, которые возникли позже, представляли достаточно хорошо.

Вместе с тем, сегодня космонавтика, на мой взгляд, носит скорее деловой, «рутинный» характер, нежели тот романтический, который представлялся мечтателям первых лет освоения космического пространства.

Меньший акцент в прогнозах делался на беспилотные автоматические аппараты. Во многих научно-фантастических сюжетах речь шла, да и сейчас идет, о деятельности на орбите или в далеком космосе экипажей или даже целых космических колоний. Но на Земле на протяжении десятилетий идет настоящее наступление автоматов, робототехники. Почему же не ожидать, что то же самое будет происходить и в космосе? Так, собственно, уже и получается. За 30 лет автоматы «научились» делать просто чудеса. В них постоянно реализуются все новые достижения из компьютерной техники, информатики. Сегодняшний автомат, в сущности, — предвестник искусственного интеллекта. Количество команд, «заложенных» в бортовые компьютеры таких аппаратов как, например, американский «Викинг» или наши «Веги», исчисляется десятками тысяч. Но и это еще не все: благодаря постояннодействующему каналу общения Земля — КА (космический аппарат) во время полета имеется возможность перепрограммирования. Когда мы обсуждали, например, задачу нахождения маленького ядра кометы Галлея среди гигантской яркой комы, мы решили оставить за бортовым компьютером свободу обнаружения, распознавания ядра, так как никто не знал, какой облик оно будет иметь. Такого рода задачи очень быстро двигают науку и технику, и на рубеже двух тысячелетий подобные КА будут определять лицо космической техники.

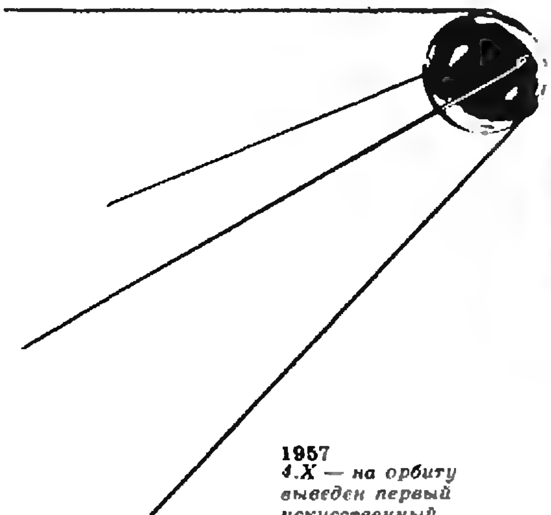
Не буду забегать так далеко, как это делает знаменитый американский физик Ф. Дайсон. КА будущего, зонды, покидающие Солнечную систему, он представляет себе в виде некоего гибрида ультрасовременной, вернее, ультрабудущей электроники, информатики и молекулярной генетики — некой «космической бабочки в защитном коконе», использующей принципы молекулярной биотехнологии и биоэлектроники. Хотя сегодня даже такие фантазии, наверное, заслуживают внимания.

— А какое место в космических полетах принадлежит все-таки человеку?

— Конечно, человек, космонавт имеет свою экологическую нишу в космосе. Например, на орбитальных станциях типа «Мир». И в ближайшие годы, может быть, до конца столетия, тенденции, которые наметились, будут развиваться. Пребывание человека на орбите станет уже постоянным.

Опыт, накопленный космической медициной в процессе длительных орбитальных полетов, а также опыт длительной эксплуатации космической техники в принципе позволили бы нашему современнику отправиться в многолетнее путешествие, например, на Марс. И такой проект имеет немало сторонников. В США к организации такой экспедиции призывают научно-технические общества и крупные ученые и специалисты в области космонавтики. Астрофизик К. Саган и его коллеги с этой целью основали мощную общественную организацию «Американское планетное общество». Современный уровень техники действительно позволяет осуществить такой полет. Однако его стоимость превысила бы в несколько раз стоимость самой дорогой на сегодняшний день космической программы — лунной экспедиции «Аполлон», реализованной в конце 60-х — начале 70-х годов.

Этапы освоения космического пространства



1957
4.X — на орбиту выведен первый искусственный спутник Земли («Спутник-1»).

3.XI — впервые запущен спутник с животным на борту (собака Лайка).

1959
2.I — впервые КА (космический аппарат) развил II космическую скорость («Луна-1»).
14.IX — впервые КА достиг Луны («Луна-2»).
7.X — впервые КА облетел Луну и сфотографировал ее обратную сторону («Луна-3»). ↓

1961
12.IV — первый полет человека в космос (Ю. А. Гагарин). →

1965
18.III — первый выход

Существуют и конкурирующие проекты. Их авторы считают, что автоматы могут собрать не меньшее количество научной информации, причем при значительно более низких затратах. Скорее всего, в будущих космических программах можно ожидать сочетания пилотируемой и непилотируемой техники, и рано или поздно полет человека на Марс состоится. Однако целесообразным это станет тогда, когда минимальный объем информации будет все же получен автоматами.

— С помощью космической техники стало возможным проводить исследования, недоступные для «земной» техники, удалось сделать немало научных открытий. Каковы наиболее важные из них?

— Сегодня трудно выделить какие-либо из них. Будущее покажет, какое место они займут в золотом фонде достижений человечества. И речь не идет только об астрономии. 30 лет космической эры обогатили многие отрасли науки и техники. На орбите получают новые материалы и медицинские препараты, ведут наблюдения за сельскохозяйственными и лесными массивами, составляют карты труднодоступных районов Земли, помогают геологам в поиске полезных ископаемых.

Что же касается астрономических исследований, здесь приоритет за двумя направлениями: изучением небесных объектов с помощью дистанционных методов и прямым исследованием Солнечной системы приборами, установленными на космических аппаратах. Выведя инструменты за пределы земной атмосферы, космическая астрономия дала возможность специалистам работать в недоступных на Земле из-за влияния атмосферы диапазонах — рентгеновском, инфракрасном, ультрафиолетовом диапазонах, а также в диапазоне гамма-излучения. В каждом из них получены конкретные результаты. Наши американские коллеги осуществили запуск рентгеновского телескопа «Эйнштейн» и с его помощью получили огромное количество информации о космических телах, являющихся мощными источниками рентгеновского излучения. К этим телам относятся квазары, пульсары, нейтронные звезды и черные дыры. В инфракрасном диапазоне тоже появились свои пионеры. Например, телескоп «ИРАС», созданный совместными усилиями ученых и специалистов США, Англии и Голландии. Приборы советского исследовательского спутника «Астрон» и международного — IUE провели наблюдения в ультрафиолетовом диапазоне уникального события — рождения сверхновой звезды в созвездии Золотой Рыбы. Многого ожидаем мы от первого астрофизического модуля «Квант», работающего в составе орбитального ком-

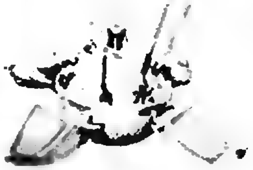
---

человека в открытый космос (А. А. Леонов). ↓

1966
3.II — первая мягкая посадка КА на Луну («Луна-9») и передача на Землю телевизионного изображения лунной поверхности. ↘

1969
21.VII — первая экспедиция

на Луне (Н. Армстронг и Э. Олдрин, «Аполлон-11»). ↑



1970
24.IX — первая доставка на Землю лунного грунта автоматическим КА («Луна-16»).

плекса «Мир». В разработке приборов, установленных на нем, наряду с советскими учеными приняли участие английские, западногерманские, голландские специалисты.

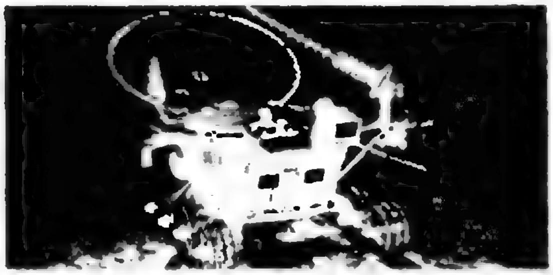
Изучение внегалактических объектов приведет к созданию новых моделей образования и эволюции Вселенной, формирования галактик и звездных систем, в частности — Солнечной системы.

— На заре космической эры многие надеялись, что полеты в космос сделают реальным обнаружение внеземной жизни, даже извечная мечта человечества о встрече с братьями по разуму, казалось, вот-вот сбудется. Может быть, именно это придавало космическим полетам особую романтику. Впрочем, и в фантастической художественной литературе эта тема была центральной (можно вспомнить замечательный роман И. А. Ефремова «Туманность Андромеды», появившийся в это же время). Шли годы, но ученым не только не удалось обнаружить жизнь на других небесных телах, многие из них вообще считают, что жизнь на Земле уникальна. Что нового дали космические исследования в этом отношении?

— В космических исследованиях поиск внеземной жизни занимает важное место. Если программа полета допускала возможность пролить дополнительный свет на этот вопрос, такой случай, как правило, не упускали. На космических аппаратах устанавливались специальные приборы (например, на посадочном блоке марсианского «Викинга» имелась биологическая лаборатория). И хотя признаков жизнедеятельности нигде обнаружить не удалось, я думаю, пессимистические выводы делать еще рано. Конечно, то, что мы знаем сегодня о Марсе, делает обнаружение даже самых примитивных форм жизни на нем мало вероятным. Да и вообще мало шансов, что где-нибудь в Солнечной системе это удастся сделать. Однако исследования дали много важных данных о так называемой предбиологической эволюции молекул. Почти полный набор оснований аминокислот имеется и в составе лунного грунта, и в метеоритном веществе, которое падает на Землю. Это означает, что так называемый абиогенный синтез — подготовка исходных «кирпичиков» для дальнейшего скачка на уровень гена — в космических условиях при наличии всевозможных экзотических излучений, таких как рентгеновское, имеет место. И конечно, при будущих полетах к Марсу и другим, более удаленным от нас небесным телам такую возможность биологических или, как минимум, предбиологических исследований будут учитывать.

— Многие ученые считают целесообразным искать проявление деятельности внеземных цивилизаций среди небесных тел, в «поведении» которых имеются какие-либо аномалии. В свое время внимание астрономов привлекли Тунгусский метеорит, спутники Марса, некоторые кометы... Есть ли сегодня небесные тела, находящиеся у астрономов «на подозрении»?

Этапы освоения космического пространства



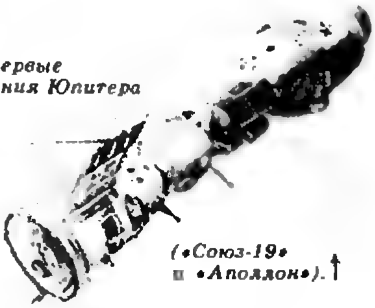
17.XI — первый самоходный аппарат на Луне («Луноход-1»).
15.XII — первая мягкая посадка КА на Венеру («Венера-7»).

←

1971
19.IV — вывод на орбиту первой орбитальной станции («Салют»).
2.XII — первая мягкая посадка КА на Марс («Марс-3»).

1973
4.XII — первые исследования Юпитера межпланетным КА с пролетной траектории («Пионер-10»).

1975
17.VII — первая стыковка космических кораблей разных стран



(«Союз-19» и «Аполлон»). ↑

1979
1.IX — первые исследования Сатурна КА с пролетной траектории

— К сожалению, сегодня нет объектов, которые можно было бы считать «подозрительными» с такой точки зрения. В той или иной мере на основе астрофизических гипотез, физических моделей можно объяснить кажущиеся аномалии в поведении тех или иных космических тел. По крайней мере, в той степени, в какой это позволяют сделать известные факты. В то же время, радиоастрономы одной из своих главных задач считают поиски объектов с аномальными характеристиками. Это направление имеет шансы обнаружить по-настоящему аномальные объекты.

— Главный вопрос современности — вопрос о мире. Может ли международное сотрудничество в космосе стать альтернативой программе «звездных войн»? Каким вы его себе представляете?

— Безусловно, мирное международное сотрудничество в любой форме является альтернативой милитаризации космического пространства. Невозможно насыщать околоземные орбиты многочисленными КА военного назначения и в то же время рассчитывать на серьезные дорогостоящие международные научные или, скажем, коммерческие проекты. Эти два направления приходят в глубокий конфликт. И не случайно поэтому сторонники мирного космоса, звездного мира, активно выступают против использования космоса в военных целях.

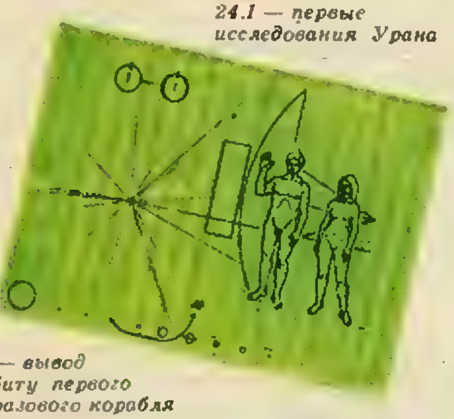
Уже сегодня имеется достаточно много конкретных областей космических исследований, в которых осуществляется международное сотрудничество, в частности, это программа «Интеркосмос», включающая в себя изучение космического пространства беспилотными аппаратами, пилотируемые полеты и т. д. В рамках международного сотрудничества в 1986 году успешно завершились исследования кометы Галлея. В середине 1988 года начнется осуществление проекта «Фобос». Его цель — изучение одного из спутников Марса. Инициаторами проекта стали советские ученые, в научную аппаратуру для «Фобоса» готовят специалисты разных стран.

— «Космическая одиссея 2001 года» уже не за горами. Какой она будет? Ведь в ней примут участие и нынешние читатели журнала «Квант». Что вы можете им пожелать?

— Думаю, ее сценарий будет писаться тогда, когда сегодняшние читатели «Кванта» станут специалистами. До этого осталось не так много, может быть, 5—7 лет. И чем раньше нынешние школьники займут активную творческую позицию, тем больших результатов они добьются (и совсем не обязательно ждать, когда они станут пятидесятилетними!).

Желаю им успехов!

(«Пионер-11»).
(На снимке —
пластинка-послание
с «Пионера-11».) ↓



1981
12.IV — вывод
на орбиту первого
многоразового корабля
«Спейс шаттл»
(«Колумбия»
с космонавтами
Дж. Янгом
и Р. Криппеном).→

1986
24.I — первые
исследования Урана
КА с пролетной
траектории («Вояджер-2»).

20.II — вывод на орбиту
новой научной
станции «Мир».→
4.III — первые прямые
исследования КА
кометы Галлея («Вега-1»).

1987
9.IV — стыковка
первого орбитального
модуля («Квант»)
со станцией «Мир».

ВСТРЕЧА С КОМЕТОЙ ГАЛЛЕЯ СОСТОЯЛАСЬ!

Кандидат физико-математических наук
Т. К. БРЕУС

Кометы все еще остаются наименее изученными объектами Солнечной системы, хотя открывают их по нескольку штук в год. Причина в том, что появляются они неожиданно, а само тело кометы — ее ядро — недоступно для наземных наблюдений, поскольку скрыто сиянием колоссальной, в сотни тысяч раз большей самого ядра, головы, или «комы» — газово-пылевой атмосферы, возникающей при испарении кометного вещества, разогреваемого солнечным излучением при сближении кометы с Солнцем.

Комета Галлея зарекомендовала себя в прошлые возвращения как одна из наиболее ярких. Например, в 837 году она прошла в 6 млн км от Земли и была в 6,5 раза ярче Сириуса — самой яркой звезды земного небосвода. В 1910 году при пролете вблизи нашего светила комета оказалась между Землей и Солнцем. А так как хвосты комет всегда направлены от Солнца и тянутся на многие миллионы километров, Земля в течение нескольких часов летела сквозь хвост кометы.

В этот приход комету Галлея обнаружили на рекордно большом расстоянии — около 1,6 млрд км от нашей планеты и Солнца. Это было 16 октября 1982 года, когда комета находилась в созвездии Малого Пса и светила в 40 млн раз слабее самых слабых звезд, которые еще может видеть человек невооруженным глазом. Обычно кометы обнаруживают на расстояниях в 2—3 раза меньших, но на сей раз была использована самая совершенная техника, позволяющая регистрировать даже отдельные кванты света. Но вот из-за неблагоприятного расположения траектории кометы (в перигелии траектории Солнце оказалось между Землей и кометой) «пообщаться» с ней непосредственно с Земли как следует было невозможно. Этот недостаток с лихвой компенсировался запуском к комете сразу пяти космических аппаратов — двух советских («Вега-1», «Вега-2»)*), одного западно-европейского («Джотто») и двух японских.

В предыдущее появление кометы Галлея в 1910 году на нее были нацелены, главным образом, спектроскопы, с помощью которых астрономы уточняли состав головы и хвоста небесной гостьи. Еще раньше, в 1835—1836 годах, для исследования кометы Галлея был применен первый астрофизический прибор — изобретение выдающегося французского физика и астронома Араго — полярископ. Тогда было доказано, что хвосты комет светят, в основном, отраженным от Солнца светом, т. е. в них много пыли — распыленных каменистых частей ядра, отгоняемых в виде хвоста прочь от Солнца какими-то силами. Только в 1910 году, после того как русский физик П. Н. Лебедев показал, что свет может оказывать давление на частицы, образование пылевых кометных хвостов получило свое объяснение.

В 1836 году в научной литературе появились и высказывания о физической природе таинственного ядра кометы. Немецкий астроном Бессель выдвинул идею, согласно которой ядро состоит из летучих, т. е. легко возгоняющихся от жара веществ. Подобную мысль высказал некогда Лаплас. В третьем издании своего «Изложения системы мира» (1808 г.) он объяснил образование колоссальной головы и хвоста кометы быстрым испарением «жидкостей» с поверхности ядра близ Солнца. При удалении кометы от нашего светила оставшиеся «жидкости» снова должны превращаться в лед, и так при каждом последующем возвращении.

---

*) Полет советских космических станций «Вега» осуществлялся в рамках Международной экспедиции «Венера — комета Галлея». О проекте «Вега» рассказывалось в статье Л. С. Марочника «Свидание с кометой» в «Кванте» № 5 за 1985 год.

В XX веке идея ледяного ядра кометы вновь возрождается американским астрофизиком Ф. Уипплом. Он предлагает модель (1950 г.), согласно которой кометное ядро представляет собой космический айсберг — монолитное тело неправильной формы, состоящее из замерзших летучих веществ (H_2O, CH_4, NH_3, CO_2 и др.), смешанных с частичками метеоритного вещества. Когда кометное ядро приближается к Солнцу, летучие вещества с его поверхности испаряются, и возникают потоки газа, которые увлекают за собой пылевые частицы,— образуются кома и хвост.

Советский астроном Б. А. Воронцов-Вельяминов полагал, что ядро кометы состоит в основном из тугоплавких веществ (силикаты, металлы) и только на поверхности имеется слой замерзших газов. Голландский астрофизик М. Гринберг в общем был согласен с Уипплом, но считал, что в гипотетический состав ядра надо «добавить» сложные органические вещества. Он предполагал, что ядро кометы представляет собой не айсберг, а, скорее, своего рода сугроб, причем состоит он из частиц межзвездного вещества, «спрессованных» в сложную структуру — цилиндрик длиной в несколько микрон, внутри силикатный, сверху слой органики, а поверх органики — слой льда.

Откуда же прилетают к нам космические гостьи? Где могли образоваться эти сложные конгломераты пыли, газов и даже органических молекул?

Существовало большое число гипотез о происхождении комет. В соответствии с одной из них, впервые предложенной Лагранжем (1788 г.), а затем развитой советским ученым С. К. Всехсвятским (1955 г.), кометные ядра могли выбрасываться из недр планет-гигантов и их спутников во время вулканических извержений. Когда американские «Вояджеры» обнаружили вулканическую деятельность на спутнике Юпитера Ио, это предположение обрело как бы «второе дыхание». Тем не менее отношение к этой гипотезе весьма скептическое — слишком много «но».

Большинство специалистов полагают, что получить ответ на вопрос о происхождении комет удалось выдающемуся голландскому астроному Яну Оорту. Конечно, в науке правильность той или иной гипотезы не решается большинством голосов, и только экспериментальные факты дают объективные доказательства. Тем не менее гипотеза Оорта (1950 г.) практически не имеет изъянов.

Оорт предположил, что Солнечная система окружена гигантским «облаком» комет, простирающимся на расстояниях от 20 000 до 200 000 астрономических единиц (1 а. е. = =150 000 000 км) от Солнца, т. е. далеко за пределами планетной системы (орбита Плутона — последней планеты — порядка 40 а. е.).

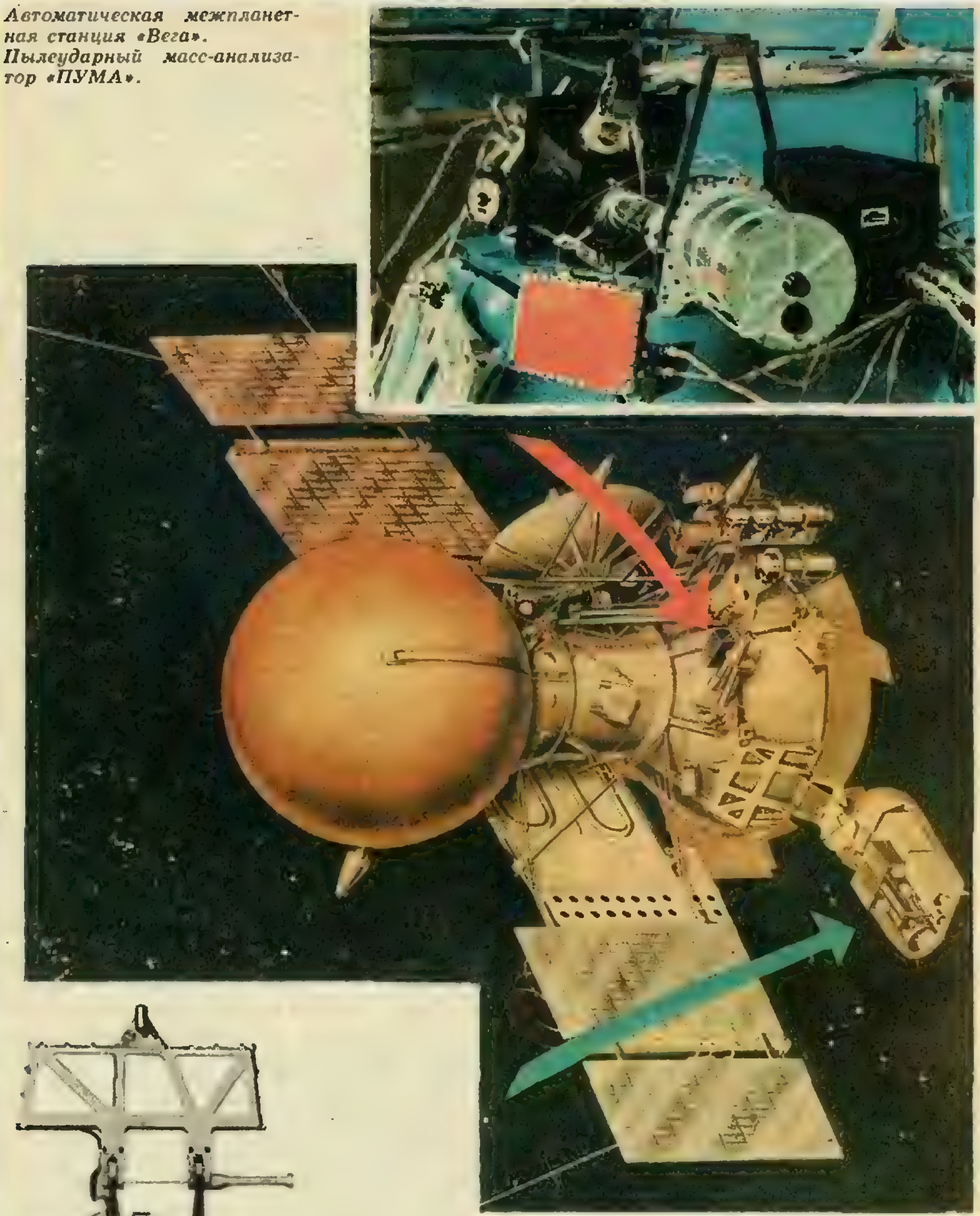
Что заставляет кометы покидать свое «пристанище»? Несмотря на то, что в облаке Оорта по оценкам должно содержаться $10^{11} \div 10^{12}$ комет, их столкновения так редки*), что они не могут быть причиной, выталкивающей их из облака. Оказывается, ответственны за это близко проходящие звезды. Они хаотизируют скорости движения комет и время от времени выбрасывают их или за пределы Солнечной системы, или в сторону Солнца.

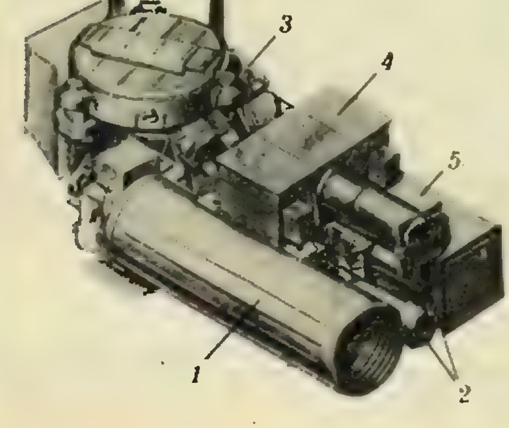
Остается, однако, неясным происхождение самого облака Оорта, или, как его называют, банка или сейфа комет. Решение этой проблемы и являлось одной из главных целей космической экспедиции к комете Галлея. Ученые надеялись, что наблюдение ядра кометы с близкого расстояния, определение его состава, исследование частиц кометы «руками» автоматов позволит понять, как образовался банк Оорта. Является ли он частью протопланетного вещества — газово-пылевой туманности, из которой примерно в одну эпоху возникли Солнце, планеты и кометы? Или, может быть, банк Оорта имеет галактическое происхождение? Например, уже после завершения своего формирования Солнечная си-

---

*) Время между столкновениями двух кометных ядер с типичным размером 1 км на четырнадцать порядков больше времени существования Солнечной системы.

Автоматическая межпланетная станция «Вега». Пылеударный масс-анализатор «ПУМА».





Автоматическая стабилизированная платформа с установленной на ней аппаратурой. В состав телевизионной системы входит узкоугольная камера высокого разрешения (1), широкоугольная камера-датчик наведения (2) и электронный блок телевизионной установки (3). На платформе установлены также трехканальный спектрометр (4) и инфракрасный спектрометр (5).

стема могла пролететь через гигантское облако межзвездного газа и захватить содержавшиеся в нем пыль, газ, органические соединения, а возможно, и готовые кометные ядра.

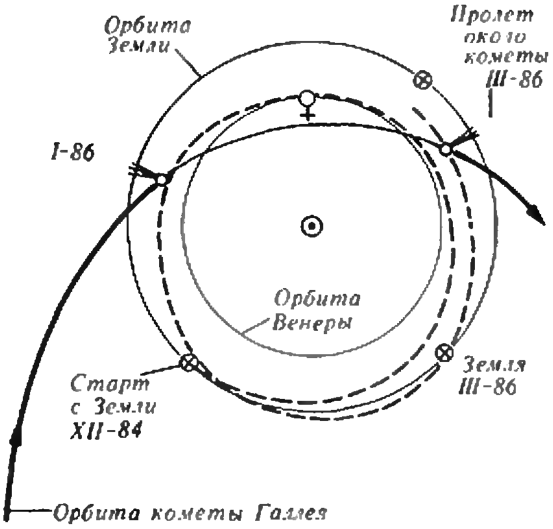
Кстати, радиоастрономическими методами было обнаружено в газово-пылевых облаках в Галактике несколько типов органических соединений — формальдегиды, синильная кислота, спирты — исходные продукты для образования наиболее сложных производных углерода — аминокислот, которые являются «строительными блоками» белка. Следы органических соединений регистрировались в ходе наземных наблюдений и у комет. В метеоритах находят даже сами аминокислоты.

Возможно, метеориты (как и кометы) являются «мусором» на строительной площадке, где создавалась Солнечная система. Однако они уже изрядно «подпорчены» Солнцем. Кометы же хранились на большом удалении от него, как бы в холодильнике, не подвергаясь воздействию излучений, и поэтому должны были сохранить свои первичные свойства.

Вот почему ученые с таким нетерпением ждали свидания с кометой Галлея.

Самой важной задачей в проекте «Вега» было исследование физических характеристик ядра кометы. Использовались два подхода: во-первых, дистанционные измерения при помощи оптических приборов и, во-вторых, прямые исследования вещества (газа и пыли), покидающего ядро и пересекающего траекторию, по которой движется аппарат.

Оптические приборы размещались на специальной платформе, которая поворачивалась во время пролета ядра и автоматически отслеживала направление на него. Одним из главных элементов оптического комплекса была телевизионная система. В комплекс входили также приборы, которые должны были обеспечивать проведение детальных спектроскопических исследований химического состава различных областей атмосферы (комы) и хвоста кометы. Одним из важнейших направлений этих исследований был поиск первичных, или, как их еще называют, «родительских», молекул. Наземными спектроскопическими измерениями обнаружить эти молекулы невозможно. Дело в том, что при переходе кометного льда из твердого состояния непосредственно в газообразное газ вылетает с поверхности кометы почти со скоростью звука, и в районе ядра плотность его очень велика. Поэтому молекулы интенсивно взаимодействуют друг с другом и в них происходят существенные химические изменения. В ходе этих процессов образуются так называемые «дочерние», т. е. вторичные, молекулы. Они-то и «регистрируются» наземными спектроскопическими измерениями.



Общая схема полета станций «Вега».

Оптические исследования газового состава атмосферы кометы должны были дополняться его измерениями при помощи специального пылеударного масс-анализатора (ПУМА).

Как уже отмечалось, кометная атмосфера состоит не только из газовых, но и из пылевых частиц. При относительной скорости сближения космического аппарата с кометой почти 80 км/с эта пыль представляла большую опасность. Для защиты аппаратов были созданы специальные многослойные экраны. Но именно большая относительная скорость и была использована для определения состава частиц. Если на пути такой «пылинки» поставить мишень, то при ударе о нее частица взрывообразно испаряется, ионизируется и превращается в облачко плазмы. Масс-спектрометр определит ее состав, а следовательно, и состав ядра кометы, из которого эта частица вырвалась.

Такова идея эксперимента ПУМА (научные руководители Р. З. Сагдеев (СССР), У. Киссель (Общество имени Макса Планка, ФРГ), Ж. Л. Берто (Франция)).

Ряд приборов предназначался для измерения физических характеристик пылевого потока — числа частиц разной массы, их размеров, плотности.

На борту станций были также установлены многочисленные приборы для изучения взаимодействия кометных ионов с межпланетной средой, заполненной, как известно, плазмой, испускаемой солнечной короной, — солнечным ветром.

Что же нового узнали мы в эту встречу с кометой?

Анализ телевизионных изображений, переданных с борта станций на Землю, показал, что ядро кометы Галлея представляет собой монолитное тело неправильной формы. Размеры его 8×8×16 км. Это намного больше, чем предполагали ученые (2—5 км). Объем ядра, по грубым прикидкам, составляет примерно $5\cdot 10^{11}$ м^3. Ядро вращается вокруг оси, которая расположена внутри конуса раствором ±45° от нормали к плоскости орбиты. Направление вращения совпадает с направлением орбитального движения. Отражательная способность ядра очень низкая. Ядро кометы — одно из самых темных тел Солнечной системы. Выброс пыли происходит только на освещенной части ядра. На поверхности имеется несколько областей (примерно 10% площади), из которых пыль уходит сравнительно узкими потоками (струями). Пыль, однако, покидает поверхность и вне струй. Над поверхностью имеется тонкий (около 1 км) слой, внутри которого пыль разгоняется потоком газа от нулевой скорости до нескольких сотен метров в секунду. На поверхности видны детали, напоминающие кольцевые кратеры.

Снимки, полученные западно-европейским аппаратом «Джотто», добавили к этой картине уточнение только в последнем вопросе: кольцевые кратеры, несомненно, реальны; они хорошо видны на обработанных снимках вблизи терминатора (границы тени и света), где пыли над поверхностью мало, а условия освещения наиболее благоприятны.

Измерения теплового излучения ядра, выполненные спектрометром «Веги-1», позволили определить температуру поверхности. Из предварительных расчетов, основанных на условии теплового баланса, следовало, что на дневной стороне кометы она должна составлять 200 К. Однако измерения дали вдвое большее значение $T=380\pm30$ К.

Это можно объяснить, полагает советский ученый В. И. Мороз, если предположить, что поверхность ядра покрыта слоем «грязи» (аналогично тому, как это часто бывает весной в городах со снежными сугробами). Этот слой поглощает солнечную энергию, часть ее переизлучается в инфракрасном диапазоне, а часть передается за счет теплопроводности вниз, к внутренней «чистой» поверхности ядра, на которой температура около 200 К.

Какова структура этого слоя? Толщина его, скорее всего, не больше 0,1 мм, иначе он сильно ослаблял бы газовый поток. В то же время он должен быть сплошным, иначе ядро не было бы таким черным. По-видимому, в нем много мелких частиц, и газ свободно проходит через поры. Поверхностный слой в отдельных местах время от времени взламывается, и тогда образуется активная область с особо мощным истечением вещества.

Образование такого слоя представляется вполне естественным, если вспомнить, что кометный лед перемешан с частичками тугоплавких веществ, и при испарении после ухода газа концентрация их на поверхности увеличивается.

Температура 380 К относится к самой теплой точке ядра, которая находится на дневной стороне на экваторе. Эта точка смещена от полуденной примерно на один час вследствие тепловой инерции поверхностного слоя. На ночной стороне гораздо холоднее; по косвенным оценкам температура здесь 180—200 К.

Удалось оценить массу и среднюю плотность ядра кометы. Масса определялась по реактивному эффекту, который создавался выбросом газа и пыли в сторону Солнца. Расчеты выполнялись независимо шведским ученым Г. Рикманом и советскими учеными Р. З. Сагдеевым, П. Е. Эльясбергом, В. И. Морозом. Результаты получились близкие — масса ядра кометы составляет $(0,5—2) \cdot 10^{14}$ кг. Таким образом, средняя плотность вещества ядра (напомним, что объем его оценен в $5 \cdot 10^{11}$ м^3) составляет 0,1—0,4 г/см^3.

Интересные результаты дали измерения количественных характеристик пылевого потока. Эксперименты с пылевыми счетчиками показали, что около миллиона тонн космической пыли покидает кометное ядро ежесуточно. Весьма неожиданным оказался характер распределения пылевых частиц по размерам; было обнаружено неожиданно большое количество малых частиц размером порядка сотой доли микрона.

Измерения показали, что в потоке газа, уходящего от кометы, больше всего водяного пара. Вторым по обилию компонентом является углекислый газ. Скорее всего, CO_2 и H_2O входят в состав ядра в виде клатрата — кристаллического соединения, в котором молекулы одного вещества (CO_2) «вкраплены» в кристаллическую решетку другого (лед H_2O).

Основную и совершенно новую информацию о химическом составе твердых частиц, которые входили в состав ядра и покинули его под давлением газовых потоков, дал эксперимент ПУМА (на «Вегах») и аналогичный эксперимент на «Джотто». Реально регистрировались частицы диаметром в сотые и десятые доли микрона, но их было очень много. В эксперименте ПУМА были получены спектры примерно 2000 таких частиц.

Из спектров следует, что по химическому составу твердые частицы кометной пыли можно разделить на три основных типа: в первом преобладают легкие элементы, во втором — углерод, в третьем — металлы. Советский физик Л. М. Мухин, анализировавший эти спектры, пришел к двум важным выводам. Первый — частицы, богатые углеродом, показывают отношение элементов C/Si, существенно большее, чем в метеоритах любого типа. Второй вывод — большое отношение C/Si всегда сопровождается присутствием азота, а это может быть объяснено только тем, что углерод и азот входят в состав органических молекул. Это является важным указанием на присутствие в составе ядра кометы сложных органических молекул.

Итак, в результате экспедиции космических аппаратов к комете Галлея удалось получить реальную картину объекта, ранее никогда не наблюдавшегося непосредственно, и попытаться ответить на вопрос о его природе. Однако в части, касающейся происхождения комет в Солнечной системе, выполненные исследования скорее задали новые вопросы.

Напомним, что анализ «проб» кометной пыли, испаренной ядром, показал, что она содержит частицы различной природы. Тугоплавкие силикатосодержащие пылинки существенно отличаются от легкоплавких пылинок с высоким содержанием сложных органических молекул.

Как же могли пылинки столь разной температурной истории оказаться в одном и том же месте, где сформировались кометы? Если они образовались в протопланетном облаке, то, вероятно, в разных местах, а уже потом они каким-то образом перемещались и очутились в сейфе Оорта. А может быть, состав кометной пыли прямо отражает состав пыли межзвездной среды, в которой началось формирование протосолнечного облака и протопланетной системы?

Решающий ответ могла бы дать доставка на Землю кометного вещества и исследование его изотопного состава. Если окажется, что кометные частицы являются не метаморфизованными, т. е. неизмененными межзвездными частицами, то это будет сильный, хотя и не окончательный, аргумент в пользу того, что кометные ядра образуются в плотных облаках межзвездного вещества, и они, эти облака, а не первичная протопланетная туманность, являются источником комет, попавших со временем в банк Оорта.

В сущности, каких-то непреодолимых технических трудностей для проведения таких исследований нет даже на современном уровне развития космонавтики, и ученые уже обсуждают такую возможность. Среди комет есть и такие, к ядру которых можно было бы приблизиться вплоть до прямого контакта. Возможно, такой полет будет выполнен в конце этого — начале следующего столетия.

ЗАГАДКА РАМАНУДЖАНА

(к столетию со дня рождения)

Доктор физико-математических наук
С. Г. ГИНДИКИН

> *Рамануджан любил говорить, что формулы ему внушает во сне богиня Намаккаль. Интересно отметить, что действительно он часто, вставая по утрам с кровати, тут же записывал готовые формулы.*
>
> Сешу Айар и Рамачандра Рао

Письмо в Кембридж

В самом начале 1913 года профессор Кембриджского университета Г. Г. Харди получил письмо из далекого Мадраса. В свои 36 лет Харди был уже одним из крупнейших специалистов по анализу и теории чисел, автором ряда великолепных математических работ. Отправитель же письма, Сриниваза Рамануджан, работал клерком в бухгалтерии почтового ведомства Мадраса с более чем скромным окладом в 20 фунтов в год. Он сообщал о себе, что не имеет университетского образования и после окончания школы самостоятельно занимается математикой, не следуя принятой системе, а «избрав свою дорогу». Математическое содержание письма выглядит достаточно неуклюже — вполне можно принять автора за самоуверенного любителя.

Само по себе такое письмо не могло произвести на Харди сильного впечатления. Но к письму было приложено некоторое количество формул, которые предлагалось опубликовать, если они интересны, чего сам автор не мог сделать из-за своей бедности. Просмотр формул насторожил Харди: он понял, что имеет дело с незаурядным явлением. Он заинтересованно отвечает Рамануджану, между ними завязывается интенсивная переписка (сегодня кажется удивительным, как быстро шли тогда письма между Индией и Англией). Постепенно у Харди собирается около 120 разнообразных формул.

Формулы Рамануджана касались в основном соотношений между бесконечными радикалами (вставка 2), бесконечными рядами, произведениями и цепными дробями (вставки 1, 3, 4), тождеств между интегралами. Прежде всего было ясно, что они далеко выходят за пределы

Вставка 1. Пример бесконечной суммы, вычисленной Рамануджаном

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=\frac{2}{\pi}.$$

Эта удивительная формула — одна из приложенных Рамануджаном к первому письму Харди. Каким образом сумма знакочередующегося ряда $a_0+a_1+a_2+\ldots$ с общим членом

$$a_n=(-1)^n(4n+1)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)^3$$

может вдруг оказаться равной $2/\pi$, Харди долго не мог понять. В справедливости этой формулы, как приближенного равенства, читатель может убедиться с помощью калькулятора. Доказательство точного равенства неэлементарно.

Вставка 2. Бесконечно повторяющиеся радикалы

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}=3.$$

Эту красивую формулу Рамануджан получил еще в школьные годы следующим образом: он написал последовательность очевидных равенств

$$n(n+2)=n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}}=\ldots,$$

а затем подставил $n=1$. Вопрос о законности перехода к пределу Рамануджана не интересовал. Действуя так же, читатель может попробовать самостоятельно получить похожую формулу

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\ldots}}}}=4.$$

элементарной математики. Далее возникает цепь вопросов: известны ли они; если да, то самостоятельно ли получены автором письма; если нет, то верны ли они? Вскоре Харди понимает, что ситуация парадоксальна: он, несомненно, выдающийся специалист по современному анализу, имеет дело с россыпью неизвестных ему формул!

Большое впечатление на Харди произвели формулы с бесконечными рядами (см. вставку 1). После их изучения он приходит к выводу:

> *«...в распоряжении Рамануджана должны быть какие-то очень общие теоремы, которые он от меня скрывает».*

Но особо удивили Харди соотношения с бесконечными цепными дробями (одно из более поздних соотношений этого типа показано на вставке 3):

> *«...эти соотношения поставили меня полностью в тупик; я никогда не видел ничего подобного. Достаточно бросить на них один взгляд, чтобы убедиться в том, что они могли быть написаны только математиком самого высшего класса».*

Чудо из Кумбаконама

Как же сложился математик, который так удивил Харди? Сриниваза Рамануджан Айенгор родился 22 декабря 1887 г. на юге Индии в селении Эрод. Его детство в основном протекало в маленьком городке Кумбаконам (в 260 км от Мадраса), где его отец работал бухгалтером в небольшой текстильной лавке. Рамануджан принадлежал к касте браминов, но богатство уже давно не было уделом его родственников. Его родители, а мать особенно, были глубоко религиозны. Рамануджан получил воспитание в традициях касты. Детство, проведенное в городе, где каждый камень связан с древней религией, в окружении людей, постоянно ощущающих свою принадлежность к высшей касте, сыграло большую роль в становлении Рамануджана.

С 5 лет Рамануджан в школе, к 10 годам он заканчивает начальную школу. Он начинает проявлять незаурядные способности, получает стипендию, обеспечивающую обучение в средней школе за половинную плату. В 14 лет студент из Мадраса дает ему двухтомное руководство по тригонометрии Лони. Вскоре Рамануджан изучил тригонометрию, и студент имел возможность пользоваться его консультацией в решении задач. К этому периоду относятся первые рассказы и легенды. Утверждается, что он сам открыл «формулу Эйлера о синусе и косинусе» и был очень расстроен, найдя эту формулу во втором томе Лони.

«Маленький брамин» полагает, что в математике, как и в других науках, следует искать присущую ей «высшую истину», расспрашивает учителей. Старшие дают маловразумительные ссылки на теорему Пифагора, а то и на вычисления с процентами.

Вставка 3. Числовое тождество с бесконечной суммой и цепной дробью

$$1+\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}+\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ldots}}}}}=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$$

Это, возможно, самая красивая формула Рамануджана, истинное произведение математического искусства. Она неожиданно связывает бесконечный ряд и бесконечную цепную дробь. Удивительно, что ни ряд, ни цепная дробь не выражаются через известные постоянные π и e, а их сумма непостижимым образом оказывается равной $\sqrt{\pi e/2}$!

«Синопсис элементарных результатов чистой и прикладной математики»

Это двухтомное руководство английского математика Карра, написанное в 1880—1886 гг., попало к Рамануджану в 1903 г.— ему было тогда 16 лет. Эта книга сыграла огромную роль в формировании Рамануджана. В ней было собрано 6165 теорем и формул, почти без доказательств, с минимальными пояснениями. В основном книга посвящена алгебре, тригонометрии, анализу, аналитической геометрии.

Книга Карра стимулировала мальчика к самостоятельному выводу формул. Об этом говорят те, кто знал Рамануджана в эти годы. Постепенно меняется область его основных интересов: магические квадраты, потом квадратура круга (он находит π с точностью, позволяющей вычислить длину экватора с ошибкой, не превышающей 1—2 м, гласит легенда) и, наконец, наступает очередь бесконечных рядов. Это уже начало подлинной математической жизни!

Книга Карра оказалась достаточно удачной для того, чтобы сформировать математический мир Рамануджана. Но ориентировка на эту книгу имела и другие последствия. Поскольку книга не содержала доказательств, а в лучшем случае — наводящие соображения, у Рамануджана складывается своеобразный метод установления математической истины. К тому же он лишен в Индии подходящих руководств для того, чтобы проводить строгие доказательства.

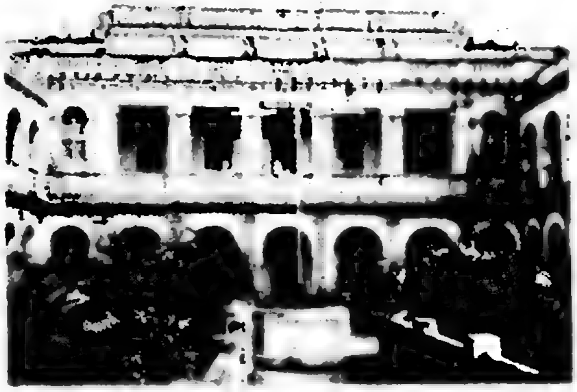
«Его понимание сущности математического доказательства было более чем туманным; он пришел ко всем своим результатам, как ранним, так и более поздним, как верным, так и неверным, при помощи странной смеси интуитивных догадок, индуктивных соображений и логических рассуждений...»

Математическая судьба Рамануджана фактически полностью решилась в эти годы — направление научных поисков, способ думать он уже никогда не менял. Здесь можно выразить сожаление, что Рамануджан формировался в тяжелых условиях. В нормальных условиях он, несомненно, стал бы математиком с лучшей профессиональной подготовкой, но можно ли быть уверенным, что он был бы столь же уникален? Смог бы Рамануджан увидеть так много, если бы с детства был обучен правилам поведения в математике и доводил бы свои результаты до публикаций со строгими доказательствами, строил бы свой математический мир на базе всего достигнутого человечеством, а не на сравнительно небольшом числе фактов?

От чисел к формулам

В формировании математического мира Рамануджана было важно, что начальный запас математических фактов (в основном почерпнутый из книги Карра) объединился у него с огромным запасом наблюдений над конкретными числами. Он коллекционировал такие факты с детства. Его школьный товарищ вспоминал, что

Дом в Кумбаконаме, недалеко от Мадраса, в котором провел детство Рамануджан.



Здание школы в Кумбаконаме: здесь получил среднее образование и начал самостоятельные исследования Рамануджан.

Единственный известный портрет Рамануджана.

Одно из зданий Кембриджского университета — Тринити-колледж. Здесь с 1914 по 1919 годы работал Сриниваза Рамануджан.

Гордон Гарольд Харди (1877—1947), известный английский математик, профессор Кембриджского университета, друг и соавтор Рамануджана. Фотография начала 1900-х годов.

Рамануджан знал огромное число знаков в разложениях e, π и других чисел в десятичные дроби. Он обладал поразительными способностями подмечать арифметические закономерности, терпеливо рассматривая огромный числовой материал — искусство, которым виртуозно владели Эйлер и Гаусс, но которое было в значительной степени утрачено к XX веку. Многое в числовой кладовой открывалось при случайных обстоятельствах. Харди позднее вспоминал, как он навестил в больнице Рамануджана и сказал, что он приехал на такси со «скучным» номером 1729. Рамануджан разволновался и воскликнул: «Харди, ну как же, Харди, это же число — наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы кубов двумя различными способами!» ($1729=1^3+12^3=9^3+10^3$). В книге Харди о творчестве Рамануджана метко сказано, что «каждое натуральное число было личным другом Рамануджана».

Рамануджан стремительно пополняет запас фактов, почерпнутый у Карра. Он при этом с удивительной скоростью переоткрывает результаты Эйлера, Гаусса, Якоби. Так, некогда юный Гаусс в Брауншвейге, лишенный литературы, реконструировал в короткий срок то, на что у его великих предшественников ушли десятилетия. Можно только удивляться, что реконструкции математики с такими скоростями возможны.

Постепенно коллекция наблюдений над конкретными числами уходит у Рамануджана на второй план перед миром формул. Формулы для него — не вспомогательное средство для доказательств или вычислений, но представляют самостоятельную цель. Внутренняя красота формулы имеет для Рамануджана бесконечную ценность. Его формулы можно рассматривать как прекрасные картины.

Выбор профессии

В 1904 г. Рамануджан поступает в Мадрасский университет, делает первые успехи не только в математике, но и в английском языке. Однако математика начинает занимать его целиком, и это не замедлило сказаться. Он не кончает даже первого курса, странствует с другом, делает попытку вернуться в университет, а затем закончить его экстерном (1907 г.). Но все безуспешно. В 1909 г. он женится; его жене девять лет, и она доживет до наших дней, трогательно сохраняя память о великом супруге. Рамануджан вынужден думать о средствах на жизнь, но он не может найти подходящего занятия. В 1910 г. он показывает свои математические результаты Рамасвари Айару, основателю Индийского математического общества, затем Сешу Айару, преподавателю Кумбаконамского колледжа, и Рамачандра Рао, крупному чиновнику, получившему математическое образование; позднее они стали биографами Рамануджана.

Рао помогает ему из своих средств, а затем устраивает клерком в почтовое управление. В 1911 г. появляется в печати сообщение Сешу Айара о результатах Рамануджана, а затем и его собственная статья. В судьбе Рамануджана начинают принимать участие влиятельные английские чиновники; с 1 мая 1913 г. на два года он обеспечен специальной стипендией в 75 рупий (5 фунтов) в месяц. Этого хватает на скромную жизнь, и Рамануджан оставляет карьеру клерка. Он становится «профессиональным математиком».

Итак, Рамануджан встретил среди окружающих определенное признание, но не понимание. Мы помним, что в начале 1913 г. он пишет Харди. Чего он ожидал от Харди? Найти, наконец, человека, способного понять и оценить его результаты, помочь и направить его дальнейшие исследования? Скорее повод был более прозаическим: от внешнего мира ему требовались не слава и признание, но обеспечение возможности существовать.

Надо сказать, что в научном плане адресат был выбран исключительно удачно: трудно было бы найти другого математика в мире, который смог бы так быстро и эффективно сориентироваться в результатах Рамануджана. Очень скоро Харди понимает, что от него требуется не оценка результатов безвестного любителя или младшего коллеги, но спасение огромного дарования. Одновременно его не оставляет мысль, что Рамануджан сообщает лишь немногое из того, что знает, что он обладает очень общими результатами, приводя лишь

Вставка 4. Тождество Роджерса — Рамануджана

Это тождество

$$1+\frac{x}{1-x}+\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^6)(1-x^{11})\cdot\ldots\cdot(1-x^4)(1-x^9)(1-x^{14})}.$$

Рамануджан нашел в 1911 году, но не сумел его доказать. Не сумел его доказать и Харди. В 1917 году, просматривая журнальную литературу (что он делал довольно редко), Рамануджан наткнулся на оставшуюся незамеченной статью английского математика Роджерса 1894 года, где эта формула была доказана. Оказалось, далее, что это тождество тесно связано с числом $p(n)$ разбиений на слагаемые (см. вставку 5). А совсем недавно оно появилось в исследованиях ... по статистической физике.

частные иллюстрации. Но главное — он не может реконструировать метод Рамануджана, и ему не терпится узнать, каким путем двигался его удивительный корреспондент. Неожиданно Рамануджан твердо отказывается описывать свой метод. В письме от 27 февраля 1913 г.:

«...Вы просите меня сообщить мои методы доказательств... Вот, что я хочу Вам сказать: проверьте мои результаты, и если они совпадают с Вашими, то Вы должны, по крайней мере, согласиться с тем, что в моих основных рассуждениях имеется какое-то зерно истины».

Харди подозревает, что Рамануджан боится, что его методами могут воспользоваться, пытается рассеять опасения, но 17 апреля получает ответ:

«Ваше последнее письмо причинило мне боль... Я нисколько не опасаюсь того, что мои методы будут использованы другими. Напротив, я работаю моими методами 8 лет и не нашел никого, кто бы понимал или оценил их. Как я уже писал в моем последнем письме, я нашел в Вас внимательного и понимающего друга и готов передать в Ваше полное распоряжение те немногие результаты, которыми я располагаю. Только в силу новизны моих методов я не решаюсь даже сейчас сообщить Вам мой путь вывода тех формул, которые я сообщил Вам в моих предыдущих письмах...».

Для Харди не было сомнений: для Рамануджана необходимы контакты

Вставка 5. Теорема Харди — Рамануджана

Эта теорема дает оценку числа $p(n)$ разбиений натурального числа n на натуральные слагаемые. (Например, $p(5)=7$, так как $5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$.) Именно,

$$p(n)\sim A_n e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}},$$

$$\text{где } A_n=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6(n-1/24)}}-\frac{1}{2(n-1/24)^{3/2}}\right) —$$

функция от n. Например, при $n=200$ «приближенная» формула Харди — Рамануджана дает $p(200)=3\,972\,999\,029\,388$. Это — точный ответ! Наиболее загадочна в формуле для $p(n)$ маленькая «поправочка» ($-1/24$), придуманная Рамануджаном. Никто — ни Харди, ни даже сам Рамануджан — не сумел объяснить, откуда она взялась. Опять вмешательство богини Намаккаль? Так или иначе, именно эта таинственная поправка обеспечила точность оценки. Однако Харди и Рамануджан не ограничились приближенной формулой: впоследствии они получили точное равенство для вычисления $p(n)$.

с настоящими математиками. Обеспечить в Индии это невозможно, и ему необходимо срочно перебраться в Англию. Удалось договориться о стипендии в Кембридже. Однако предстояло убедить в необходимости поездки самого Рамануджана, которого нынешнее положение вполне устраивало. К тому же против поездки категорически возражала мать, согласие которой было для сына обязательным. Друзья пытаются сформировать общественное мнение, активно действует кембриджский математик Невил, в начале 1914 г. посетивший Мадрас. Он обращается к ректору университета за поддержкой, но безуспешно.

То, что было не под силу ученым, легко осилила... богиня Намаккаль (согласно легенде, из ее уст во сне Рамануджан узнавал новые формулы). Мать увидела во сне сына, сидящего в большом зале в окружении европейцев, и богиня повелела не противиться отъезду. 17 марта 1914 г. Рамануджан отбыл в Англию. Он будет два года получать стипендию по 250 фунтов стерлингов в год. Из них 50 фунтов будет получать мать. По приезде вскоре стипендия была еще увеличена на 60 фунтов.

В Кембридже

Рамануджану 27 лет. Лучшие годы для становления математика прожиты в Индии без контакта с серьезными учеными, без доступа к математической литературе. В разных странах, в разные времена человек ощущает себя сложившимся в разном возрасте. Для Индии начала века, с очень низкой продолжительностью жизни, 27 лет — возраст зрелого человека. Вдова Рамануджана вспоминала, что он любил составлять гороскопы, и его собственный гороскоп предсказывал ему смерть до достижения 35-летнего возраста.

Харди предстояло принять очень ответственное решение: надо ли прервать занятия Рамануджана с тем, чтобы он смог освоить современную математику? Харди принял, по-видимому, единственно возможное решение: не менять стиля и направлений исследования Рамануджана, лишь по возможности корректируя их с учетом современной математики и стараясь объяснять новые вещи, обращая внимание на подходящую литературу. Харди писал:

«Его ум уже сложился, и он никогда не стал «ортодоксальным» математиком. Однако он еще был способен учить новые вещи и делал это весьма хорошо. Было невозможно обучать его систематически, но мало-помалу он воспринимал новые точки зрения. В частности, он усвоил, что такое доказательство, и его поздние статьи, при том что в некоторых отношениях они оставались необычными и индивидуальными, воспринимались как работы хорошо информированного математика. Однако его методы оставались по существу прежними».

Работает Рамануджан очень интенсивно и плодотворно. У него много общих интересов с Харди. Фантастическая интуиция Рамануджана, объединившись с рафинированной техникой Харди, дает замечательные плоды. К Рамануджану приходит признание: в 1918 г. он становится профессором университета в Кембридже; его выбирают в Королевское общество (английскую академию наук). Никогда прежде индус не удостаивался таких почестей.

Жилось Рамануджану непросто. Он строго следовал всем религиозным ограничениям, как и обещал родителям. В частности, он был вегетарианцем и был вынужден готовить себе сам. Он отказывался нарушать правила, даже когда тяжело заболел в 1917 г. Вероятно, нерегулярность в питании ускорила болезнь (так считал и сам Рамануджан, как вспоминала вдова). Оставшиеся два года в Англии Рамануджан провел в больницах и санаториях, вынужденный ослабить интенсивность занятий математикой.

Непросто было вписаться Рамануджану в кембриджскую жизнь, полную чуждых условностей и традиций. Природная вежливость, стремление не быть источником для дискомфорта окружающим, так присущие индийской культуре, помогали Рамануджану по крайней мере внешне приспособиться к университетской жизни.

Харди очень много делал для Рамануджана: следил за его занятиями, стремился восполнить пробелы в его образовании, заботился о его положении в обществе и быте. Рамануджан до последней минуты был

(Окончание см. на с. 41)

Исполнилось 80 лет члену редколлегии журнала «Квант», действительному члену Академии педагогических наук СССР, доктору физико-математических наук, профессору Валентину Александровичу Фабриканту. Редколлегия и редакция поздравляют юбиляра и желают ему здоровья и новых успехов в благородной деятельности ученого, педагога и пропагандиста науки. Мы с удовольствием публикуем новую статью Валентина Александровича.

ЗАЧЕМ МЫ ЗИМОЙ ИСПОЛЬЗУЕМ ОТОПЛЕНИЕ?

Академик АПН СССР
В. А. ФАБРИКАНТ

Заметку с таким названием опубликовал в 1938 году известный немецкий астрофизик Роберт Эмден в английском журнале «Нейчур» («Природа»). «Нейчур» — своеобразный журнал, где оригинальные научные работы (а некоторые из них удостаиваются впоследствии Нобелевских премий) публикуются совместно с популярными статьями, написанными на различные темы.

Хотя заметка Р. Эмдена и была популярной, она все же не прошла незамеченной: выдержки из нее и ее обсуждение можно обнаружить в шестом томе курса теоретической физики А. Зоммерфельда — видного физика-теоретика, много сделавшего для развития боровской теории строения атома. Вот что пишет Р. Эмден в своей заметке: «На вопрос, почему мы топим зимой, неспециалист ответит: чтобы сделать комнату теплее; знаток термодинамики выразится, возможно, следующим образом: чтобы подвести недостающую энергию. В таком случае правым окажется профан, а не ученый». Разберемся, почему так.

Специалист имеет в виду внутреннюю энергию воздуха, которым заполнены наши дома, а в условиях, типичных для жилых помещений, воздух ведет себя как идеальный газ (точнее говоря, как смесь идеальных газов). Энергия идеального газа пропорциональна абсолютной температуре T и количеству вещества, т. е. массе газа m. Поэтому для внутренней энергии воздуха можно написать

$$U=amT, \qquad (1)$$

где a — некоторая постоянная.

Теперь становится очевидной та ошибка, которую допустил ученый. Он забыл, что в данной ситуации масса воздуха m является функцией температуры. И действительно — жилое помещение не изолировано от внешнего мира; при протапливании воздух, нагреваясь, расширяется и частично выходит сквозь щели и поры в стенах наружу. Чтобы определить зависимость m от T, воспользуемся уравнением Менделеева—Клапейрона для идеального газа:

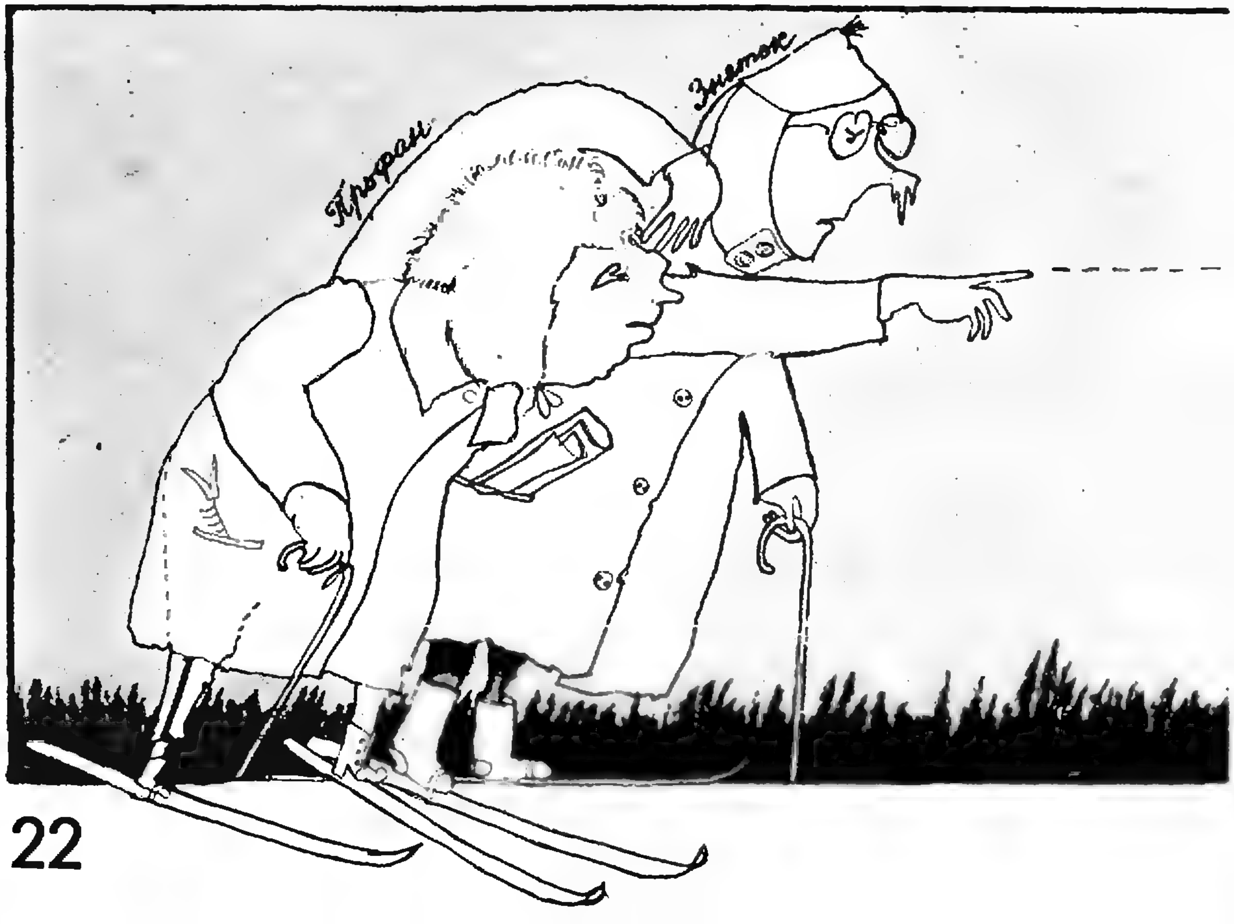
$$pV=\frac{m}{\text{M}}RT \qquad (2)$$

(M — молярная масса воздуха, R — универсальная газовая постоянная). Объем помещения V у нас не изменяется, давление p остается постоянным, равным внешнему давлению воздуха. Следовательно, правая часть уравнения (2) также должна, несмотря на изменение температуры, сохранять постоянное значение. Это возможно только при условии постоянства произведения mT.

Заметим, что обычно уравнение Менделеева—Клапейрона применяется в случаях, когда масса m фиксирована. В рассматриваемой нами задаче это условие не выполняется и, согласно уравнению (1), внутренняя энергия воздуха при постоянстве произведения mT должна оставаться неизменной. Увеличение средней кинетической энергии отдельной молекулы компенсируется уменьшением числа молекул.

Температура воздуха в помещении влияет на температурный режим работы человеческого тела. Слишком низкая температура вызывает сильное переохлаждение организма, в результате чего затрудняется протекание химических реакций, которые обеспечивают обмен веществ.

Будучи астрофизиком, Эмден не мог не вспомнить о роли Солнца как своеобразной «печки», что греет Землю своим излучением. Хотя Земля почти всю энергию, полученную от Солнца, излучает обратно в мировое пространство, оставшейся части энергии, которая, видоизменяясь, переходит в окружающую среду, вполне хватает, чтобы поддерживать на поверхности Земли необходимую для жизни температуру. Мощность солнечной энергии, падающей на единицу площади земной поверхности, определяет уровень температуры T (чем объясняется смена времен года и наличие климатических поясов), а тепло недр Земли составляет тысячные доли от тепла солнечных лучей, и его совершенно недостаточно для поддержания жизни. Поэтому опасность ядерной войны, по современным подсчетам ученых, состоит не только в разрушениях и непосредственном воздействии взрывов на живые организмы, но и в возникновении «ядерной зимы» — ведь многочисленные пожары вызовут огромные тучи копоти и сажи, которые будут непроницаемы для солнечных лучей. Эти тучи окутают всю Землю,



независимо от того, где возникнет «пожар» ядерной войны. Солнечное «отопление» Земли окажется выключенным, и на Земле наступит ледниковый период.

Но вернемся к проблемам отопления жилых помещений.

В уравнениях (1) и (2) фигурирует температура в кельвинах. Абсолютная шкала температур названа шкалой Кельвина в честь английского физика У. Томсона, получившего за большие заслуги в области науки и техники титул лорда Кельвина. Титул был выбран по названию реки, на берегу которой стоит университет Глазго. В этом университете Томсон преподавал физику пятьдесят лет. Примечательно, что в семейном кругу шутливо обсуждались и другие варианты титула — лорд Кабель или лорд Компас. Они отражали две заслуги Томсона: он участвовал в создании первого трансатлантического кабеля из Америки в Англию в 1866 году и внес радикальные усовершенствования в конструкцию компасов для морских судов. Поэтому неудивительно, что, занимаясь разработкой основ термодинамики, Томсон задумался над рациональностью нашей системы отопления. В 1852 году он опубликовал работу, в которой показал, что использование так называемых тепловых насосов в несколько раз выгоднее обычных отопительных устройств. В тепловых насосах, которые работают по принципу холодильной машины, энергия затрачивается на перевод тепла от более холодного наружного воздуха к более теплому воздуху в помещении *).

Идеи Томсона долгие годы не получали развития и практического применения. В 1920 году на первом съезде советских физиков профессор В. А. Михельсон, известный своими работами в области теории теплового излучения, сделал доклад «О динамическом отоплении», в котором в значительной степени развил и дополнил идеи Томсона. Михельсон предложил использовать в тепловых насосах процессы испарения и конденсации рабочего вещества, что и делается в современных конструкциях. За последние десятилетия началось довольно широкое применение тепловых насосов для отопления. В частности, зимой прошлого года в ялтинском пансионате «Дружба» начала работать отопительная теплонасосная установка, где тепло извлекается из морской воды с температурой 8 °C. Так что согреться можно и с помощью холода.

---

*) См., например, «Квант», 1986, № 11, с. 19.

Задачник „Кванта"

Задачи

M1066 — M1070. Ф1078 — Ф1082

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 января 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10 — 87 и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1066» или «Ф1078». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта». новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задача M1069 (так же как опубликованные ранее задачи M1046—M1048, M1051, M1052 и M1055) предлагалась весной на Восьмом Турнире городов.

Задачи Ф1078—Ф1082 предлагались на заключительном этапе XXI Всесоюзной олимпиады по физике.

M1066. Шесть точек расположены на плоскости так, что все попарные расстояния между ними не больше 1. Докажите, что из них можно выбрать три точки, попарные расстояния между которыми строго меньше 1.

С. Г. Сальников

M1067. Докажите, что для неотрицательных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $x^2+y^2+z^2=1$, выполнено неравенство

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

В. Э. Матизен

M1068. Дан угол AOB (A и B — точки на сторонах угла). Постройте прямую l, проходящую через вершину O так, чтобы площади треугольников AOC и BOD, где C и D — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую l, были равны.

Р. О. Бурдин

M1069. В некотором городе разрешены только парные обмены квартирами (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах). Докажите, что любой сложный обмен квартирами нескольких семей можно осуществить за два дня. (Предполагается, что и до, и после обмена каждая семья живет в отдельной квартире.)

Н. Н. Константинов, А. И. Шнирельман

M1070. Тетраэдр пересечен тремя плоскостями, каждая из которых параллельна двум его противоположным ребрам и одинаково удалена от них. Докажите, что сумма квадратов площадей этих трех сечений в 4 раза меньше суммы квадратов площадей граней тетраэдра.

В. Н. Дубровский

Ф1078. Длинная тонкая нить с грузом на конце переброшена через блок и привязана к носу модели лодки, которая может плыть по длинному прямолинейному каналу с водой (рис. 1). Лодку и груз отпускают, и скорость лодки (в см/с) записывают каждую секунду. К сожалению, сохранился только конец этой записи:

5,65; 6,44; 6,96; 7,31; 7,54; 7,70; 7,80; 7,86; 7,91.

Определите по этим данным скорость лодки через 0,1 секунды после того, как ее отпустили.

А. А. Шеронов

Ф1079. Если полностью открыт кран холодной воды, а кран горячей воды закрыт (рис. 2), то ванна наполняется за время $t_1=8$ мин; если при этом на выходное отверстие насадить шланг с душем на конце, то время наполнения увеличится до $t_2=14$ мин. Когда кран холодной воды закрыт, а кран горячей открыт полностью, время наполнения ванны $t_3=12$ мин; при тех же условиях, но с душем на конце — $t_4=18$ мин. За какое время наполнится ванна, если полностью открыты оба крана? А если при этом насажен шланг с душем?

В. Е. Скороваров

Ф1080. Тонкостенный сосуд непрерывно откачивают насосом, однако из-за наличия микротрещины в стенке сосуда в нем устанавливается неизменное давление $p_y=0{,}001$ мм рт. ст. Снаружи нормальное атмосферное давление $p_0=760$ мм рт. ст., относительная влаж-

Рис. 1.

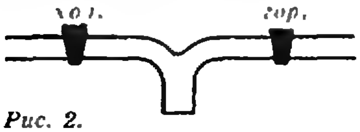


Рис. 2.

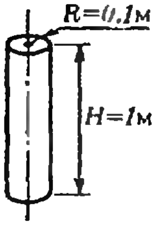


Рис. 3.

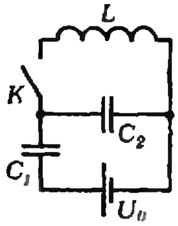


Рис. 4.

ность воздуха $\varphi=80\ \%$. Найдите давление паров воды в сосуде. Давление насыщенных паров воды при данной температуре $p_н=17{,}5$ мм рт. ст.

В. В. Можаев

Ф1081. Для очистки воздуха от пыли, которая в обычных условиях оседает очень медленно, можно использовать тот факт, что пылинки заряжены.

В первом опыте стеклянный цилиндр (рис. 3) с пыльным воздухом помещают в электрическое поле напряженностью $E_1=1\cdot10^4$ В/м, направленное вдоль оси цилиндра. Через время $t_1=2$ мин вся содержавшаяся в цилиндре пыль осела на дно. Во втором опыте вдоль оси цилиндра натягивают тонкую проволоку и соединяют ее с источником высокого напряжения. Известно, что в этом случае напряженность поля $E\sim1/r$, где r — расстояние до оси. Напряжение источника подбирают так, чтобы напряженность электрического поля у стенок цилиндра была, как и в первом опыте, $1\cdot10^4$ В/м.

Считая пылинки одинаковыми, а заряды пылинок равными, определите время оседания всей пыли на стенки цилиндра во втором опыте. Пыли в воздухе немного, так что объемным зарядом можно пренебречь.

А. И. Буздин

Ф1082. В схеме, приведенной на рисунке 4, замыкают ключ K. Найти максимальный ток через катушку. Найти максимальное напряжение на конденсаторе C_1. Неидеальностью элементов схемы можно пренебречь.

А. Р. Зильберман

Problems

M1066—M1070, P1078—P1082

M1066. The pairwise distances between six points of the plane are no greater than 1. Prove that there are three points among them whose pairwise distances are strictly less than 1.

S. G. Salnikov

M1067. Prove that any three non-negative numbers x, y, z such that $x^2+y^2+z^2=1$ satisfy the inequality

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

V. E. Matizen

M1068. The angle AOB is given, A and B being points on its sides. Construct a line l passing through the vertex O so as to make the areas of triangles AOC and BOD, where C and D are the bases of the perpendiculars drawn from A and B to the line l, equal.

R. O. Burdin

M1069. In a certain city only pairwise apartment exchanges are allowed (if two families exchange apartments, they cannot participate in other exchanges on the same day). Prove that any multiple exchange involving several families can be carried out in two days. (Before and after each exchange each family lives in a separate apartment.)

N. N. Konstantinov, A. I. Shnirelman

M1070. A tetrahedron is cut by three planes each of which is parallel and equidistant to two opposite edges of the tetrahedron. Prove that the sum of squares of these three section's areas is 4 times less than the sum of squares of the areas of the tetrahedron's faces.

V. N. Dubrovski

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 15th., 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped

selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

P1078. A long thin string with a weight at the end is thrown over a pulley and tied to the front of a model boat which can float along a rectilinear water canal (see figure рис. 1). When the boat and the weight are released, the velocity of the boat (in cm/s) is written down every second. Unfortunately, only the end of this list of figures is available: 5.65, 6.44, 6.96, 7.31, 7.54, 7.70, 7.80, 7.86, 7.91.
Use this data to determine the velocity of the boat 0.1 second after it was released.

A. A. Sheronov

P1079. If the cold water faucet is turned on all the way, while the hot water faucet is turned off (see fiqure рис. 2), the bathtub fills in time $t_1=8$ min; if a rubber pipe with a sprinkling device is slipped on the faucet, the time is $t_2=14$ min. When the cold water faucet is turned off and the hot water one turned on all the way, the bath fills within $t_3=12$ min; under the same conditions, but with a sprinkler, the time is $t_4=18$ min. How long will it take to fill the bath with both faucets open all the way? Under the same conditions but with a sprinkler?

V. E. Skorovarov

P1080. A receptacle with thin walls is used to form vacuum by means of an attached pump, but a constant pressure remains in the receptacle (because of a tiny crack in the walls): $p_y=0.001$ mm Hg. Outside the atmospheric pressure is normal ($p_0=760$ mm Hg), the relative humidity is $\varphi=80\,\%$. Find the pressure of vapors inside the receptacle. The pressure of saturated vapors at the given temperature is $p_n=17.5$ mm Hg.

V. V. Mojaev

P1081. In order to clear air of dust which settles very slowly under ordinary conditions, we can use the fact that dust particles are charged. In the first experiment a glass cylinder (figure рис. 3) with dusty air is placed in an electric field $E_1=1\cdot 10^4$ V/m directed along the cylinder's axis. In time $t_1=2$ min the entire dust settles on the bottom. In the second experiment, a thin wire is stretched along the cylinder's axis and connected to a high voltage source. It is known that in this case the field will be $E\sim 1/r$, where r is the distance from the axis. The voltage of the source is chosen so as to make the field's value by the cylinder's walls equal to its value in the first experiment, i. e. $1\cdot 10^4$ V/m. Assuming the specks of dust to be identical and equally charged, determine how long it will take for all the dust to settle on the cylinder's walls. There isn't too much dust in the air, so that the volume charge is negligible.

A. I. Buzdin

P1082. On the circuit shown on figure рис. 4, the switch K is turned on. Find the maximal current flowing through the coil. Find the maximal voltage on the capacitor C_1. The elements of the circuit are ideal.

A. R. Zilberman

Решения задач

М1046 — М1050, Ф1058 — Ф1062

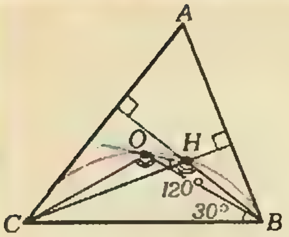
М1046. *В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 60°. Докажите, что одна из биссектрис угла, образованного высотами, проведенными из вершин B и C, проходит через центр описанной окружности этого треугольника.*

Пусть H — точка пересечения высот, а O — центр описанной окружности треугольника ABC (см. рисунок). Тогда $\angle BOC=120^\circ$, как центральный угол описанной окружности, опирающийся на ту же дугу BC, что и вписанный в нее угол BAC и $\angle BHC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$. Следовательно, точки B, H, O и C лежат на одной окружности. Будем для определенности считать, что точка H лежит на дуге BO этой окружности. Тогда $\angle CHO=\angle CBO=(180^\circ-120^\circ)/2=30^\circ$ (треугольник BCO — равнобедренный), т. е. HO — биссектриса того

из углов, образованных высотами BH и CH, который равен 60°.

Точно так же это утверждение доказывается и для тупоугольного треугольника.

В. Н. Дубровский



М1047. *В шахматном турнире, проводимом в один круг, не менее 3/4 всех сыгранных к некоторому моменту партий закончились вничью. Докажите, что в этот момент некоторые два участника набрали одинаковое число очков.*

В этой задаче удобно пользоваться такой системой подсчета очков: 1 очко за победу, 0 очков за ничью, — 1 очко за поражение (очевидно, она эквивалентна обычной шахматной). Обозначим число участников турнира через n и положим $k=n/2$ при четном n, $k=(n-1)/2$ при нечетном n.

Допустим, что *в данный момент все участники имеют разные результаты.* Тогда среди них найдутся либо k с положительными результатами, либо k с отрицательными результатами. Достаточно рассмотреть только один, скажем, первый случай. Поскольку все эти k шахматистов набрали разное число очков, а число очков каждого не меньше числа выигранных им партий, общее число побед этих шахматистов не меньше $1+2+...+k=k(k+1)/2$. Число всех партий в турнире равно $(n-1)n/2$, поэтому доля партий, закончившихся победой одного из соперников, к рассматриваемому моменту не меньше

$$\frac{k(k+1)}{(n-1)n} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

т. е. доля ничьих меньше 3/4, что противоречит условию задачи. Тем самым наше допущение опровергнуто.

М. Бона

М1048.* *Один из двух играющих («начинающий») ставит на некоторую клетку шахматной доски коня. Затем игроки по очереди передвигают коня по обычным правилам (буквой «Г»), при этом нельзя ставить коня на поле, где он уже побывал. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто может добиться*

Ответ: а) выигрывает второй игрок, б) выигрывает второй при четном произведении mn и первый (начинающий) — при нечетном.

Рассмотрим сразу общий случай доски $m\times n$. Мы докажем, что если произведение mn четно, то клетки доски можно разбить на пары так, что с одной клетки каждой пары ходом коня можно попасть на другую клетку (рис. 1), а если mn нечетно, то таким же образом можно разбить все клетки доски, кроме одной (рис. 2). В *первом случае победная стратегия второго* игрока заключается в том, что он должен ставить коня на клетку, парную той, на которую перед этим пошел

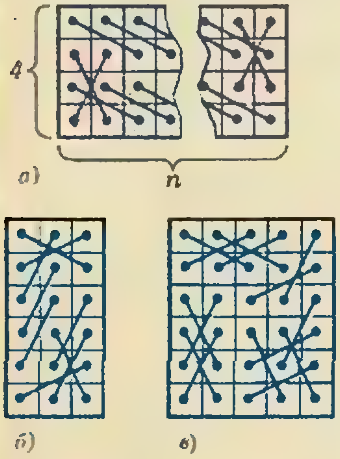


Рис. 1.

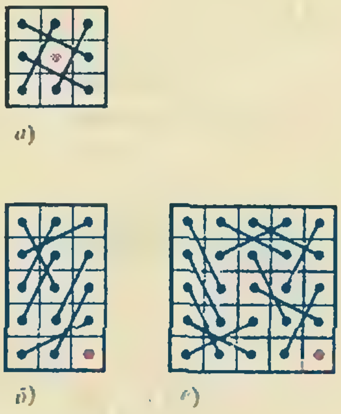


Рис. 2.

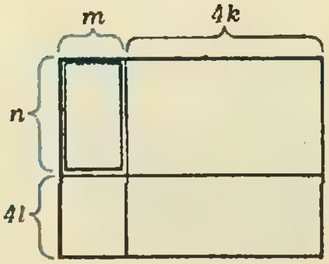


Рис. 3.

победы (независимо от действий противника) — начинающий или его партнер а) на доске 8×8; б) на доске $m\times n$, где $m\geqslant n\geqslant 3$?

первый. При нечетном mn начинающий первым ходом должен ставить коня на клетку, не имеющую пары, а в дальнейшем он сам сможет применить указанную выигрышную стратегию.

Нужное разбиение доски $4\times n$ (или $n\times 4$) при любом $n=2, 3, \ldots$ показано на рисунке 1, а). Из рисунка 3 видно, что если один из двух вариантов разбиения имеется для доски $m\times n$, то такой же вариант есть и для досок $(m+4k)\times(n+4l)$ $(k,\ l=1,2,\ldots)$. Таким образом, остается указать разбиения для досок $m\times n$, где m и n дают всевозможные (ненулевые) остатки при делении на 4 и $m\geqslant n\geqslant 3$, т. е. $m, n=3, 5, 6$. Разбиения досок 3×3, 5×3, 5×5, 6×3 и 6×5 приведены на рисунках 2, а), б), в) и 1, б), в) соответственно; доска 6×6 — «удвоенная» 6×3.

В. Зудилин

М1049. *Будем говорить, что в цилиндр Ц$_1$ вписан боком другой цилиндр Ц$_2$, если две образующие второго цилиндра лежат на основаниях первого, а четыре точки окружностей основания второго — на боковой поверхности первого (рис. 1). Взяв цилиндр Ц$_1$, у которого отношение диаметра к высоте равно k, впишем в него боком (если это возможно) цилиндр Ц$_2$, в него впишем боком Ц$_3$, в него — Ц$_4$ и т. д. При каких значениях k*

а) можно вписать Ц$_2$, но нельзя Ц$_3$;

б) можно вписать Ц$_{10}$, но нельзя Ц$_{11}$;*

в) можно вписать бесконечную последовательность Ц$_n$ $(n=1, 2, \ldots)$?*

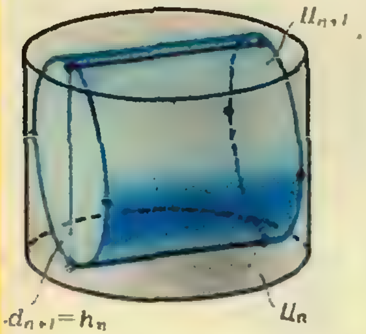


Рис. 1.

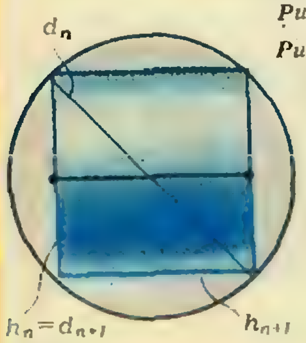


Рис. 2.

Пусть d_n и h_n — диаметр и высота цилиндра Ц$_n$, $a_n=d_n^2/h_n^2$. Из рисунков 1 и 2 видно, что

$$d_{n+1}=h_n,\ h_{n+1}=d_n^2-h_n^2, \qquad (1)$$

причем вписать Ц$_{n+1}$ в Ц$_n$ можно тогда и только тогда, когда $d_n^2-h_n^2>0$, или $a_n>1$.

а) Ответ: $k\geqslant\sqrt{2}$. Мы должны найти, при каких k

$$a_1>1,\ a_2\leqslant 1.$$

Из формул (1) при $n=1$ получаем соотношение

$$\frac{1}{a_2}=\frac{h_2^2}{d_2^2}=\frac{d_1^2-h_1^2}{h_1^2}=a_1-1; \qquad (2)$$

поэтому $a_2\leqslant 1$, когда $a_1\geqslant 2$ (при этом автоматически $a_1>1$). Остается заменить a_1 на k^2.

б) Ответ: $\sqrt{89/55}\leqslant k<\sqrt{34/21}$. Для того, чтобы можно было вписать цилиндры Ц$_2$, ..., Ц$_{10}$ и нельзя — Ц$_{11}$, должны выполняться неравенства $a_1>1$, $a_2>1, \ldots$ $\ldots, a_9>1,\ a_{10}\leqslant 1$. Выясним, какое ограничение накладывает каждое из них на $a_1=k^2$. Точно так же, как (2), устанавливается равенство

$$a_{n-1}=1+1/a_n,\ n=2, 3, \ldots\,.$$

Функция $f(x)=1+1/x$ убывает, поэтому неравенство $a_n>1$ эквивалентно $a_{n-1}<f(1)=2$, это, в свою очередь, эквивалентно $a_{n-2}>f(2)=3/2$, $a_{n-3}<f(3/2)=5/3$ и т. д. Обозначая i-й член последовательности $1, f(1), f(f(1)), f(f(f(1))), \ldots$ через λ_i, получим, что неравенство $a_n>1$ эквивалентно $a_1>\lambda_n$ при нечетном n и $a_1<\lambda_n$ при четном n.

Можно заметить (см. рис. 3), что числа $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, \ldots$ возрастают, а $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6, \ldots$ — убывают, причем числа первой последовательности меньше чисел второй последовательности. Это следует из равенств

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n=f(\lambda_n)-f(\lambda_{n-1})=\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n-1}}=\frac{\lambda_{n-1}-\lambda_n}{\lambda_{n-1}\lambda_n}. \qquad (3)$$

Действительно, если, например, $\lambda_n<\lambda_{n-1}$, то в силу (3) $0<\lambda_{n+1}-\lambda_n<\lambda_{n-1}-\lambda_n$ (так как все λ_i при $i>1$ больше 1), т. е. $\lambda_n<\lambda_{n+1}<\lambda_{n-1}$; аналогично, при $\lambda_n>\lambda_{n-1}$ получим, что $\lambda_n>\lambda_{n+1}>\lambda_{n-1}$. Таким образом, числа λ_n располагаются как на рисунке 4 — каждое из них, начиная с λ_3, лежит между двумя предыдущими, причем $\lambda_1<\lambda_2$.

У нас должны выполняться неравенства $a_1>\lambda_n$ при $n=1, 3, 5, 7, 9$, $a_1<\lambda_n$ при $n=2, 4, 6, 8$ и $a_1\geqslant\lambda_{10}$, т. е. $\lambda_{10}\leqslant a_1<\lambda_8$. Остается подсчитать λ_8 и λ_{10}: $\lambda_8=34/21$, $\lambda_{10}=89/55$. Для упрощения подсчета можно воспользоваться тем, что $\lambda_n=u_n/u_{n-1}$, где u_n — n-й член знаменитой последовательности Фибоначчи

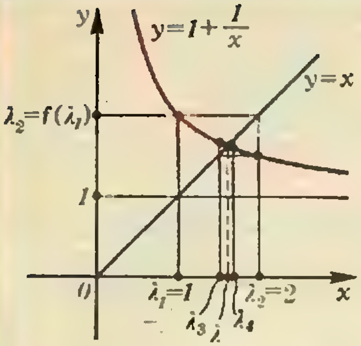


Рис. 3.

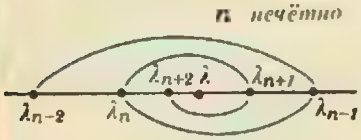


Рис. 4.

M1050. *На отрезке $[-1; 1]$ выбрано k различных точек, для каждой посчитано произведение расстояний до остальных $k-1$ точек и через S обозначена сумма обратных величин этих k произведений. Докажите, что а) $S \geqslant 2$ при $k=3$; б)* $S \geqslant 4$ при $k=4$.*

1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., определяемой при $n \geqslant 2$ равенством $u_{n+1}=u_{n-1}+u_n$ (в самом деле, $\lambda_2=2/1=u_2/u_1$; $\lambda_{n+1}=1+1/\lambda_n=1+u_{n-1}/u_n=u_{n+1}/u_n$, если $\lambda_n=u_n/u_{n-1}$).

в) Ответ: $k=\sqrt{(1+\sqrt{5})/2}$. Из сказанного в пункте б) вытекает, что искомые значения $k^2=a_1$ должны удовлетворять неравенствам $\lambda_{2m-1}<a_1<\lambda_{2m}$ при всех $m \geqslant 1$. Докажем, что последовательность λ_n при $n\to\infty$ стремится к пределу $\lambda=(1+\sqrt{5})/2$ — положительному корню уравнения $f(\lambda)=\lambda$ (см. рис. 3). Повторяя вывод формулы (3), мы получим, что

$$|\lambda-\lambda_n|=\frac{|\lambda-\lambda_{n-1}|}{\lambda\lambda_{n-1}}<\frac{|\lambda-\lambda_{n-1}|}{\lambda}<\ldots<\frac{|\lambda-\lambda_1|}{\lambda^{n-1}},$$

т. е. $|\lambda-\lambda_n|\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, отрезки $[\lambda_{2m-1}; \lambda_{2m}]$ стягиваются к точке λ (рис. 4), которая и является единственным возможным значением $a_1=k^2$.*)

В. Столин

а) Ясно, что каждое из трех произведений лишь увеличится (а сумма S обратных к ним величин уменьшится), если крайние числа раздвинуть: левое заменить на -1, правое — на 1. Поэтому можно считать, что выбраны точки -1, x, 1, где $-1<x<1$. В этом случае

$$S=\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{(1+x)(1-x)}+\frac{1}{2(1-x)}=\frac{2}{1-x^2}\geqslant 2,$$

причем равенство достигается лишь при $x=0$.

б) Аналогично пункту а) задачу для четырех точек можно решать методом «постепенного улучшения». Как и выше, заменяя крайние числа на -1 и 1, мы можем только уменьшить S. Средние точки представим в виде $-1+u$ и $1-v$ ($u>0$, $v>0$, $-1+u<1-v$; рис. 1).

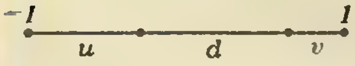


Рис. 1.

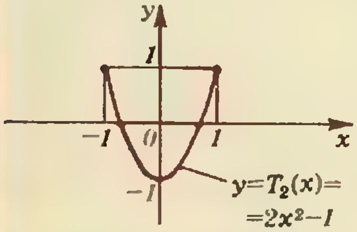


Рис. 2.

Теперь преобразуем сумму S, полагая $d=2-u-v$:

$$S=\frac{1}{2u(u+d)}+\frac{1}{2v(v+d)}+\frac{1}{du(v+d)}+\frac{1}{dv(u+d)}=$$

$$=\frac{d(v(2-u)+u(2-v))+2(2uv+d(u+v))}{2duv(2-u)(2-v)}=$$

$$=\frac{d(2(2-d)-2uv)+2(2uv+d(2-d))}{2duv(4-2(u+v)+uv)}=$$

$$=\frac{2d(2-d)+uv(2-d)}{duv(2d+uv)}=\frac{2-d}{duv}.$$

Произведение uv при заданной сумме $u+v=2-d$ максимально, когда $u=v=(2-d)/2$, поэтому

$$S\geqslant\frac{4}{d(2-d)}\geqslant 4,$$

причем равенство достигается здесь при $d=1$, $u=v=1/2$, т. е. для точек -1, $-1/2$, $1/2$, 1.

Оказывается, при каждом $k\geqslant 3$ наименьшее значение S равно 2^{k-2} и достигается для набора $x_n=-\cos\frac{n\pi}{k-1}$, $n=0, 1, \ldots, k-1$. Укажем красивое рассуждение, которое (в отличие от прямых вычислений, приведенных выше) годится для общего случая.

Пользуясь тождеством $\cos(m+1)\varphi=2(\cos m\varphi)\cos\varphi-\cos(m-1)\varphi$, легко доказать, что при любом $m\geqslant 1$ существует многочлен $T_m(x)$ такой, что $T_m(\cos\varphi)=\cos m\varphi$, причем его старший коэффициент равен 2^{m-1}.

---

*) Близкие задачи об итерациях функций рассмотрены в книге «Заочные математические олимпиады» (М.: «Наука», 1987; задачи 6-16, 6-17).

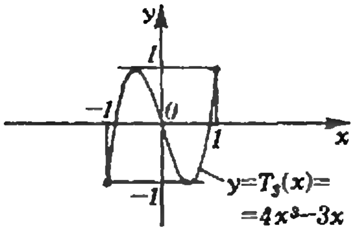


Рис. 3.

Например, $T_2(x)=2x^2-1$ (рис. 2), $T_3(x)=4x^3-3x$ (рис. 3). Отметим, что $|T_m(x)|\leqslant 1$ при $|x|\leqslant 1$. Многочлен $T_m(x)$ называется *многочленом Чебышёва* (см. статью Н. Васильева и А. Зелевинского «Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения» в «Кванте» № 1 за 1982 г.). С его помощью мы решим задачу для $k=m+1$ точек.

Пусть x_n, $n=0, \ldots, k-1$, — любой набор k различных точек на отрезке $[-1; 1]$. Всякий многочлен степени $k-1$ однозначно определяется своими значениями a_n в точках $x=x_n$ и, как нетрудно проверить, может быть записан в виде суммы

$$\sum_{n=0}^{k-1} a_n \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_{n-1})\ldots(x-x_{k-1})}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n+1})\ldots(x_n-x_{k-1})}.$$

Возьмем $a_n=T_{k-1}(x_n)$, тогда этот многочлен будет тождественно равен $T_{k-1}(x)$. Его старший коэффициент, равный 2^{k-2}, является суммой выражений

$$\frac{a_n}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n+1})\ldots(x_n-x_{k-1})},$$

каждое из которых по модулю не превосходит

$$\frac{1}{|x_n-x_0|\ldots|x_n-x_{n-1}|\,|x_n-x_{n+1}|\ldots|x_n-x_{k-1}|} \qquad (*)$$

(поскольку $|a_n|=|T_{k-1}(x_n)|\leqslant 1$). Но сумма величин $(*)$ при $n=0, \ldots, k-1$ как раз и есть интересующая нас сумма S; следовательно, $S\geqslant 2^{k-2}$.

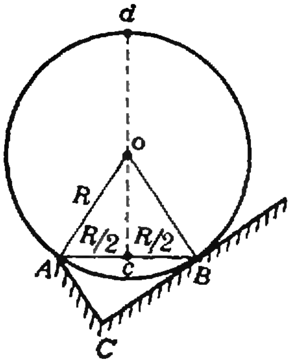
Л. Д. Курляндчик

Ф1058. *Шарик катится вдоль ребра прямоугольного желоба ACB (см. рис.) со скоростью v без проскальзывания; расстояние AB равно радиусу шарика. Какие точки шарика обладают максимальной скоростью? Чему равна эта скорость?*

По условию задачи шарик катится без проскальзывания, поэтому скорости тех точек шарика, которые в данный момент времени касаются желоба в точках A и B (см. рисунок), равны нулю. Считая шарик абсолютно твердым телом (а это означает, что расстояние между любыми двумя точками шарика остается неизменным), приходим к выводу, что в данный момент времени все точки шарика, лежащие на отрезке AB, неподвижны. А это означает, что в каждый момент времени движение шарика — это вращение относительно оси AB. (Ясно, что точки A и B — точки, в которых шарик касается желоба, — перемещаются со скоростью v.)

Мгновенная скорость любой точки шарика есть $\omega\rho$, где ω — угловая скорость вращения, ρ — расстояние от точки до оси AB. Скорость центра шарика (т. o на рисунке) равна v; расстояние от т. о до оси AB — $\rho_0=|oc|=R\sqrt{3}/2$. Следовательно,

$$\omega=\frac{v}{\rho_0}=\frac{2v}{R\sqrt{3}}.$$



Понятно, что максимальной скоростью обладают точки шарика, наиболее удаленные от оси AB. Из геометрических соображений ясно, что в любой момент имеется лишь одна точка, максимально удаленная от оси, — на рисунке это точка d. Расстояние от т. d до оси вращения равно $\rho_d=\rho_0+R=R(1+\sqrt{3}/2)$, и скорость точки d —

$$v_d=v_{\max}=\omega\rho_d=\frac{2v}{R\sqrt{3}}R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=v\,\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

С. С. Кротов

Ф1059. *В некоторой точке пространства необходимо создать максимально возможную напряженность гравитационного поля (ускорение свободного падения), имея в распоряжении заданную массу вещества неизменной плотности.*

а) Какую форму необходимо придать телу из этого вещества?

б) Каково должно быть взаимное расположение тела и точки?

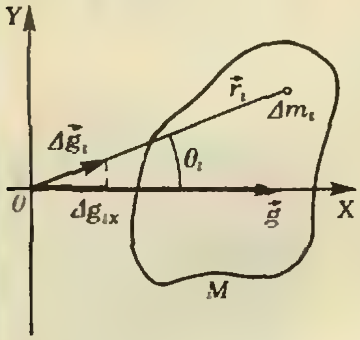


Рис. 1.

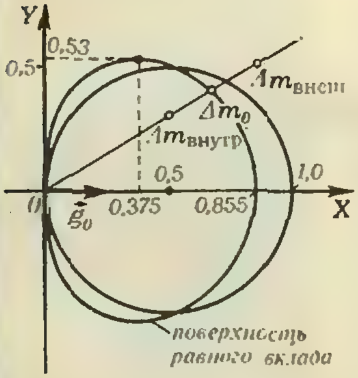


Рис. 2.

Пусть однородное тело массой M создает гравитационное поле, вектор напряженности которого в некоторой точке O равен $\vec{g}$ и направлен вдоль оси OX, как это показано на рисунке 1. Согласно принципу суперпозиции полей вектор $\vec{g}$ является суммой векторов $\Delta\vec{g}_i$ напряженностей полей, созданных в точке O всеми бесконечно малыми элементами Δm_i тела M. Вклад каждого элемента в общее поле $\vec{g}$ равен проекции вектора $\Delta\vec{g}_i$ на ось OX, т. е. равен

$$\Delta g_{ix}=\frac{G\cdot\Delta m_i}{r_i^2}\cos\theta_i\,,$$

где r_i — расстояние от точки O до элемента Δm_i, θ_i — угол между направлением на элемент и осью OX. Следовательно (если все элементы Δm_i одинаковы),

$$g=|\vec{g}|=\sum_i\Delta g_{ix}=G\Delta m\sum\frac{\cos\theta_i}{r_i^2}\,.$$

Таким образом, при данной массе тела M значение g будет максимальным, если форма тела и его ориентация относительно точки O будут такими, что величина $\sum\frac{\cos\theta_i}{r_i^2}$ будет максимальной.

Рассмотрим тело массой M, ограниченное проходящей через точку O поверхностью, для всех точек которой (кроме точки O) отношение $\frac{\cos\theta_i}{r_i^2}$ одно и то же, т. е.

$$\frac{\cos\theta}{r^2}=\text{const}.$$

Такую поверхность назовем поверхностью равного вклада. Тело, ограниченное поверхностью равного вклада, является телом вращения (вокруг оси OX; см. рис. 2). Покажем, что именно такое тело создает гравитационное поле, напряженность которого g_0 максимальна в точке O.

Элементы Δm, находящиеся на поверхности равного вклада, по определению вносят одинаковые вклады Δg_{0x} в g_0. Вклад любого внутреннего элемента $\Delta g_{внутр}$ больше Δg_{0x}; если бы элемент Δm оказался за поверхностью тела, то его вклад $\Delta g_{внеш}$ в величину g_0 был бы меньше Δg_{0x}. Таким образом,

$$\Delta g_{внутр}>\Delta g_{0x}>\Delta g_{внеш}. \qquad (*)$$

Любая деформация тела M (без изменения его плотности), *не приводящая к изменению направления вектора* напряженности в точке O, сводится к переносу массы из внутренних областей во внешние области, за пределы поверхности равного вклада. Как видно из соотношения (*), это приводит к уменьшению напряженности поля в точке O.

Следовательно, напряженность гравитационного поля, создаваемого в точке O телом данной массы, максимальна, если это тело — тело вращения, ограниченное поверхностью равного вклада, и точка O лежит на поверхности на оси вращения.

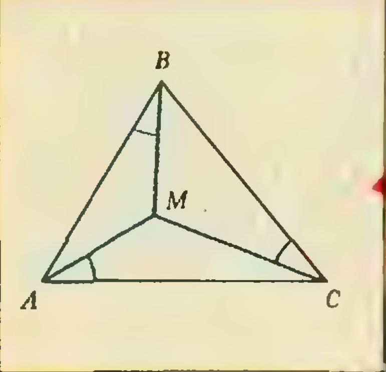
Заметим, что отличие формы этого тела от шарообразной существенно. На рисунке 2 представлены сечения такого тела и шара такой же массы. Видно, как нужно деформировать шар, чтобы получить в одной точке (в данном случае в точке O) максимально возможное поле. Оказывается, что после такой деформации шара напряженность поля в точке O возрастет в $\sqrt[3]{27/25}$ раза, т. е. примерно на 3 %.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

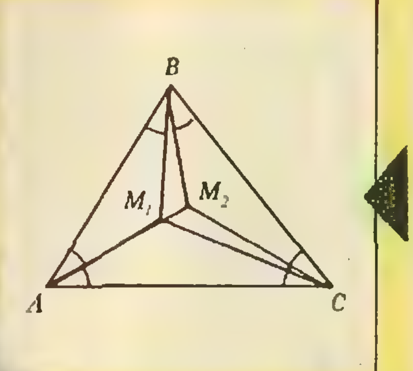
(Окончание см. на с. 34)

Калейдоскоп „Кванта"

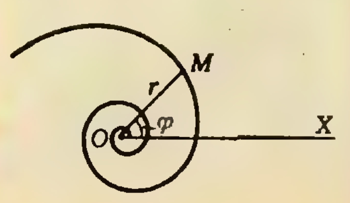
Замечательные точки и линии



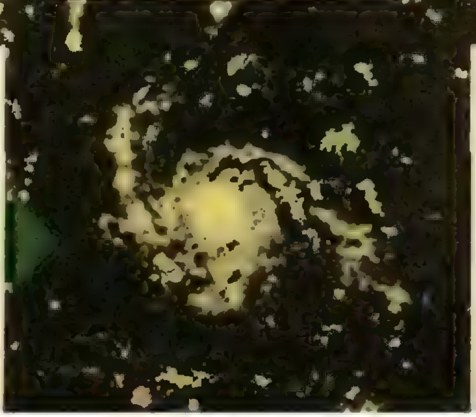
В треугольнике существует такая точка, что отрезки, соединяющие ее с вершинами, образуют одинаковые углы со сторонами. Эта точка называется *точкой Брокара* в честь французского математика Анри Брокара (1845—1922), автора наиболее полного справочника по замечательным кривым.



Эти одинаковые углы называются *углами Брокара*. Существует и вторая точка Брокара в треугольнике, которая получится при противоположном обходе вершин треугольника. Интересно, что величина угла Брокара для второй точки будет такой же, как и для первой.

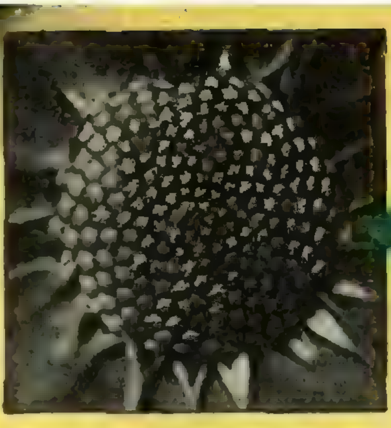


В справочнике Брокара мы находим *логарифмическую спираль*. Ее уравнение $r = ae^{k\varphi}$, где r — расстояние точки M на спирали до выбранной точки O, φ — угол между лучом OM и выбранным лучом OX. Если логарифмическую спираль подобно увеличивать и одновременно поворачивать, она будет переходить в себя.



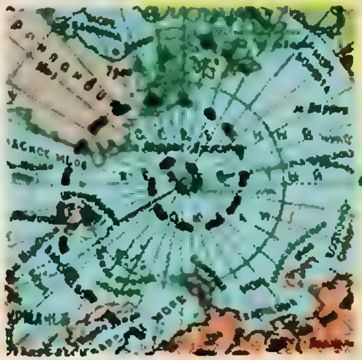
Логарифмическую спираль можно увидеть и в звездном атласе. Дело в том, что многие галактики состоят из семейств логарифмических спиралей. Они так и называются: *спиральные галактики.*

Логарифмическая спираль часто встречается в живой и неживой природе. Например, форму логарифмической спирали имеют многие раковины.



Логарифмическая спираль проявляется в природе не только в ракушках и галактиках. Например, если вы внимательно посмотрите на этот цветок, то вам, возможно, удастся заметить, что семена в нем также расположены по логарифмическим спиралям.

Тангенс угла Брокара выражается формулой: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4S}{a^2+b^2+c^2}$, где S — площадь треугольника, а a, b, c — длины его сторон. Площади треугольников, на которые разбивается исходный треугольник, относятся, как обратные величины квадратов сторон: $a^2S_{ABM} = b^2S_{BCM} = c^2S_{CAM}$.



Логарифмическая спираль образует одинаковые углы в пересечении с лучами, исходящими из точки O. Поэтому, если мы начнем вблизи Северного полюса идти, скажем, на юго-восток, то мы будем обходить его по логарифмической спирали.

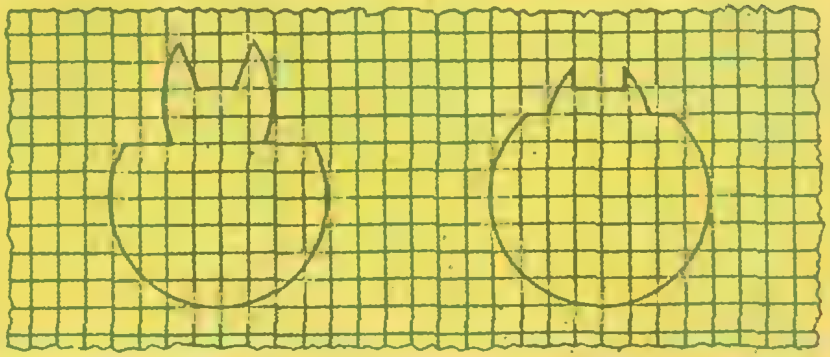
Головоломки

1. Три одинаковых треугольника разрезаны по разным медианам. Сложите из полученных шести кусков один треугольник.

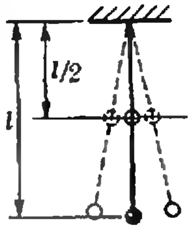
В. В. Произволов

2. Разрежьте фигурку, изображенную на левом рисунке, на две части так, чтобы из них можно было бы сложить круг. Сделайте то же самое для фигурки на правом рисунке. (Подсказка: *при разрезании первой фигурки вы* увидите мордочку хитрой лисы, а при разрезании второй — голову неуклюжего медведя.)

А. М. Домашенко



Ф1060. *Математический маятник представляет собой невесомый стержень длиной l, к свободному концу которого прикреплен маленький массивный грузик. На стержень надета бусинка такой же массы, которая может свободно скользить по горизонтальной направляющей, проходящей на уровне середины стержня (см. рисунок). Найти период малых колебаний такого маятника. Трение отсутствует.*



Предположим, что математический маятник длиной l отклонили на угол α_0 и отпустили. Согласно закону сохранения энергии максимальное значение скорости маятника (грузика) равно

$$v_m=\sqrt{2gl\,(1-\cos\alpha_0)}=2\sin\frac{\alpha_0}{2}\sqrt{gl}.$$

При условии малости колебаний

$$\sin\frac{\alpha_0}{2}\approx\frac{\alpha_0}{2}\approx\frac{A}{2l},$$

где A — амплитуда колебаний маятника, и

$$v_m=A\sqrt{\frac{g}{l}}=A\omega_0,$$

где ω_0 — частота колебаний.

Найдем максимальную скорость грузика для нашей системы (маятник с бусинкой, находящейся все время на одной и той же горизонтали). Запишем закон сохранения энергии для системы в тот момент, когда грузик проходит наинизшую точку траектории:

$$\frac{m}{2}v_m^2+\frac{m}{2}\left(\frac{v_m}{2}\right)^2=mgl\,(1-\cos\alpha_0)$$

($\frac{v_m}{2}$ — скорость бусинки в этот момент). Отсюда

$$v_m=\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{2gl\,(1-\cos\alpha_0)}=A\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\,\omega_0.$$

Как видно из этого результата, частота ω колебаний нашей системы в $2/\sqrt{5}$ раз меньше частоты ω_0 колебаний математического маятника длиной l. Следовательно, период колебаний системы —

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\omega_0\sqrt{5}=\pi\sqrt{\frac{5l}{g}}.$$

Л. Г. Маркович

◆

Ф1061. *Пламя спиртовки, перед тем как погаснуть, начинает мерцать и потрескивать. Почему?*

Причиной мерцания пламени является, очевидно, неравномерность поступления горючего — спирта. Это имеет место, когда спирт кончается.

Действительно, когда спирта остается мало, начинают сказываться, помимо капиллярных сил «захвата» горючего фитилем, силы взаимодействия спирта с дном и стенками спиртовки (силы поверхностного натяжения). Перебои в поступлении горючего могут возникнуть и из-за наличия всякого рода «грязи», находящейся, как правило, на дне спиртовки.

Итак, в некоторый момент времени спирта, поступающего к пламени по фитилю, не хватает для поддержания устойчивого размера пламени, и пламя как бы пропадает; однако в следующий момент поступает «избыток» спирта, и происходит резкое увеличение пламени, сопровождающееся треском.

Как правило, при диаметре фитиля 2—3 мм такие мерцания с потрескиванием возникают, когда длина фитиля составляет несколько миллиметров, причем, чем короче фитиль — тем чаще происходят вспышки, сопровождающиеся треском.

А. С. Бутов

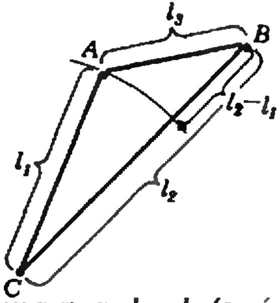
◆

Ф1062. *Космическая частица, движущаяся со скоростью, близкой к скорости света, попадает в ре-*

Наличие двух светящихся точек означает, что скорость u, с которой частица движется в резервуаре, больше скорости света в жидкости, т. е. больше $v=c/n$ (c — скорость света в вакууме).

зервуар экспериментальной установки, наполненной жидкостью с показателем преломления $n=1{,}6$. Прохождение частицы через жидкость сопровождается свечением. Через небольшой промежуток времени после попадания частицы в резервуар был включен прибор, находящийся в точке C, который зафиксировал в момент включения две светящиеся точки A и B (схема опыта в определенном масштабе приведена на рисунке; дан вид сверху, точки C, A и B лежат в горизонтальной плоскости). Объясните наблюдавшееся явление и, используя рисунок, найдите скорость частицы. Торможением частицы в жидкости пренебречь.

Действительно, в момент включения прибора к прибору пришел свет, испущенный до этого в разные моменты времени из точек A и B. На прохождение пути BC свету потребовалось время t_1 большее, чем время t_2 на прохождение пути AC. Следовательно, в точке B частица была раньше, чем в точке A, т. е. частица движется справа налево (от B к A). За время t_2-t_1 свет



в жидкости прошел путь l_2-l_1 (см. рисунок), а частица — путь l_3. Как видно из рисунка, $l_3>l_2-l_1$. Значит, действительно $u>v$.

Значение u найдем из уравнения

$$\frac{l_2-l_1}{v}=\frac{l_3}{u}\Rightarrow u=v\frac{l_3}{l_2-l_1}=\frac{c}{n}\frac{l_3}{l_2-l_1}.$$

Определив из чертежа отношение $l_3:(l_2-l_1)$, получим

$$u=0{,}83\ c.$$

А. И. Буздин

Наша анкета

Дорогие читатели! Для того чтобы при подготовке материалов к публикации в «Кванте» редакция могла учесть ваши интересы, уровень подготовки и вкусы, просим вас ответить на вопросы нашей традиционной анкеты.

Для сокращения сроков обработки анкет ответы просим высылать на отдельном листе бумаги, сохранив нумерацию вопросов, до 10 января 1988 года.

Наш адрес: 103006 Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». На конверте сделайте пометку «Анкета-87».

---

1. Фамилия, имя (не обязательно). Место учебы (город, село, класс, курс) или работы (профессия, специальность).

2. Круг интересов (математика, физика). С какого года вы выписываете наш журнал? Сколько человек читают ваши экземпляры «Кванта»?

3. Наиболее и наименее интересные статьи по математике из числа опубликованных в 1987 году.

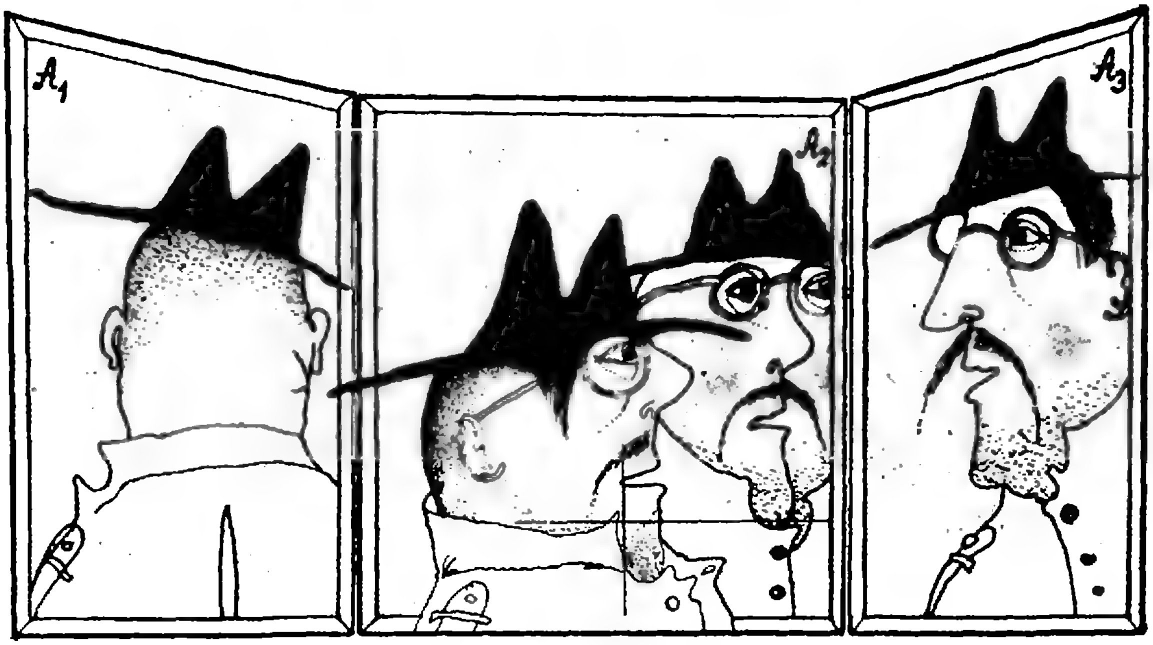
4. Наиболее и наименее интересные статьи по физике из числа опубликованных в 1987 году.

5. Самая удачная и самая неудачная обложка журнала в 1987 году.

6. Какие разделы журнала вам нравятся, а какие — нет? Какие новые разделы следовало бы ввести?

7. Какие материалы, опубликованные в «Кванте» в 1987 году, помогли в вашей учебе или работе, что вы искали в «Кванте», но не нашли?

8. О чем бы вы хотели прочитать на страницах нашего журнала в 1988 году?



Школа в „Кванте“

Основные теоремы

Кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

Наша цель — рассказать о трех основных теоремах трех великих А: Арифметики, Алгебры, Анализа. Эти теоремы должен знать каждый, кто хоть немного интересуется математикой. Первая — о разложении чисел на простые множители, вторая — о разложении многочленов на неприводимые многочлены, третья — о вычислении площади.

Мы начнем с основной теоремы алгебры: о ней писал Рене Декарт в 1637 году — ровно 350 лет тому назад — в своей книге «Геометрия». В этой книге есть глава, посвященная уравнениям; она начинается такими словами:

«Знайте, что всякое уравнение может иметь столько же корней, какова степень уравнения; ибо если перемножить два уравнения $x-2=0$ и $x-3=0$, то получится уравнение второй степени: $x^2-5x+6=0$, которое имеет корни 2 и 3. Если это уравнение, в свою очередь, умножить на $x-4=0$, то получится уравнение третьей степени $x^3-9x^2+26x-24=0$ с тремя корнями 2, 3 и 4».

В курсе алгебры 8 класса доказывается, что многочлен второй степени x^2+px+q, имеющий корни x_1 и x_2, представляется в виде произведения многочленов первой степени:

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2).$$

Примеры разложения квадратного трехчлена в произведение:

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2);$$
$$x^2-2x+1=(x-1)^2;$$
$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2});$$
$$x^2+x-1=(x+1/2-\sqrt{5/2})(x+1/2+\sqrt{5/2}).$$

Однако случается, что квадратный трехчлен не имеет корней и его разложить в такое произведение нельзя. Что же касается многочленов более высокой степени, то для них имеет место такая теорема:

Любой многочлен вида $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0$ *можно разложить в произведение многочленов вида* $x-a$ *и многочленов второй степени вида* x^2+px+q*, не имеющих корней; причем это разложение единственно: два такие разложения отличаются только порядком сомножителей.*

Примеры разложения многочленов на множители:

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ — 1 корень;
$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$ — 3 корня;
$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$ — 1 корень;
$x^4-1=(x^2+1)(x-1)(x+1)$ — 2 корня;
$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$ — 0 корней.

Из этой теоремы следует, что многочлен n-й степени может иметь, самое большее, n корней; ровно n корней будет, если он раскладывается в произведение n различных множителей вида $x-a$. Многочлен может иметь и меньше корней за счет того, что некоторые такие множители повторяются (при этом возникают кратные корни), и за счет того, что некоторые множители — квадратные трехчлены, не имеющие корней.

Значительно более изящную форму примет эта теорема, если ввести в употребление *комплексные числа*, т. е. выражения вида $a-b\sqrt{-1}$, где $(a; b)$ — пара действительных чисел. Тогда уже любой квадратный трехчлен (с действительными или комплексными коэффициентами) имеет два комплексных корня и раскладывается на множители первой степени.

Примеры разложения квадратных трехчленов с комплексными корнями:

$$x^2+1=(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1});$$
$$x^4-4x+3=(x-1)^2(x+1-\sqrt{-2})\times \times(x+1+\sqrt{-2}).$$

Благодаря этому сформулированная ранее теорема принимает следующий вид:

Всякий многочлен вида $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0$ *(где* $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ *— комплексные числа) представляется в виде произведения n сомножителей* $(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)$*, где* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ *— комплексные числа, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей.*

Это и есть *основная теорема алгебры.*

* * *

Основная теорема арифметики сродни основной теореме алгебры:

Всякое целое положительное число, большее единицы, может быть представлено в виде произведения простых чисел. Причем два таких разложения могут отличаться только порядком сомножителей.

Примеры разложения целых чисел на простые множители:

$400=2^4\cdot5^2$; $1001=7\cdot11\cdot13$;
$290\,981=43\cdot67\cdot101$; $1987=1987$.

Этой теоремой мы фактически пользуемся, начиная с младших классов — и при сокращении дробей, и при приведении их к наименьшему общему знаменателю.

Чаще всего мы пользуемся следующим утверждением, которое, как легко понять, равносильно основной теореме арифметики: *если произведение целых чисел делится на некоторое простое число, то на это простое число делится хотя бы один из сомножителей.*

Итак, обе основные теоремы — арифметики и алгебры — касаются вопроса разложения в произведение неразложимых. Целые числа разлагаются в произведение простых чисел, а многочлены — в произведение, как говорят, *неприводимых* многочленов. Обе теоремы утверждают, что такое разложение единственно.

Строгое доказательство основной теоремы алгебры дал в 1799 году великий немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777—1855); он же в 1801 году сформулировал и доказал основную теорему арифметики*).

Утверждение основной теоремы арифметики совершенно ясно и было известно с древнейших времен, но именно Гаусс понял, насколько важно утверждение о единственности разложения на простые множители. Оказывается, возможны такие числовые системы, в которых аналог основной теоремы арифметики перестает быть верным. Не останавливаясь на этом подробно, мы только приведем наиболее известный пример — систему чисел вида $a+b\sqrt{-5}$, где $(a; b)$ — пара целых чисел (которые складываются и умножаются по тем же правилам, что и комплексные). В этой системе, например, $21=3\cdot7=(4+\sqrt{-5})(4-\sqrt{-5})$. Мы не станем обсуждать здесь, почему числа 3, 7, $4+\sqrt{-5}$, $4-\sqrt{-5}$ являются простыми в этой числовой системе. Интересующийся читатель может найти ответ в замечательной книге Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры» — М.: «Физматгиз», 1962.

Однако не нужно думать, что в любых числовых системах вида $a+b\sqrt{d}$

---

*) Доказательство основной теоремы арифметики см., например, в «Кванте», 1987, № 4, с. 12; доказательство основной теоремы алгебры — в «Кванте», 1980, № 2, с. 17; 1982, № 4, с. 3.

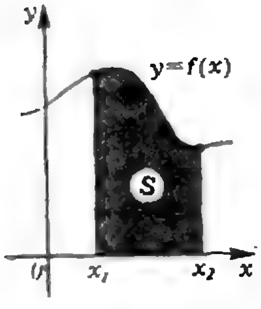


Рис. 1.

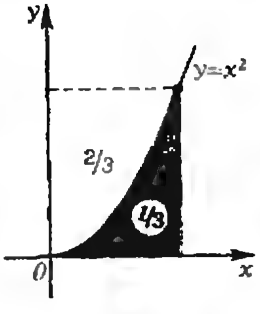


Рис. 2.

(a, b — целые числа, d — фиксированное целое число) нет однозначного разложения на простые множители. Важный пример «хорошей» числовой системы — так называемые *гауссовы числа*, т. е. числа вида $a+b\sqrt{-1}$, где a и b — целые. Для них аналог основной теоремы арифметики имеет место.

Формулируя этот аналог, нужно учитывать наличие так называемых обратимых чисел. Число (гауссово или обыкновенное) называется *обратимым*, если существует другое (возможно, то же самое) число, такое, что произведение двух этих чисел равно 1. Среди целых чисел обратимы числа 1 и -1, среди многочленов обратимыми являются многочлены «нулевой степени» — числа, отличные от нуля, среди гауссовых чисел — числа 1, -1, $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$. В разложении $q=p_1...p_n$ на простые множители можно умножить, скажем, p_1 и p_2 на числа, произведение которых равно 1, и получится другое разложение. Это вынуждает нас не различать также разложения, получающиеся друг из друга умножением сомножителей на обратимые числа. При этом и q, и p_1, ..., p_n нужно считать необратимыми. В формулировке основной теоремы арифметики мы избежали этих оговорок, предположив, что все числа больше 1; в формулировке основной теоремы алгебры — предположив, что старшие коэффициенты многочленов равны 1.

* * *

В то время, как основные теоремы алгебры и арифметики родственны, как мы видели, друг другу, основная теорема анализа отстоит от них достаточно далеко. Это — входящая в школьный курс математики 10 класса *теорема Ньютона—Лейбница*.

Эта теорема замечательна тем, что она позволяет находить площади криволинейных фигур. Она производит огромное впечатление еще и потому, что связывает воедино две, казалось бы, совсем разные геометрические задачи: задачу проведения касательных (производные) и задачу нахождения площадей (интегралы). То, что эти задачи должны быть взаимно обратны, первым заметил учитель Ньютона английский математик Исаак Барроу. Но в виде формулы эта связь впервые была получена Ньютоном и, независимо от него, Лейбницем.

Примеры производной $f'(x)$ и первообразной $F(x)$ функции $f(x)$:

Функция	x	x^2	$ax+b$
Производная	1	$2x$	a
Первообразная	$x^2/2+c$	$x^3/3+c$	$ax^2/2+$ $+bx+c$

Теорема Ньютона—Лейбница утверждает, в частности, что если непрерывная положительная функция f, заданная на отрезке $[a;\ b]$, является производной функции F, заданной на том же отрезке, (или, как говорят, функция F является *первообразной* функции f), то площадь S под ее графиком находится по формуле

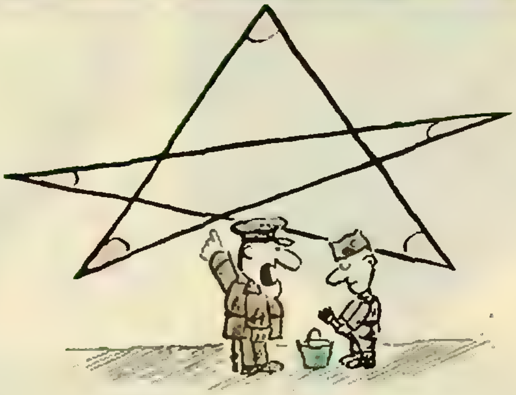
$$S=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \text{ (см. рис. 1).}$$

Например, площадь «параболической подставки» (рис. 2) может быть найдена по этой формуле: функция $f(x)=x^2$ является производной функции $F(x)=x^3/3$ и, значит, интересующая нас площадь равна

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}.$$

Эту площадь впервые вычислил Архимед, ничего не знавший, конечно, о формуле Ньютона—Лейбница. (Интересно, что Архимед решал эту задачу в разных контекстах по крайней мере три раза, не подозревая, что он решает одну и ту же задачу.)

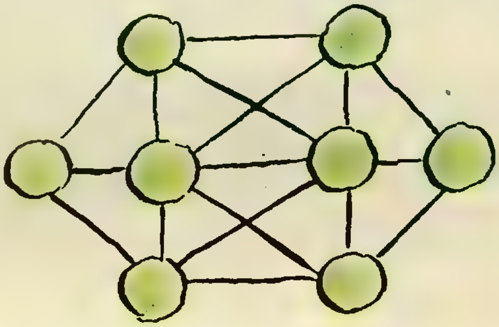
Задача отыскания первообразной для заданной функции оказалась важной аналитической задачей. Для рациональных функций она связана с основной теоремой алгебры: первообразную дробно-рациональной функции всегда можно выразить через элементарные функции (включая логарифм и арктангенс), но для этого нужно знать разложение знаменателя на линейные и квадратичные множители.



Задачи

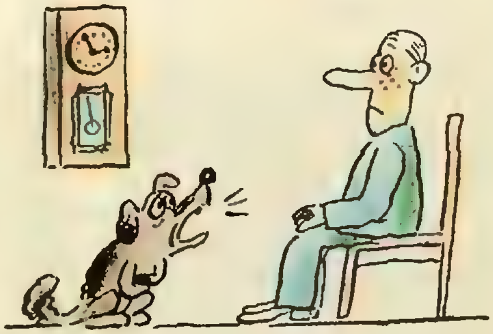
1. Нетрудно показать, что у правильной пятиконечной звезды сумма углов равна 180°. Докажите, что такая же сумма углов будет у произвольной пятиконечной звезды.

2. Мне удалось, взяв по два раза цифры 1, 2, 3 и 4, написать восьмизначное число, у которого между единицами стоит одна цифра, между двойками — две, между тройками — три и между четверками — четыре цифры. Какое это число?

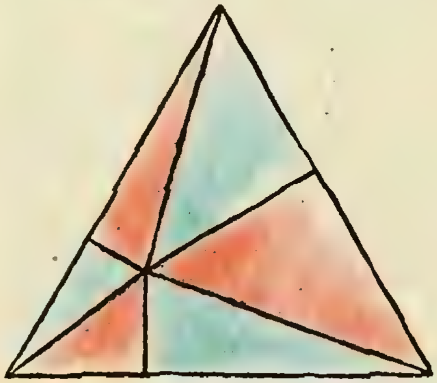


3. Расставьте числа от 1 до 8 в кружках фигуры, изображенной на рисунке, так, чтобы числа в кружках, соединенных отрезками, отличались не меньше, чем на два.

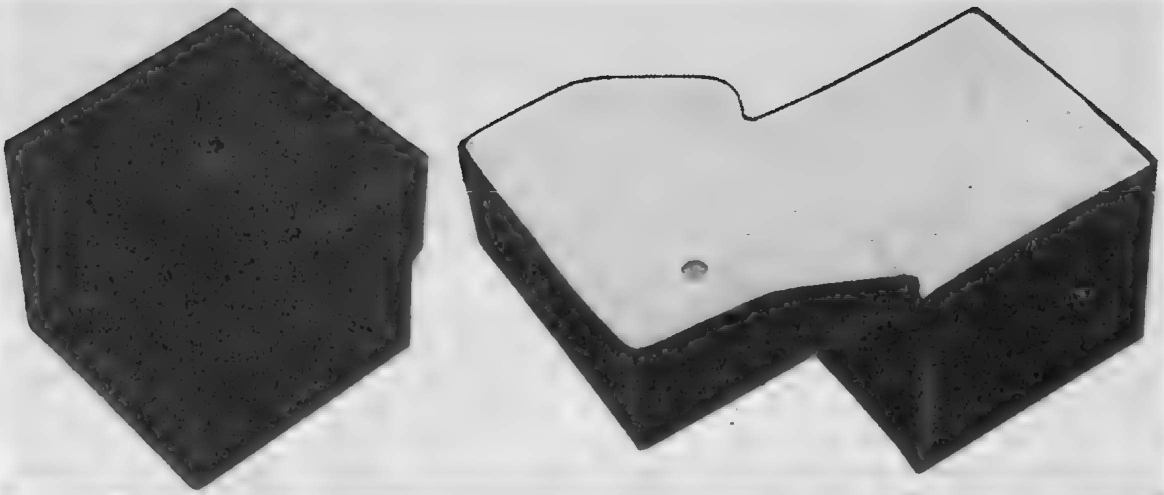
4. Мои настенные часы ведут себя очень странно. В первой половине каждого часа они спешат на 2 минуты, зато во второй его половине на две минуты отстают. В чем причина такого поведения часов?



5. Точка, взятая внутри равностороннего треугольника, соединена со всеми вершинами. Кроме того, из нее опущены перпендикуляры на все стороны треугольника. Покажите, что сумма площадей красных треугольников (см. рисунок) равна сумме площадей синих треугольников.



Эти задачи нам предложили ученик 9 класса школы № 8 г. Мозыря *Александр Коршков*, *А. П. Савин*, *А. М. Домашенко*, *А. А. Панов*, *В. В. Произволов*.



Лаборатория „Кванта"

Может ли белое быть чернее черного?

В. В. МАЙЕР

Начнем с совсем простого наблюдения.

Положите рядом листки белой и черной бумаги и создайте в комнате полную темноту. Тогда ни одного листка вы не увидите, т. е. оба они будут одинаково черными.

Казалось бы, ни при каких условиях белая бумага не может быть чернее черной. И все же это не так. Попробуйте придумать и поставить опыт, в котором белое оказывается более черным, чем черное. Но прежде прочитайте следующий абзац.

Тело, которое при любой температуре полностью поглощает падающее на него излучение любой частоты, называется абсолютно черным.*) Понятно, что это — идеализация, в природе абсолютно черных тел нет. Тела, которые мы обычно называем черными (сажа, копоть, черные бархат и бумага и т. д.), на самом деле серые, т. е. они частично поглощают, а частично рассеивают падающий на них свет. Следовательно, для решения поставленной задачи можно, например, из белой бумаги сделать тело, более близкое к абсолютно черному, чем черная бумага. Теперь искомое решение почти очевидно.

Оказывается, вполне хорошей моделью абсолютно черного тела может служить сферическая полость с небольшим отверстием. Если диаметр отверстия не превышает 1/10 диаметра полости, то (как показывает соответствующий расчет) вошедший в отверстие световой пучок сможет выйти из него обратно лишь после многократных рассеяний или отражений от разных точек стенки полости. Но при каждом «соприкосновении» пучка со стенкой энергия света частично поглощается, так что доля выходящего обратно из отверстия излучения ничтожно мала. Поэтому можно полагать, что отверстие полости практически полностью поглощает свет любой длины волны, как и абсолютно черное тело.

Конкретный прибор для опыта можно сделать, например, так. Из картона склейте коробку размером примерно 100×100×100 мм с открывающейся крышкой. Изнутри коробку оклейте белой бумагой, а снаружи — покрасьте черной тушью, гуашью или, что еще лучше, оклейте черной бумагой от фотопакетов. В крышке проделайте отверстие диаметром не более 10 мм. Фотографию такого прибора вы видите на заставке.

Показывая опыт, осветите крышку

---

*) Несколько подробнее об этом можно прочитать в заметке «Абсолютно черное тело» («Квант», 1985, № 2, с. 26).

коробки настольной лампой. Тогда отверстие будет выглядеть более черным, чем черная крышка. Откройте крышку, и все увидят, что за отверстием — белая бумага, которая в опыте действительно оказывается чернее черной!

Для того чтобы просто пронаблюдать явление, можно поступить еще проще (но менее интересно). Возьмите белую фарфоровую чашку и закройте ее бумажной черной крышкой с небольшим отверстием — эффект будет практически таким же.

Загадка Рамануджана

(Начало см. на с. 14)

полон трогательной признательности и любви к нему...

Возвращение и смерть

Заболев, Рамануджан начинает думать о возвращении на родину. Лишь к началу 1919 г. его здоровье улучшилось настолько, чтобы совершить далекую поездку по морю. Ему было готово место в Мадрасском университете — слава его достигла Индии. Рамануджан пишет ректору благодарственное письмо, извиняется за то, что последнее время болезнь не давала возможности работать достаточно интенсивно. Но он так и не смог приступить к работе в университете. Менее года ему удалось провести на родине. После трех месяцев в Мадрасе Рамануджан перебрался в Кумбаконам. В январе 1920 г. он посылает последнее письмо Харди, где сообщает о работе над новым классом тэта-функций. Ни врачи, ни родные не могут уговорить смертельно больного ученого прервать работу. 26 апреля 1920 г. Рамануджан умер. Ему еще не исполнилось 33 года.

Память

Весть о смерти Рамануджана потрясла его друзей и в Индии, и в Англии. Они чувствовали свой долг разобраться в том удивительном явлении, каким был Рамануджан. Харди пишет:

«Возможно, что великие дни формул окончились и Рамануджану следовало бы родиться на 100 лет раньше; но он был величайшим создателем формул своего времени».

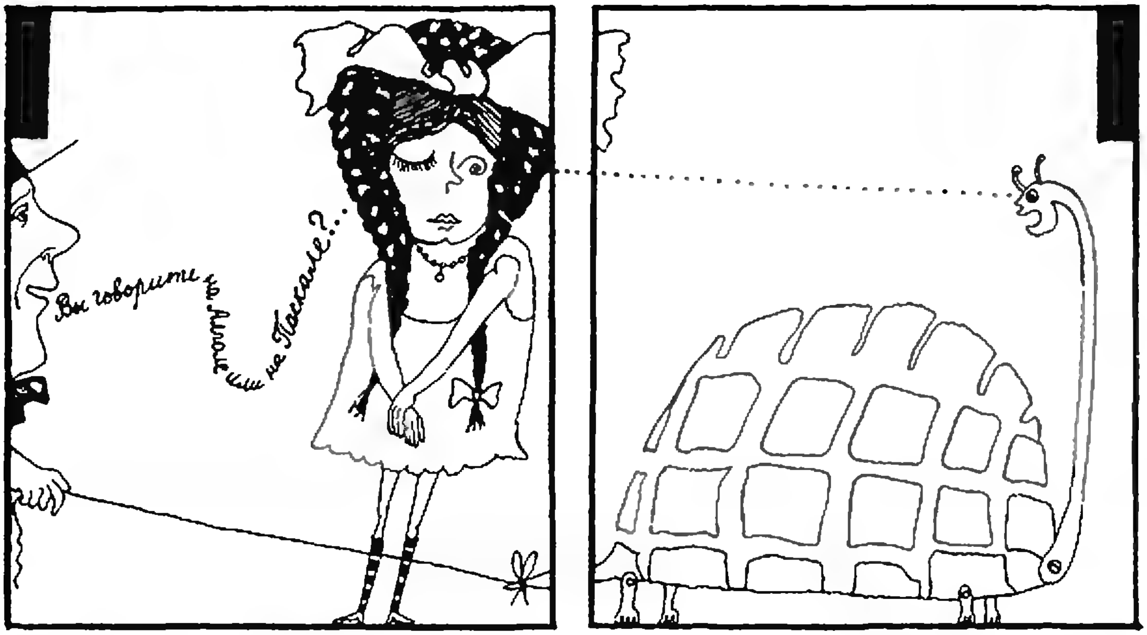
Друзья и коллеги старались оценить место Рамануджана в современной математике. Они не сомневались в его удивительных способностях, фантастической красоте формул, но все сходились на том, что сам выбор сюжетов, которых настойчиво держался Рамануджан, не позволяет ему занять достойное место в истории математики.

Прошло более полувека, и сегодня мы отчетливо видим то, что не могли предвидеть Харди и его современники. Гений Рамануджана оказался созвучен не только прошлому, но и будущему математики. Арифметические формулы Рамануджана нередко оказывались ключевыми на новых этапах алгебраической теории чисел, и можно было только удивляться, как он смог увидеть их, не зная того, без чего их увидеть нельзя. А потом пришло возрождение интереса к конкретным явным формулам как внутри математики, так и в сфере ее приложений. Современная математическая и теоретическая физика обращается порой к весьма абстрактным разделам математики, причем играют роль очень изысканные явные формулы. Вот два недавних примера, связанные с Рамануджаном.

Р. Бэкстер, прославившийся построением точно решаемых моделей статистической механики, при исследовании модели «жесткого гексагона» неожиданно обнаружил, что постоянно имеет дело с тождествами Роджерса—Рамануджана (вставка 4 на с. 19) и Рамануджана.

Нобелевский лауреат С. Вайнберг недавно вспоминал, как, занимаясь в начале 70-х годов очень популярной сейчас теорией струн, он столкнулся с задачей об оценке функции разбиений $p(n)$ для больших n. Выяснилось, что нужные формулы получили Харди и Рамануджан в 1918 г. (вставка 5 на с. 19).

Красота формул Рамануджана даровала им способность возрождаться при самых необычных обстоятельствах.


Вы говорите на Алголе или на Паскале?..

Искусство программирования

Мир языков программирования

Академик А. П. ЕРШОВ

Язык и общение

Как гласит философский словарь (Москва, Политиздат, 1986, с. 578), *язык* — это «знаковая система любой физической природы, выполняющая познавательную и коммуникативную (общение) функции в процессе человеческой деятельности». И хотя понятие языка сложилось при общении людей друг с другом, мы обнаруживаем, что взаимодействие человека и ЭВМ приобретает все больше и больше тоже характер *общения*. Действительно, мы передаем компьютеру программу его работы, формулируем условие задачи, вводим начальные данные. Если программа оказалась с ошибкой или исходные данные неполны, ЭВМ сигнализирует об этом и сообщает о том, что она «не понимает» полученную информацию.

Естественно, что общение требует языка, и то, что мы, уже не задумываясь, применяем эти понятия к ЭВМ, говорит о реальном приближении к робототехнике, искусственному интеллекту, автоматизации умственной деятельности, к тому, что относят к веку информации.

Мы общаемся с компьютером посредством разных знаковых систем. ЭВМ уже обладает зрением, слухом, осязанием, может воспринимать тексты, числа и образы. Однако самым главным органом чувств у ЭВМ являются входные устройства для восприятия электрических сигналов, а самым главным видом языка является язык записи и исполнения программ, или *язык программирования*.

Языки программирования — это главное средство передачи знаний компьютеру, при этом знаний действенных, придающих машине черты разумного поведения.

Первые языки программирования появились в середине 50-х годов, а сейчас их насчитывается более двух тысяч. На первый взгляд это удивительно. Напомним, однако, что сейчас общее количество ЭВМ в мире, включая персональные ЭВМ и однокристалльные микропроцессоры, исчисляется сотнями миллионов. Таким образом, языковая практика общения людей с компьютером уже становится сравнимой по масштабам с языковой практикой общения людей между собой. Именно это обстоятельство и стало главной причиной включения информатики в общее образование.

Главные понятия языков программирования

При огромном разнообразии языков программирования они делятся на два главных класса: *декларативные* (аппликативные, функциональные) и *императивные* (процедурные, аглоритмические). В скобках указаны варианты названий этих классов.

Поговорим о различии между этими классами. В двух словах оно состоит в следующем: декларативная программа заявляет, ЧТО должно быть достигнуто в качестве цели, а императивная программа предписывает, КАК достичь поставленной цели.

Приведем два поясняющих примера.

Пример 1. Вам надо пройти в городе из пункта А в пункт Б. Декларативная программа — это план города, в котором указаны оба пункта, плюс правила уличного движения. Руководствуясь этими правилами и планом города, курьер сам проложит путь от пункта А в пункт Б. Императивная программа — это список команд, примерно, такого рода: от пункта А по ул. Садовой на север до площади Славы, оттуда по ул. Пушкина два квартала, потом повернуть направо и идти до Театрального переулка, по этому переулку налево по правой стороне до дома № 20, который и есть пункт Б.

Пример 2. Вычислить корни квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \text{ при } a=2,\ b=-7,\ c=-4.$$

Декларативная программа — это четыре (более точно, пять) равенства: три для коэффициентов и одно для формулы

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

в сочетании с правилом замены переменных и умением выполнять арифметические действия и извлекать корень из числовых аргументов.

Императивная программа — это, например, такой текст на школьном алгоритмическом языке

```
вещ $a, b, c, x1, x2, q, r$
    $a:=2$
    $b:=-7$
    $c:=-4$
    $q:=2\times a$
    $r:=\sqrt{b^2-(2\times q)\times c}$
    $x1:=(r-b)/q$
    $x2:=-(r+b)/q$
```

Обсудим сходства и различия. И декларативная, и императивная программы могут выполнять одни и те же действия. Например, корни квадратного уравнения могут вычисляться в декларативной программе в такой последовательности:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ a=2;\ b=-7;$$

$$c=-4$$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 2\cdot (-4)}}{2\cdot 2};$$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+8\cdot 4}}{4};$$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{4},\ x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{4};$$

$$x_1=\frac{7+9}{4};\ x_2=\frac{7-9}{4};$$

$$x_1=4;\ x_2=-0{,}5$$

Этот порядок действий практически совпадает с тем, который предписан программой на алгоритмическом языке.

В императивной программе действия задаются явными командами, вписанными в текст программы ее составителем. Исполнитель извлекает эти команды, следуя общим правилам исполнения программы. Эти правила на первый взгляд весьма различны в разных языках программирования, но на самом деле они сводятся к трем главным способам извлечения команд из программы. Эти способы — СЛЕДОВАНИЕ, ВЫБОР и ПОВТОРЕНИЕ: исполнитель либо берет очередную команду, которой однозначно предписано быть следующей за только что выполненной, либо выбирает в зависимости от УСЛОВИЯ одну команду из нескольких возможных, либо повторяет выполнение команды опять-таки в зависимости от соблюдения некоторого условия повторного исполнения. Для классических императивных языков характерно, что последовательность команд, извлекаемых из программы, совершенно однозначно предписывается видом программы и ее входными данными. Как говорят, поведение исполнителя императивной программы полностью *детерминировано.*

В декларативной программе действия не предписываются командами, а находятся самим исполнителем, побуждаемым к активности наличием недостигнутой цели. При этом также имеются три главных способа нахождения выполняемых действий, которые по своему назначению аналогичны следованию, выбору и повторению. Это соответственно ПОДСТАНОВКА, тоже ВЫБОР и РЕКУРСИЯ. Суть подстановки хорошо видна в вышеприведенном примере «декларативного» решения квадратного уравнения. Возможность подставить на место некоторого выражения (в том числе и переменной) конкретное значение дает возможность сделать следующий шаг в вычислениях.

Особенностью декларативных программ является то, что выбор действия может, как и в императивных языках, однозначно определяться некоторым условием, но кроме этого быть и произвольным. Декларативные программы не предписывают выполнять действия, а разрешают, при этом часто одно из нескольких. Например, даже в нашем простом случае решения квадратного уравнения исполнитель может сам определить, в каком порядке производить подстановку значений коэффициентов в формулу: то ли сначала $a=2$ или $b=-7$, либо $c=-4$. В формуле можно начинать вычислять то ли числитель, то ли знаменатель. Под корнем можно вычислить сначала или b^2, или $4\times a$, или $a\times c$ и т. д. Таким образом исполнение декларативных программ носит, как принято говорить, *недетермированный* характер, что, однако, в случае правильных программ, не лишает результат однозначности и определенности.

Как *рекурсия* позволяет выполнять повторные вычисления — это само по себе очень интересная тема, которая выходит за рамки этой статьи. Коротко об этом сказано в учебнике «Основ информатики и вычислительной техники» за X класс.

Идея исполнения рекурсивной декларативной программы хорошо видна на примере вычисления 4! с использованием рекурсивного определения факториала

```
фак(n) = если n = 1
             то 1
             иначе фак(n − 1) × n
         все
```

Отправляясь от цели фак(4), исполнитель чередует подстановку с выполнением тех операций, для которых уже вычислены аргументы:

```
фак(4) = если 4 = 1 то 1
           иначе фак(4 − 1) × 4 все
       = фак(3) × 4
       = (если 3 = 1 то 1
            иначе фак(3 − 1) × 3 все) × 4
       = (фак(2) × 3) × 4
       = ((если 2 = 1 то 1
             иначе (фак(2 − 1) × 2 все) × 3) × 4
       = ((фак(1) × 2) × 3) × 4
       = (((если 1 = 1 то 1
              иначе фак(1 − 1) × 1 все) × 2) × 3) × 4
       = ((1 × 2) × 3) × 4 = (2 × 3) × 4 = 6 × 4 = 24
```

Важным общим свойством императивных языков программирования является их способность к *структурному* или *неструктурному программированию.*

В структурных программах следующая по порядку выполнения команда всегда является следующей по порядку расположения в тексте программы. Естественно, что при этом допускаются так называемые *составные* команды, однократное выполнение которых сводится к выбору или повторению содержащихся внутри них более «мелких» команд. Такая вложенность команд не противоречит основному принципу структурности.

В неструктурных программах каждая отдельная команда программы может иметь имя, называемое *меткой.* Меткой может быть число (как, например, номер строки программы в языке Бейсик) или любое слово. При наличии меток следующей по порядку исполнения командой может быть любая (а не только следующая в тексте программы) команда. Для этого достаточно приписать к текущей команде управляющую команду перехода по метке (например, на М), указав метку М той «удаленной» команды, которую хотят сделать следующей по выполнению. Такое усложнение операции следования позволяет записывать очень «хитрые» про-

```
НАЧ: при $m_1 > m_2$: на Х$m_2$
         $m_1 < m_2$: на Х$m_1$
         $m_1 = m_2$: на $m_1m_3$
Х$m_2$: Х: $= m_2$; У: $= m_1$ на ХУ
Х$m_1$: Х: $= m_1$; У: $= m_2$ на ХУ
$m_1m_3$: при $m_1 > m_3$:   на $m_3$Л
              $m_1 < m_3$:   на $m_3$Т
              $m_1 = m_3$:   на НФ
ХУ: при Х $> m_3$: вывод («противоречие»)
                                  на СТОП
        Х $< m_3$: на ФХ
        Х $= m_3$: на ФУ
$m_3$Л: Ф: $= m_3$ на ФЛ
$m_3$Т: Ф: $= m_3$ на ФТ
НФ: вывод («нет фальшивых») на СТОП
ФХ: Ф: = Х  на ФЛ
ФУ: Ф: = У  на ФТ
ФЛ: вывод (Ф, «легкая») на СТОП
ФТ: вывод (Ф, «тяжелая») на СТОП
СТОП: останов
```

Рис. 1.

граммы, которые, однако, зачастую становится трудно анализировать и понимать. Вот почему ограничение программирования структурными программами сейчас все больше считается хорошим стилем грамотного и систематического составления программ.

В качестве примера неструктурированной программы приведем алгоритм выявления одной фальшивой, т. е. более или менее тяжелой, из трех монет с массами m_1, m_2 и m_3 с помощью двух взвешиваний. Процедура взвешивания монет с массами p и q выражена в виде команды выбора с тремя исходами: $p<q$, $p>q$ и $p=q$. Сама программа выражена на смеси школьного алгоритмического языка и обычного для языков программирования способа записи меток и команд перехода по метке (рис. 1). Условное изображение блок-схемы программы (рис. 2) наглядно показывает отличие строения программы от «параллельно-последовательных» связей между простыми командами в структурных программах.

Задание. Постройте структурную версию алгоритма взвешивания, например, на школьном алгоритмическом языке.

В реальных языках программирования свойства декларативности и императивности, структурности и неструктурности встречаются обычно в сочетании. Многие языки, например Паскаль, допускают команды перехода по метке и в то же время содержат конструкции составных команд выбора и повторения, поддерживающие структурное программирование.

Почти все императивные языки допускают операцию подстановки, с помощью которой реализуются команды вызова вспомогательных алгоритмов, называемых в языках программирования *процедурами* или *подпрограммами*. При этом вызовы подпрограмм содержат параметры. При выполнении вызова происходит двойная подстановка: сначала параметры подставляются в текст подпрограммы, после чего этот текст подставляется в главную программу на место вызова. Некоторые языки допускают недетерминированный выбор направления вычислений, в том числе и параллельные вычисления по отдельным ветвям алгоритма с использованием нескольких процессоров вычислительной системы.

Большая часть современных императивных языков обеспечивает повторное исполнение конструкций программы, заданных рекурсивными соотношениями. В свою очередь, для многих рекурсивных конструкций декларативных языков существуют способы организации их вычислений с использованием команд повторения.

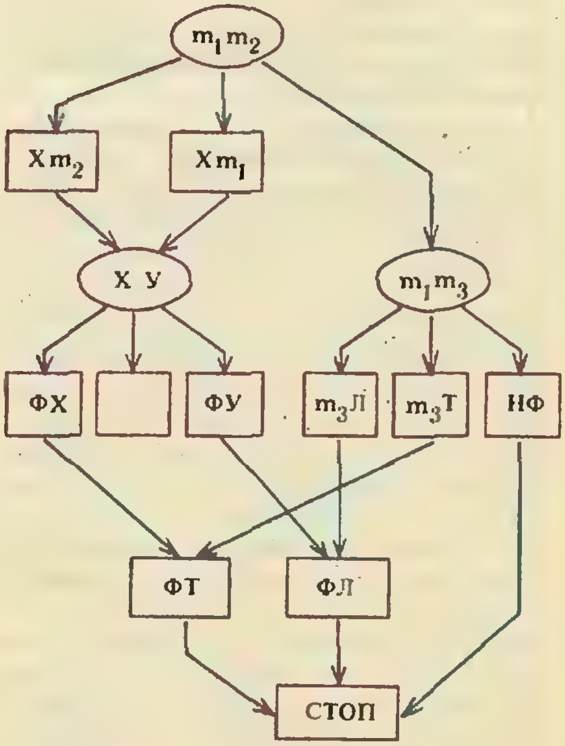


Рис. 2.

Грамматика языков программирования

Как и в нашем родном естественном языке, грамматика языка программирования учит нас правильному пониманию и использованию этого языка. Описание языка программирования обычно состоит из трех частей: *синтаксиса*, *семантики* и *прагматики*.

Синтаксис задает правила записи программ: перечисляет исходные символы, буквы, цифры, знаки препинания и устанавливает допустимые способы их сочетания. Семантика задает значение (смысл) конструкций языка программирования и обычно бывает двух типов: *операционная* и *математическая*. Операционная семантика — это набор правил для исполнения программы, а математическая семантика — это набор аксиом и следствий из них, позволяющих описать функцию, вычисляемую программой.

Общей особенностью синтаксиса и семантики языков программирования является их формальный строгий характер. Именно эта особенность позволяет передавать программы для чтения и исполнения автоматическому устройству — компьютеру. Формальный характер математической семантики позволяет строго доказывать, что программа соответствует условию задачи, для решения которой она составлена.

Задание. Докажите, что программа на рисунке 1 правильно определяет фальшивую монету из трех данных, при условии, что фальшивая монета одна и при этом она либо легче, либо тяжелее настоящих монет.

В отличие от синтаксиса и семантики прагматика — это часть описания языка программирования, исключительно адресованная человеку. Прагматика подсказывает, как наиболее эффективно применять те или иные конструкции языка при программировании, учит хорошему стилю составления программ.

В частности, именно прагматика объясняет нам причину существования языков программирования двух типов: императивных и декларативных. Мы уже знаем, что при решении задачи на ЭВМ программист проходит долгий путь от формулирования задачи к вводу машинной программы в ЭВМ для ее исполнения, т. е. фактического получения решения. Принцип автоматической работы ЭВМ неизбежно требует, чтобы программа состояла из команд, т. е. была бы записана в императивном языке.

В начале своего появления ЭВМ применялись для научных вычислений и инженерных или экономических расчетов. Общей особенностью этих применений было то, что большая часть возникающих задач уже имела точную математическую формулировку в виде формул, уравнений, интегралов и других конструкций элементарной математики и математического анализа. Поэтому, поскольку исходные формулировки задач уже в значительной мере удовлетворяли требованиям строгости, развитие языков программирования шло со стороны машины. Программисты стремились повысить уровень языка программирования, стремились избавить себя от чрезмерной мелкости и плохой наглядности машинного языка, но сохраняли его императивный характер. Повышение уровня языка шло по следующим этапам: библиотеки подпрограмм для стандартных математических функций (Англия, 1949 г.), введение символических обозначений для величин, программы (США, 1951 г.), допущение простых алгебраических формул в командах присваивания (Швейцария, 1952 г.), возможность записи команд ветвления с переходом по метке и с проверкой условия в виде неравенства (СССР, США, 1954 г.) и, наконец, появление команд повторения и величин с индексами (СССР, США, 1955 г.).

Во второй половине 50-х годов появились достаточно полные императивные языки программирования, поддержанные производственными системами программирования. Из них в первую очередь должны быть названы Фортран (от сокращения английского *FORmula TRANslator)* и Алгол (от английского *ALGOrithmic Language*). Первый язык на многие годы стал наиболее употребимым языком для инженерно-физических расчетов, а второй сосредоточил в себе весь накопленный багаж широкого использования математической символики, независимости языка от конкретной ЭВМ, точности в описании синтаксиса и семантики языка. Алгол стал родоначальником обширного семейства языков, из которых могут быть названы советский Альфа-язык, норвежский Симула, международный язык Алгол-68, швейцарский Паскаль, французский Ада.

В то же время, по мере расширения области применения ЭВМ появилось много задач, как тогда говорили, невычислительного характера, для которых серьезную трудность представила исходная проблема строгого формулирования задачи. Язык математического анализа и алгебраических формул оказался для этих задач недостаточен. Особенностью таких задач был их логический характер (типа задач «волк—коза—капуста», «взвешивание», «быки и коровы» и т. д.), а также необходимость работать со сложно организованной информацией. Тем не менее и здесь выручила математика, однако не столько ее прикладные направления, сколько глубоко теоретические разделы, связанные с обоснованием самой математики: *математическая логика*, *теория рекурсивных функций* и *теория нормальных алгоритмов*, разработанная в 40-е годы известным советским математиком Андреем Андреевичем Марковым.

Первым декларативным языком был язык ЛИСП (от английского *LISt Processing*), разработанный в США в начале 60-х годов. Он основывался на теории рекурсивных функций, обобщенной на информационные структуры, имеющие вид иерархии списков, т. е. последовательностей членов, каждый из которых мог иметь собственную структуру. Примером списочной структуры может служить контингент учащихся школы: школьный коллектив делится на группы классов от 1-го до 10-го, каждая группа — это классы А, Б, В и т. д., каждый класс — это список звеньев (там где они есть), каждое звено — это группа учащихся, упорядоченная по алфавиту. Язык ЛИСП широко применяется до сих пор.

Некоторые свойства декларативности были присущи императивному языку СНОБОЛ, разработанному тоже в начале 60-х г. в США для обработки текстовой информации. Его важным свойством была *операция поиска по образцу*, позволяющая «одним ударом» выделять в тексте достаточно сложные сочетания слов и знаков.

Свойства ЛИСПА и СНОБОЛА были объединены в разработанном в конце 60-х годов в СССР декларативном языке РЕФАЛ (от *РЕкурсивные Функциональные АЛгоритмы*).

Заключая сравнение декларативных и императивных языков, мы видим, что свойство декларативности облегчает формулирование задачи, подлежащей решению на ЭВМ, а свойство императивности приближает запись алгоритма к тому, как он будет фактически исполняться на ЭВМ. Попытка объединить эти свойства в одном языке привела недавно к появлению *языков широкого спектра*, позволяющих путем формальных преобразований программ менять соотношение ее декларативных и императивных свойств. К этому семейству языков относится французский язык ПРОЛОГ (от французского *PROgrammation LOGique*), используемый в проектах разработки ЭВМ 5-го поколения и их программного обеспечения.

* * *

Эта заметка о языках программирования предваряет сообщение об открытии Заочной школы юных программистов. В ее двухлетнем курсе учащиеся познакомятся с целым семейством современных языков программирования: от учебных языков программирования ЛОГО (США, конец 60-х гг.) и РАПИРА (СССР, конец 70-х гг.), до таких производственных языков, как близкий к машинам язык СИ (США, начало 70-х гг.) и уже упомянутый декларативный язык ПРОЛОГ (Франция, конец 70-х годов).

Об открытии Всесоюзной заочной школы программирования

Институт программных систем АН СССР открывает Всесоюзную заочную школу программирования для школьников и учащихся ПТУ, интересующихся информатикой, вычислительными машинами и программированием. Цель Школы рассказать о проблемах и перспективах информатики, об основных приемах программирования и сферах его применения, показать способы составления программ на нескольких языках программирования. Вообще говоря, предварительных знаний по информатике не предполагается, и все же в тех случаях, когда авторы уроков найдут полезным сравнение того или иного программного средства с алгоритмическим языком, на базе которого построен школьный курс «Основы информатики и вычислительной техники», 9—10 кл., в уроках Школы не будет перепечатываться содержание школьного учебника. Первые четыре урока Школы будут опубликованы в «Кванте».

Каждый урок будет включать задания из нескольких задач, решения которых следует присылать не позже, чем через месяц после получения задания. Учебный план Школы рассчитан на два года.

Уроки Заочной школы рассчитаны на учащихся, не располагающих вычислительной техникой. Тем не менее тому, кто имеет возможность проверить правильность своего решения на доступной ему ЭВМ, рекомендуется не пренебрегать такой возможностью.

Желающие принять участие в работе Всесоюзной заочной школы программирования должны до получения 11 номера журнала прислать свои заявления по такой форме:

Во Всесоюзную заочную школу программирования
152140 Переславль-Залесский, а/я 46,
Институт программных систем АН СССР
от ______________________________

(фамилия) (имя) (отчество)

Заявление

Прошу принять меня во Всесоюзную заочную школу программирования.

____

(подпись)

К заявлению надо приложить листок со своими анкетными данными:

- фамилия, имя, отчество;
- возраст (число, месяц, год рождения);
- подробный домашний адрес с обязательным указанием почтового индекса;
- номер (или название) школы (ПТУ) и класс;
- краткие сведения об уровне своей подготовки по программированию (допустимо сообщение о нулевой подготовке);
- если вам доступна ЭВМ, то сообщите сведения о ее программном обеспечении (наличие трансляторов Лого, Рапира, Си, Рефал, Пролог);
- краткие сведения о родителях — фамилия, и. о., профессия, место работы, должность.

Заявление и письма с решениями задач присылайте, вложив в письмо конверт с маркой и отчетливо написанным обратным адресом.

Первое задание Школы — это задачи 1—6 из Урока 1.

В Заочной школе могут заниматься и группы учащихся — «коллективные ученики». «Коллективный ученик» должен написать в анкете состав группы, фамилию, имя и отчество преподавателя или руководителя группы и точный адрес для переписки.

Летом 1988 и 1989 годов в четырех городах Советского Союза — Новосибирске, Вильнюсе, Симферополе и Переславле-Залесском будут проходить региональные летние школы юных программистов. Дирекция Всесоюзной заочной школы программирования будет рекомендовать оргкомитетам этих школ приглашать на летние школы лучших учащихся.

Язык Лого

А. А. ДУВАНОВ, Ю. А. ПЕРВИН

Урок 1: Путешествия Черепахи (простейшие команды Лого)

— Можете ли вы управлять телевизором?

— Конечно! Надо включить его в сеть, выбрать нужный канал, настроить изображение и звук.

Так же легко, наверное, вы можете управлять велосипедом, газовой плитой, телефоном и другими привычными исполнителями.

Мы живем в мире исполнителей. Всевозможные машины и механизмы, приборы, простые и сложные. В роли исполнителей часто выступаем мы сами. Исполнителями являются и организации, такие, как почта, прачечная, магазин. В этом мире исполнителей выделяется один особый их вид — электронно-вычислительные машины. Их особая роль — помочь управлять другими исполнителями, самыми разными по назначению и устройству. ЭВМ при этом выступает в роли *посредника*. Человек с пульта машины задает программу действий исполнителю на специальном языке человеко-машинного общения — языке программирования. Задача машины — преобразовать фразы этого языка в управляющие сигналы и передать их исполнителю.

Каков смысл в этом посредничестве? Во-первых, язык программирования гораздо более близок к естественному языку, нежели электрические, магнитные или механические воздействия на исполнитель. Во-вторых, машина позволяет запоминать программу и «вспоминать» ее всякий раз, когда это потребуется. В-третьих, пользуясь языком программирования, можно задавать не только простые последовательности команд, но и более сложные действия: некоторые команды исполнитель может выполнять лишь при соблюдении определенных условий — условные команды; выполнение других заключается в многократном повторении группы действий — команды цикла. Наконец, ЭВМ обладает огромным быстродействием — до миллиарда операций в секунду и больше; она не знает усталости и имеет хоть и «железный», но вполне сносный характер: ей не знакомы обидчивость, заносчивость, раздражительность и другие чисто человеческие недостатки.

Первые четыре урока Заочной школы программирования познакомят вас с *программированием на языке Лого*. Этот язык предназначен для управления разными простыми исполнителями. Мы уделим внимание одному из них, по традиции называемому *Черепахой*. Этот исполнитель живет на плоскости. Он может ползать по ней в разных направлениях, оставляя за собой след. Можно себе представить этот исполнитель, реально выполненным из металла и пластика.

Однако зачастую такой исполнитель бывает виден только на экране дисплея. Надо отметить, что это довольно типичная ситуация. Многие полезные и необходимые исполнители существуют только в виде *моделей*, запрограммированных на ЭВМ. За их поведением можно наблюдать на экране. Может показаться, что они бесполезны, поскольку неосязаемы, словно призраки. Опровергнуть это мнение можно простым перечислением нескольких активно используемых исполнителей, существующих только «внутри» машины.

— *Математик*. Способен быстро и точно делать огромные по объему арифметические и алгебраические вычисления.

— *Редактор текстов*. Позволяет хранить, преобразовывать тексты и выдавать их на печать в нужном формате.

— *Редактор рисунков*. Удобное средство для создания на экране картинок, в том числе мультипликаций.

— *Библиотекарь*. Хранит на магнитной ленте или магнитном диске готовые рисунки, результаты счета, программы; ведет архив.

Исполнитель Черепаха и язык для его управления — Лого — были придуманы в 1969 году известным американским ученым С. Пайпертом. Лого быстро завоевал популярность во всем мире как язык для начального знакомства с программированием.

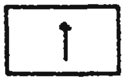
Начинать изучение программирования проще всего на своем родном языке. Поэтому у Лого так много версий: в американских школах используется Лого, все команды которого записываются по-английски; болгарские преподаватели учат своих детей на болгароязычной версии Лого. В наших уроках, естественно, исполнитель понимает только русские слова. Об этом должен помнить читатель, который захочет выполнить приводимые здесь программы на доступной ему ЭВМ, если в ее программное обеспечение включен англоязычный Лого.

Внимание! Включаем компьютер. В центре экрана появляется изображение исполнителя в виде треугольника-стрелки, направленного носиком кверху. Это и есть Черепаха. Рядом с экраном — клавиатура. Она такая же, как на пишущей машинке, только клавишей на ней несколько больше.

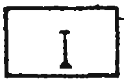
Вы готовы? Исполнитель ждет. Вот первые две команды на языке Лого: ВПЕРЕД *n*, НАЗАД *n*. Можно писать сокращенно В вместо ВПЕРЕД и Н вместо НАЗАД, машина поймет. Число *n* — *параметр команды* — задает количество шагов исполнителя. У Черепахи короткие лапы: 10 ее шагов — условных единиц длины — примерно составляют 1 см.

Итак, попробуем управлять:

ВПЕРЕД 20



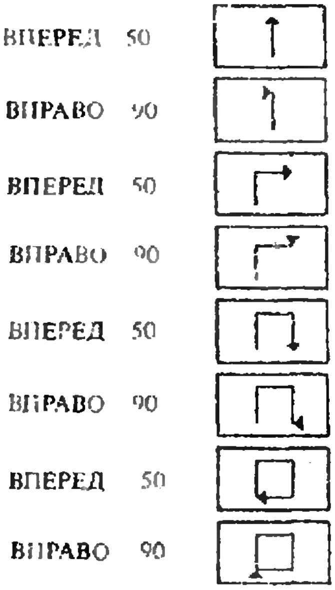
НАЗАД 20



Получилось! Черепаха сначала переместилась вперед, а затем вернулась в исходное положение. На экране остались следы ее прогулки.

Вот еще две команды Лого: они управляют поворотами: ВПРАВО α, ВЛЕВО α. Эти команды (их допустимые сокращения — П и Л) заставляют исполнитель поворачиваться соответственно вправо или влево на α градусов.

Давайте заставим Черепаху прогуляться по квадратной дорожке:



```
ВПЕРЕД 50
ВПРАВО 90
ВПЕРЕД 50
ВПРАВО 90
ВПЕРЕД 50
ВПРАВО 90
ВПЕРЕД 50
ВПРАВО 90
```

Черепаха очень послушна! Наберем на клавиатуре еще одну команду НАЗАД100. Черепаха не тронулась с места, а на экране появилось сообщение: ЧТО ТАКОЕ НАЗАД100?

Дело в том, что в языке Лого, так же, как и в русском языке, слова разделяются пробелами. Машина пыталась найти в своей памяти команду НАЗАД100, но, конечно, ее там нет.

Давайте исправимся! Набираем на клавиатуре: НАЗАД 100. Теперь на экране получился флажок (рис. 1).

Задача 1*. Составьте программу, по которой Черепаха нарисует кораблик (рис. 2).

Команда СБРОС стирает с экрана черепашьи следы и устанавливает исполнитель в центр экрана носиком кверху. Включение компьютера эквивалентно выполнению этой команды. Нарисуем равносторонний треугольник. Каждый его угол равен 60 градусам. Так и хочется написать программу:

```
СБРОС В 50 П 60
      В 50 П 60
      В 50 П 60
```

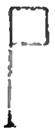


Рис. 1.

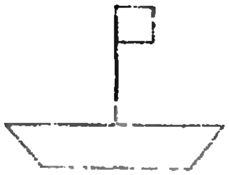


Рис. 2.

Как вы думаете, что получится на экране? Треугольник? Вот вы и ошиблись, Черепаха нарисует вот такую фигуру (рис. 3).

Вы увидели ошибку? Чтобы внутренние углы треугольника имели по 60 градусов, надо каждый раз разворачивать Черепаху на 120. Вот как выглядит правильная программа:

```
СБРОС В 50 П 120
      В 50 П 120
      В 50 П 120
```

Задача 2*. Оснастите кораблик из задачи 1 парусом (рис. 4).

Следующие две команды позволят перемещать исполнитель по экрану, не оставляя следа (поднимать рисующий инструмент — «карандаш») и снова включить след по желанию (опускать карандаш): НЕРИСУЙ (сокращение НР), РИСУЙ (сокращение Р). Отметим, что операция опускания карандаша является составной частью выполнения команды СБРОС.

Правила Лого не всегда совпадают с правилами родного языка. Если с точки зрения русского языка правильно написать НЕ РИСУЙ, то, получив такую команду, ЭВМ снова удивится: ЧТО ТАКОЕ НЕ?

Задача 3*. Какое слово напишет на экране Черепаха, выполняя следующую программу:

```
СБРОС
В 40 Л 45 Н 20 П 90 В 20 Л 45 Н 40
НР П 90 В 20 Л 90 Р
В 40 Н 40 П 45 В 50 Л 40 Н 40
НР П 90 В 20 Л 90 Р
В 40 П 90 В 30 П 90 В 20 П 90 В 30
```

Интересно, что бы получилось у Черепахи, если бы мы продолжили неверную программу рисования треугольника (см. рис. 1) и написали:

```
СБРОС В 50 П 60
      В 50 П 60
      В 50 П 60
      В 50 П 60
      В 50 П 60
      В 50 П 60
```

Ясно, что в конце пути Черепаха смотрит вверх, ведь она 6 раз поворачивалась на 60 градусов. Более того, она окажется вновь в исходной точке.

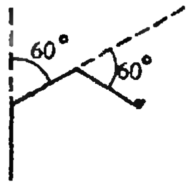


Рис. 3.

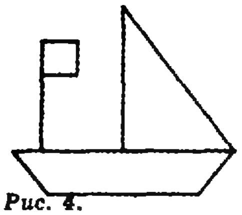


Рис. 4.

Черепаха нарисовала правильный шестиугольник! Обратите внимание, что рисунок получен шестикратным повторением двух команд. Лого обладает средством для более лаконичной записи таких повторений — командой *цикла*. Команда имеет вид:

ПОВТОРИ *nl*.

Число *n* задает количество повторений. *l* — это список команд (*тело цикла*), выделяемый квадратными скобками.

Вот как выглядит программа рисования правильного шестиугольника с использованием команды цикла:

```
СБРОС ПОВТОРИ 6[В 50 П 60]
```

Задача 4*. Составьте программу, рисующую ель (рис. 5).

Мы заставили исполнитель рисовать шестиугольник. Попробуем просто приказать: ШЕСТИУГОЛЬНИК. Вы правы! ЭВМ снова напишет знакомое:

```
ЧТО ТАКОЕ ШЕСТИУГОЛЬНИК?
```

В общем-то, все правильно. Ведь мы не сообщили ей, что ранее записанная совокупность команд называется ШЕСТИУГОЛЬНИК.

Научить исполнитель понимать новые незнакомые слова и воспринимать их как команды можно с помощью еще одной команды языка Лого. Команда, начинающаяся словом ЭТО, заставляет машину запоминать любую программу — последовательность команд (или, в частности, одну команду), завершающуюся словом КОНЕЦ. Именно запоминать, а не выполнять! Вслед за словом ЭТО надо написать имя, под которым машина будет знать запоминаемую программу. Так, запись

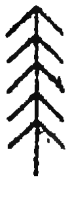


Рис. 5.

```
ЭТО ШЕСТИУГОЛЬНИК
  ПОВТОРИ 6 [В 50 П 60]                (1)
КОНЕЦ
```

есть команда запоминания программы (здесь состоящей из одной команды)

```
ПОВТОРИ 6 [В 50 П 60]
```

Выполняя команду ЭТО, машина не посылает никаких указаний исполнителю и, следовательно, Черепаха не двигается с места. Действительно, ЭВМ в это время занята запоминанием программы, имеющей имя ШЕСТИУГОЛЬНИК. Под таким именем эту программу можно теперь вызывать для выполнения. Для этого достаточно набрать на клавиатуре слово

```
ШЕСТИУГОЛЬНИК
```

и Черепаха выполнит уже знакомый рисунок. Таким образом машина «научилась» новой команде — ШЕСТИУГОЛЬНИК.

Программа, хранящаяся в памяти машины и имеющая имя, по которому ее можно вызвать для выполнения, называется *процедурой*. Запись (1), включающая строки ЭТО ШЕСТИУГОЛЬНИК (заголовок описания процедуры) и КОНЕЦ (окончание описания), есть *описание процедуры*, а собственно команды запоминаемой программы (в нашем примере строка ПОВТОРИ 6 [В 50 П 60] — *тело* процедуры.

Задача 5*. Составьте процедуру, рисующую дом (рис. 6).

Попробуем теперь нарисовать что-нибудь посложнее — например, соты для пчел (рис. 7).

Разобьем рисунок на три слоя. Процедура СОТЫ будет иметь вид:

```
ЭТО СОТЫ
    ПОВТОРИ 3 [СЛОЙ]
КОНЕЦ
```

Каждый слой (рис. 8) будем начинать рисовать в точке 1 и заканчивать в точке 4. Это гарантирует правильную стыковку слоев друг с другом при выполнении цикла в процедуре СОТЫ.

```
ЭТО СЛОЙ
 РЯД
 ПОДВОДВ3
 РЯД
 ПОДВОДВ4
КОНЕЦ
```

В описании процедуры СЛОЙ использованы вызовы трех, еще не запрограммированных процедур РЯД, ПОДВОДВ3, ПОДВОДВ4. Вызывать процедуру СЛОЙ нельзя, пока они

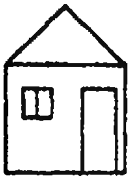


Рис. 6.

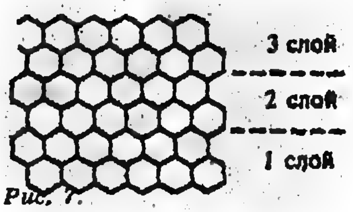


Рис. 7.

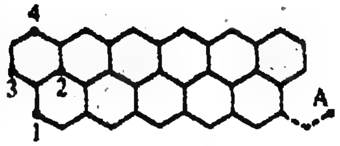


Рис. 8.

не описаны. Опишем процедуру РЯД:

```
ЭТО РЯД
 ПОВТОРИ 8 [ШЕСТИУГОЛЬНИК ПОДВОД]
КОНЕЦ
```

Хотя, по-видимому, понятно, что именно поручено делать процедуре РЯД, в ее описании есть вызов еще одной, пока не описанной процедуры ПОДВОД. Процедура ПОДВОД необходима для установки Черепахи к месту, с которого она должна начать очередной шестиугольник в ходе рисования ряда:

```
ЭТО ПОДВОД
  НР Л 60 Н 50
  Л 60 Н 50
  П 120       Р
КОНЕЦ
```

Подвод в точку 3 состоит из возврата в точку 1 и перемещения в точку 3:

```
ЭТО ПОДВОДВ3
  НР ВОЗВРАТ
  В 50 Л 60
  В 50 П 60 Р
КОНЕЦ
```

Возврат делается из точки А в точку 1 девятикратным вызовом процедуры ШАГНАЗАД:

```
ЭТО ВОЗВРАТ
  ПОВТОРИ 9 [ШАГНАЗАД]
КОНЕЦ
```

Опишем процедуру ШАГНАЗАД:

```
ЭТО ШАГНАЗАД
  Л 120 В 50
  П 60 В 50
  П 60
КОНЕЦ
```

Осталось описать процедуру ПОДВОДВ4:

```
ЭТО ПОДВОДВ4
  ВОЗВРАТ
  В 50 П 60
  В 50 Л 60
КОНЕЦ
```

Вот и все! Если теперь очистить экран: СБРОС, и выдать команду СОТЫ, то можно будет увидеть, как исполнитель, тщательно следуя нашим предписаниям нарисует шестигранные ячейки.

Задача 6*. Составьте программу для рисования а) улицы из 10 домов, таких как в задаче 5; б) поселка из пяти улиц.

Задача 7. Составьте программу, которая рисует еловый лес из деревьев задачи 4.

На примере рисования сот показан метод проектирования сложных программ, называемый в информатике методом «сверху вниз». Этот метод похож на рисование *дерева*, растущего ветвями вниз (рис. 9).

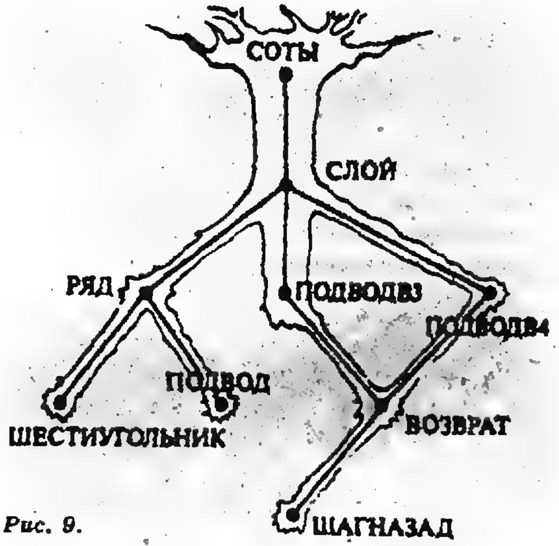


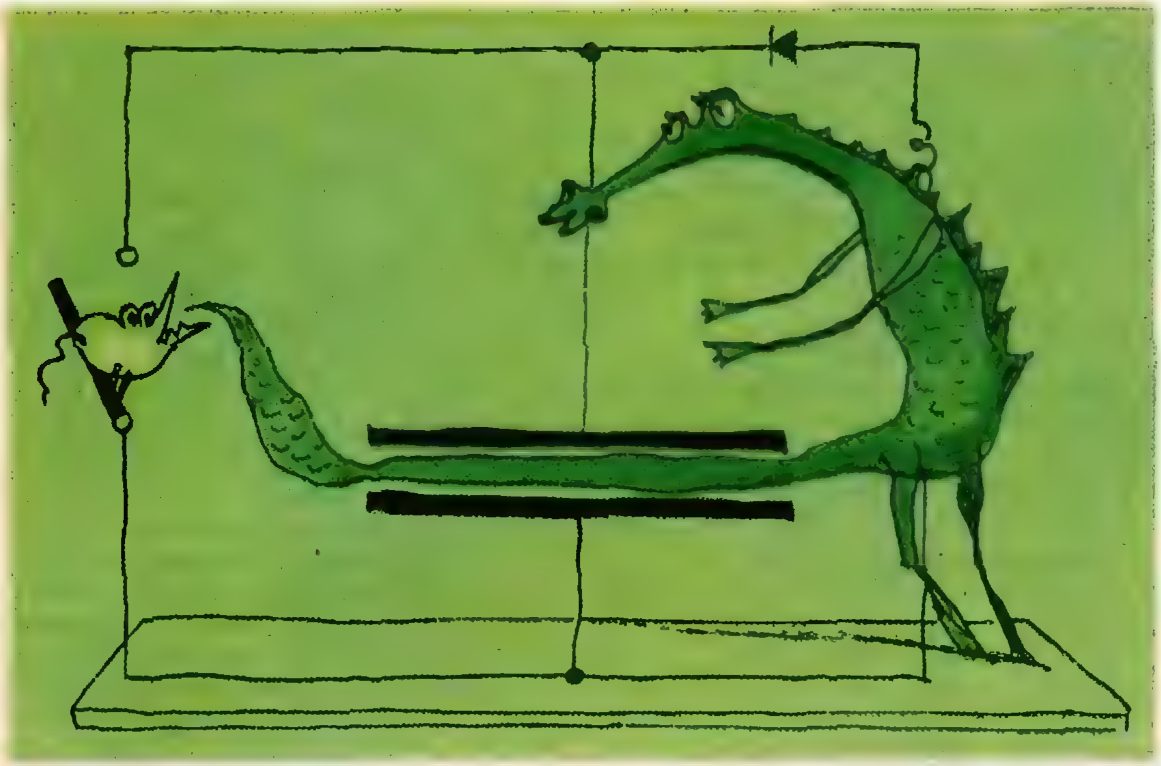
Рис. 9.

Планируя процедуру СОТЫ, записываем обращение к процедуре СЛОЙ. Теперь начинаем проектировать процедуру СЛОЙ. В ней не обойтись без процедур РЯД, ПОДВОДВ3, ПОДВОДВ4 и т. д. Иными словами, мы начинаем с общей схемы задачи, вводя команды вызова несуществующих процедур. Каждую такую новую команду описываем при помощи процедуры, в которой, в свою очередь, могут появиться вызовы новых, не описанных процедур и т. д.

Вершины дерева, у которых нет растущих вниз ветвей, называются *листьями*. Чтобы программа могла работать, все имена на листьях должны быть правильными командами языка Лого. В этом смысле дерево на рисунке 9 не является полным.

Задача 8. Дополните дерево процедуры СОТЫ так, чтобы на листьях были записаны команды языка Лого.

Внимание! Напоминаем, что проверяться будут только задачи 1—6, помеченные звездочкой.



Практикум абитуриента

Конденсаторы с «избыточным» зарядом пластин

Кандидат физико-математических наук
В. В. МОЖАЕВ

Многие характерные ошибки абитуриентов при решении электростатических задач обусловлены формальным пониманием связи между потенциалами и зарядами проводников. А связи эти весьма разнообразны. Например, между проводниками может существовать разность потенциалов при отсутствии зарядов на них или, наоборот, при нулевой разности потенциалов проводники могут быть заряжены. Возможен также промежуточный вариант — на проводниках находятся заряды и между ними существует разность потенциалов.

К последнему случаю относится широко распространенная ситуация, когда два уединенных проводника (другие проводники отсутствуют) заряжены одинаковыми по величине, но противоположными по знаку зарядами. В такой системе разность потенциалов U, возникшая между проводниками, пропорциональна заряду q на них:

$$U \sim q, \text{ или } q = CU, \qquad (*)$$

где C — коэффициент пропорциональности, называемый электроемкостью двух проводников. Как известно, C зависит только от размеров и формы проводников, их взаимного расположения и диэлектрической проницаемости окружающей среды.

Еще раз подчеркнем, что линейная связь между разностью потенциалов и зарядом на проводниках не является универсальной. Она сохраняется только тогда, когда не сказывается влияние других проводников и заряды на двух данных проводниках равны по величине и противоположны по знаку. Другими словами, когда силовые линии электрического поля, выйдя с одного проводника, замыкаются на другом. Типичным примером такой системы является конденсатор. Он представляет собой два проводника,

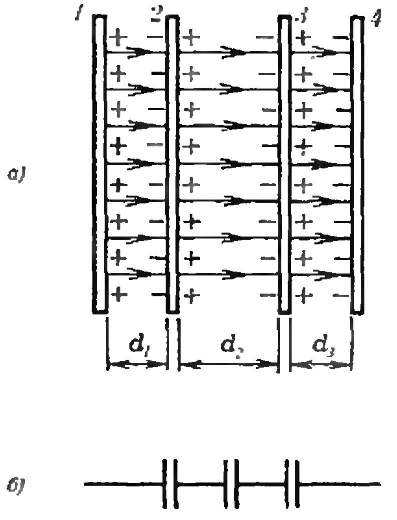


Рис. 1.

разделенные слоем диэлектрика, толщина которого мала по сравнению с размерами проводников (обкладок конденсатора).

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач. Все они предлагались в различное время на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Две металлические незаряженные пластины 2 и 3 расположены внутри плоского заряженного конденсатора (рис. 1, а). В конденсаторе существует однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}_0$. Чему равна разность потенциалов между пластинами 2 и 3, если расстояние между ними равно d_2?*

В этой задаче реализован первый частный случай, когда проводники не заряжены, а разность потенциалов между ними существует.

Пластины 2 и 3 формально образуют плоский конденсатор, но они не являются изолированными — рядом с ними находятся другие пластины, да еще заряженные. Поэтому соотношение (*) не выполняется, если под коэффициентом C понимать емкость между пластинами 2 и 3: заряды на этих пластинах отсутствуют, а разность потенциалов между ними не равна нулю.

Найдем эту разность потенциалов, причем двумя способами. Сначала не будем прибегать к понятию емкости, а используем только определение разности потенциалов. По определению разность потенциалов между пластинами 2 и 3 численно равна работе по перемещению единичного положительного заряда от пластины 2 к пластине 3. Во внешнем поле $\vec{E}_0$ на пластинах 2 и 3 произойдет перераспределение зарядов: левые поверхности этих пластин зарядятся отрицательно, а правые положительно (как это и показано на рисунке 1, а). Очевидно, что поле между пластинами останется равным $\vec{E}_0$, а поверхностная плотность зарядов на них будет равна $\sigma=\varepsilon_0 E_0$ (попробуйте самостоятельно показать это, используя принцип суперпозиции электрических полей). Тогда разность потенциалов между пластинами

$$\Delta\varphi_{23}=E_0 d_2,$$

где d_2 — расстояние между внутренними поверхностями пластин.

А теперь найдем эту разность потенциалов, используя понятие емкости. Наша система четырех пластин будет эквивалентна системе трех последовательно соединенных плоских конденсаторов, приведенной на рисунке 1, б. Действительно, каждую из пластин 2 и 3 можно как бы расщепить на две части, сохраняя на каждой из них свой заряд, а поскольку они (две части) находятся при одинаковом потенциале, то их можно закоротить. Общая емкость всей системы

$$C_{14}=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1+d_2+d_3},$$

где S — площадь каждой пластины, а общая разность потенциалов

$$U_{14}=E_0(d_1+d_2+d_3).$$

Тогда заряд

$$q=C_{14}U_{14}=E_0\varepsilon_0 S.$$

При последовательном соединении заряды на конденсаторах равны, поэтому разность потенциалов на конденсаторе 2—3 будет равна

$$U_{23}=\frac{q}{C_{23}}=\frac{E_0\varepsilon_0 S}{\varepsilon_0 S/d_2}=E_0 d_2.$$

Задача 2. *Закоротим проводником пластины 2 и 3, рассмотренные в предыдущей задаче, и найдем появившиеся на них заряды.*

Очевидно, что если пластины 2 и 3 соединить накоротко, то разность потенциалов между ними станет равной нулю, а на пластинах появятся равные по величине, но противоположные по знаку заряды (рис. 2, а). Таким образом, в этой задаче рассматривается второй частный случай, когда заряды на проводниках есть, а разности потенциалов нет.

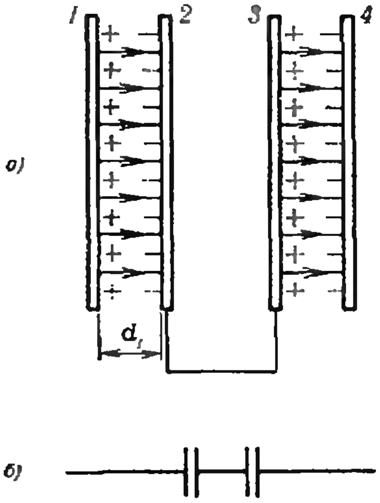


Рис. 2.

Найдем заряд на пластинах 2 и 3 теми же двумя способами. Поскольку разность потенциалов между пластинами равна нулю, то и напряженность электрического поля в промежутке 2—3 также равна нулю. А это поле является результирующим полем, создаваемым конденсатором и зарядами на пластинах 2 и 3. Пусть на пластине 2 находится заряд $-q$, на пластине 3 — заряд $+q$, а поле конденсатора равно $\vec{E}_0$, тогда результирующее поле между пластинами 2 и 3 будет равно $E_0-q/(\varepsilon_0 S)=0$. Из этого условия находим

$$q=\varepsilon_0 S E_0.$$

Эквивалентная схема для этого случая показана на рисунке 2, *б*. Это система двух последовательно соединенных конденсаторов. Заряд на пластине 2 найдем из рассмотрения конденсатора, образованного пластинами 1 и 2:

$$q=C_{12}U_{12}=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1}E_0 d_1=\varepsilon_0 S E_0.$$

Совершенно аналогично можно получить заряд и на пластине 3.

Задача 3. *На пластине 1 находится заряд q, пластина 2, находящаяся от пластины 1 на расстоянии d, не заряжена. Чему равна разность потенциалов между этими пластинами?*

Как видно, в этом случае на проводниках находятся произвольные заряды, а между проводниками существует разность потенциалов.

Опять будем решать задачу двумя способами. Под действием поля, создаваемого зарядами пластины 1, на левой стороне пластины 2 будет индуцирован отрицательный заряд, а на правой — положительный заряд той же величины (рис. 3, *а*). Напряженность электрического поля в промежутке 1—2 определяется зарядом на пластине 1 и равна $E=q/(2\varepsilon_0 S)$, а разность потенциалов

$$U_{12}=Ed=\frac{qd}{2\varepsilon_0 S}.$$

Теперь рассмотрим эту задачу с точки зрения понятия емкости. Пластину 2 можно представить двумя закороченными между собой пластинами 2′ и 2″, суммарный заряд на которых равен нулю. Двумя же пластинами 1′ и 1″ можно представить и пластину 1 (при сохранении суммарного заряда q). Введем в рассмотрение емкость уединенной пластины — конденсатора, у которого вторая обкладка удалена в бесконечность. Обозначим эту емкость через $2C_0$. Емкость такой пластины можно представить как емкость двух параллельно соединенных конденсаторов, у каждого из которых одной из обкладок является одна сторона нашей пластинки, а другая находится в бесконечности. Емкость такого конденсатора будет, очевидно, равна C_0. На рисунке 3, *б* показана эквивалентная схема для случая двух пластин, одна из которых заряжена. По этой схеме действительно подводимый заряд q перераспределяется между пластинами 1′ и 1″, а суммарный заряд на пластинах 2′ и 2″ равен нулю. Общая емкость такого соединения конденсаторов

$$C_{об}=\frac{CC_0}{C+C_0}+C_0=\frac{C_0(2C+C_0)}{C+C_0}.$$

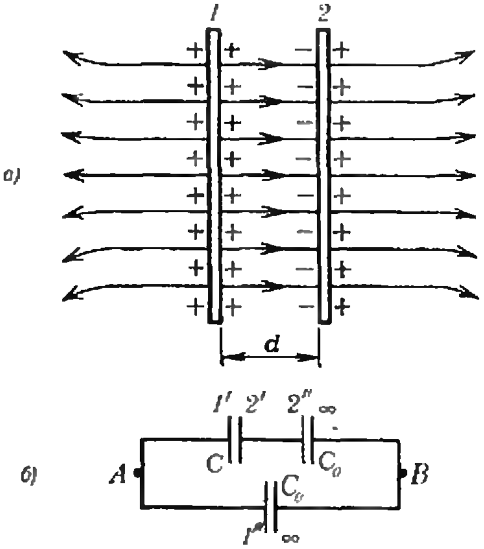


Рис. 3.

Тогда разность потенциалов между точками A и B

$$U_{AB}=\frac{q}{C_{об}}=\frac{q\,(C+C_0)}{C_0\,(2C+C_0)},$$

а искомая разность потенциалов между пластинами *1* и *2* (в эквивалентной схеме это напряжение между пластинами *1′* и *2′*) будет равно

$$U_{12}=\frac{q}{2C+C_0}\approx\frac{q}{2C}=\frac{qd}{2\varepsilon_0 S}$$

(здесь мы пренебрегли величиной емкости C_0 по сравнению с емкостью C).

Задача 4. *В схеме, изображенной на рисунке 4 (величины C, R, $\mathscr{E}$ известны), при разомкнутом ключе K заряд левой обкладки плоского конденсатора равен нулю. Определите начальный заряд правой пластины конденсатора, если после замыкания ключа на резисторе R выделяется такое же количество теплоты, как и в случае, когда конденсатор вначале не заряжен.*

В отличие от предыдущей задачи здесь между пластинами дополнительно поддерживается разность потенциалов, равная $\mathscr{E}$.

Обозначим начальный заряд на правой пластине конденсатора через q_0. Будем полагать, что он равномерно распределен по поверхности (как внутренней, так и внешней) пластины. Наличие заряда q_0 приводит к тому, что в пространстве между обкладками существует однородное электрическое поле с напряженностью

$$E_0=\frac{q_0}{2\varepsilon_0 S},$$

где S — площадь пластины, а между пластинами имеется разность потенциалов

$$U_0=E_0 d=\frac{q_0 d}{2\varepsilon_0 S},$$

где d — расстояние между пластинами.

Пусть $U_0<\mathscr{E}$, тогда после замыкания ключа конденсатор начнет подзаряжаться. На его правой пластине заряд будет увеличиваться, а на левой пластине появится заряд противоположного знака, равный по величине дополнительному заряду на правой пластине (но не полному заряду на ней!). При этом источник будет совершать положительную работу, заряжая пластины конденсатора. Подзарядка пластин будет идти до тех пор, пока разность потенциалов на конденсаторе U не станет равной ЭДС источника $\mathscr{E}$. Пусть за время зарядки через источник протек заряд q, тогда условие равенства напряжения на конденсаторе ЭДС батареи будет иметь вид

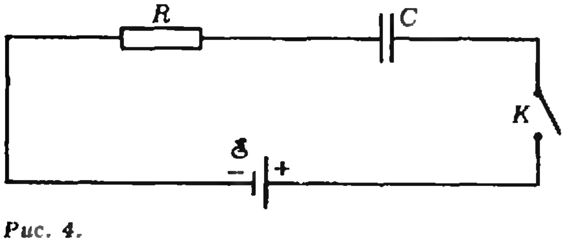


Рис. 4.

$$\frac{q_0 d}{2\varepsilon_0 S}+\frac{q}{C}=\mathscr{E}.$$

Учитывая, что $C=\varepsilon_0 S/d$, получим

$$q=\mathscr{E}C+\frac{q_0}{2}.$$

Найдем теперь то количество теплоты, которое выделится на резисторе R за время зарядки. Работа, совершенная источником, частично пошла на увеличение энергии электрического поля в пространстве между пластинами конденсатора, а частично на нагревание резистора:

$$\mathscr{E}q=\Delta W+Q.$$

Энергию электрического поля будем вычислять через объемную плотность энергии электрического поля, равную $\varepsilon_0 E^2/2$. При разомкнутом ключе K эта энергия равна

$$W_0=\frac{q_0^2}{8\varepsilon_0 S^2}Sd=\frac{q_0^2 d}{8\varepsilon_0 S}=\frac{q_0^2}{8C}.$$

После зарядки конденсатора энергия электрического поля между пластинами увеличится и станет равной

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q_0}{2\varepsilon_0 S}+\frac{q}{Cd}\right)^2 Sd=$$

$$=\frac{q_0^2}{8C}+\frac{q_0 q}{2C}+\frac{q^2}{2C}.$$

Увеличение энергии электрического поля

$$\Delta W=W-W_0=\frac{q\,(q_0+q)}{2C}.$$

Тогда полный энергетический баланс можно записать в виде

$$\mathscr{E}q=\Delta W+Q=\frac{q\,(q_0+q)}{2C}+Q,$$

откуда найдем количество теплоты, выделившееся на резисторе:

$$Q=\mathscr{E}q-\frac{q\,(q_0+q)}{2C}.$$

Подставляя в это уравнение выражение для заряда q (из условия равенства разности потенциалов между

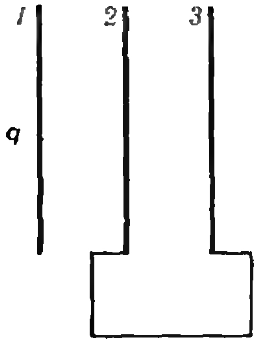


Рис. 5.

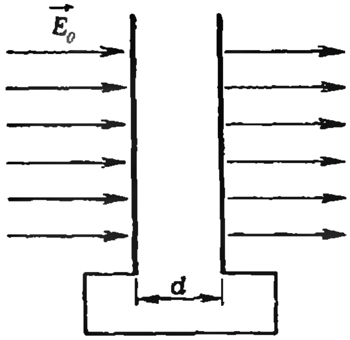


Рис. 6.

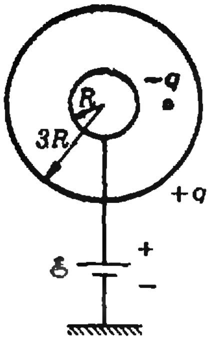


Рис. 7.

пластинами ЭДС источника), окончательно получим

$$Q=\mathscr{E}\left(\mathscr{E}C-\frac{q_0}{2}\right)-\frac{(\mathscr{E}C-q_0/2)(\mathscr{E}C+q_0/2)}{2C}=$$

$$=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}+q_0\left(\frac{q_0}{8C}-\frac{\mathscr{E}}{2}\right).$$

Как видно, выделившееся количество теплоты Q не будет зависеть от начального заряда q_0 на правой пластине при двух значениях q_0:

$$q_1=0 \text{ и } q_2=4C\mathscr{E}.$$

Следует подчеркнуть, что для расчета энергии электрического поля между пластинами конденсатора как до замыкания ключа K, так и после замыкания мы не могли использовать формулы для энергии заряженного конденсатора, поскольку на правой пластине в обоих случаях находился «избыточный» заряд q_0.

Возникает вопрос: а можно ли в этом случае «построить» эквивалентную схему и решить задачу, используя понятие емкости? Одной эквивалентной схемой в данном случае не обойтись — необходимо вводить еще и эквивалентный заряд. Нетрудно показать (сделайте это самостоятельно), что в данном случае эквивалентная схема будет такая же, как и на рисунке 3, *б*, эквивалентный заряд после зарядки равен q_0+2q, а до замыкания ключа он совпадает с зарядом на правой пластине q_0.

Упражнения

1. Две металлические пластины образуют плоский конденсатор. На одной из пластин находится заряд $+q$, а на другой $+Nq$. Определите разность потенциалов между пластинами, если расстояние между ними d, а площадь каждой пластины S. Задачу решите двумя способами.

2. Три плоские металлические пластины образуют сложный конденсатор (рис. 5). На пластине *1* находится заряд q, а незаряженные пластины *2* и *3* закорочены проводником. Определите силу, действующую на пластину *2*. Площадь каждой пластины S.

3. В схеме, изображенной на рисунке 4 (C, R, $\mathscr{E}$ — заданы), при разомкнутом ключе K пластины плоского конденсатора заряжены одноименными зарядами, сумма которых равна q_0. Определите начальные заряды каждой из пластин, если после замыкания ключа на резисторе R выделяется такое же количество теплоты, как и в случае, когда конденсатор вначале не заряжен.

4. Две соединенные проводником пластины конденсатора площадью S находятся на расстоянии d друг от друга (рис. 6) во внешнем однородном электрическом поле, напряженность которого $\vec{E}_0$. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно сблизить пластины до расстояния $d/2$?

5. В системе, изображенной на рисунке 7, радиус внутренней проводящей сферы R, внешней (тоже проводящей) $3R$. Расстояние от центра системы до заряда $-q$ равно $2R$. Зная величины q, $\mathscr{E}$, R, определите заряд на внутренней сфере. Потенциал земли принять равным нулю.

Дорогие читатели!

В будущем, 1988 году журнал «Квант», как и прежде, будет распространяться только по подписке. Если вы не успеете оформить годовую подписку (последний срок — 31 октября 1987 года), не огорчайтесь. На любой номер, начиная с февральского, вы сможете подписаться не позднее первого числа предподписного месяца. Подписка принимается в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465, цена одного номера 40 копеек.

„Квант" улыбается

Задачи, расположенные по цепочке

Скажу сразу, что я не знаю, кто выдумал эти задачи. Некоторые из них мне рассказал Олег Владимирович Долгов. Может быть, вы его видели на экране телевизора, потому что он давно уже выступает в команде знатоков в телепередаче «Что? Где? Когда?». Но хотя он и знаток, оказалось, что и он не знает, кто автор этих задач. Кроме задач, рассказанных мне О. В. Долговым, есть еще и другие задачи такого типа — некоторые из них я слышал раньше, но тоже не мог установить, кто их автор. Задачи мне очень понравились, и я решил их изложить на страницах «Кванта». Надеюсь, что и вам они понравятся и, кроме того, быть может, кто-нибудь из читателей укажет нам их автора (или авторов). А может быть, и сами авторы увидят свои задачи напечатанными и объявятся. Итак, вот эти задачи.

Задача № 1. Сколько нужно проделать операций, чтобы засунуть бегемота в холодильник?

После того, как О. В. Долгов задал мне эту задачу, я задумался... Долгов пришел мне на помощь:

— Я вам скажу, как решается первая задача. Для того чтобы поместить бегемота в холодильник, требуется совершить три операции:

1. Открыть холодильник.
2. Положить бегемота в холодильник.
3. Закрыть холодильник.

Из этого решения я уяснил себе, что понимается под словом «операция». Каждое из указанных в решении действий и есть операция. После этого мне была задана следующая задача.

Задача № 2. Сколько операций надо проделать для того, чтобы положить в холодильник жирафа?

Подумав немного, я сказал:

— Наверное, для того, чтобы положить жирафа в холодильник, надо проделать больше операций, чем для того, чтобы положить туда бегемота.

— Почему? — спросил О. В. Долгов.

— Потому что жираф не влезет в холодильник. Его нужно предварительно сложить.

— Не нужно его складывать, — сказал О. В. Долгов, — холодильник достаточно велик. Жираф может свободно в нем поместиться, если там нет никого другого.

— Тогда, как и в предыдущей задаче, достаточно трех операций — открываем холодильник, кладем жирафа, закрываем.

— Нет, неверно. На этот раз нужно проделать четыре операции, — сказал О. В. Долгов. И перечислил эти операции:

1. Открываем холодильник.
2. Вынимаем бегемота.
3. Кладем жирафа.
4. Закрываем холодильник.

Надо ли что-то объяснять?! Я забыл, что холодильник был занят! После первой задачи в холодильнике остался бегемот.

Затем мне была задана

Задача № 3. Бегемот и жираф находятся на суше на расстоянии 1 километра от берега реки. Кто из них быстрее добежит до воды?

Когда решаешь такого рода задачи, думать бесполезно. Тем не менее, я подумал и сказал:

— Жираф быстрее добежит, у него ноги длинные.

— Неправильный ответ, — сказал О. В. Долгов.

— А какой ответ правильный?

— Скорее добежит до берега бегемот.

— Почему?

— Потому что жираф остался в холодильнике...

Я засмеялся, и мне была предложена следующая задача:

Задача № 4. Сколько бегемотов умещается в кузове пятитонного грузовика?

На этот раз я призадумался, но Олег Владимирович не дал мне размышлять долго:

— Вы не теряйте зря времени, я вам сам подскажу ответ: умещается пять тонн бегемотов — полный кузов. А теперь сами решите задачу № 5. Только быстро. Итак...

Задача № 5. Сколько поместится жирафов в кузове пятитонного грузовика?

— Тоже полный кузов, — сказал я неуверенно.

— Неправильно.

— А сколько же?

— Ни одного жирафа.

— Почему?

— Потому что кузов доверху набит бегемотами.

И в самом деле, после решения четвертой задачи бегемоты так и остались в кузове грузовика. Никто их не снял оттуда.

Задачи эти мне понравились, я их запомнил и, придя домой, рассказал моей дочке Кате. Она тогда училась в шестом классе. К моему удивлению, Катя мгновенно, одну за другой, их решила и сразу же задала мне

Задачу № 6. Мальчик упал с четырех ступенек и сломал ногу. Сколько ног сломает мальчик, если он упадет с сорока ступенек?

Я неуверенно сказал:

— Сорок ступенек ... это в десять раз больше, чем четыре ступеньки. Значит, мальчик сломает десять ног. Но, наверное, это неправильный ответ?

— Неправильный, — сказала Катя.

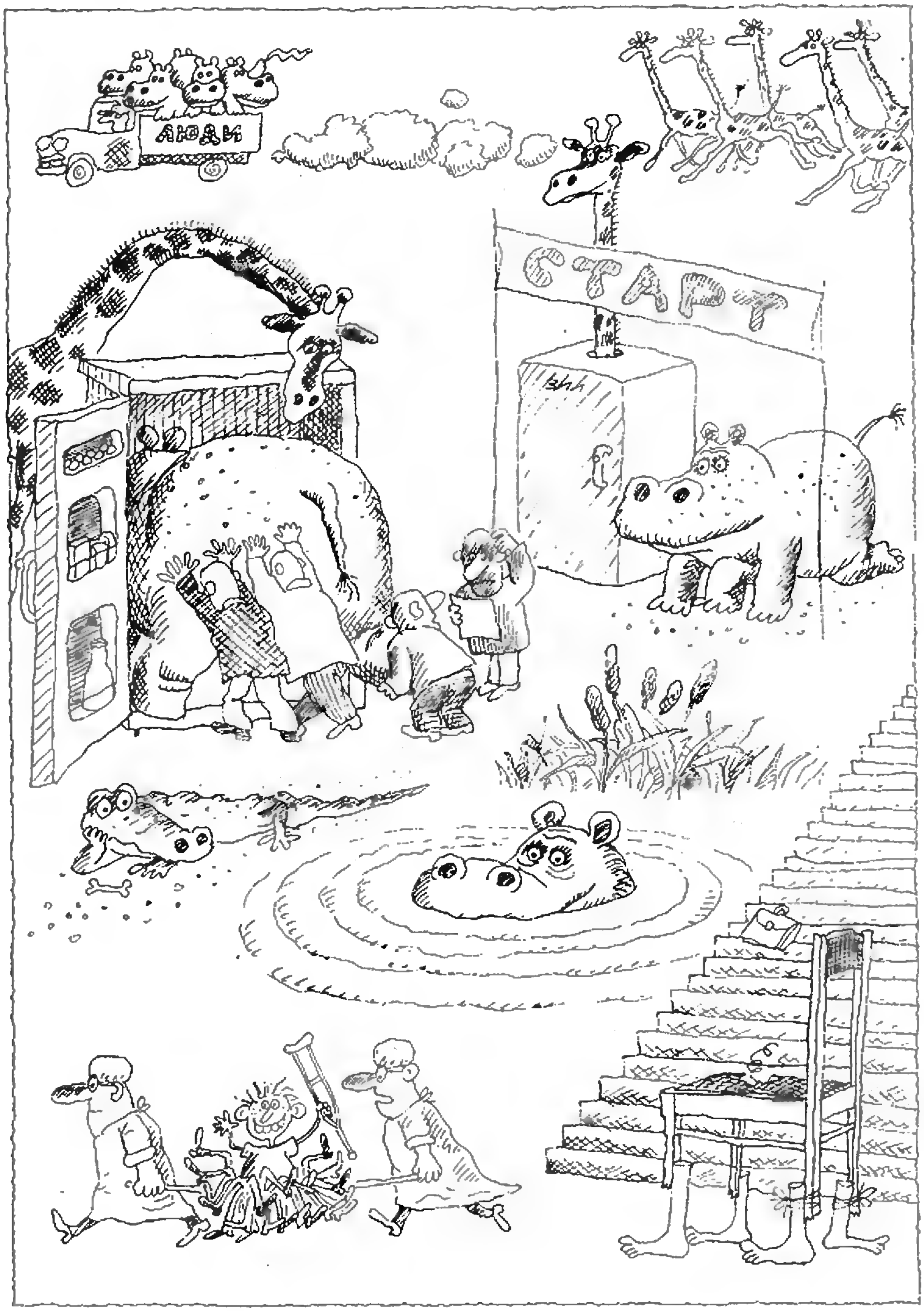
— А какой ответ правильный?

— Мальчик сломает всего одну ногу.

— Почему?

— Потому что одну ногу он уже сломал, а у него их всего две...

После мы с Катей решили, что нехорошо загадывать эту задачу про мальчика,



жалко его — это ведь очень больно, когда человек ломает ногу. Мы решили загадать эту задачу не про мальчика, а про стул: стул падает с лестницы, и при этом у него ломаются ножки. Стул, конечно, тоже жаль, но меньше, чем человека. И, кроме того, задача показалась нам очень интересной. Одного стула не жалко на такую задачу.

Вот и все известные мне задачи, расположенные по цепочке. Может быть, читатели знают и другие такие задачи? Тогда присылайте их в наш журнал.

Б. М. Болотовский

Олимпиады

XIII Всероссийская олимпиада школьников

По сложившейся традиции в дни весенних школьных каникул проходил заключительный, зональный этап Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников 8—10 классов. Ниже приводятся условия задач по математике и физике, предлагавшихся на заключительном этапе, и фамилии победителей XIII Всероссийской олимпиады школьников.

Математика

8 класс

1. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $xy = 20 - 3x + y$.

2. На числовой оси расположено множество M, которое может быть покрыто тремя отрезками единичной длины. Пусть M' — множество середин всевозможных отрезков, концы которых принадлежат множеству M. Докажите, что множество M' можно покрыть шестью отрезками единичной длины. Всегда ли можно обойтись пятью отрезками?

3. Три окружности имеют общую точку M, попарно пересекаются в точках P, Q, R и расположены на плоскости так, как показано на рисунке 1. Через произвольную точку A одной из окружностей, лежащую на дуге PQ, не содержащей точку M, и точек P и Q, в которых окружность пересекает две другие окружности, проведены прямые, вторично пересекающие эти две окружности в точках B и C (см. рис. 1). Докажите, что точки B, C и R лежат на одной прямой.

4. Дана бесконечная десятичная непериодическая дробь. Докажите, что можно переставить ее цифры так, что получится периодическая дробь.

5. Все углы выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равны. Все углы при вершинах «звезды» $ACEBDA$ также равны. Докажите, что пятиугольник $ABCDE$ является правильным.

9 класс

1. Найдите все значения n, при которых число $\underbrace{144\ldots4}_{n\text{ цифр}}$ является квадратом натурального числа.

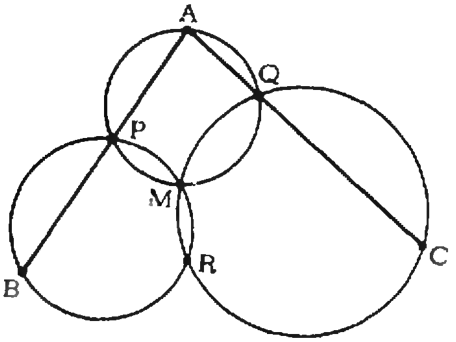


Рис. 1.

2. Среди 99 внешне одинаковых монет находится несколько фальшивых. Известно, что каждая фальшивая монета отличается по весу от настоящей монеты на нечетное число граммов и что суммарный вес всех данных монет равен весу 99 настоящих монет. Имеются двухчашечные весы со стрелкой, показывающей разницу в граммах весов грузов, положенных на чаши. Докажите, что, осуществив только одно взвешивание на таких весах, про любую заранее выбранную монету можно узнать, является она фальшивой или нет.

3. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то справедливо неравенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\gamma > \frac{3}{4}.$$

4. Две окружности пересекаются в точках M и N. Через точку M проведены прямые l_1 и l_2, образующие одинаковые углы с хордой MN и пересекающие окружности, кроме точки M, еще в двух точках: l_1 — в точках A и B, l_2 — в точках C и D. Докажите, что $AB = CD$.

5. Биллиардный стол имеет форму правильного треугольника. Докажите, что если шар после удара прошел через некоторую точку семь раз, то он пройдет через нее еще хотя бы один раз.

10 класс

1. Найдите все трехзначные числа $\overline{abc}$, квадраты которых оканчиваются на $\overline{abc}$.

2. Докажите, что при всех $x \in R$ справедливо тождество

$$\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right| - 2^n\right| - 2^{n-1}\right| - \ldots\right| - 2\right| - 1\right| =$$
$$= \left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right| - 1\right| \underbrace{- 1\right| - \ldots\right| - 1\right|}_{2^{n+1} - 1 \text{ единиц}}.$$

3. Докажите, что если сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{1984\cdot 1985\cdot 1986}$$

представить в виде несократимой дроби, то числитель этой дроби будет делиться нацело на 1987.

4. Пусть l — длина пространственной ломаной, a, b, c — длины ее проекций на координатные плоскости. а) Докажите, что справедливо неравенство $(a+b+c)/l \leqslant \sqrt{6}$. б) Существует ли замкнутая ломаная, для которой выполняется равенство $(a+b+c)/l = \sqrt{6}$?

5. Четверо правильно идущих часов лежат на столе вверх циферблатами так, что их центры являются вершинами квадрата. В некоторый момент времени концы минутных стрелок часов оказались вершинами квадрата. Докажите, что и в любой другой момент времени четырехугольник с вершинами в концах минутных стрелок также является квадратом. (Толщиной часов пренебречь.)

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Автомат подает готовые детали на шероховатую ленту транспортера. Скорость деталей перед попаданием на транспортер $v_0 = 1$ м/с. Известно, что при скорости транспортера $v = 2$ м/с детали останавливаются на ленте на

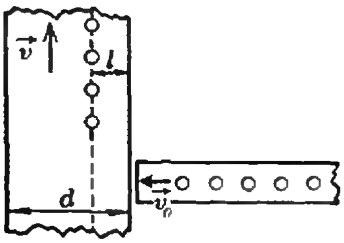


Рис. 1.

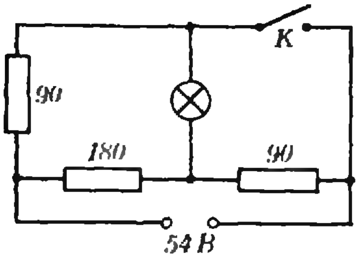


Рис. 2.

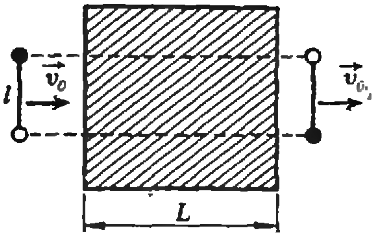


Рис. 3.

расстоянии $l = {}^1/_3 d$ от края (рис. 2). Какую скорость должна иметь лента транспортера, чтобы детали останавливались точно посередине?

2. При помощи нагревателя мощностью $P = 100$ Вт кастрюлю, в которую налит $V = 1$ л воды, никак не удается довести до кипения. Выключим нагреватель. За какое время температура воды упадет на $\Delta t = 1$ градус?

3. В собранной схеме (рис. 3) лампочка горит одинаково ярко как при замкнутом, так и при разомкнутом ключе K. Напряжение источника $U = 54$ В. Найдите напряжение на лампочке.

4. В момент времени $t = 0$ на частицу массой m, движущуюся со скоростью $\vec{v}_0$, начинает действовать постоянная сила $\vec{F}$. Определите перемещение частицы (модуль и направление относительно заданных векторов $\vec{F}$ и $\vec{v}_0$) за время, в течение которого вектор скорости частицы повернулся на известный угол α, оставшись тем же по модулю.

9 класс

1. Гантелька, представляющая собой длинную (длиной l) невесомую спицу с закрепленными на концах массивными шариками пренебрежимо малых размеров, движется поступательно со скоростью $\vec{v}_0$ и скрывается за ширмой, где испытывает столкновение с неподвижным препятствием (при этом слышен звук двух последовательных ударов). В результате гантелька вылетает из-за ширмы с прежней скоростью и по практически прежней траектории, но в перевернутом состоянии (рис. 4). Сколько времени гантелька находилась за ширмой? Ширина ширмы $L > l$.

2. В схеме (рис. 5) $\mathcal{E}_1 = 4\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$, $C_1 = C_2 = C$. Ключ K сначала находится в положении «1», затем его переключают в положение «2». Какое количество теплоты выделится на резисторе сопротивлением R_2 ($R_2 = R_1$)?

3. Какова должна быть мощность насоса, поднимающего 0,2 кубометра воды в секунду ($V = 0{,}2$ м^3/с) через трубу сечением $S = 0{,}05$ м^2 на высоту $h = 5$ м? Что изменится, если нужно поднимать такую же массу цементного раствора, у которого плотность в два раза больше, чем у воды?

4. Высокий теплоизолированный цилиндр разделен неподвижной теплопроводной перегородкой на две части. В верхней части под поршнем находится $\nu_1 = 1$ моль гелия при температуре $T_1 = 420$ К, в нижней части — $\nu_2 = 1{,}5$ моля гелия при $T_2 = 400$ К. Поршень может двигаться без трения, масса его $M = 100$ кг. На сколько опустится поршень к моменту установления теплового равновесия в сосуде? Какая температура при этом установится? Внешнее давление не учитывать.

10 класс

1. Предположим, что в результате сильных пожаров в верхних слоях атмосферы Земли возникнет сплошной тонкий слой сажи, поглощающий практически все падающее на него солнечное излучение, за исключением инфракрасного. Какой стала бы при этом средняя температура Земли, если сейчас она составляет $T = 300$ К? Учтите, что в состоянии теплового равновесия любое тело излучает с единицы поверхности поток энергии, который пропорционален четвертой степени его температуры (закон Стефана — Больцмана). Считать, что при температуре T практически все излучение инфракрасное. Отражением пренебречь.

2. При испытании тонкостенных стеклянных шаров на прочность воздух последовательно накачивался в шары с внешними радиусами R, $2R$ и $3R$. Стекло, из которого сделаны шары, однородно, шары имеют стенки одинаковой толщины. Какой из шаров должен лопнуть первым при одинаковом наименьшем давлении воздуха внутри шара? Какое условие следует наложить на толщину стенок шаров, чтобы при том же соотношении внешних радиусов шары выдерживали практически одинаковое предельное давление? Ответы обоснуйте.

3. Очень длинный соленоид в средней части окружен кольцевым проводящим обручем, ось которого совпадает с осью соленоида (рис. 6). Обруч составлен из двух половин, имеющих неизвестные разные сопротивления R_1 и R_2. К точкам A и B, в местах соединения половин, подключены три вольтметра с чисто активными внутренними сопротивлениями, причем проводник $A - \mathrm{V}_0 - B$ проложен строго по диаметру обруча, а проводники $A - \mathrm{V}_1 - B$ и $A - \mathrm{V}_2 - B$ — произвольно по разные стороны соленоида. По соленоиду пропускают переменный ток. Оказалось, что при этом вольтметр V_0 показы-

(Окончание см. на с. 63)

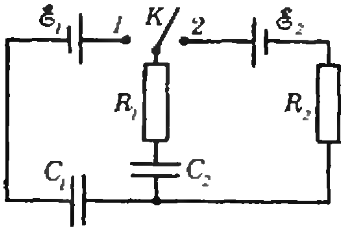


Рис. 4.

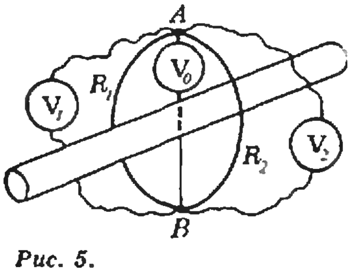


Рис. 5.

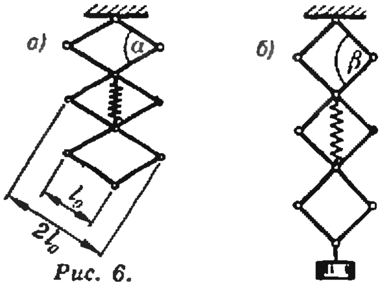


Рис. 6.

Призеры XIII Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Доброва Д. (Абакан, с. ш. № 20),
Межиров А. (Калинин, с. ш. № 37),
Рагулин В. (Челябинск, с. ш. № 127),
Скопенков А. (Саратов, с. ш. № 13);

по 9 классам —
Валиуллин М. (Казань, с. ш. № 94),
Вологодский В. (Омск, с. ш. № 91),
Гравит В. (Северодвинск, с. ш. № 2),
Ким Г. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Шенкман П. (Саратов, с. ш. № 13);

по 10 классам —
Дынников И. (Жуковский, с. ш. № 1),
Ляндин В. (Белорецк, с. ш. № 14),
Осолоткин А. (Петрозаводск, с. ш. № 29),
Стыркас К. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Топровер И. (Волгоград, с. ш. № 50),
Черных А. (Краснодар, с. ш. № 40),
Шанько Ю. (Красноярск, с. ш. № 10).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Кожевников А. (Калуга, с. ш. № 24),
Кузнецова О. (Йошкар-Ола, с. ш. № 4),
Подобреев А. (Волгоград, с. ш. № 31),
Сапрыкин А. (Новосибирск, с. ш. № 110);

по 9 классам —
Безрукавников Р. (Калуга, с. ш. № 24),
Гагин В. (Уфа, с. ш. № 18),
Калинин А. (Саратов, с. ш. № 13),
Крикунов Ю. (г. Кировск Ленинградской обл., с. ш. № 2),
Рот Ф. (Томск, с. ш. № 88);

по 10 классам —
Кальницкий В. (Калининград, с. ш. № 50),
Когон Л. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Нарский И. (Воронеж, с. ш. № 58),
Тамаркин Д. (Горький, с. ш. № 17).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Вержбицкий П. (Ижевск, с. ш. № 11),
Дулев В. (Орел, с. ш. № 21),
Жуковец О. (Череповец, с. ш. № 27),
Овчаренко А. (Норильск, с. ш. № 6);

по 9 классам —
Бессолицын М. (Киров, с. ш. № 30),
Верховский А. (Магадан, с. ш. № 1),
Пелевин О. (Кострома, с. ш. № 32),
Шамов З. (Махачкала, с. ш. № 39);

по 10 классам —
Бучин П. (Киров, с. ш. № 22),
Струнин А. (Ярославль, с. ш. № 34),
Узденский Д. (Ростов, с. ш. № 33),
Чурашев К. (Новосибирск, с. ш. № 130).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Абрамов А. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 56),
Кузьма Н. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1),
Толкунов Е. (Хабаровск, с. ш. № 3),
Шинкевич С. (Березники, с. ш. № 3, 7 кл.);

по 9 классам —
Вихорев А. (Калинин, с. ш. № 17),
Головин Д. (Тамбов, с. ш. № 29),
Жуков В. (Магадан, с. ш. № 1),
Мамаев А. (Заволжье, с. ш. № 17),
Медведев М. (Горький, с. ш. № 40),
Михайловский Н. (Красноярск, с. ш. № 20);

по 10 классам —
Абдулазизов С. (Махачкала, с. ш. № 34),
Бобылев С. (Березники, с. ш. № 3),
Будько Д. (Белгород, с. ш. № 3),
Вихлинин А. (Рязань, с. ш. № 20),
Корстен В. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Хайрутдинов И. (Миасс, с. ш. № 9).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Ермолов Э. (п. Леонидово Сахалинской обл., Леонидовская с. ш.),
Кравцов Д. (Новокуйбышевск, с. ш. № 3),
Самборский Д. (Истра, с. ш. № 2),
Ханжин С. (Астрахань, с. ш. № 5);

по 9 классам —
Билибин А. (Боровичи, с. ш. № 1),
Лутовинов А. (Мичуринск, с. ш. № 21),
Смирнов А. (Челябинск, с. ш. № 31),
Шпаков Д. (Красноярск, с. ш. № 101);

по 10 классам —
Даминов Н. (Братск, с. ш. № 18),
Карпов С. (Горький, с. ш. № 40),
Карякин А. (Тамбов, с. ш. № 29),
Третьяков Г. (Новгород, с. ш. № 21),
Щербаков А. (Обнинск, с. ш. № 10),
Янович А. (Челябинск, с. ш. № 31).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Малков Р. (Саратов, с. ш. № 13),
Пластов А. (Сарапул, с. ш. № 12),
Цыдынжапов Г. (Новосибирск, с. ш. № 10),
Янушко А. (Калининград, с. ш. № 24);

по 9 классам —
Гапоненко А. (ст-ца Динская Краснодарского кр., с. ш. № 4),
Кириллов Э. (Комсомольск-на-Амуре, с. ш. № 16),
Рожков А. (Калининград, с. ш. № 17),
Шиховцев О. (Верхняя Салда, с. ш. № 1);

по 10 классам —
Вязигин А. (Майкоп, с. ш. № 17),
Гурарий В. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Солнцев К. (Томск, с. ш. № 32),
Терпугов В. (Томск, с. ш. № 50).

(Начало см. на с. 60)

вает напряжение $u_0 = 5$ В, вольтметр $V_1 - u_1 = 10$ В. Что показывает вольтметр V_2? Магнитным полем вне солеиоида, а также индуктивностью контуров пренебречь.

4. Из невесомых стержней, длина которых l_0 и $2l_0$, собрана конструкция в виде «гармошки» (рис. 7). Трения в шарнирах нет. В среднее звено вставили невесомую пружину, и конструкция приняла форму, характеризуемую углом α (см. рис. 7,*а*). Затем снизу подвесили некоторый груз, угол между стержнями стал равен β (см. рис. 7,*б*). Каким будет период колебаний, если толкнуть груз в вертикальном направлении?

Экспериментальный тур

8 класс

1. В «черном ящике» находятся три резистора. Нарисуйте возможную схему их соединения.

Оборудование: амперметр школьный, вольтметр школьный, источник питания, реостат школьный, соединительные провода, ключ соединительный.

2. Исследуйте процесс соударения двух монет, находящихся на листе бумаги, расположенном на горизонтальном столе. Определите, выполняется ли закон сохранения механической энергии.

Оборудование: лист миллиметровой бумаги, две пятикопеечные монеты, линейка ученическая, транспортир.

9 класс

1. Определите зависимость коэффициента усиления транзистора по току в схеме с общим эмиттером от силы тока в коллекторе в диапазоне токов 0÷30 мА.

Оборудование: транзистор малой мощности типа МП41 или МП42, микроамперметр на 500 мкА, батарейка 4,5 В, переменный резистор 30 кОм, лист с приведенной на нем цоколевкой транзистора, миллиамперметр на 50 мА.

2. Определите зависимость угла наклона, при котором капля начинает скатываться по стеклу, от массы капли.

Оборудование: стеклянная пластинка, транспортир, пипетка, мензурка, сосуд с водой.

10 класс

1. Измерьте сопротивления 4-х резисторов.

Оборудование: батарейка 4,5 В, миллиамперметр на 5 мА, вольтметр на 5 В, неизвестные резисторы, ключ, соединительные провода.

2. Исследуйте зависимость давления насыщенных паров воды от температуры.

Оборудование: сосуд с водой, нагреватель (спиртовка, сухой спирт, электроплитка), пробирка с делениями, термометр, барометр (один на класс), штатив с муфтой и лапкой.

Публикацию подготовили *Б. Б. Буховцев,*
Л. П. Купцов, О. Ю. Овчинников,
С. В. Резниченко

Ответы, указания, решения

Конденсаторы с «избыточным» зарядом пластин

1. $\Delta\varphi = (N-1)\,qd/(2\varepsilon_0 S)$; эквивалентная схема изображена на рисунке 3,*б* в статье.
2. Сила направлена к пластине *1*, а ее модуль $F = q^2/(8\varepsilon_0 S)$.
3. Задача имеет два решения: 1) $q_1 = q_2 = q_0/2$; 2) $q_1 = q_0/2 - 2C\mathscr{E}$, $q_2 = q_0/2 + 2C\mathscr{E}$ $(q_0 > 4C\mathscr{E})$.
4. $A = {}^1/_4\,\varepsilon_0 S d E_0^2$.
5. $Q = 4\pi\varepsilon_0 R\,\mathscr{E} + {}^1/_6\,q$.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 9)

Вопросы и задачи

1. Частицы дыма участвуют в броуновском движении и постепенно удаляются друг от друга, отчего плотность дыма уменьшается.
2. Из-за ослабления броуновского движения капелек масла.
3. Число ударов молекул жидкости о поверхность частицы растет пропорционально площади этой поверхности, масса же частицы пропорциональна ее объему. Поэтому с ростом размеров частицы молекулам все труднее сдвинуть частицу. Броуновская частица также должна быть достаточно малой, для того чтобы удары молекул были нескомпенсированы.
4. С ростом температуры увеличивается скорость диффузии.
5. Частые соударения молекул приводят к тому, что пути, проходимые ими, намного протяженнее перемещений, движение происходит по зигзагообразным траекториям.
6. Через пленку лака пары воды диффундируют медленнее, дерево «просыхает» равномерно по всей толще, и шар не растрескивается.
7. Из-за большой разреженности атмосферы число молекул в единице объема невелико для того, чтобы передать при соударениях со спутником заметное количество энергии.
8. Если у Луны и была атмосфера, то за долгое время существования Луны она исчезла: среди множества молекул, составлявших атмосферу, всегда присутствовали такие, у которых скорость теплового движения достигала второй космической скорости для Луны.
9. При сборке осколков практически невозможно расположить поверхности трещин на таком расстоянии, когда силы притяжения молекул станут заметными.
10. При длительном плотном соприкосновении атомы гайки и болта из-за диффузии перемешиваются на границе, приводя к соединению.
11. Работа по изменению уровня жидкости в капилляре совершается за счет энергии взаимодействия молекул.
12. Давление увеличилось бы.

Микроопыт

Три струйки соединяются в одну. Это объясняется молекулярным притяжением струй, возникающем при их сближении.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 9)

1. 45203+45203=90406.

2. Достаточно поместить термометр в хороший морозильник. В результате спирт сократится и весь втянется в колбочку. Потом при нагревании новый столбик спирта будет уже без разрывов.

3. Раз доля Алеши составляет 25 копеек, то таковы же доли Коли и Вити. Значит, все 5 пакетиков ирисок стоят 75 копеек, а один пакетик — 15 копеек. Коля заплатил 45 копеек, значит, он должен получить 45—25=20 копеек, а Витя 30—25=5 копеек.

4. Раз часы принимались бить пять раз, то получасовых ударов было 2 или 3. Если их было 3, то на два соседних часа приходится 8 ударов; но в одном случае будет четное число ударов, а в другом нечетное, т. е. в сумме 8 ударов быть не может. Если было 2 получасовых удара, то оставшиеся 9 ударов однозначно представляются в виде суммы трех последовательных чисел: 2+3+4. Анатолий Павлович ушел в 4 часа дня.

5. Не может, так как сумма 0+1+2+...+ +9=45. Если бы степень двойки имела поровну нулей, единиц и т. д., то сумма цифр у этого числа делилась бы на 45 и, следовательно, на 9; значит, и само число должно делиться на 9, а оно может иметь делителями только степени числа 2.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 7)

Задание 13 (В. Харли, 1926 г.). 1. Ла5!! Тема завлечения. 1...Кр:а5 2. Cd2×, 1...К:а5 2. Са3×. На 1...Кс4 следует 2. Фа4×, а других защит от 2. Cd2× или 2. Лb5× у черных нет.

Задание 14 (А. Максимовских, 1984 г.). **1. Kpc1 f5!** От пешки нужно срочно избавиться. **2. C:f5 a1Ф+ 3. Cb1 Kpb7 4. h4!** — вперед должна двигаться, именно эта пешка. **4...Kpb6 5. h5 Kpa5 6. h6 Kpa4 7. h7 a5.** Патовая клетка подготовлена, но **8. h8C! Ф:b2+ 9. C:b2** с выигрышем (8...Kpb3 9. Ce5 Kp:c4 10. b3+!).

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов,
Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В.В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин,
Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов,
Г. Н. Яковлев

Номер подготовили
А Н Виленкин, А А Егоров, И Н Клумова, Т С Петрова,
А Б Сосинский, В А Тихомирова

Номер оформили
Ю А Ващенко, М Б Дубах, Д А Крымов,
Н С Кузьмина, Т Н Кольченко, Э В Назаров,
П И Чернуский, В Б Юдин

Заведующая редакцией Л В Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С В Иванов

Художественный редактор Т М Макарова

Корректор Н В Румянцева

Сдано в набор 19 08 87 Подписано к печати 22 09 87
Т 19411 Бумага 70×108/16 Печать офсетная
Усл кр отт 23,8 Усл печ л 5,6 Уч изд л 6,65
Тираж 200 575 экз Цена 40 коп Заказ 2272

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

КОМПЬЮТЕР В КОМПАНИИ ГРОССМЕЙСТЕРОВ

Первые встречи за шахматной доской между человеком и машиной относятся к началу 70-х годов. Понятно, что в эпоху «универсалов» — компьютеров, занимающих огромные помещения, такие встречи приходилось специально организовывать. Сейчас, когда интенсивно развивается индустрия персональных ЭВМ, в том числе шахматных микрокомпьютеров, поиграть с машиной может каждый (у нас они тоже скоро поступят в продажу). Что касается гроссмейстеров, то к ним, как правило, обращаются с просьбой провести сеанс одновременной игры против целой компании машин; иногда автоматы включаются в число участников обычного сеанса. Впрочем, все чаще компьютеры играют в одних турнирах с шахматистами, причем в турнирах весьма престижных.

Экс-чемпион мира М. Таль недавно играл в международном турнире в Западном Берлине, участником которого был и «Мефисто» — чемпион мира среди шахматных микрокомпьютеров. Жаль, что встречи между ними не произошло,— швейцарская система не свела их вместе. На этот турнир съехались 466 шахматистов из 77 стран, среди них 15 гроссмейстеров и 50 международных мастеров. В состязании предусматривалось девять туров. Победителем вышел Таль, что и не удивительно. А вот результат машины поистине сенсационный: «Мефисто» набрал 5,5 очков и разделил 63-е место, причем в одной компании с ним оказались гроссмейстеры Радулов, Георгиев и Лехтинский, а позади на пол-очка — гроссмейстеры Беллон, Трингов и Спасов. Разумеется, «швейцарка» со своим неровным составом часто преподносит сюрпризы, но в любом случае тем, кто скептически относится к шахматным способностям компьютеров, есть повод засомневаться.

Творческим шедевром турнира в Западном Берлине стала следующая партия между «Мефисто» и гамбургским игроком М. Фетте, обладателем мастерского рейтинга 2300.

«Мефисто» — М. Фетте

Защита Грюнфельда

1. c4 Kf6 2. Kc3 d5 3. cd K:d5 4. d4 g6 5. e4 K:c3 6. bc Cg7. Турнир проходил одновременно с матч-реваншем Каспаров — Карпов, в котором защита Грюнфельда была самым популярным дебютом. Правда, в настоящей партии соперники разыгрывают вариант, не встречавшийся в поединке за корону. **7. Kf3 c5 8. Cb5+ Kc6 9. 0—0 0—0 10. C:c6 bc 11. Ce3 Cg4 12. Лc1.** ЭВМ без особых претензий разыграла дебют, и сейчас черные могли быстро свести дело к ничьей: 12...C:f3 13.Ф:f3 cd 14. cd C:d4 15. C:d4 Ф:d4 16. Л:c6 и т. д. Однако человек всегда стремится одолеть машину. **12...Фa5 13. Фe2 Лfd8 14. Лfd1 Фa4.** Теперь угроза пешке d4 весьма серьезна. Белые вынуждены сыграть e4 — e5, и позиционный перевес черных становится бесспорным. **15. e5 cd 16. cd Ce6 17. Cg5 Лd7 18. Лd2 h6 19. Ce3 Лb8 20. Лdc2 Cd5 21. Ke1!**

Конь направляется на пункт c5 — прекрасный стратегический замысел. Удивительно, насколько хорошо играет компьютер в этой трудной ситуации. **21...Лdb7 22. Kd3 Лb1 23. h3 Kph7 24. Фd2 e6 25. Л:b1 Л:b1+ 26. Kph2 Ce4 27. Лc5.** «Мефисто» ставит хитрую ловушку: 27...Лd1 28. Kb2! Л:d2 29. K:a4 Л:a2 30. Kc3. Вариант форсированный, поэтому для компьютера *совершенно элементарный*.

27...Фa6 28. Лc3. Угроза Kc5 уже не шуточная. **28...Cd5 29. a3 Cf8 30. f3.** Ограничивая действия слона d5. **30...Фa4 31. Kc5 Фd1.** После размена на c5 в связи с разнопольными слонами на доске стояла бы битая ничья. Черные слегка нервничают и ищут возможность переиграть соперника в эндшпиле. Но ситуация обостряется.

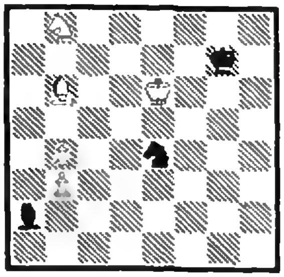
32. Ф:d1 Л:d1 33. Kd7 Ce7 34. Kpg3 g5 35. Kpf2 Kpg6 36. g4!? Белые берут под контроль поле f5, но ослабляют пешки f3 и h3. **36...Cd8 37. Kf8+ Kpg7 38. Kd7.** Машина пока согласна на ничью. **38...Ca5 39. Лc5 Ce1+ 40. Kpe2 Лa1 41. Kf6.** В поисках шансов на победу черные играют с огнем. Теперь у «Мефисто» в проекте появилась угроза Лg8×, поэтому черный слон должен держать поле a5 (защищаясь от Лc5 — a5:a7), а ладья — самого слона. Неприятный переплет!

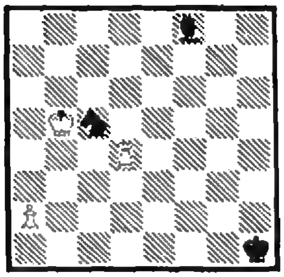
41...a5 42. f4 Cg2? (следовало взять на f4) **43. fg hg 44. Cf2.** Интересно почему белые не побили пешку g5? После 44. C:g5 C:h3 (44...Kpg6 45. h4 с идеей Kf6—h5—f4+) 45. Л:c6 у белых страшная угроза Лc6 — c8 — g8×. Неужели машина предусмотрела контршах 45...Cf1+! Тогда король должен брать слона: 46. Kp:f1 Cd2+ 47. Kpe2 C:g5 и несмотря на отсутствие пешки перевес снова переходил к черным: 48. Kh5+ Kpg6 49. Лc3 Cc1.

44...C:f2 45. Kp:f2 Лa2+ 46. Kpg1 Cd5 47. K:d5. Последняя возможность поставить перед черными проблемы заключалась в 47. Л:a5. Теперь проигрывает 47...Лd2 48. Лa8 Л:d4 49. Лg8+ Kph6 с неизбежным матом. Спасение, по-видимому, состояло в 47...Лg2+ 48. Kpf1 Лh2 49. Лa8 Лh1+ с вечным шахом, поскольку белый король не может ускользнуть через поле b4 ввиду c6 — c5+.

47...cd 48. Л:a5 Лd2 49. Лa4 Лd1+ 50. Kph2 Лd2+. Ничья, лишняя пешка не имеет значения. Партия, которой могут гордиться и черные!

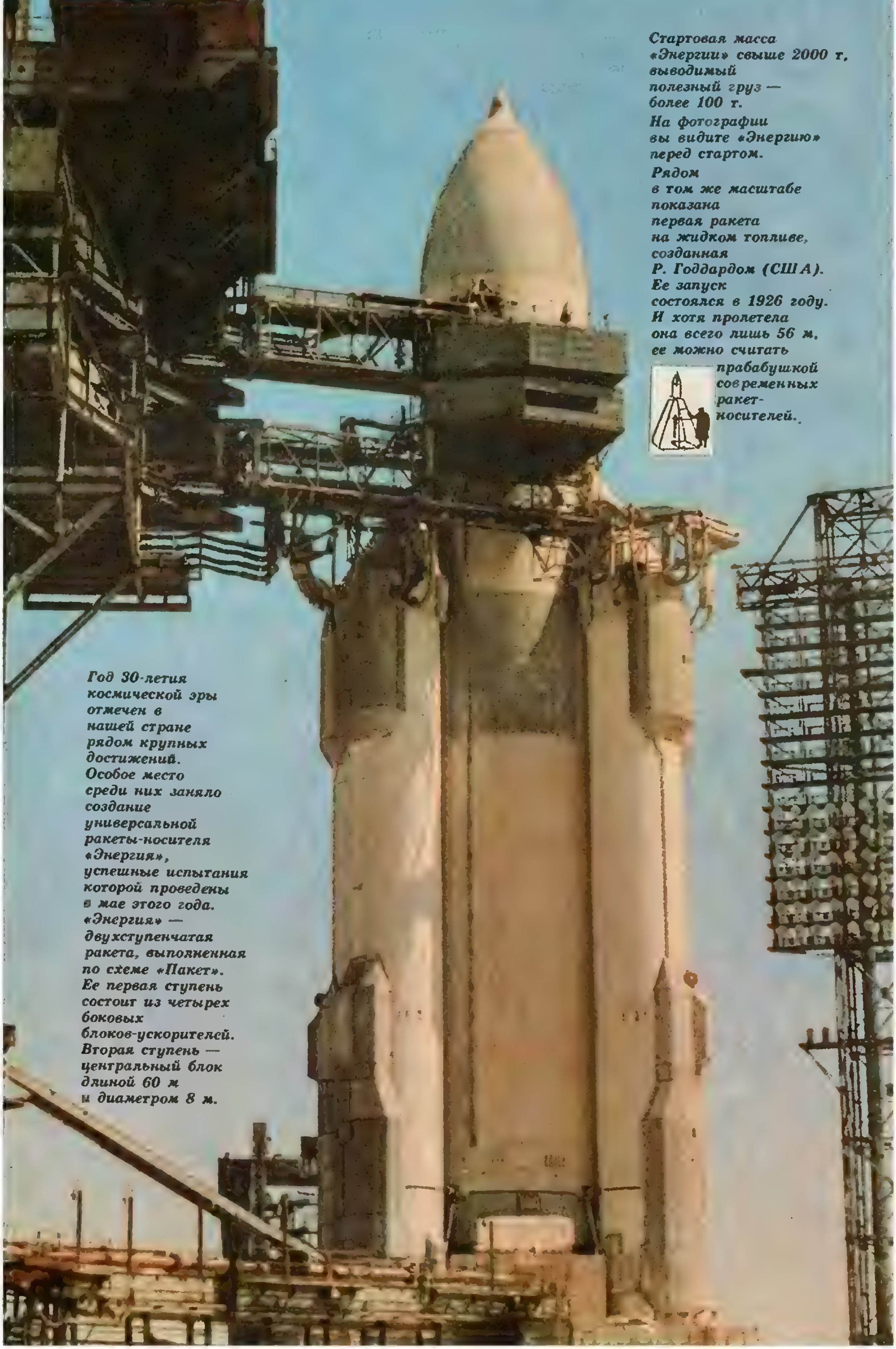
Конкурсные задания





19, 20. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 декабря 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 19, 20».



Год 30-летия космической эры отмечен в нашей стране рядом крупных достижений. Особое место среди них заняло создание универсальной ракеты-носителя «Энергия», успешные испытания которой проведены в мае этого года. «Энергия» — двухступенчатая ракета, выполненная по схеме «Пакет». Ее первая ступень состоит из четырех боковых блоков-ускорителей. Вторая ступень — центральный блок длиной 60 м и диаметром 8 м.

Стартовая масса «Энергии» свыше 2000 т, выводимый полезный груз — более 100 т.

На фотографии вы видите «Энергию» перед стартом.

Рядом в том же масштабе показана первая ракета на жидком топливе, созданная Р. Годдардом (США). Ее запуск состоялся в 1926 году. И хотя пролетела она всего лишь 56 м, ее можно считать прабабушкой современных ракет-носителей.

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Несколько лет назад неистощимый Эрнё Рубик придумал игрушку, в которой 11 фишек, расположенные в узлах квадратной решетки, при помощи трех кареток совершают «челночные рейсы» вниз — вверх (3 ряда по 3 фишки сразу) и влево — вправо (2 ряда по 4 фишки раздельно). Как обычно, задача играющего в том, чтобы после нескольких произвольных сдвигов восстановить исходный порядок фишек, показанный на рисунке 1. На этой головоломке мы еще раз продемонстрируем эффективность приемов, с которыми мы знакомили читателей в «Кванте» № 5.

Первым делом посмотрим, как переставляются фишки под действием различных коммутаторов — операций типа «туда — сюда — оттуда — отсюда». Если «туда» — это вниз, а «сюда» — влево («оттуда» и «отсюда», естественно, — вверх и вправо), то в зависимости от того, какой из двух горизонтальных рядов сдвигается, верхний или нижний, получаются две операции — A и B (рис. 2). Обе они переставляют фишки циклически: A — по синим стрелкам, B — по зеленым. Есть еще третий вариант — двигать влево-вправо сразу обе горизонтальные каретки. Возникающая операция C переставляет фишки по периметру игрушки против часовой стрелки. Если сначала они стоят в исходном порядке, то после применения C переместятся так: 7 → 8 → 9 → желтая → красная → 3 → 2 → 1 → → 4 → 7. Следующий шаг — рассмотреть коммутаторы операций A, B и C. Впрочем, можно обойтись только одним из них — $K = AB^{-1}A^{-1}B$. Он меняет местами фишки 1 и 7 и одновременно 5 и 6 (в исходном положении). Теперь мы сможем переставить любые две фишки, стоящие через одну, по периметру головоломки (при этом одновременно переставляются 5 и 6). Например, для фишек 1 и 3 это делается так: сдвигаем их с помощью C^2 на места 7 и 1, выполняем K и возвращаем назад. Операции такого вида ($C^n K C^{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$) позволяют получить любую перестановку всех фишек, кроме 5 и 6; проверьте это! Но не случится ли, что все эти фишки попадут на свои места, а 5 и 6 окажутся переставленными? Оказывается нет. Поясним это, опуская за недостатком места самое существенное — доказательства. Всякую перестановку можно представить последовательностью попарных обменов, причем разными способами. (Например, цикл A получится, если последовательно менять местами красную фишку с фишками 6, 5, 4, 1, 2, 3 или фишку 6 с 5, 4, 1, ...). При этом число обменов либо всегда будет четным — тогда перестановка называется четной, либо нечетным — тогда она нечетная. Если после нескольких сдвигов каретки вернулись в исходную позицию, то каждая из них сдвигалась четное число раз. Отсюда выводится, что образовавшаяся в результате перестановка будет четной, а значит, получить ровно один парный обмен нельзя. Кстати, здесь же кроются и ответы на наши вопросы о головоломках из 5-го и 6-го номеров журнала.

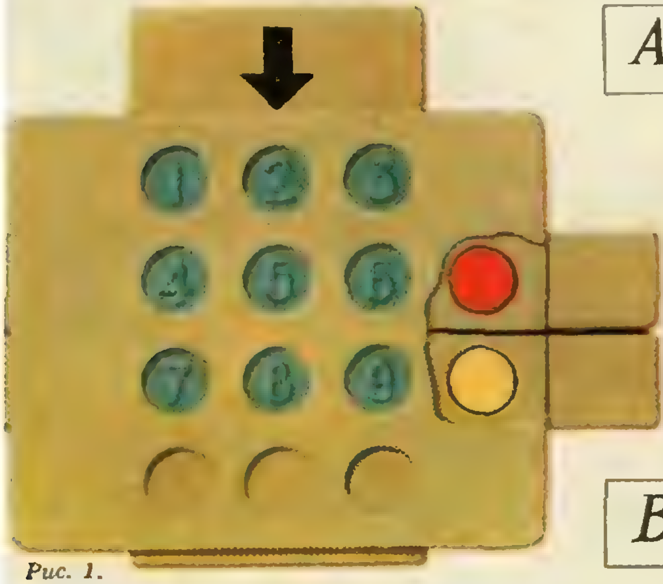


Рис. 1.

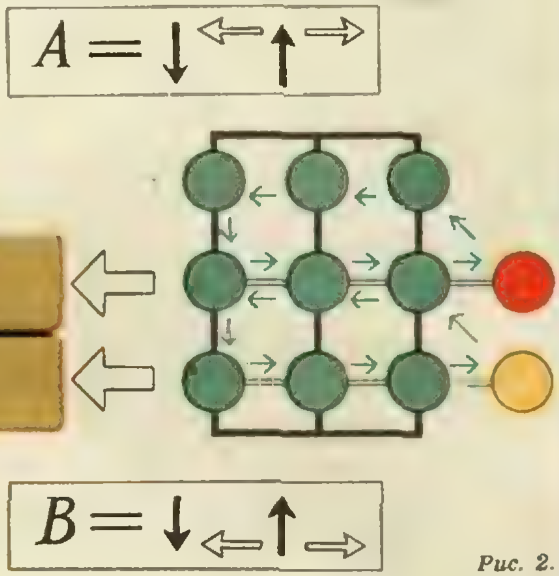


Рис. 2.

Уважаемые читатели! По редакционному календарю Новый год уже на носу, а наш запас головоломок еще далеко не исчерпан. Напишите, нравятся ли вам наши заметки о них? Надо ли продолжать эту серию?

НОМЕР
11

Квант

1987
11

Основан в 1970 году

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 Всенародный праздник

К 70-летию Великого Октября

3 *Б. В. Гнеденко.* О математике Страны Советов
9 Достижения советских физиков

* * *

14 *С. Р. Филонович.* Великая книга Ньютона

Математические работы школьников:

19 *Я. Ю. Карпов.* Оптимальная кодировка почтового индекса
21 *А. Э. Лобковский.* Математические узоры на плоскости

Задачник «Кванта»

22 Задачи М1071 — М1075, Ф1083 — Ф1087
24 Решения задач М1051 — М1055, Ф1063 — Ф1066

«Квант» для младших школьников

31 Задачи
34 *А. И. Орлов.* «Все», «некоторые» и отрицание

32 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»

Физика 8, 9, 10:

36 Закон всемирного тяготения
38 Расширение газа в пустоту
39 Электромагнитная индукция и принцип относительности

Искусство программирования

42 *А. А. Дуванов, Ю. А. Первин.* Язык Лого. Урок 2: Черепашья академия

Практикум абитуриента

46 *А. А. Болибрух, В. М. Уроев, М. И. Шабунин.* Решение систем тригонометрических уравнений

Олимпиады

50 *В. В. Вавилов, С. В. Резниченко, А. М. Слинько.* XXI Всесоюзная олимпиада по математике
52 *А. Р. Зильберман.* XXI Всесоюзная олимпиада по физике
55 Призеры XXI Всесоюзной олимпиады школьников

Информация

I Всесоюзная олимпиада школьников по информатике *(30)*
Вниманию наших читателей *(64)*

57 **Ответы, указания, решения**

Шахматная страничка

Геометрические темы (*3-я с. обложки*)

Наша обложка

Картинки на первой и второй страницах обложки нарисованы компьютером по программе школьника из Черноголовки А. Лобковского. Подробности — на с. 21.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1987

Всенародный праздник

> *«Комсомольцы! Юноши и девушки! Овладевайте наследием великого Ленина! Учитесь работать высокоэффективно, творчески, активно!»*
>
> **Из призывов ЦК КПСС к 70-летию Великой Октябрьской социалистической революции**

Прошло 70 лет с того дня, когда вся власть в нашей стране перешла в руки народа. Трудно представить себе более тяжелые условия, чем те, в которых начиналось строительство нового общества. Разруха, голод, неграмотность, враждебное окружение... Но Ленин и партия большевиков сумели сплотить народ на героическую борьбу. Советский Союз, первая в мире страна социализма, стал могучей индустриальной державой.

Вместе со всей страной развивалась и крепла наша наука. И если, по словам выдающегося советского физика академика Л. А. Арцимовича, «всех крупных физиков царской России можно было бы свободно усадить на одном диване», то сегодня у нас более сотни только физических научных центров. Советские физики, математики, астрономы и представители других естественных наук пользуются международным признанием. Физика и математика являются лидерами научно-технической революции, и наши ученые внесли фундаментальный вклад в развитие этих наук. Большую роль в строительстве социализма сыграла советская школа.

Юбилей, как учил В. И. Ленин, это повод к критическому анализу прошлого. Проводя такой анализ, мы видим, что построенный в нашей стране социализм еще несовершенен, у него есть огромные резервы, которые необходимо до конца раскрыть и реализовать в короткий срок. Молодежи иногда кажется, что время революционных преобразований давно ушло в прошлое. Но жизнь опровергает эти представления. Революция продолжается. Именно она требует от нас громадного ускорения и грандиозной перестройки во всех сферах деятельности. Предстоит упорная борьба, и участвовать в ней вам придется еще в школьные годы.

Каждому из вас, дорогие читатели, необходимо еще раз внимательно изучить материалы XXVII съезда КПСС и пленумов ЦК КПСС, документы XX съезда ВЛКСМ, вдумчиво перечитать ленинские работы, созданные после победы революции. Сколько замечательных мыслей в одной только речи В. И. Ленина на III Всероссийском съезде комсомола! И далеко не все они воплощены в жизнь. А ведь работы Ленина — это верный компас в сложном и длительном процессе всесторонних преобразований, которые ждут вас как в школе, так и за ее порогом.

К 70-летию Великого Октября

О МАТЕМАТИКЕ СТРАНЫ СОВЕТОВ

Академик АН УССР Б. В. ГНЕДЕНКО

Великая Октябрьская социалистическая революция явилась мощным толчком к прогрессу математики в нашей стране, создала исключительно благоприятные условия для развития абстрактных ее направлений и применения математических методов в естествознании, инженерном деле, организации производства.

Так, в 1918 г. был издан декрет об организации ЦАГИ — Центрального аэрогидродинамического института и о назначении Н. Е. Жуковского его директором. В том же году была создана Нижегородская радиолаборатория.

В 1921 году — разгар разрухи — по инициативе В. А. Стеклова был организован Физико-математический институт Академии наук. Впервые в истории нашей страны развитием теоретической и прикладной математики стало заниматься специальное научное учреждение.

Даже краткое описание того, что сделали советские математики за истекшие семьдесят лет, потребовало бы многотомного сочинения и работы большой группы специалистов. Поэтому здесь мы вынуждены ограничиться лишь беглым обзором небольшой доли важных направлений научных исследований.

Пожалуй, самым крупным явлением в математической жизни нашей страны следует считать возникновение Московской математической школы теории функций и теории множеств. У ее истоков стояли два выдающихся математика и педагога — Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин. С их именами связано широкое привлечение студенческой молодежи к научным исследованиям. Многочисленные результаты, красивые построения, постановка большого числа новых задач для дальнейших исследований, живое изложение — все это сумело увлечь математическую молодежь идеями Лузина. Его первые ученики — Д. Е. Меньшов, П. С. Александров и А. Я. Хинчин. Первые их самостоятельные работы были в кругу идей учителя — теория интеграла, сходимость тригонометрических рядов, строение так называемых борелевских множеств. Эти первые работы в значительной степени определили дальнейшие интересы названных исследователей. Д. Е. Меньшов основные свои работы посвятил теории тригонометрических рядов и рядов ортогональных функций; А. Я. Хинчин — метрической теории функций и ее применениям в теории чисел, теории вероятностей и статистической физике; П. С. Александров — теории множеств, а позднее — топологии.

Уже первые приемы студентов в Московский университет после 1917 года дали второе поколение активных учеников Лузина. Лузин организовал семинар, на котором каждому участнику предлагалось прореферировать определенную монографию, затем устраивалось обсуждение реферата с постановкой вопросов, с выявлением возможности упрощения и обобщения доказательств.

В двадцатые годы ученики Лузина называли свой коллектив «Лузитанией»*). Этим подчеркивалось восхищение своим учителем, его научными идеями, лекциями. Ученики Лузина гордились своей причастностью к группе, разрабатывающей его идеи, и стремились дать максимум того, на что они способны в науке.

Конечно, каждое чрезмерное увлечение несет в себе и отрицательное начало. Лузитанцы были чрезмерно заняты лишь одним направлением математического развития и некоторые из них несколько свысока относились к классическим областям

---

*) См «Квант», 1977, № 10, с. 13.

В. А. Стеклов.

И. Г. Петровский.

О. Ю. Шмидт.

математики. Это нашло отражение в шуточных названиях ряда дисциплин: теория вероятностей называлась у них теорией неприятностей, уравнения в частных производных — уравнениями с несчастными производными, конечные разности — разными конечностями и т. п. Однако эта недооценка других областей математики продолжалась недолго, поскольку внутри самой Лузитании начался процесс расширения интересов. П. С. Александров и П. С. Урысон увлеклись проблемами теоретико-множественной топологии и вскоре положили начало существованию Московской топологической школы. А. Я. Хинчин в двадцатые годы начал интересоваться проблемами метрической теории чисел, от нее подошел к вопросам теории вероятностей и к концу двадцатых годов целиком направил свою энергию на эти два направления исследований. Теория вероятностей вскоре стала одной из существенных частей интересов Московской математической школы. Создание Московской школы теории вероятностей является заслугой двух выдающихся ученых — А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова.

Далее интересы московских математиков обратились к классическому анализу. При этом выяснилось, что идеи теории функций дают возможность серьезного продвижения. Качественная теория дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных становятся объектом исследований москвичей. Среди представителей этого направления следует назвать В. В. Степанова и И. Г. Петровского.

Не следует думать, что только Москва была центром математической мысли того времени. Первоклассные исследования в это время проводились на Украине — в Киеве и Харькове. В Киеве следует отметить, в первую очередь, исследования по абстрактной алгебре, культивируемые Д. А. Граве и его учениками. В начале революции один из его учеников О. Ю. Шмидт — разносторонний ученый и превосходный лектор — начал пропаганду новых алгебраических идей в Москве. О. Ю. Шмидт явился создателем Московской алгебраической школы. В Харькове С. Н. Бернштейн развивал идеи П. Л. Чебышева в области наилучшего приближения функций полиномами и успешно работал в области теории вероятностей.

В Ленинграде успешно развивались исследования в области математической физики и теории чисел. Оба эти направления исследований были традиционными для ленинградцев и берут свое начало от Л. Эйлера, М. В. Остроградского и П. Л. Чебышева. По аналитической теории чисел замечательные результаты были получены И. М. Виноградовым. В 1934 г. И. М. Виноградову удалось почти полностью решить знаменитую задачу Гольдбаха: всякое нечетное натуральное число представимо в виде суммы не более трех простых чисел.

Новые университеты, образованные в ряде городов страны в первые годы революции, быстро превратились в значительные математические центры. В первую очередь мы должны назвать здесь Тбилиси и Ташкент, которые славились своими исследованиями по математической физике (Тбилиси), нелинейным дифференциальным уравнениям и математической статистике (Ташкент). Организаторами Грузинской математической школы были Н. И. Мусхелишвили, Г. Н. Николадзе, А. М. Размадзе и А. К. Харадзе*). Создателем Ташкентской математической школы был В. И. Романовский.

К началу Великой Отечественной войны советская математика завоевала огромный научный авторитет во всем мире. Своими исследованиями она охватила практически все направления математической мысли. Многие математики принимали участие в решении задач естествознания, техники и организации производства.

Особенно значительными были результаты математиков в связи с проблемами, выдвигаемыми развитием авиации. Именно задачами полета в сжижаемой жидкости было вызвано построение теории квазиконформных отображений М. А. Лаврентьевым. Крупный успех накануне Великой Отечественной войны был достигнут в построении математической теории «шимми» и «штопора», явившихся причиной гибели многих самолетов. Из математической теории, построенной М. В. Келдышем, удалось сделать практические выводы, которые позволили радикально бороться как с «шимми», так и со «штопором». Позднее М. В. Келдыш занимался ракетной техникой, стал Главным теоретиком советской космонавтики.

Великая Отечественная война не прошла мимо советских математиков: тысячи из них пошли на фронт, многие переключились на решение задач, необходимых для победы. На фронтах сражались такие крупные ученые, как Ю. В. Линник, А. А. Ляпунов, М. В. Бебутов. К сожалению, не все вернулись с полей войны, и советская математика потеряла многих талантливых ученых.

Уже первые дни войны показали, что советская наука может быть действенным орудием борьбы. Были созданы таблицы бомбометания с самолетов, обладавших малыми скоростями («кукурузников»). А. Н. Колмогоров создал теорию искусственного рассеивания для увеличения вероятности поражения цели. Эта теория нашла применение при минных атаках судов военного флота, а также при стрельбе зенитной артиллерии. М. А. Лаврентьев создал теорию действия кумулятивного заряда, идея которого была известна горнякам и использовалась при подрыве горных пород. Эта теория широко используется в мирной практике при строительстве плотин, каналов, разного типа насыпей.

В период Великой Отечественной войны не прекращались и теоретические исследования в области математики. В ту пору было выполнено много превосходных исследований в области алгебры, топологии, теории вероятностей, функционального анализа, теории функций и геометрии. Развитие теоретической математики было абсолютно необходимо для послевоенного развития как науки, так и всего народного хозяйства. Это создало прекрасную базу для послевоенного развития атомной физики, создания электронной вычислительной техники, первых побед в освоении космического пространства.

---

*) См. «Квант», 1975, № 9, с. 12.

И. М. Виноградов.

А. Н. Колмогоров.

М. В. Келдыш.

С. Л. Соболев.

И. М. Гельфанд.

Л. В. Канторович.

Огромной важности математические задачи возникли и в связи с обеспечением высокого качества массовой промышленной продукции. Индивидуальная проверка качества каждого изготовленного изделия требовала огромного числа контролеров. На это идти было нельзя, поскольку и без того был катастрофический недостаток рабочей силы. Именно в это время возникла идея построения теории статистического контроля качества продукции. В ее создании активное участие принял А. Н. Колмогоров. В настоящее время эта теория энергично развивается по двум путям: 1) проверка качества уже изготовленных партий (приемочный контроль) и 2) управление качеством изделий в процессе изготовления (текущий или оперативный контроль).

Послевоенные годы характерны стремительным процессом математизации знаний и практической деятельности. Математика потребовалась для решения задач организации производства и для исследования биологических процессов, для продвижения в области физики и при создании технических систем, для изучения экономических вопросов и при рациональном размещении производственных предприятий. Но этого мало. Оказалось, что математические методы оказывают помощь археологу и историку, лингвисту и медику. Появились новые направления математической мысли. Математическая логика приобрела несравненно бо́льшее значение, чем до войны. В этом большую роль сыграли электронные вычислительные машины и вызванная ими потребность в тщательном логическом анализе процессов при программировании для ЭВМ, а также при составлении математических моделей явлений. В теории вероятностей появились новые ветви, тесно связанные с экономикой и организацией производства, а также с задачами физики.

Если прежде физика свободно обходилась привычным для математики общим понятием функции, то теоретическим построениям современной физики в этих рамках стало тесно. В конце сороковых годов физики все чаще и чаще стали допускать операции с объектами, которые не укладывались в классическое понятие функции. В самом начале пятидесятых годов появились работы С. Л. Соболева и французского математика Л. Шварца, в которых было положено начало широкому и продуктивному обобщению понятия функции — было введено понятие обобщенной функции и разработаны правила действий с этими функциями. Несколько позднее И. М. Гельфанд ввел в рассмотрение обобщенные случайные процессы, использовав для этой цели идеи обобщенных функций. Упомянем большое направление исследований, связанное с отысканием экстремальных решений. Важность этого рода исследований выявилась в полной мере только в последнее время: при нынешних масштабах народного хозяйства неудачное использование материальных ресурсов приводит к огромному перерасходу, неудачный выбор направления движения замедляет доставку пассажиров и грузов; неудачное распределение работы с оборудованием влечет неполное использование станков и аппаратуры. Первые задачи такого рода появились давно и были известны еще в Древней Греции.

Непосредственно перед Великой Отечественной войной Л. В. Канторович рассмотрел ряд новых задач на разыскание максимального и минимального значений, связанных с распределением работ, раскроем материалов, организацией перевозок и т. п. Эти задачи послужили началом создания новой математической теории — линейного программирования, получившей после войны быстрое развитие. Теперь эти первичные постановки задач получили общие формулировки, для них предложены методы решения, построена интересная теория, эти результаты распространены на более общие случаи (нелинейное программирование).

Большое направление исследований, вызванное необходимостью поручать автоматам управление технологическими процессами, движением самолетов, космических аппаратов и т. д., было разработано Л. С. Понтрягиным и его учениками. Это направление получило наименование теории оптимального управления. Теория и выдвинутые в ней принципы немедленно получили многочисленные практические применения.

К новым задачам в теории случайных процессов привели такие задачи практики, как управление качеством продукции и определение момента наладки оборудования. На эти задачи обратил внимание А. Н. Колмогоров, направивший на них внимание ряда своих учеников.

Один из крупнейших математиков современности Н. Н. Боголюбов, начав работать под руководством академика Н. М. Крылова, свой первый результат опубликовал в семнадцатилетнем возрасте. Его научные интересы быстро расширялись, охватив математический анализ, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, теорию функций, математическую физику, теорию вероятностей. Совместно с Н. М. Крыловым им были разработаны математические методы нелинейной механики. После Великой Отечественной войны Н. Н. Боголюбов перешел почти исключительно на решение задач современной физики и в этой области добился крупных успехов.

Нельзя не упомянуть о математике исключительно широкого профиля, результаты которого относятся к топологии, теории дифференциальных уравнений, математической физике, геофизике, вычислительной математике, электродинамике — А. Н. Тихонове. В первую половину нашего столетия под влиянием взглядов замечательного французского математика Адамара сложилось убеждение, что для физики и практики интересны только так называемые корректные задачи, решения которых, полученные при близких начальных данных, не могут расходиться между собой слишком сильно. Постоянный интерес к задачам практики убедил А. Н. Тихонова в ошибочности этой точки зрения. Оказалось, что много естественных задач физики, экономики и других областей знания по существу являются некорректно поставленными. Тихоновым был разработан подход к решению такого типа задач.

Конец пятидесятых годов и шестидесятые годы явились периодом ин-

Л. С. Понтрягин.

Н. Н. Боголюбов.

А. Н. Тихонов.

тенсификации математической жизни в СССР. В это время ещё активно и плодотворно работают математики старшего поколения, о которых сказано выше, но теперь к ним присоединяется целая плеяда их одаренных учеников.

Эта связь поколений наиболее ярко проявилась, пожалуй, при исследовании знаменитой XIII проблемы Гильберта о представлении функций многих переменных через функции одной переменной, полное решение которой было получено совместными усилиями А. Н. Колмогорова и его ученика, тогда еще аспиранта, В. И. Арнольда.

Из математиков молодого поколения наибольшее признание получили москвичи С. П. Новиков, В. П. Маслов и ленинградец Л. Д. Фаддеев. Сергей Петрович Новиков, происходящий из семьи профессиональных математиков (его отец — академик П. С. Новиков, логик и алгебраист, мать — Л. В. Келдыш, доктор физико-математических наук, тополог), очень рано получил ряд выдающихся результатов по одной из наиболее важных в то время дисциплин — дифференциальной топологии. Эти результаты были высоко оценены не только у нас в стране, но и за рубежом: С. П. Новиков стал первым советским лауреатом премии Филдса, наиболее престижной международной математической премии.

В. П. Маслов начинал как физик, но его первые значительные результаты связаны с развитием идей современного математического анализа. Для его работ характерна, с одной стороны, глубина чисто математических обобщений, и, с другой — внимание к прикладным вопросам, в частности, к математической физике.

Л. Д. Фаддеев, тоже начинавший как физик и тоже происходящий из математической семьи (его отец — Д. К. Фаддеев — алгебраист, член-корреспондент АН СССР), известен своими фундаментальными работами по математической физике. Международный авторитет его работ значителен: в настоящее время Л. Д. Фаддеев — президент Международного союза математиков.

За эти годы советская математическая школа заняла ведущие позиции во многих направлениях современной математической науки, получила широкое международное признание. Это выразилось, в частности, в проведении Международного конгресса математиков в Москве в 1966 году, прошедшего с большим успехом, в частности, для наших докладчиков.

Другая характерная черта этого периода — существенные изменения в математическом образовании молодежи. Меняются школьные программы (1968 г.), возникают математические школы и классы, физико-математические интернаты (1965 г.), появляется и быстро завоевывает признание журнал «Квант» (1970 г.). Ярким примером результатов этих изменений может служить решение X проблемы Гильберта, полученное в начале семидесятых годов Ю. Матиясевичем, аспирантом ЛГУ, выпускником Московской ФМШ.

Отсутствие места лишает нас возможности остановиться на чрезвычайно важном аспекте последних десятилетий: большом значении математических приложений в науке и технике, в частности, в создании и эксплуатации ЭВМ, в космических полетах, экспериментальной физике, экономике, оборонной промышленности. Назовем лишь несколько созданных в эти годы и быстро завоевавших ведущие позиции академических институтов — Институт прикладной математики, Институт проблем управления, Центральный экономико-математический институт, Институт кибернетики, — и несколько фамилий выдающихся ученых-прикладников — С. А. Лебедев, А. А. Мельников, А. П. Ершов, Г. И. Марчук, Н. Н. Моисеев.

Прогресс страны требует непрерывного развития науки как в теоретическом, так и прикладном плане. Важно подготовить себя психологически к тому, что основным источником математических теорий является практика, и что задача математики состоит не только в доказательстве новых теорем, но и в изучении явлений окружающего нас мира. Как правило, случается так, что явления природы и процессы экономики шире уже имеющихся средств математики. Это является вечным стимулом для развития самой математики, ее понятий и теорий.

К 70-летию Великого Октября

ДОСТИЖЕНИЯ СОВЕТСКИХ ФИЗИКОВ

Советская физика очень молода. Но успехи, достигнутые за столь короткие сроки, убедительно свидетельствуют о ее огромной научной зрелости, способности решать сложнейшие проблемы современного естествознания.

В настоящее время в нашей стране имеется более сотни специальных физических институтов Академии наук СССР, республиканских академий, а также некоторых ведомств. Среди них — всемирно известные Физический институт имени П. Н. Лебедева, Физико-технический институт имени А. Ф. Иоффе, Институт физических проблем имени С. И. Вавилова, Институт атомной энергии имени И. В. Курчатова, Объединенный институт ядерных исследований в Дубне. Советская наука имеет выдающиеся достижения во многих областях современной физики. К ним принадлежат, например, ядерная физика, физика плазмы и управляемых термоядерных реакций, физика полупроводников, физика низких температур, квантовая электроника, физика высоких давлений. Наши ученые успешно работают и в многочисленных пограничных областях современной науки. Химическая и биологическая физика, физика Земли, атмосферы, космического пространства, физика Мирового океана и астрофизика представлены в нашей стране многими учеными с мировыми именами.

Советские физики выполнили так много фундаментальных научных исследований, что всякая попытка даже кратко рассказать о каждой из этих работ неизбежно привела бы к сухому перечню огромного количества отдельных фамилий и малопонятных для широкого круга читателей фактов. Поэтому мы расскажем здесь лишь о некоторых крупнейших достижениях наших физиков.

Краткая хроника выдающихся открытий советских физиков включает, в основном, «именные» открытия. Конечно, не каждое крупное открытие непременно приобретает впоследствии имена сделавших его ученых. Поэтому приведенный здесь список не охватывает даже самых крупных открытий, сделанных нашими учеными в области физики. Но мы надеемся, что и краткий перечень «именных» открытий позволит нашим читателям почувствовать, как велик вклад советских ученых в сокровищницу мировой науки.

●

Общая теория относительности, созданная Эйнштейном, содержит уравнения, характеризующие состояние Вселенной. Эйнштейн нашел стационарное (не зависящее от времени) решение, описывающее замкнутую неразвивающуюся Вселенную. Вскоре профессор Александр Александрович Фридман получил два новых решения основного уравнения общей теории относительности. Оба они описывают Вселенную, которая непрерывно расширяется. В дальнейшем **«модель расширяющейся Вселенной Фридмана»** получила экспериментальное подтверждение и теперь является общепризнанной.

●

Известно, что прочность твердого тела, определяемая на опыте, во много раз меньше ее значения, вычисленного теоретически. Причину этой разницы первым раскрыл академик Абрам Федорович Иоффе. Оказалось, что в преждевременном разрушении материалов повинны различные дефекты кристаллической структуры, которые не учитывались теоретиками, например микроскопические трещины на поверхности кристаллов. Погрузив кристалл каменной соли в воду и растворив поверхностный слой, Иоффе достиг увеличения прочности в сотни раз. Упрочение кристаллов при растворении поверхностного слоя получило название **«эффекта Иоффе»**.

А. Ф. Иоффе.

Л. И. Мандельштам.

П. Л. Капица.

Академик Владимир Александрович Фок с момента возникновения квантовой механики работал над ее развитием. Он обобщил основное уравнение этой теории на случай наличия магнитного поля и получил релятивистское уравнение квантовой механики, известное физикам как **«уравнение Фока — Клейна»**. В дальнейшем академик В. А. Фок независимо от английского физика Хартри создал метод расчета спектров атомов, содержащих большое количество электронов, и даже спектров сложных молекул. Этот метод вошел в историю физики под именем **«метода Хартри — Фока»**. До создания этого метода расчет сложных атомов был совершенно недоступной задачей для квантовой механики.

●

Академик Леонид Исаакович Мандельштам теоретически показал, что микроскопические неоднородности плотности вещества, возникающие в результате теплового движения молекул, изменяют спектр рассеянного света, добавляя в него новые спектральные линии, которые очень трудно наблюдать. (Эти линии впервые были обнаружены членом-корреспондентом АН СССР Евгением Федоровичем Гроссом.) Явление, в результате которого они возникают, было названо **«эффектом Мандельштама — Бриллюэна»**, так как несколько позднее аналогичное предсказание было сделано французским физиком Бриллюэном.

Исследуя рассеяние света в кристаллах кварца, академики Леонид Исаакович Мандельштам и Григорий Самуилович Ландсберг обнаружили в спектре рассеянного света дополнительные спектральные линии, не принадлежащие падающему на кристалл свету. Эти спектральные линии возникают в результате взаимодействия падающего света с отдельными молекулами, образующими кристаллическую решетку. Несколько позднее аналогичное явление было обнаружено индийским физиком Раманом при изучении рассеяния света в жидком бензоле. Оно получило название **«эффекта Мандельштама — Ландсберга — Рамана»** или **«комбинационного рассеяния света»**. Комбинационное рассеяние стало мощным средством изучения строения молекул.

●

Академик Петр Леонидович Капица при помощи сконструированной им оригинальной установки для создания сверхсильных магнитных полей установил, что в таких полях изменение электрического сопротивления металлов растет не пропорционально квадрату магнитной индукции, как ожидалось на основе существовавших тогда теорий, а является линейной функцией магнитной индукции. Это неожиданное явление, которое не удавалось объяснить около 30 лет, называют **«законом Капицы»**.

С именем академика П. Л. Капицы связано еще одно открытое им явление. Изучая свойства жидкого гелия, он обнаружил, что при температуре ниже 2,19 К гелий течет сквозь узкую щель практически без всякой вязкости. В дальнейшем это явление было названо сверхтекучестью. Теорию этого явления создал академик Лев Давидович Ландау. В 1978 году за фундаментальные исследования в области физики низких температур П. Л. Капица был удостоен Нобелевской премии.

◆

Профессор Лев Васильевич Шубников, работая в лаборатории голландского физика де Гааза, обнаружил, что электрическое сопротивление висмута, помещенного в магнитное поле при температуре жидкого гелия, по мере увеличения магнитной индукции поля то возрастает, то убывает (как говорят, сопротивление висмута осциллирует). Этот **«эффект Шубникова — де Гааза»** широко используется для исследования энергетического спектра электронов в металле.

◆

Профессор Московского университета Анатолий Александрович Власов первым вывел уравнение, описывающее поведение разреженного ионизованного газа (плазмы), в котором не происходит столкновений заряженных частиц. Оно вошло в науку под именем **«уравнения Власова»**.

◆

Академик Лев Давидович Ландау теоретически показал, что свободные электроны в металле под действием внешнего магнитного поля могут двигаться только по строго определенным (как говорят физики — квантовым) траекториям. Это означает, что в магнитном поле возникают особые энергетические уровни, получившие наименование **«уровней Ландау»**.

Из этой же теории следовало, что действие магнитного поля на свободные электроны в металле приводит к возникновению дополнительного магнитного момента, направленного в сторону, противоположную внешнему магнитному полю. Такой момент называется диамагнитным, а описанное явление **«диамагнетизмом Ландау»**. Заметим, что эта же теория объяснила и эффект Шубникова — де Гааза.

Лев Давидович Ландау показал также, что даже при отсутствии столкновений частиц плазмы распространяющиеся в ней электромагнитные волны испытывают затухание. Это явление играет существенную роль в поведении плазмы. Физики всего мира называют его **«затуханием по Ландау»**.

Вместе с чехословацким физиком Плачеком академик Л. Д. Ландау вывел формулу для определения отношения интенсивностей спектральных линий рассеянного света, которую называют **«формулой Ландау — Плачека»**.

В 1962 году за разработку основополагающей теории конденсированных сред, в частности жидкого гелия, Л. Д. Ландау была присуждена Нобелевская премия.

◆

Член-корреспондент АН СССР Яков Ильич Френкель первым ввел в обиход физиков особую «квазичастицу», которую теперь называют **«экситоном Френкеля»**. Он указал на то, что возбужденное состояние атома или молекулы в кристаллической решетке не локализовано. Возникнув в какой-либо ячейке кристалла, это возбуждение перемещается по нему, подобно своеобразной частице, которую Френкель назвал экситоном. Существование экситонов было впервые доказано в экспериментах члена-корреспондента АН СССР Евгения Федоровича Гросса. Экситоны играют большую роль в физике твердого тела и в современной химии.

Яков Ильич Френкель разработал электрокапиллярную теорию тяжелых атомных ядер, в которой ядра рассматриваются как капли заряженной жидкости. Независимо от Френкеля аналогичную теорию построил датский физик Нильс Бор. В историю физики она вошла под названием **«капельной модели ядра Бора — Френкеля»**.

◆

Некоторые металлы и сплавы при охлаждении до очень низких температур полностью утрачивают сопротивление протекающему по ним току. Это явление названо сверхпроводимостью. Академики Лев Давидович Ландау и Виталий Лазаревич Гинзбург первыми построили феноменологическую теорию сверхпроводимости, учитывающую квантовые эффекты в сверхпроводниках. Пользуясь этой теорией, члены-корреспонденты АН

Л. Д. Ландау.

И. К. Кикоин.

И. Е. Тамм.

СССР Алексей Алексеевич Абрикосов и Лев Петрович Горьков создали теорию сверхпроводящих сплавов. Эта теория известна во всем мире как **«теория ГЛАГ»** (Гинзбург — Ландау — Абрикосов — Горьков).

Микроскопическая теория сверхпроводимости, детально объяснившая механизм этого загадочного явления, была создана американскими физиками Бардином, Купером и Шриффером и независимо от них академиком Николаем Николаевичем Боголюбовым. Она так и называется **«теорией сверхпроводимости Бардина — Купера — Шриффера — Боголюбова»**.

●

Академик Исаак Константинович Кикоин совместно с М. М. Носковым открыл фотоэлектромагнитный эффект, показав в экспериментах, что при освещении полупроводника, находящегося в магнитном поле, в нем возникает электродвижущая сила. Кванты света приводят к появлению носителей тока — свободных электронов и дырок, которые диффундируют вдоль направления падения света, а магнитное поле разводит их в противоположных направлениях. Это явление давно уже называют **«эффектом Кикоина — Носкова»**.

●

Академик Игорь Евгеньевич Тамм дал строгий вывод формулы, которая описывает рассеяние света на свободных электронах. Она сыграла важную роль в разработке квантовой электродинамики. В историю физики она вошла под названием **«формулы Тамма — Клейна — Нишины»**.

И. Е. Тамм развил метод расчета взаимодействия частиц, движущихся со скоростями, близкими к скорости света (релятивистских частиц), который вошел в теоретическую физику как метод **«Тамма — Данкова»**.

Академик Игорь Евгеньевич Тамм теоретически предсказал существование на поверхности полупроводниковых кристаллов своеобразных энергетических состояний («ловушек»). Они вошли в науку под названием «поверхностных уровней Тамма».

●

Академики Сергей Иванович Вавилов и Павел Алексеевич Черенков открыли эффект «сверхсветового электрона». Оказалось, что в жидких и твердых средах электроны могут двигаться со скоростью большей, чем скорость света в этих средах (но, конечно, не большей скорости света в пустоте!). Электроны могут обгонять испускаемый ими свет. Этот эффект, получивший название **«эффекта Вавилова — Черенкова»**, нашел ряд ценных практических применений, в частности для регистрации быстрых заряженных частиц (так называемые черенковские счетчики частиц). Теория, объяснившая эффект Вавилова — Черенкова, была создана академиками Игорем Евгеньевичем Таммом и Ильей Михайловичем Франком. За открытие и объяснение этого явления П. А. Черенкову, И. Е. Тамму и И. М. Франку в 1958 году была присуждена Нобелевская премия.

С. И. Вавилов.

Академик Владимир Иосифович Векслер открыл носящий его имя принцип автофазировки частиц, ускоряемых в циклических ускорителях. На нем основана работа всех современных циклических ускорителей — синхротронов, фазотронов и синхрофазотронов. Несколько позже, независимо от Векслера, этот же принцип открыл американский физик Мак-Миллан. За это открытие оба они были удостоены международной научной премии.

●

Сложные молекулы органических веществ имеют спектры, состоящие из широких сплошных спектральных полос. Профессор Эдуард Владимирович Шпольский показал, что, растворяя органические вещества в специально подобранных растворителях и охлаждая полученные растворы до очень низких температур, можно получить спектры поглощения, состоящие из очень тонких спектральных линий, однозначно связанных со строением и свойствами молекул. Так была создана новая область молекулярной оптики. Это явление в научной литературе повсеместно называют **«эффектом Шпольского»**.

●

Полупроводники, так же как и другие вещества, могут поглощать свет, длины волн которого заключены в определенных пределах. Для света с бóльшими длинами волн они прозрачны. Таким образом, существует граница для длин волн, при которой полупроводник перестает поглощать свет. Академик Леонид Вениаминович Келдыш теоретически предсказал, что под действием внешнего электрического поля эта граница должна смещаться в сторону бóльших длин волн. Аналогичное предсказание сделал немецкий физик Франц. Вскоре профессор Виктор Сергеевич Вавилов получил экспериментальное подтверждение этого явления, известного теперь как **«эффект Келдыша — Франца»**.

●

Академик Сергей Николаевич Вернов и американский физик Ван Аллен при помощи научной аппаратуры, установленной на первых искусственных спутниках, независимо открыли существование радиационных поясов Земли. Оказалось, что Земля окружена несколькими слоями с повышенной плотностью заряженных частиц. Эти зоны называют **«радиационными поясами Вернова — Ван Аллена»**.

●

Академики Александр Михайлович Прохоров и Николай Геннадиевич Басов разработали основы новой области физики — квантовой электроники и создали первый квантовый молекулярный генератор на молекулах аммиака. За эти выдающиеся работы в 1964 году им, совместно с американским физиком Таунсом, была присуждена Нобелевская премия.

●

Ученые всего мира, исследующие физические процессы в горячей плазме, широко используют установки, названные необычным русским словом **«ТОКАМАК»**. Так сокращенно называют «тороидальные камеры в магнитном поле» — советские термоядерные установки, разработанные и построенные в Институте атомной энергии имени И. В. Курчатова под руководством академика Льва Андреевича Арцимовича.

Хроника подготовлена *В. А. Лешковцевым*

ВЕЛИКАЯ КНИГА НЬЮТОНА

(к 300-летию первого издания «Математических начал натуральной философии»)

Кандидат физико-математических наук
С. Р. ФИЛОНОВИЧ

Юбилей «Математических начал натуральной философии» Исаака Ньютона отмечается во всем мире как важнейшее событие культурной жизни. Такой чести удостаиваются лишь немногие научные произведения, и один этот факт говорит об огромном значении сочинения Ньютона для развития не только науки, но и всей цивилизации.

Как создавались «Начала»? Каково содержание этой книги? Какую роль сыграла она в развитии естествознания? Этим вопросам посвящена предлагаемая читателю статья.

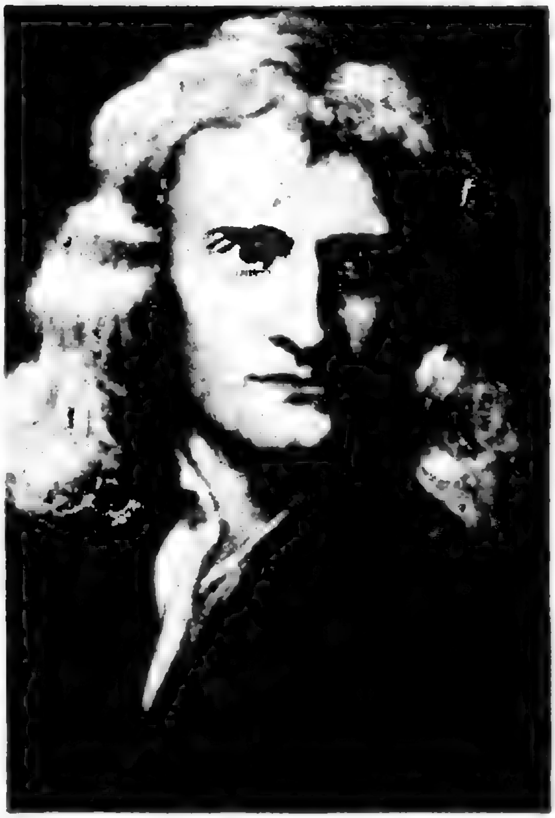
Начало «Начал»

Историкам науки очень редко удается установить, когда именно и при каких обстоятельствах у ученого возник замысел конкретной статьи или книги. «Начала» составляют счастливое исключение. Мы знаем о создании этой книги очень многое и даже можем указать событие, послужившее отправной точкой в работе Ньютона над ней.

Время: август 1684 года. Место: Кембридж, Англия. Действующие лица: Исаак Ньютон — член Лондонского королевского общества (Академия наук Англии), профессор математики и член Тринити-колледжа Кембриджского университета, и Эдмунд Галлей — астроном и математик, один из секретарей Лондонского королевского общества.

В 1684 году, к моменту посещения его Галлеем, Ньютон занимал видное положение в научном сообществе Англии. Он — признанный авторитет в вопросах оптики и математики. Однако он жил и работал изолированно от других ученых, изредка обмениваясь с ними письмами.

Молодой Галлей (ему было в это время 28 лет) приехал к Ньютону за советом. Его волновала задача, которую не могли решить многие искусные математики: по какой траектории будет двигаться планета, если со стороны Солнца на нее будет постоянно действовать сила, обратно пропорциональная квадрату расстояния? Галлей уже обсуждал эту проблему со своими коллегами по Лондонскому королевскому обществу Р. Гуком и К. Реном, и Гук даже утверждал, что знает ее решение. Однако Гук знал (точнее, предчувствовал) не решение, а ответ — траектория будет эллипсом, но представить соответствующее доказательство не смог. Гук, видимо, рассказал Галлею, что несколько лет назад он перепи-



Исаак Ньютон в возрасте 46 лет.

сывался на эту тему с Ньютоном. Может быть, Ньютон может доказать эту заколдованную теорему? И вот Галлей в Кембридже. На его прямой вопрос Ньютон дал столь же прямой ответ: он уже доказал, что траекторией планеты будет эллипс. Правда, Ньютону не удалось тут же найти в своих бумагах доказательство, но он пообещал Галлею прислать его через некоторое время в Лондон. Вскоре короткая работа Ньютона была передана с оказией Галлею. Прочитав ее, Галлей пришел в сильнейшее возбуждение и вновь отправился в Кембридж, на этот раз — чтобы убедить Ньютона опубликовать результаты, содержавшиеся в этой короткой работе. Дипломатический дар, которым, по словам современников, обладал Галлей, сделал свое дело: Ньютон согласился подготовить работу к печати. Королевское общество обещало помочь в издании книги.

«... я стоял на плечах гигантов»

Называя Ньютона творцом классической механики, мы отдаем должное его гению, но одновременно допускаем некоторое преувеличение. В действительности Ньютон выполнил сложнейший труд по обобщению и систематизации открытий своих предшественников, дополнив их множеством оригинальных результатов. Стоит перечислить хотя бы основные факты, которыми располагал Ньютон.

В начале XVII века Кеплер установил главные закономерности движения планет, поставив тем самым задачу их рационального объяснения. Примерно в это же время Галилей проводил исследования движения тел по наклонной плоскости и при свободном падении. Важнейшими итогами его работы стали принцип относительности движений и идея о возможности движения тел без внешних воздействий (по инерции). В трудах Декарта и других ученых эта последняя идея приобрела форму современного представления о прямолинейном и равномерном движении по инерции. Важные результаты были получены Гюйгенсом при изучении колебаний маятников, а также при исследовании проблемы удара. Им же было изучено равномерное движение тел по окружности. Догадки о характере силы, действующей на планеты со стороны Солнца, о ее зависимости от расстояний высказывались Реном, Гуком и Галлеем. Таким образом, Ньютон был во многом прав, когда писал: «Если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов».

На долю Ньютона выпала очень сложная задача приведения в систему накопленного к тому времени теоретического и экспериментального материала. Он блестяще справился с этой задачей, обогатив механику своими собственными достижениями.

Подготовка «Начал»

Подготовка первого издания «Начал» длилась примерно два с половиной года. Если учесть, что часть этого времени заняли поездки в Вулсторп и что было написано несколько вариантов работы, то нельзя не удивиться огромной работоспособности Ньютона. Сохранились воспоминания молодого человека, однофамильца ученого, служившего у него секретарем, о том, как работал создатель «Начал»:

«В это время [1685—1686 гг.— *С. Ф.*] он писал свои "Principia", по его распоряжению я переписывал это великолепное произведение, прежде чем послать его в печать. После напечатания сэр Исаак послал меня с книгами для подарков начальствующим лицам в колледж и своим знакомым; кое-кто из них ... сказал, что надо лет семь учиться, прежде чем что-нибудь поймешь в этой книге.

Сэр Исаак в это время был очень любезным, спокойным и очень скромным, и, по-видимому, никогда не впадал в раздражение; за исключением одного случая я никогда не видел, чтобы он смеялся ... Занятиями он увлекался настолько, что часто забывал обедать ... Спал он всегда 4 или 5 часов ... Думаю, его немало печалила необходимость тратить время на сон и еду. Хотя у него была большая библиотека, он редко справлялся в книгах ...

Он не позволял себе никакого отдыха и передышки, не ездил верхом, не гулял, не играл в кегли, не занимался спортом; он считал потерянным всякий час, не посвященный занятиям. Редко уходил он из своей

Эдмунд Галлей (1656—1742).

комнаты, за исключением тех случаев, когда ему надо было читать лекции...»

Интересно, что при подготовке «Начал» Ньютон многие результаты, к которым он пришел, используя дифференциальное и интегральное исчисление (в терминологии Ньютона — метод флюксий), получил заново, применяя так называемый «синтетический» метод, основанный на комбинации геометрических построений и динамических соображений. Для читателей XX века такая форма представления материала очень затрудняет чтение книги. Сделано же это было ... чтобы облегчить понимание ее содержания современниками. Даже много лет спустя после первого издания «Начал» Ньютон писал, что «в наше время для неискушенных людей восприятие Анализа [т. е. метода флюксий — *С. Ф.*], с помощью которого были найдены эти положения, затруднительно».

Большую помощь в подготовке «Начал» к печати оказал все тот же Галлей. Он не только устранил множество описок, но и позаботился о том, чтобы улучшить оформление книги. По традиции того времени, если в книге было много иллюстраций, то они выносились из текста на отдельные листы — так было проще изготавливать клише для печати. Галлей настоял на том, чтобы рисунки помещались прямо в тексте, что, конечно, облегчало чтение. Заметим, что это повысило стоимость издания, а ведь Галлею пришлось печатать «Начала» на свои средства, поскольку Королевское общество испытывало в это время финансовые затруднения.

Наконец, в середине 1687 года великая книга Ньютона "Philosophia naturalis principia mathematica" увидела свет.

Познакомимся вкратце с ее содержанием.

По страницам «Начал»

«Начала» открывались предисловием автора, в котором он пояснил стоявшую перед ним цель: применение математики к натуральной философии, т. е. к физике. Далее шли Определения величин и понятий, на которых строится последующее изложение. Заметим, что выработка этих определений была делом совсем не простым. Так, например, Определение III звучит следующим образом:

«Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения».

С одной стороны, очевидно, что здесь Ньютон говорит о важнейшем свойстве тел — инертности, и следовательно, это определение отражает реальность. С другой стороны, в этом месте Ньютон приписывает всем телам «врожденную» силу инерции, существующую независимо от системы отсчета. Такой взгляд на силы инерции в дальнейшем не был принят физиками. Мы же привели это определение для того, чтобы показать, с каким трудом рождались основные представления механики: даже великий Ньютон при их формулировке допускал неточности.

В Поучении к Определениям Ньютон говорит о понятиях абсолютного пространства и абсолютного времени:

«Абсолютное, истинное математическое время само по себе и по са-

мой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно ...

Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным».

Введение понятий об абсолютном пространстве и абсолютном времени было связано с общими взглядами Ньютона на устройство мира: он считал, что существует неподвижный центр Вселенной и даже предлагал эксперименты для доказательства этого предположения. В то же время использование этих понятий позволило в первом приближении правильно и, что немаловажно, просто решать многие задачи механики. Стоит отметить, что при первой формулировке последовательной теории движения тел такие представления о пространстве и времени были неизбежны. Лишь спустя два столетия, в результате развития физики, ученые в рамках теории относительности пришли к представлениям о пространстве и времени, более полно отражающим реальность.

Далее идут «Аксиомы или законы движения». Вот как формулирует их Ньютон:

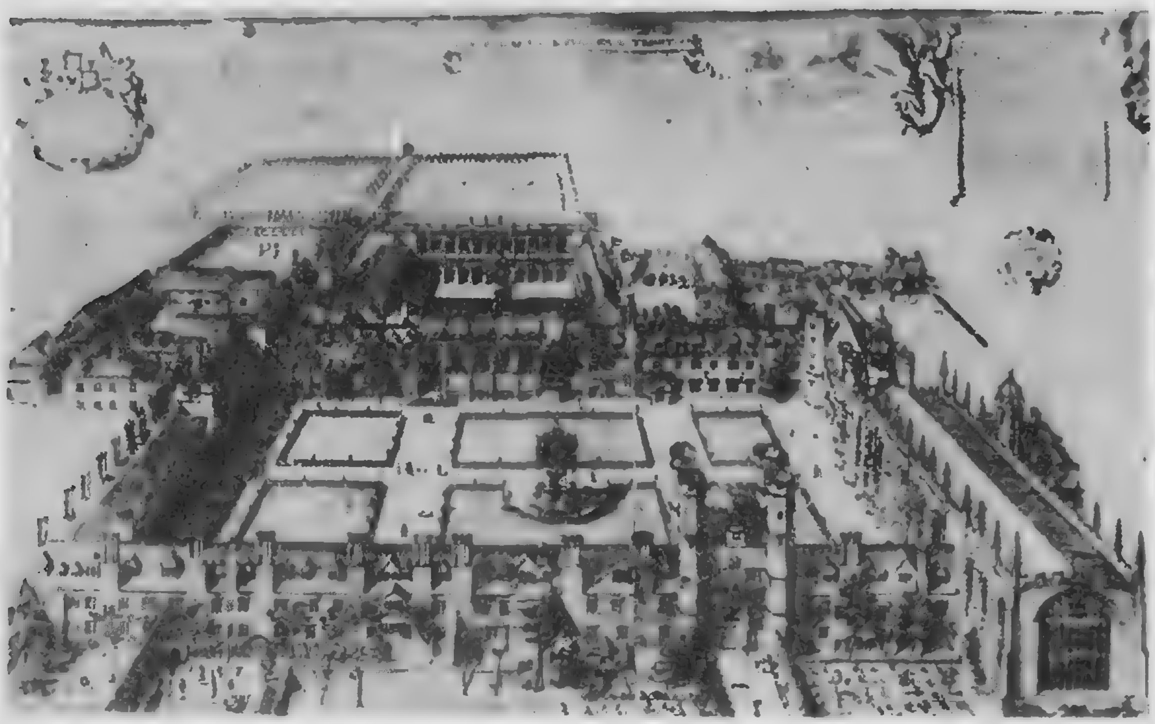
«ЗАКОН I. Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние.

ЗАКОН II. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

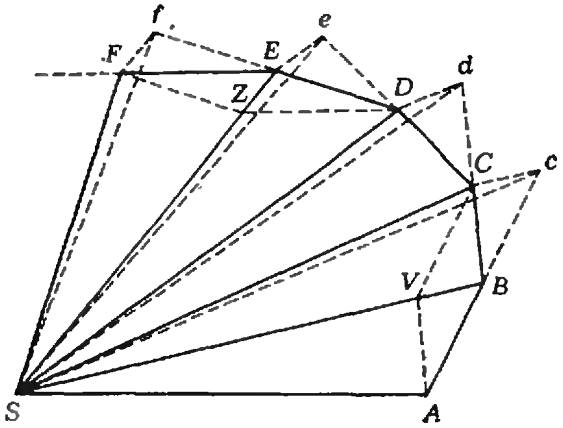
ЗАКОН III. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие; иначе: действия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны».

На этом заканчивается вводная часть «Начал» и начинается изложение основного материала. Он разделен на три книги (части).

Книга первая под названием «О движении тел» начинается с рассмотрения математических теорем, на основе которых строится дальнейшее изложение. Вслед за математическим введением приводятся решения множества задач, связанных с движением тел под действием так называемых центральных сил, т. е. сил, действующих по прямой, соединяющей тело с некоторым центром. Боль-



Тринити-колледж Кембриджского университета (гравюра XVII в.). Комнаты Ньютона располагались между Главными воротами и церковью Св. Троицы (справа внизу).



шинство задач имеет самое непосредственное отношение к небесной механике. Задачи рассматриваются в строгой последовательности, так что результаты, полученные ранее, используются при решении следующих задач. Из-за этого трудно проследить за рассуждениями Ньютона, выбрав какую-нибудь теорему из середины книги. Это относится, например, к задаче IX, которую Ньютон обсуждал с Галлеем: *«Предполагая, что центростремительная сила обратно пропорциональна квадратам расстояний мест до центра и что абсолютная величина этой силы известна, требуется найти кривую, которую опишет тело, выходящее из заданного места с заданной скоростью»*.

Чтобы читатель мог составить представление о методе изложения, использованном Ньютоном, мы приведем доказательство теоремы I из отдела II «О нахождении центростремительных сил», важной для обоснования второго закона Кеплера (закона площадей). Ее формулировка такова: *«Площади, описываемые радиусами, проводимыми от обращающегося тела к неподвижному центру сил, лежат в одной плоскости и пропорциональны временам описания их»*.

Доказательство теоремы.

«Разделим время на равные промежутки, и пусть в течение первого из них тело по инерции описывает прямую AB. Если бы оно не подвергалось никакому действию, то, продолжая идти по прямой, оно пришло бы в c (по закону I), пройдя путь Bc, равный AB, и тогда описанные радиусами AS, BS, cS, проведенными к центру сил S, площади ASB и BSc равны. В действительности же, когда тело пришло в B, то пусть на него подействовала центростремительная сила одним, но зато большим натиском, вследствие которого тело отклонится от прямой Ac и будет продолжать свой путь по прямой BC. Проведем прямую cC параллельно BS до встречи в точке C с BC, тогда к концу второго промежутка времени тело (по следствию I законов) *) *придет в точку C, лежащую в одной плоскости с треугольником ASB. Проведем SC; по параллельности SB и Cc площади треугольников SBC и SBc будут равны между собою, а следовательно, они равны и площади треугольника SAB.*

Рассуждая подобным же образом, увидим, что если центральная сила действует последовательно в точках C, D, E и т. д. и заставляет тело описывать прямые CD, DE, EF и т. д., то все эти прямые будут лежать в одной плоскости, и площади треугольников SCD и SBC, SDE и SCD, SEF и SDE будут между собою равны. Следовательно, в равные времена описываются равные площади, расположенные в неподвижной плоскости. Слагая, получим, что какие угодно суммы этих площадей, как SADS и SAFS, будут относиться как времена их описания. Увеличивая затем число треугольников и уменьшая их высоту бесконечно, получим, что в пределе периметр ADF будет кривою линией и центральная сила, которою тело отклоняется все время от касательной к этой кривой, действует непрестанно, площади же SADS и SAFS, описываемые радиусом, оставаясь постоянно пропорциональными временам их описания, будут и в пределе этим временам пропорциональны.»

В таком стиле рассматривается задача за задачей. В последнем разделе первой книги представлены элементы корпускулярной оптики, в частности, на основе законов механики обсуждается закон преломления света.

Вторая книга «Начал» называется, как и первая, «О движении тел». Знакомство с ней мы отложим до следующего номера журнала.

---

*) Это следствие гласит: *«При силах совокупности* [т. е. при действии двух сил — С. Ф.] *тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, как его стороны — при раздельных»*.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ШКОЛЬНИКОВ

Здесь приводятся две небольшие заметки, написанные десятиклассниками Ярославом Карповым из Ленинграда (школа № 239) и Александром Лобковским из Черноголовки Московской области (школа № 82) на совершенно разные темы. Их объединяет то, что обе статьи — «компьютерно-математические»: в них математические рассуждения позволяют получить интересные наблюдения только после подключения к работе ЭВМ.

Оптимальная кодировка почтового индекса

Я. Ю. КАРПОВ

Передо мной встал вопрос: почему на конвертах используется именно такой набор цифр (рис. 1) — ведь эти кодировки можно заменить другими. Посмотрим, сколько различных наборов можно придумать (таблица 1). Всего $2\times4\times3\times2\times2\times2\times3\times2=1152$ вариантов.

Чтобы из этих наборов отобрать лучший, нужно сначала выбрать критерий, по которому мы будем сравнивать наборы. Как известно, коды, используемые на конвертах, проверяются машиной. Поэтому критерий оптимальности набора должен заключаться именно в том, что при этом наборе машина будет делать меньше ошибок в сортировке, чем при других наборах.

Для характеристики различий кодировки цифр введем термин — *расстояние* между двумя кодировками. Расстояния должны удовлетворять таким условиям:

1) Чем больше расстояние между двумя кодировками, тем меньше вероятность того, что автомат примет одну кодировку за другую.

2) Расстояние от кодировки A до кодировки B должно быть равно расстоянию от кодировки B до кодировки A.

Этим условиям удовлетворяет *расстояние Хемминга*. В нашем случае — это количество «несовпадающих» символов в кодировках, т. е. количество несовпавших палочек.

Пример: Найдем расстояние между кодировками 5 и 2 (рис. 2). Расстояние между этими кодировками равно 5, так как у этих кодировок 5 несовпадающих палочек.

Обозначим через p *базовую вероятность ошибки*, т. е. вероятность принятия автоматом палочки за «непалочку» или наоборот. Тогда вероятность правильного распознавания одной палочки равна $1-p$.

Найдем, например, вероятность принятия цифры 6 за 0 (рис. 3). Для этого нужно, чтобы 8 палочек и два пробела были поняты автоматом правильно, а одна палочка была принята за пробел. Вероятность этого события равна $p(1-p)^8$.

Вообще, при распознавании автоматом любой цифры вероятность того, что эта цифра будет принята за другую, равна $p^r(1-p)^{9-r}$, где r — расстояние между этими двумя кодировками по Хеммингу.

При распознавании автоматом одной конкретной цифры i вероятность того, что ее ошибочно примут за любую другую, равна

$$\sum_{j\neq i} p^{r_{i,j}}(1-p)^{9-r_{i,j}},$$

где $r_{i,j}$ — расстояние между цифрами i и j.

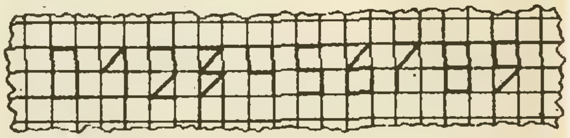


Рис. 1.

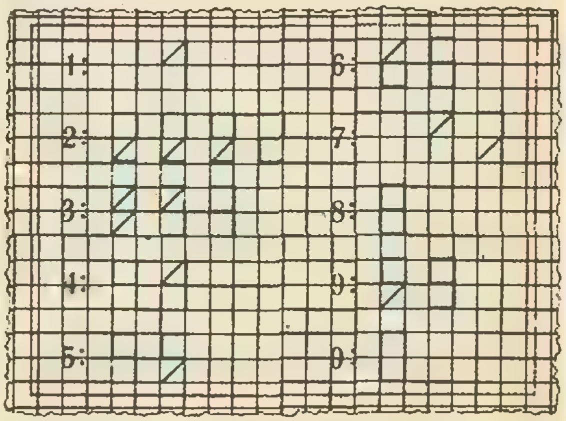


Табл. 1

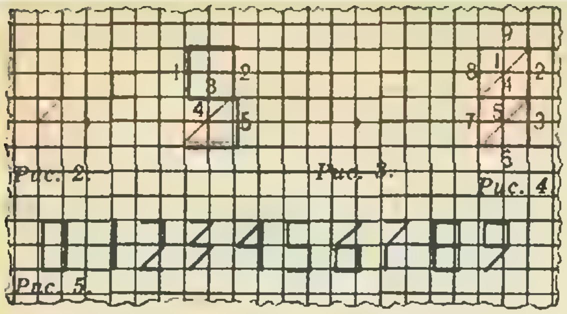


Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

Предположим, что все цифры встречаются одинаково часто на любом из мест. Тогда средняя вероятность неправильного распознавания какой-то цифры равна

$$P = \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9}\sum_{j=0} p_{j\neq i}^{r_{ij}}(1-p)^{9-r_{ij}}. \qquad (*)$$

Эту вероятность мы и будем использовать в качестве критерия качества набора: чем она меньше, тем «лучше» набор.

Основанный на этом критерии перебор всех 1152 вариантов кодов был получен на ЭВМ ЕС-1035. Программа перебора была составлена на языке Фортран. В программе все варианты записей цифр кодировались в виде массивов, состоящих из 1 и 0, по следующему принципу (рис. 4): если в записи цифры присутствует палочка на данном месте, то в кодировке на месте с номером, указанном на схеме, будет записана 1, если нет — то 0.

Пример: Закодируем цифру 2, заданную в обычном виде (как на конвертах):

0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1.

Варианты кодировок цифры i записывались в матрице ki, где количество строк равно 9, а количество столбцов совпадало с количеством вариантов кодировок.

Для каждого значения базовой вероятности ошибки p перебирались все 1152 варианта наборов, их качество оценивалось по формуле (*), из них выбирался лучший и второй по качеству. Для этого для каждого набора формировалась матрица расстояний, которая выводилась для лучшего набора. Так как кодировки 8 и 0 имеют только по одному варианту, эти цифры не перебирались, и в выводе не участвовали.

Получились следующие результаты. При вероятности базовой ошибки в пределах

$$0 < p \leqslant 0{,}3$$

наилучшей кодировкой оказалась та самая, которая используется на конвертах (см. рис. 1). Так как реальная вероятность ошибки распознающего автомата на почте заведомо лежит в этом пределе, то данный набор является наилучшим.

Второй по качеству в этом промежутке является набор, показанный на рисунке 5. Второй набор отличается от первого всего в двух местах, и вероятность ошибки при этом наборе ненамного больше, чем при лучшем.

При $p = 0{,}4$ эти наборы меняются местами.

При увеличении вероятности до 0,5 все вероятности становятся равными, поэтому очевидно, что все наборы станут одинаковыми.

Конечно, мне было бы приятнее, если бы моя программа выявила не принятый на почте набор, а другой: я тогда смог бы предложить заменить принятый набор на свой — лучший.

Увы! Наверное, когда на почте отбирали оптимальный набор, задачу оптимизации решали так же, как и я.

От редакции. К своим материалам, опубликованным выше, Я. Карпов приложил распечатки программ (на языке Фортран), реализующие алгоритмы, описанные в статье. Распечатки дают представление о достаточно высокой программистской культуре автора статьи. К ним имеются ясно сформулированные комментарии, позволяющие легко читать программы. Однако недостаток места, а также неудачный выбор языка (Фортран не входит в школьный курс информатики) не позволили нам опубликовать эту часть материала.

Авторов статей, рассчитанных на использование ЭВМ, мы просим обязательно присылать свои листинги; желательно, чтобы программы были составлены на языке Бейсик (или Рапира).

Математические узоры на плоскости

А. Э. ЛОБКОВСКИЙ

В последнее время в прикладной математике появились работы, связанные с исследованием картин, возникающих на экране дисплея, если каждую точку плоскости по некоторому правилу окрасить в тот или иной цвет. Правила окрашивания могут быть самые разнообразные.

Алгоритм, рассмотренный здесь, до того прост, что его легко может реализовать на компьютере начинающий программист. Выглядит он так: для точки плоскости $(x; y)$ вычисляется величина $c=[f(x, y)]$, где $f(x, y)$ — выбранная функция координат, а квадратные скобки обозначают целую часть числа; если число c нечетное, точка закрашивается, если четное, то нет.

Вся плоскость при этом разобьется на конечные одноцветные области. Размер областей уменьшается при удалении от начала координат. Поэтому на компьютере, у которого размеры точки на экране могут быть больше размеров таких областей, не всегда можно точно воссоздать реальную картину. На самом деле в нашем алгоритме вся плоскость разбивается на клетки, и каждая клетка закрашивается тем же цветом, что и ее центр. Поэтому, если на территории клетки было несколько различных областей, то полученный рисунок будет отличаться от истинного. Уменьшая размер клетки, т. е. увеличивая масштаб изображения, мы улучшаем точность воспроизведения. Соответствующая программа на языке Бейсик для экрана $X\times Y$ выглядит так:

```
10 INPUT S
20 FOR x=0 TO X
30 FOR y=0 TO Y
40 IF (INT(f(x,y)/S)) mod 2=1 THEN
   PLOT (x, y)
50 NEXT y
60 NEXT x
```

Роль масштаба здесь играет величина S.

На рисунках, показанных на второй странице обложки, вы видите узоры, получившиеся при разных S для $f(x, y)=x^2+y^2$ (рис. 1, *а—в*), $f(x, y)=xy$ (рис. 2, *а—в*), $f(x,y)=x^2-y^2$ (рис. 3, *а—в*).

Ярко выраженная периодичность, которую можно увидеть при малых S на всех графиках, как ни странно,— издержка нашего метода воспроизведения. Период на всех картинках равен S при четном S и $2S$ — при нечетном. Докажем это на примере $f(x, y)=x^2+y^2$. Действительно, цвет точки

$$(x_1; y_1)=(x+kS; y+lS)$$
$$(k, l \text{ — целые числа})$$

определяется выражением:

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{S}=\frac{(x+kS)^2+(y+lS)^2}{S}=$$

$$=\frac{x^2+y^2}{S}+S(2k+2l+k^2S+l^2S).$$

Видно, что дробные части чисел $(x_1^2+y_1^2)/S$ и $(x^2+y^2)/S$ совпадают, и поэтому при четном S цвет точки $(x_1; y_1)$ (т. е. четность выражения $[(x_1^2+y_1^2)/S]$) совпадает с цветом точки $(x; y)$ при любых k и l, а при нечетном S только при k и l одной четности. Тот факт, что этот период наименьший, мы предлагаем доказать читателю.

На всех представленных графиках число S — четное. Вы можете сами убедиться, что при нечетном S черные и белые круги будут чередоваться.

Можно без конца любоваться разнообразием, возникающим при таком, казалось бы, примитивном методе построения рисунка. Для $f(x, y)=x^2+y^2$, кроме ярко выраженного семейства окружностей с периодом T, можно увидеть еще много (более 10) менее контрастных семейств окружностей, расположенных в узлах квадратной решетки с периодом $T/2$, $T/3$, $T/4$, $T/5$, $T/7$, $T/9$ и даже $T/11$. Интересно было бы ответить на такие вопросы: почему возникают «вторичные» окружности, каковы периоды их решеток (если они вообще периодичны) и т. п.

Все сказанное относится также и к графикам с $f(x, y)=xy$ и $f(x, y)=x^2-y^2$, с той разницей, что на этих рисунках мы видим семейства гипербол.

В заключение хотелось бы пожелать читателям успеха в исследовании этой интересной проблемы, экспериментировании с различными $f(x, y)$, например x^3+y^3 или $\operatorname{arctg}(x+y)$.

Задачник „Кванта"

Задачи

M1071—M1075, Ф1083—Ф1087

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 февраля 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11 — 87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1071» или «Ф1084». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M1071 — M1075 предлагались в 1987 году на Ленинградской городской олимпиаде.

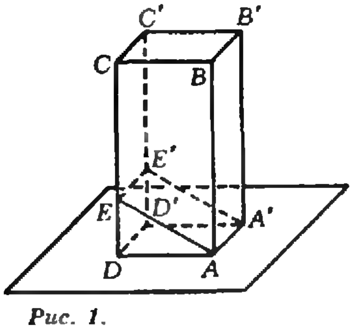


Рис. 1.

M1071. На доске нарисовано поле для игры в «цифры»:
((((((((__*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)
Двое играющих ходят по очереди. Первый игрок начальным ходом записывает на месте первого (самого левого) пробела (__) какую-нибудь цифру. Каждый дальнейший ход состоит в том, чтобы записать цифру на месте очередного пробела и заменить стоящую слева звездочку (*) на знак сложения или умножения; при этом ни одна цифра не должна встречаться дважды. В конце игры вычисляется значение полученного выражения. Если это четное число, то выигрывает первый игрок, нечетное — второй. Кто выигрывает при правильной игре?

С. А. Генкин

M1072. Разложите на простые множители число

$$989 \cdot 1001 \cdot 1007+320.$$

С. В. Фомин

M1073. В шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ нашлась точка O, из которой все стороны видны под углом 60°. Докажите, что если $OA_1>OA_3>OA_5$ и $OA_2>OA_4>OA_6$, то $A_1A_2+A_3A_4+A_5A_6<A_2A_3+A_4A_5+A_6A_1$.

А. С. Меркурьев

M1074. Дана стопка из $2n+1$ карточек, с которой разрешается производить следующие две операции:

(А) сверху снимается часть карточек и перекладывается вниз с сохранением порядка;

(Б) верхние n карточек с сохранением порядка выкладываются в n промежутков между нижними $n+1$ карточками.

Докажите, что с помощью указанных операций из исходного расположения карточек в стопке нельзя получить более $2n(2n+1)$ различных расположений карточек.

Д. В. Фомин

M1075. Найдите наибольшее натуральное число, в десятичной записи которого каждая цифра (кроме крайних) строго меньше полусуммы двух соседних с ней цифр.

С. Е. Рукшин

Ф1083. Однородный кирпич $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 1) обладает следующим свойством: если разрезать его произвольной плоскостью, проходящей через ребро AA', то каждая из двух частей кирпича, поставленная на новую грань $AEE'A'$ (рис. 2), не падает. Найти соотношения между размерами кирпича, при которых это возможно.

С. Б. Шлосман

Ф1084. Если к обмерзшему стеклу на незначительное время прижать пятак, то вдоль края пятака на стекле протаивает кружок. Почему?

Л. А. Ашкинази

Ф1085. На рисунке 3 изображен процесс, совершаемый над идеальным газом и переводящий его из состояния A в состояние B. Найдите на графике участки процесса, где температура газа повышается (понижается).

И. Ю. Потеряйко

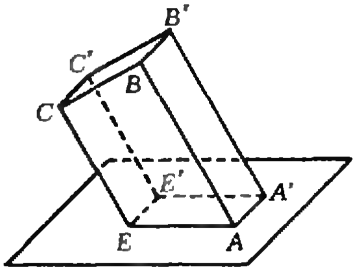


Рис. 2.

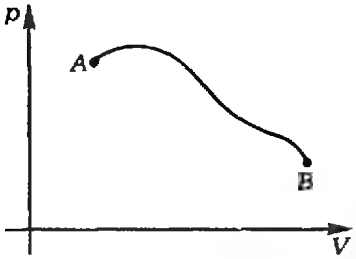


Рис. 3.

Ф1086. Суммарная напряженность электрического поля, создаваемого двумя точечными зарядами, в точке A равна нулю, а в точке B модули напряженностей полей этих зарядов одинаковы. Показать, что в точке B напряженность результирующего поля направлена вдоль прямой AB.

В. Т. Карапетян

Ф1087. Математический маятник совершает колебания. Угол максимального отклонения от положения равновесия $\alpha_0 \leqslant \pi/2$. Укажите углы α_1 и α_2, при которых ускорение груза принимает наименьшее и наибольшее значения. Нарисуйте графики зависимости α_1 и α_2 от α_0.

О. А. Седлецкий

Problems

M1071—M1075, P1083—P1087

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than February 1st 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write

M1071. The board for playing the game called "digits" looks like this: (((((((((__*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)
The two players make their moves in turn. The first player begins by writing the digit of his choice in the first space (__) from the left. In the following moves the empty spaces are successively (from left to right) replaced by digits and the stars (*) by addition or multiplication signs (each move consists in writing a sign and the digit immediately to its right); no digit may appear twice. At the end of the game the expression obtained is calculated. If the result is an even number, the first player wins, otherwise the second one does. Who wins if both players do their best?

S. A. Genkin

M1072 Express the following number as a product of primes

$$989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320.$$

S. V. Fomin

M1073. All the sides of the hexagon $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ are seen from its inner point O under an angle of 60°. Prove that

$$OA_1 > OA_3 > OA_5 \text{ and } OA_2 > OA_4 > OA_5$$

imply $A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 < A_2A_3 + A_4A_5 + A_6A_1$.

A. S. Merkuriev

M1074. The following operations may be performed on a stack of $2n+1$ cards:
(A) a certain number of cards are removed from the top of the stack and placed under it, order being preserved;
(B) the top n cards are slipped back into the stack, in order, between the $n+1$ bottom cards.
Prove that no more than $2n(2n+1)$ different arrangements of cards in the stack may be obtained from a given one using these operations.

D. V. Fomin

M1075. Find the largest natural number in whose decimal expansion each digit (except the first and the last) is strictly less than the half-sum of its two neighbours.

S. E. Rukshin

P1083. A uniform brick has the following property (see figure рис. 1): if it is cut by any plane $ABCDA'B'C'D'$ passing through the edge AA' then each of the two parts obtained does not fall if placed on the new face $AEE'A'$ (see рис. 2). Find the relations between the measurements of the brick for which this is possible.

S. B. Shlosman

NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

P1084. If a five kopeck coin is held briefly against frost covered glass, a circle appears along the rim of the coin. Why?

L. A. Ashkinazi

P1085. Figure рис. 3 (p. 23) shows a process which brings the ideal gas from state *A* to state *B*. Locate the parts of the graph where the gas temperature increases (decreases).

I. Yu. Poteryaiko

P1086. The resulting tension of the electric field created by two point charges at the point *A* is zero, while at the point *B* the absolute values of the fields of the two charges are equal. Show that the resulting field at the point *B* is directed along the line *AB*.

V. T. Karapetyan

P1087. A mathemetical pendulum oscillates. The maximum angle away from the equilibrium position is $\alpha_0 \leqslant \pi/2$. Find angles α_1 and α_2 where the weight's acceleration assumes its largest and its smallest values. Plot the dependances of α_1 and α_2 on α_0.

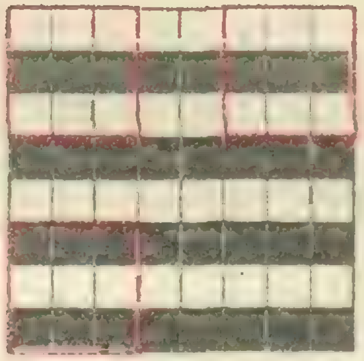
O. A. Sedletski

Решения задач

M1051 — M1055, Ф1063 — Ф1066

M1051. *В левый нижний угол шахматной доски 8×8 клеток поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может перепрыгнуть через любую другую фишку, симметрично отразившись от нее, если соответствующее поле свободно. Можно ли несколькими такими ходами собрать все фишки в виде квадрата 3×3*
а) в левом верхнем углу?
б) в правом верхнем углу доски?

В обоих случаях ответ отрицательный. Чтобы убедиться в этом, окрасим доску по горизонталям: первую горизонталь — в черный цвет, вторую — в белый, третью — снова в черный и т. д. (см. рисунок). Очевидно, что при прыжке фишка всегда попадает на поле того же цвета, поэтому в начальном и конечном квадрате 3×3 должно быть одинаковое число, скажем, черных полей. Но в нижнем квадрате их 6, а в верхнем — левом или правом — 3.



Задачу а) можно точно так же решить и с обычной шахматной раскраской.

Я. Е. Брискин

M1052. *Докажите, что из n четырехугольников, отсекаемых от выпуклого n-угольника диагоналями, не более n/2 могут оказаться описанными около окружности. Приведите пример 8-угольника, у которого таких четырехугольников 4.*

Если бы можно было отсечь больше $n/2$ описанных четырехугольников, то среди них нашлось бы два соседних, — имеющих две общие стороны. Обозначим их *ABCD* и *BCDE* (рис. 1). У каждого из них суммы противоположных сторон равны:

$$AB+CD=BC+AD, \quad BC+DE=CD+BE.$$

Отсюда получаем, что

$$AB+DE=AD+BE. \qquad (*)$$

Исходный n-угольник выпуклый, поэтому его диагонали *AD* и *BE* пересекаются в некоторой точке *P*. По

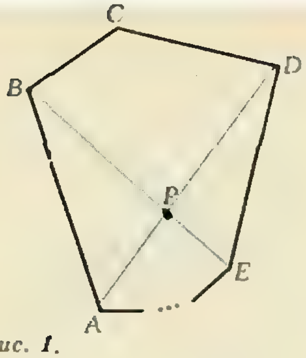


Рис. 1.

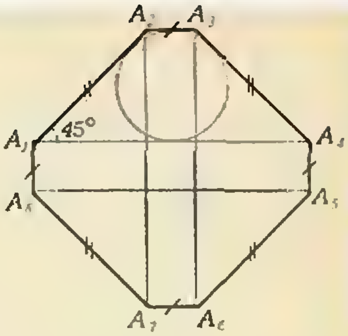


Рис. 2.

неравенству треугольника

$$AD+BE=AP+BP+PD+PE>AB+DE,$$

что противоречит (*).

Чтобы построить нужный 8-угольник, опишем около окружности равнобокую трапецию $A_1A_2A_3A_4$ с углами в 45° при основании A_1A_4, а затем достроим ее до 8-угольника $A_1A_2...A_8$ как показано на рисунке 2. Аналогично строится n-угольник, от которого можно отсечь диагоналями $[n/2]$ описанных четырехугольников.

Н. М. Седракян

M1053. *Докажите, что в последовательности чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., где каждое число равно сумме двух предыдущих, при $m \geqslant 2$ встретится не менее 4 и не более 5 m-значных чисел.*

Пусть u_n — последовательность Фибоначчи: $u_0=1$, $u_1=1$,

$$u_{n+1}=u_n+u_{n-1}. \qquad (1)$$

Нам понадобится следующая простая оценка отношения $r_n=u_{n+1}/u_n$ соседних чисел Фибоначчи: начиная с $u_3/u_2=3/2$, отношение r_n не меньше $3/2=1{,}5$ и не больше $5/3=1{,}66...<1{,}7$.

Ее легко доказать методом математической индукции. В силу (1)

$$r_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{u_{n-1}}{u_n}=1+\frac{1}{r_{n-1}}.$$

Поэтому, если

$$\frac{3}{2}\leqslant r_{n-1}\leqslant\frac{5}{3}, \qquad (2)$$

т. е. $2/3\geqslant 1/r_{n-1}\geqslant 3/5$, то r_n оценивается сверху числом $1+2/3=5/3$, а снизу — числом $1+3/5=8/5>3/2$. А поскольку оценка (2) верна для $n=3$, она верна и для всех $n\geqslant 3$.

Пусть u_k — наименьшее m-значное число Фибоначчи, $m\geqslant 2$. Тогда $u_k\geqslant 10^{m-1}$, $u_{k+1}\geqslant 1{,}5u_k$,

$$u_{k+2}=u_{k+1}+u_k\geqslant 2{,}5u_k,$$
$$u_{k+3}\geqslant(2{,}5+1{,}5)\,u_k=4u_k,$$
$$u_{k+4}\geqslant(4+2{,}5)\,u_k=6{,}5u_k,$$

и потому $u_{k+5}\geqslant 10{,}5u_k>10^m$ — уже не менее, чем $(m+1)$-значное число. Таким образом, m-значных чисел Фибоначчи не более 5.

С другой стороны, $u_{k-1}<10^{m-1}$, $u_k<1{,}7u_{k-1}$ и аналогично предыдущему мы получим, что $u_{k+3}<7{,}1u_{k-1}<10^m$. Следовательно, m-значных чисел Фибоначчи не менее 4.

Можно решить эту задачу иначе, воспользовавшись явной формулой для чисел Фибоначчи *), приведенной на полях.

$$u_n=\frac{\tau^{n+1}-(-1/\tau)^{n+1}}{\sqrt{5}},$$

где $\tau=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

И. Б. Васильев

---

*) *См., например, книгу «Заочные математические олимпиады»,* М.: Наука, 1987, задача 6-11.

M1054. *Докажите, что шесть точек попарного касания четырех сфер всегда лежат на одной сфере или на одной плоскости.*

Если центры сфер лежат в одной плоскости, то и все точки их попарного касания лежат в этой плоскости.

Пусть центры не лежат в одной плоскости. Обозначим сферы через S_1, S_2, S_3, S_4, точку касания сфер S_i и S_j — через A_{ij}, а их общую касательную плоскость, проведенную через A_{ij}, — через α_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$. Достаточно доказать, что точка O, в которой пересекаются три из этих плоскостей, касающиеся сферы S_4, α_{14}, α_{24} и α_{34} — лежит и на трех других плоскостях (существование точки O вытекает из того, что центры данных сфер не лежат в одной плоскости). Действительно, в таком случае каждый отрезок OA_{ij} лежит в плоскости α_{ij}, т. е. касается сфер S_i и S_j. Следовательно, точка O равноудалена от всех точек A_{ij} и является центром проходящей через них сферы: например, отрезки OA_{14} и OA_{24} равны как касательные к S_4, OA_{14} и OA_{13} — как касательные к S_1 и т. д.

Докажем, что через точку O проходит плоскость α_{12} (α_{23} и α_{13} рассматриваются аналогично). Заметим, что касательные из O к S_1 и S_2 равны ($OA_{14} = OA_{24}$). Теперь остается воспользоваться тем, что

Геометрическое место точек, касательные из которых к сферам S_1 и S_2 равны, есть плоскость α_{12}.

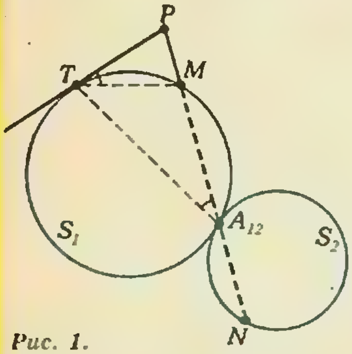


Рис. 1.

Если PT — касательная к S_1, то $\angle PTM = \angle PA_{12}T$, следовательно, $\triangle PTM \sim \triangle PA_{12}T$ и $PM : PT = PT : PA_{12}$.

(Очевидно, что все касательные из любой точки P плоскости α_{12} к S_1 и S_2 равны PA_{12}. Если же P не лежит в этой плоскости, и прямая PA_{12} пересекает сферы S_1 и S_2, кроме A_{12}, еще в некоторых точках M и N, то касательные к S_1 и S_2 равны $\sqrt{PA_{12} \cdot PM}$ и $\sqrt{PA_{12} \cdot PN}$, но $PM \neq PN$ — см. рис. 1).

Наше рассуждение годится и в случае, когда все сферы лежат одна вне другой, и когда три из них лежат внутри четвертой. Нетрудно убедиться, что в первом случае сфера, проходящая через точки A_{ij}, «полувписана» в тетраэдр с вершинами в центрах данных сфер, т. е. касается всех его ребер (в точках A_{ij}). Аналогичное верно и во втором случае.

Упомянем еще одно решение, использующее инверсию в пространстве (см. статью В. М. Уроева «Инверсия» в «Кванте» № 5 за 1984 г.). При инверсии с центром A_{12} сферы S_1 и S_2 перейдут в параллельные плоскости, а S_3 и S_4 — в сферы, касающиеся этих плоскостей и друг друга (рис. 2). Очевидно, что 5 точек касания, возникающие на преобразованной конфигурации, лежат в одной плоскости. Рассматриваемая инверсия превращает эту плоскость в сферу (или плоскость), проходящую через A_{12}.

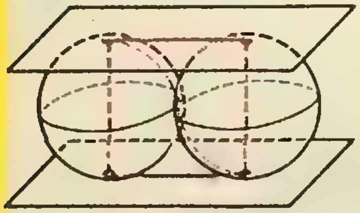


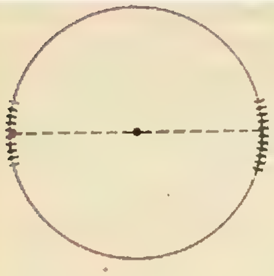
Рис. 2.

В. Н. Дубровский, Ю. К. Коба

M1055. *На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг с концами в этих точках не менее 100 дуг, не превосходящих 120°.*

Очевидно, что среди трех дуг с концами в любых трех точках окружности хотя бы одна не превосходит 120°. Поэтому, если соединить отрезком каждую пару данных точек, определяющую дугу величиной не больше 120°, получится граф, в котором *среди любых трех точек хотя бы две соединены*. Этой информации уже достаточно, чтобы доказать утверждение задачи, т. е. на языке графа, что число проведенных отрезков не меньше 100.

Пусть A_1 — точка, из которой выходит наименьшее число отрезков; обозначим их A_1A_2, A_1A_3, ..., A_1A_k. Из каждой точки A_i, $i = 1, ..., k$ выходит не менее $k-1$ отрезков, поэтому число всех таких отрезков не меньше $k(k-1)/2$ (при подсчете каждый отрезок может быть учтен дважды). Любые две из остальных $21-k$ точек должны быть соединены, иначе между этими двумя точками и A_1 вообще *не будет* отрезков, что противо-



речит нашему условию. Это дает еще не меньше чем $(21-k)(20-k)/2$ отрезков. Итак, общее число отрезков в графе не меньше

$$\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(21-k)(20-k)}{2}=k^2-21k+210\geqslant 100$$

(при целых k); минимум достигается при $k=10$ или $k=11$. Эта оценка неулучшаема, как видно из расположения, показанного на рисунке: 10 точек вблизи одного конца диаметра и 11 — вблизи другого.

В общем случае n точек на окружности число 100 нужно заменить на $n(n-2)/4$ при четном n и $(n-1)^2/4$ — при нечетном; доказательство сохраняется.

В. Н. Дубровский, А. Ф. Сидоренко

Ф1063. *Пешеходу необходимо в кратчайшее время попасть из точки поля A в точку поля B, расстояние между которыми 1300 м. Поле пересекает прямолинейная дорога так, что точка A находится от нее на расстоянии 600 м, а точка B — на расстоянии 100 м. Скорость перемещения пешехода по полю равна 3 км/ч, а по дороге — 6 км/ч. Какой путь должен избрать пешеход? Чему равно минимальное время? Рассмотреть случаи, когда точки A и B лежат по одну сторону от дороги и когда они лежат по разные стороны от дороги.*

Для решения задачи построим фронт области достижимости — границу той области, в любой точке которой можно оказаться за данный промежуток времени.*)

Будем строить эту границу для того момента времени, когда она проходит через точку B (рассмотрим случай, когда точки A и B лежат по разные стороны от дороги). Для этого случая проведем через точку B (см. рисунок) прямую, образующую с дорогой угол φ такой, что $\sin\varphi=v/u$, где v — скорость движения по полю, u — скорость движения по дороге. Из данных задачи следует, что $\sin\varphi=1/2$, $\varphi=\pi/6$. Пусть эта прямая пересекает дорогу в точке D. Из точки A проведем окружность, касающуюся прямой BD. Из данных задачи следует, что точка B лежит между точкой касания C и точкой D.

Итак, в момент прохождения фронтом точки B интересующий нас участок фронта представляет собой часть окружности радиусом AC и отрезок касательной CD. **) Теперь легко понять, что оптимальной траекторией из A в B будет ломаная $AFGB$, причем $\widehat{CFD}=\widehat{BGD}=\pi/2-\varphi=\pi/3$.

Аналогично, если точки A и B (B') лежат по одну сторону от дороги, то оптимальной траекторией будет ломаная $AFKB'$, причем $\widehat{B'KD}=\pi/2-\varphi=\pi/3$. Отметим, что при другом взаимном расположении точек A, B и дороги (при других расстояниях) оптимальная траектория может представлять собой отрезок прямой без участков дороги (в этом случае точка B лежит на участке фронта, являющемся частью окружности радиусом AC).

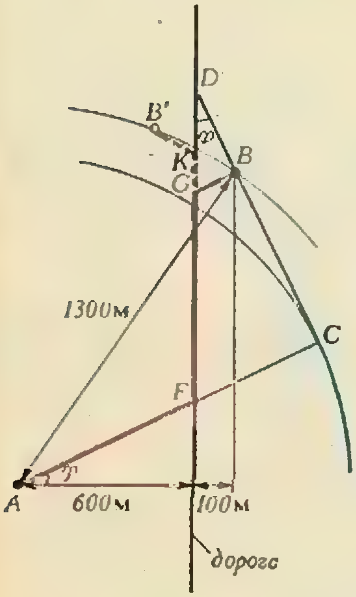
Теперь найдем минимальное время движения из точки A в точку B. Если точки лежат по разные стороны от дороги —

$$t_{\min}=\frac{AF}{v}+\frac{FG}{u}+\frac{GB}{v}\approx 23{,}5 \text{ мин.}$$

Если точки A и B (B') лежат по одну сторону от дороги —

$$t_{\min}=\frac{AF}{v}+\frac{FK}{u}+\frac{KB'}{v}\approx 24{,}6 \text{ мин.}$$

С. С. Кротов



---

*) О принципе построения фронта области достижимости подробно рассказывалось в статье «Об оптимальных траекториях движения» в «Кванте» № 6 за 1982 год.

**) Весь фронт симметричен относительно перпендикуляра к дороге, проходящего через точку A; левая верхняя его часть — прямолинейный участок от точки D до пересечения с окружностью радиусом AC, составляющий угол $\varphi=\pi/6$ с дорогой, и часть окружности радиусом AC.

Ф1064. *Нить прикреплена к ободу тяжелого обруча и намотана на него. Если другой конец нити прикрепить к потолку и отпустить обруч, то он, вращаясь и разматывая нить, будет двигаться вниз. Пусть три таких обруча соединены «последовательно», т. е. конец нити следующего обруча прикреплен к оси предыдущего (рис. 1). Все обручи одновременно отпустили, и они пришли в движение. Определить, с каким ускорением движется верхний обруч.*

С каким ускорением будет двигаться верхний обруч, если число последовательно соединенных обручей очень велико?

Считать, что масса обруча равномерно распределена по его ободу, спицы невесомы, нити невесомы и нерастяжимы, трение отсутствует.

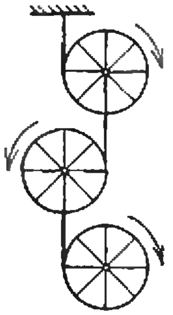


Рис. 1.

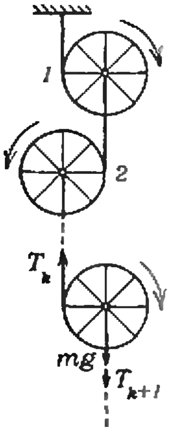


Рис. 2.

Пусть система содержит N последовательно соединенных обручей, как это показано на рисунке 2. Пронумеруем их сверху вниз. На обруч под номером k вверх действует сила натяжения k-й нити, а вниз — сила тяжести и сила натяжения $(k+1)$-й нити. Запишем для k-го обруча уравнение движения:

$$mg+T_{k+1}-T_k=ma_k, \qquad (1)$$

где a_k — проекция ускорения центра масс обруча на направление движения, m — масса обруча, T_k и T_{k+1} — силы натяжения нитей.

Аналогичное уравнение можно записать для любого обруча. При этом $T_{N+1}=0$, так как нити $(N+1)$ просто нет. Таким образом, уравнения (1), записанные для $k=1\div N$, представляют собой систему N уравнений с $2N$ неизвестными a_k и T_k.

Еще N уравнений можно получить, воспользовавшись законом сохранения энергии.

За время t после начала движения k-й обруч, двигаясь с ускорением a_k, опустился на расстояние s_k, приобретя скорость поступательного движения v_k и угловую скорость вращения вокруг оси обруча ω_k. Эти величины связаны соотношениями

$$s_k=a_kt^2/2,\ v_k=a_kt,\ \omega_kR=v_k-v_{k-1}, \qquad (2)$$

где R — радиус обруча. Вычислим кинетическую энергию обруча, которую он приобрел к моменту времени t. Для этого выберем два маленьких кусочка обруча одинаковой массы Δm, расположенных на одном диаметре (рис. 3). Скорость каждого из кусочков складывается из скорости $\overline{v_k}$ его поступательного движения и линейной скорости вращательного движения вокруг центра обруча ($\bar{u}$ и $-\bar{u}$, $u=\omega_kR$). Суммарная кинетическая энергия этих кусочков равна

$$\Delta m\,(\overline{v_k}+\bar{u})^2/2+\Delta m\,(\overline{v_k}-\bar{u})^2/2=2\,(\Delta mv_k^2/2+\Delta mu^2/2).$$

Кинетическая энергия всего обруча равна сумме энергий всех таких пар, т. е. равна

$$mv_k^2/2+m\,(\omega_kR)^2/2.$$

Эта энергия равна работе всех сил, действующих на обруч. Работа сил mg и T_{k+1} положительна и равна $(mg+T_{k+1})\,s_k$. Работа силы T_k отрицательна и равна $(-T_k)\,s_{k-1}$ (так как точка приложения силы переместилась вниз на расстояние s_{k-1}). Поэтому

$$mv_k^2/2+m\,(\omega_kR)^2/2=(mg+T_{k+1})\,s_k-T_ks_{k-1}.$$

Из этого уравнения с учетом (1) и (2) после преобразований получим:

$$T_k=m\,(a_k-a_{k-1}),\ k=1\div N. \qquad (3)$$

Уравнение (3), выражающее силу натяжения нити через ускорения, справедливо для любой нити, и следовательно, (3), как и (1), представляет собой систему N уравнений с $2N$ неизвестными. Подставив из этой системы выражения для сил натяжения в систему уравнений (1), окончательно получим:

$$-a_{k-1}+3a_k-a_{k+1}=g,\ k=1\div N. \qquad (4)$$

В этой системе уравнений следует считать $a_0=0$, так как это ускорение точки подвеса первого обруча, $a_{N+1}=a_N$, так как $T_{N+1}=0$ ($(N+1)$-й нити нет).

Запишем теперь в развернутом виде систему уравнений (4) для трех обручей ($N=3$):

$$\begin{cases} 3a_1-a_2=g, \\ -a_1+3a_2-a_3=g, \\ -a_2+2a_3=g. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$a_1=\frac{8}{13}g;\ a_2=\frac{11}{13}g;\ a_3=\frac{12}{13}g.$$

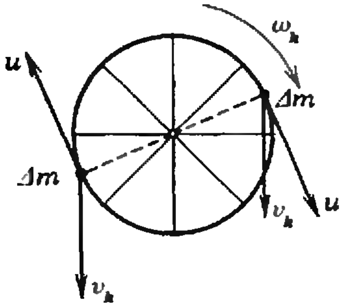


Рис. 3.

Заметим, что система (4) может быть решена при любом конечном значении N. Ясно, что при увеличении N «трудность» вычислений нарастает. Как же быть, если $N \to \infty$? Вот тут мы проведем рассуждения, которые справедливы именно для случая $N \to \infty$.

Предположим, что ускорение первого обруча равно

$$a_1 = \varkappa g, \qquad (5)$$

где $\varkappa$ — некоторое число, которое нам и нужно определить. Перейдем теперь в систему отсчета, движущуюся с ускорением a_1. В этой системе описание движения всех обручей, начиная со второго, — задача, аналогичная нашей исходной, с той лишь разницей, что движение происходит в поле тяготения с

$$g' = g - a_1 = g(1 - \varkappa)$$

и общее число обручей уменьшилось на единицу. Так как обручей по-прежнему очень много, естественно считать ускорение верхнего (второго) обруча равным

$$a'_1 = \varkappa g'.$$

Следовательно, в неподвижной системе отсчета ускорение второго обруча равно

$$a_2 = a'_1 + a_1 = \varkappa g' + \varkappa g =$$
$$= \varkappa(g' + g) = \varkappa(g(1 - \varkappa) + g) = g(2 - \varkappa). \qquad (6)$$

Подставив выражения (5) и (6) для a_1 и a_2 в первое уравнение системы (4), найдем $\varkappa$:

$$\varkappa^2 + \varkappa - 1 = 0 \Rightarrow \varkappa = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Таким образом, ускорение первого обруча при достаточно большом N равно

$$a_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} g. \qquad (7)$$

Заметим, что уже при $N = 3$ выражение (7) справедливо с точностью 0,5 %, а для $N = 10$ — с точностью 10^{-6} %.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Ф1065. *Кастрюлю, в которую налит 1 л воды, никак не удается довести до кипения при помощи нагревателя мощностью 100 Вт. Определить, за какое время вода остынет на один градус, если отключить нагреватель.*

Это совсем простая задача — из условия ясно, что мощность нагревателя равна мощности, уходящей от кастрюли с водой в окружающее пространство (температура воды со временем не меняется). Значит, если нагреватель выключить, то отдаваемая мощность составит 100 Вт и на один градус вода остынет за время

$$\tau = \frac{cm \cdot \Delta T}{P} = 4{,}2 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 1\ \text{кг} \cdot \frac{1\text{К}}{100\ \text{Вт}} = 42\ \text{с}.$$

А. Р. Зильберман

Ф1066. *Предположим, что в результате сильных пожаров в верхних слоях атмосферы возникнет слой сажи, поглощающий практически все падающее на него солнечное излучение. Какой станет при этом средняя температура Земли, если сейчас она составляет 300 К?*

Приближенно можно считать, что современное значение средней температуры Земли является результатом равновесия двух тепловых потоков: от Солнца к Земле и от Земли в окружающее пространство. В случае образования слоя сажи поток солнечной энергии останется прежним, но сам слой, обладая двумя поверхностями, будет излучать половину этого потока наружу — в космос, а половину — внутрь. Следовательно, поверхность Земли станет получать тепла вдвое меньше, чем сейчас, и после установления равновесия вдвое меньше тепла будет излучать обратно, в сторону слоя; т. е. $q_1 = 2q_2$, где q_1 и q_2 — потоки испускаемого Землей тепла соответственно до и после пожара.

Учитывая тот факт, что излучаемый нагретым телом поток тепла q пропорционален четвертой степени температуры тела: $q \sim T^4$ (закон Стефана — Больцмана), получаем, что средняя равновесная температура Земли, окутанной тонким слоем сажи, равна

$$T_2 = T_1/\sqrt[4]{2} = 300/\sqrt[4]{2} \simeq 250\ \text{К} \simeq -20\ ^\circ\text{С}.$$

Такого порядка температура установится по всей планете спустя некоторое время после возникновения ядерной войны — наступит так называемая «ядерная зима».

А. Л. Стасенко

Информация

I Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

В 1988 году Министерство просвещения СССР совместно с ЦК ВЛКСМ, Министерством высшего и среднего специального образования СССР, Государственным Комитетом СССР по вычислительной технике и информатике, Академией наук СССР и Всесоюзным обществом «Знание» проводит Всесоюзную олимпиаду школьников по информатике.

Всесоюзная олимпиада школьников по математике, физике и химии в 1988 году будет проводиться в 22-й раз, формы ее проведения и примерная тематика задач устоялись. Олимпиада по информатике проводится впервые. Поэтому при ее организации целесообразно использовать формы, опробованные в соревнованиях по другим предметам (насколько это возможно), и тематику задач, опробованную в различных соревнованиях школьников по информатике.

В тех союзных республиках, где имеются соответствующие условия, могут проводиться районный (городской) и областной этапы олимпиады. К соревнованиям допускаются учащиеся всех возрастов, творчески освоившие школьный курс информатики.

Республиканские олимпиады будут проводиться в мартовские каникулы. Пакеты заданий рекомендательного характера для олимпиад республиканского этапа будут составлены методической комиссией по информатике Центрального оргкомитета. Эта комиссия будет осуществлять функции, аналогичные функциям предметных методических комиссий Центрального оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников по математике, физике и химии, т. е. методическое обеспечение олимпиад республиканского, союзного и международного уровней (составление, отбор и разбор задач олимпиадного характера).

По итогам республиканской олимпиады формируется команда школьников на Заключительный этап олимпиады по информатике.

Заключительный этап олимпиады будет проведен в Свердловске с 15 до 22 апреля 1988 г. Выбор Свердловска в качестве места проведения Заключительного этапа не случаен — там объединенными усилиями местных партийных и советских органов, областного и городского органов народного образования, Института математики и механики Уральского отделения АН СССР и вузов во всех школах города реализован машинный вариант (в объеме 102 ч.) курса основ информатики и вычислительной техники. Это стало возможным благодаря энергии и энтузиазму многих людей, в первую очередь — члена Президиума Уральского отделения АН СССР академика Н. Н. Красовского и заведующего кафедрой информатики и вычислительной техники Свердловского пединститута В. Г. Житомирского.

Заключительный этап Олимпиады, в котором примут участие команды от каждой союзной республики и городов Москвы, Ленинграда и Свердловска (как города — устроителя Олимпиады), будет проводиться в два тура.

В первом (теоретическом) туре будут предложены 2—3 задачи, решение которых не предполагает использования вычислительной техники. Во втором (машинном) туре будут предложены два задания, для выполнения которых обязательно использование компьютеров.

В заключение приведем задачи, предлагавшиеся на I Международной олимпиаде по программированию, которая состоялась в ЧССР в августе 1987 г. (В ней участвовали и советские школьники, подробно об этой олимпиаде будет рассказано в журнале «Информатика и образование».)

(Окончание см. на с. 56)

„Квант" для младших школьников

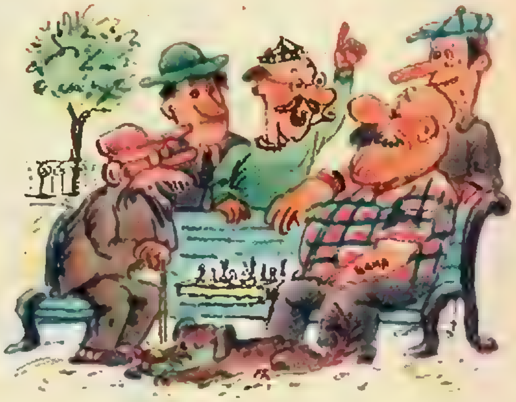
Задачи

1. После окончания шахматного турнира в один круг (каждый сыграл друг с другом по одному разу) все пять его участников *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*, перечисленные здесь в порядке занятых мест, обменивались впечатлениями.

— Не думал, что лишь я один не испытаю горечи поражения, — сказал *Б*.

— А вот мне единственному не удалось одержать ни одной победы, — заметил *Д*.

Попробуйте по этим данным восстановить турнирную таблицу: как каждый сыграл с остальными участниками.



2. Почему в морозный день снег скрипит под ногами?

3. Расшифруйте числовой ребус

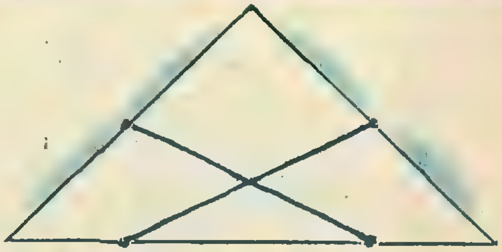
ДЕДКА+БАБКА+РЕПКА=
=СКАЗКА,

в котором одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные и ДЕДКА>БАБКА>>РЕПКА.

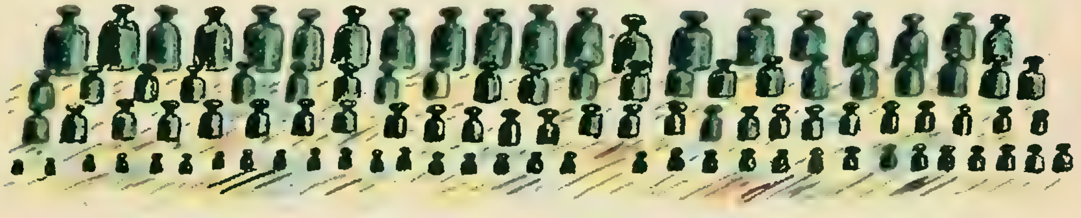
ДЕДКА + БАБКА+
+РЕПКА = СКАЗКА

4. Из набора гирек с массами в 1 г, 2 г, ..., 101 г потерялась гирька массой 19 г. Можно ли оставшиеся 100 гирек разложить на две кучки по 50 штук в каждой так, чтобы массы кучек были одинаковы?

5. В равнобедренном треугольнике отмечены середины боковых сторон и их проекции на основание. Через отмеченные точки проведены две прямые (см. рисунок). Покажите, что из полученных частей можно сложить ромб.



Эти задачи нам предложили
С. Г. Губа, А. П. Савин, А. М. Домашенко, В. В. Произволов, В. Д. Вьюн



Калейдоскоп „Кванта"

... я вывел, что силы,
удерживающие планеты на их орбитах,
должны быть в обратном отношении
квадратов их расстояний
от центров, вокруг коих
они вращаются.

Исаак Ньютон

Вопросы и задачи

● 1. Человек прыгает со стула, держа в руке тяжелую гирю. С какой силой давит она на руку человека в то время, когда он находится в воздухе?

● 2. Справедливы ли в условиях невесомости законы Паскаля и Архимеда?

● 3. В каком направлении и с какой сторостью должен лететь вдоль экватора самолет, чтобы скомпенсировать уменьшение своего веса, обусловленное вращением Земли?

● 4. Чему равна максимальная скорость тела, падающего в гипотетическую шахту, пробуренную по оси вращения земного шара? Сопротивление не учитывать.

● 5. Может ли спутник двигаться по орбите, плоскость которой не проходит через центр Земли?

●

Вопросы и задачи

● 8. Чему равна первая космическая скорость для планеты, масса и радиус которой в три раза больше, чем у Земли?

● 9. Спутник движется по круговой орбите, радиус которой примерно равен радиусу шарообразной планеты. Какая физическая характеристика планеты определяет период обращения спутника по орбите?

● 10. Какими часами следует измерять время в космическом корабле в условиях невесомости: маятниковыми, песочными или пружинными?

● 11. Что должен предпринять командир космического корабля, если пассажиры просят его создать состояние весомости?

А так ли хорошо знакомо вам

ТЯГОТЕНИЕ

?

Три века назад Ньютон размышлял о том, существует ли общая причина для движения Луны и падения яблока. Тогда это было дерзкой идеей, поскольку вековая мудрость гласила, что небесные тела движутся по своим «совершенным» законам, а земные объекты подчиняются «мирским» правилам. Ньютон предположил, что единые законы справедливы во всей Вселенной.

Впечатляющие открытия Ньютона оказали сильнейшее влияние на развитие науки. Многолетние раздумья ученых над природой гравитации увенчались построением теории, которая успешно объясняет тяготение и расширение Вселенной,— общей теории относительности.

●

6. В каком случае и почему космическая ракета нагревается при трении о воздух сильнее: при ее запуске или при спуске на Землю?

●

7. Как стала бы двигаться Луна, если бы а) исчезло тяготение между Луной и Землей; б) прекратилось движение Луны по орбите?

●

Любопытно, что ...

...знаменитый Иоганн Кеплер, помимо установления законов движения планет, очень близко подошел к выводу о взаимном притяжении всех тел в природе. С гениальной прозорливостью Кеплер писал, что приливы и отливы в земных океанах объясняются действием Луны.

...наблюдая у себя дома по телевизору высадку астронавтов на Луну, преподаватель одного из американских колледжей заметил, что у одного из отсеков спускаемого аппарата свисал рядом с астронавтом, качаясь на чем-то вроде каната, какой-то тяжелый предмет. Посмотрев на часы, преподаватель сумел довольно точно определить ускорение свободного падения на Луне. Кстати, как он сделал это?

●

12. Можно ли в состоянии невесомости забить молотком гвоздь?

●

Микроопыт

Пробейте гвоздем три-четыре отверстия в консервной банке. Закрыв их пальцами, наполните банку водой, затем отпустите ее. Будет ли выливаться вода через отверстия при падении банки?

●

Что читать в «Кванте»

о тяготении
(публикации последних лет)

1. «Черные дыры» — 1983, № 2;
2. «Вращение Земли и ускорение свободного падения» — 1984, № 1, с. 32;
3. «О всемирном тяготении, приливах и отливах» — 1985, № 8;
4. «Вторая космическая скорость» — 1986, № 3, с. 21;
5. «Парадокс спутника» — 1986, № 5;
6. «Маневрирование в космосе» — 1987, № 2;
7. «Прямое измерение расстояния до квазара» — 1987, № 4;
8. «Лунный тормоз» — 1987, № 8;
9. «Великая книга Ньютона» — 1987, № 11;
10. «Закон всемирного тяготения» — 1987, № 11.

«ВСЕ», «НЕКОТОРЫЕ» И ОТРИЦАНИЕ

А. И. ОРЛОВ

Был у меня недавно интересный разговор с шестиклассником Аликом, центральным нападающим футбольной команды нашего двора.

— Что, Алик, бежишь на тренировку? Зимой, небось, сменишь свой футбол на хоккей?

— Ни за что на свете! — воскликнул Алик обиженно.— Зимой надо заниматься, а не бегать за шайбой. Все хоккеисты плохо учатся,— футболисты учатся гораздо лучше!

— Почему ты так решил?

— А что? Все так считают в нашей команде, не я один.

— А не кажется ли тебе, что ты рассуждаешь сейчас, как печально известные обезьяны из книги Киплинга «Маугли»? Помнишь, они кричали на весь лес: «Мы велики! Мы свободны! Мы достойны восхищения! Мы все так говорим, значит, это правда! ...»

— Это кто же обезьяна?! — возмутился Алик.

— Я не хотел обидеть тебя, Алик, но ссылкой на мнение многих нельзя ничего доказать. Земля круглая, а в древности почти все думали, что она плоская. Индейцы племени сиу, как пишет их вождь Мато Нажин, считали даже, что Земля четырехугольная, а было это уже в XIX веке ... Так почему же все хоккеисты плохо учатся?

— Ну-у, вот Сережа Кукушкин. Он все время играет в хоккей и все время получает двойки.

— Ты рассуждаешь, как один француз, который говорил: «Все англичане низенькие, толстенькие и чернявые»,— только потому, что так выглядел ед[illegible]ичанин, с которым он встречался. И [illegible] этот француз нарушаете законы логики.

Алик задумался, а я решил помочь ему. Для начала рассказал такую историю.

— В одном городе я видел на доме табличку: «В нашем доме нет двоечников». На соседнем доме такой таблички не было. Как по-твоему, Алик, значит ли это, что в соседнем доме все были двоечники?

— Н-нет,— пробормотал Алик неуверенно. Не обязательно. Это значит только, что там есть двоечники ... Хотя бы один двоечник ... А может быть, и все там учатся на двойки. Нет, не знаю, я ведь не был там!

— А что же означает такая фраза: *«Неверно, что среди ребят есть двоечники»*?

— Это как в первом доме — все учатся без двоек.

— Значит, одно из двух,— сказал я удовлетворенно.— Либо все учатся без двоек, либо в доме есть хотя бы один двоечник. А что можно сказать о любителях шайбы?

И тут выяснилось, что Алик может, подумавши, рассуждать правильно.

— Верно одно из двух: либо все хоккеисты плохо учатся, либо не все,— есть хоккеисты, которые учатся хорошо.

— Но даже в твоем классе, Алик, я знаю троих отличников, которые любят гонять шайбу. Значит, верно второе: бывают хоккеисты, которые хорошо учатся.

— Ну, конечно!

— А что же тогда означает твой

пример с Сережей Кукушкиным?

Алик задумывается.

— Что не все хоккеисты хорошо учатся ...

Итак, попробовав рассуждать логично, Алик сам пришел к правильному выводу.

С двоечниками и хоккеистами мы разобрались сравнительно быстро. Попробуем понять, как следует рассуждать в более сложных случаях. Первый пример — с разноцветными шарами. Представим себе, что в урне (небольшом ящике) могут лежать, скажем, белые и красные шары. Все шары одинакового размера и неразличимы на ощупь. Кто-то опускает руку в урну и вынимает шар. Шар оказывается, к примеру, красным. Что можно сказать о цвете шаров, лежащих в урне?

Некоторые скажут: «Все шары красные». На самом деле это неверно: можно лишь утверждать, что некоторые (необязательно все) шары красные. Могут быть и белые шары. Может быть и так, что вынутый шар — единственный красный среди белых.

Был вынут красный шар. Значит, неверно утверждение: «Все шары белые». А что верно? — «Некоторые (по крайней мере один) шары красные». Давайте потренируемся. Пусть каждое из следующих утверждений неверно.

1. *Все шары в урне красные.*
2. *Некоторые шары в урне красные.*
3. *Некоторые шары в урне белые.*
4. *Все равнобедренные треугольники являются прямоугольными.*
5. *Все ученики класса были на собрании.*
6. *Некоторые девочки были на собрании.*

Сформулируйте верные утверждения.

А теперь общая схема решения всех подобных задач — наше «волшебное средство». Пусть у нас есть множество *M* каких-то объектов (это может быть несколько шаров, или несколько книг, или все ученики какого-то класса). Каждый из элементов этого множества может обладать, а может и не обладать некоторым свойством *A*. Например, шар может быть красным, а может и не быть; хоккеист — быть или не быть двоечником.

Закон такой: *верно может быть либо утверждение, либо его отрицание.* Одно и только одно из двух! (В логике этот закон называется *законом исключенного третьего.*) *Каждое утверждение, которое мы используем, либо верно, либо неверно.*

Либо верно утверждение *B*, либо его отрицание (т. е. утверждение: «Утверждение *B* неверно»). Либо все хоккеисты плохо учатся (*обладают свойством A*). Если же это неверно, то хотя бы один хоккеист учится хорошо (*не обладает свойством A*).

Итак, вот наша схема:

Утверждение

1. Все предметы из *M* обладают свойством *A*.
2. Некоторые предметы из *M* обладают свойством *A*.

Его отрицание

1. Хотя бы один предмет из *M* не обладает свойством *A*.
2. Все предметы из *M* не обладают свойством *A*.

Обратите внимание на то, что утверждения *«некоторые предметы обладают свойством A»* и *«хотя бы один предмет* (а может быть, и все) *обладает свойством A»* означают в нашей схеме одно и то же.

А теперь — задачи.

Постройте отрицания следующих утверждений:

7. Все углы данного шестиугольника тупые.
8. Для любого x из множества A выполнено неравенство $x^2>4$.

9. Некоторые люди — дети.
10. По крайней мере для одного x из множества A будет $x^2-2x+1=0$.
11. Все мужчины выше 2-х метров.
12. Все простые числа — нечетные.
13. Для любого простого p число 2^p-1 тоже простое.

Вернемся к урне, в которой лежат шары, неразличимые на ощупь. Шары могут быть белого, красного, синего, черного цветов.

14. Известно, что не все шары в урне белые. Верно ли, что там есть красный шар?

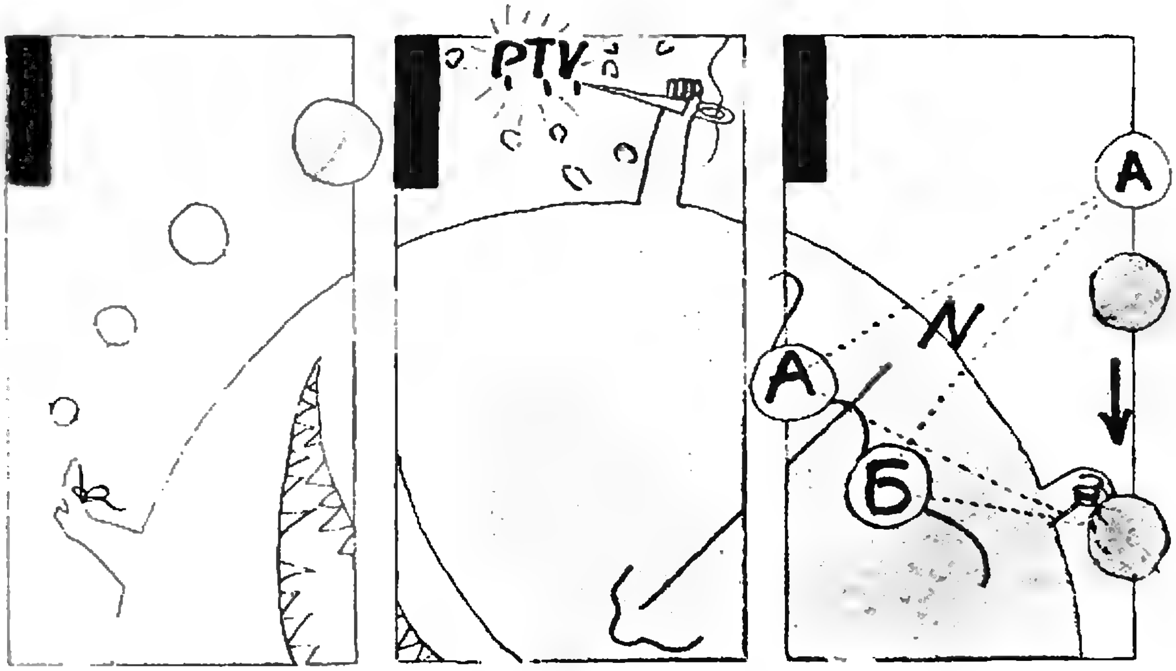
15. Известно, что не все шары одного цвета. Верно ли, что в урне есть хотя бы один не белый шар?

16. В урне 10 белых, 8 красных, 11 черных шаров. Сколько из них надо вынуть, чтобы наверняка попался белый шар? Чтобы попались шары всех трех цветов?

И еще одна задача — чуть посложнее.

17. В классе 5 отличников, 20 «хорошистов» и 10 троечников. Отличник может получить за ответ только 5, «хорошист» — 4 или 5, троечник — 3, 4 или 5. В класс пришел новый учитель, он не знает никого из учеников. Сколько человек ему достаточно вызвать к доске, чтобы наверняка была поставлена хотя бы одна пятерка?

Впервые эта статья была опубликована в февральском номере «Кванта» в 1976 году.



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Закон всемирного тяготения» предназначена восьмиклассникам, «Расширение газа в пустоту» — девятиклассникам, «Электромагнитная индукция и принцип относительности» — десятиклассникам.

Закон всемирного тяготения

Есть люди, чья жизнь и деятельность служат настоящим водоразделом в истории человечества. Именно таким человеком был великий английский мыслитель Ньютон, открывший в 1667 году закон всемирного тяготения. Попробуем воспроизвести соответствующие рассуждения Ньютона.

Сначала несколько слов о том, что предшествовало открытию. Кеплер, изучая на протяжении ряда лет таблицы движения планет, завещанные ему его учителем Тихо Браге, в начале XVII века формулирует три необыкновенно компактных и изящных закона (которые теперь называют законами Кеплера):

1. Все планеты движутся вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус, проведенный от Солнца до планеты, «заметает» равные площади в равные промежутки времени.
3. Квадраты периодов двух планет (T_1 и T_2) относятся как кубы больших полуосей их орбит (R_1 и R_2): $T_1^2/T_2^2=R_1^3/R_2^3$ (или, иначе, $T_1^2/R_1^3=\mathrm{const}$ для всех планет).

Уже из этих законов чувствуется, что Солнце играет какую-то особую роль в «планетной жизни». Однако сам Кеплер, несмотря на мучительные попытки, не смог до конца понять эту роль.

Приблизительно в то же время, когда Кеплер открывает законы движения планет, Галилей формулирует закон инерции, утверждающий, что,если на тело ничего не действует, оно будет двигаться с постоянной скоростью и по прямой.

Вот с этого уровня и стартовал Ньютон. Прежде всего, развивая идеи Галилея, он задается вопросом: если телам внутренне присуще свойство сохранять свою скорость, то за счет чего же все-таки она может меняться? Отвечая на этот вопрос, он формулирует закон, известный сегодня любому школьнику (второй закон Ньютона): для того чтобы изменить скорость тела, надо подействовать на него силой. При этом изменение скорости за единицу времени (т. е. ускорение a) прямо пропорционально силе (F) и обратно пропорционально массе (m) тела: $a=F/m$. Из закона, открытого Ньютоном, видно, что чем больше масса тела, тем неохотнее оно меняет свою скорость. В этом смысле говорят, что масса тела — это мера его инертности.

Гениальность Ньютона состояла, в частности, в том, что, рассматривая какое-то конкретное физическое явление (например, движение тела под действием силы), он всегда имел в виду весь мир в целом. Естественно поэтому, что Ньютон пытается применить сформулированные им законы динамики к описанию движения планет. Вывод напрашивается сам собой: никакой силы, подгоняющей планеты в их движении по орбите, не нужно. Наоборот, нужна сила, не позволяющая планетам улететь по прямой линии (в соответствии с законом инерции) и заворачивающая их каждый раз на круговые или близкие к круговым орбиты. Другими словами, на планеты должна действовать сила, направленная не вдоль, а поперек движения. А раз так, то не остается ничего другого, как предположить, что источником этой силы является Солнце.

Дальше все было просто. Ускорение планеты при ее движении по круговой орбите равно $a=\omega^2 R=4\pi^2R/T^2$ (обычное центростремительное ускорение). Подставляя это выражение в свой собственный закон ($a=F/m$), Ньютон получает

$$\frac{4\pi^2}{T^2}R=\frac{F}{m}.$$

Здесь F — та самая сила, которая действует на планету со стороны Солнца, а m — масса планеты. Используя третий закон Кеплера, Ньютон приходит к выводу, что величина $F/m \sim 1/R^2$ и не зависит от характеристик планеты, т. е. сила, действующая на планету со стороны Солнца,

$$F=\mathrm{const}\cdot\frac{m}{R^2}.$$

Размышляя о том, от чего бы могла зависеть величина входящей в это выражение константы, Ньютон постулирует, что она определяется только массой Солнца (M). (Почему? Да просто так ему казалось естественным.) Вот так и возникло знаменитое и одновременно столь привычное сегодня выражение

$$F=G\frac{Mm}{R^2}.$$

Величина коэффициента G ни от чего не зависит и является мировой константой (она получила название гравитационной постоянной).

Дальнейший анализ движения планет показал, что при такой силе автоматически выполняются и первые два закона Кеплера. Это уже был большой успех. Воодушевленный им, Ньютон пытается описать движение Луны вокруг Земли и, хотя и с некоторыми приключениями, получает превосходное согласие своих расчетов с экспериментом.

И тут Ньютон решается на потрясающее по своей силе обобщение. Он утверждает, что открытая им сила никоим образом не связана со спецификой небесных тел, а является универсальным свойством любых объектов природы. Так был сформулирован закон всемирного тяготения: сила, действующая между двумя любыми телами с массами m_1 и m_2,

$$F=G\frac{m_1m_2}{R^2}.$$

Вопрос о том, почему те самые массы, которые характеризуют стремление тел сохранять свое движение (т. е. являются мерой их инертности), одновременно определяют и взаимное притяжение тел друг к другу, волновал много поколений ученых и явился впоследствии отправной точкой для построения Эйнштейном общей теории относительности.

Коль скоро закон всемирного тяготения применим к любым телам, появилась возможность экспериментально измерить величину гравитационной постоянной G. Она оказалась невероятно малой:

$$G=6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Это означает, что гравитационные силы очень слабые. Именно поэтому мы совершенно не замечаем гравитационного притяжения между окружающими нас телами. Эта сила становится заметной только тогда, когда хотя бы одно из тел очень большое (такое, как Земля, Солнце и т. п.).

Строго говоря, выражение для силы тяготения в написанном нами виде справедливо только для материальных точек (т. е. для тел, размеры которых много меньше расстояния между ними). Ну, а если это не так? Тогда каждое из тел надо мысленно разбить на маленькие элементики (приблизительно точечные), вычислить силу взаимодействия между такими элементиками, а потом все силы геометрически сложить. (В общем случае это довольно громоздкая процедура, а выражение для результирующей силы может оказаться столь сложным, что его попросту невозможно записать в виде конечной формулы.)

Дальнейшие 150 лет были годами настоящего триумфа ньютоновской картины мира. Стали понятны причины океанских приливов и связь ускорения свободного падения с плотностью залегающих в данном месте пород. Были объяснены тончайшие детали в движении планет, их спутников, да и любых других небесных тел. На настоящее чудо было похоже чисто теоретическое предсказание существования восьмой планеты Солнечной системы — Нептуна (1846 г.). Причем англичанин Адамс и француз Леверрье не просто предсказали ее существование, но и вычислили, в какое время и куда надо направить телескопы, чтобы ее увидеть. И все произошло в точном соответствии с их расчетами. Такая же история произошла и с открытием девятой планеты — Плутона (1930 г.) Движение двойных звезд и форма звездных скоплений, структура галактик и их взаимодействие друг с другом — все подчиняется открытому Ньютоном закону всемирного тяготения.

Успехи были столь велики, что возникла иллюзия, будто все в мире описывается с помощью законов Ньютона. К сожалению (а может, наоборот, к счастью), действительность оказалась гораздо богаче. Научная революция XX века привела к созданию новой картины мира, в которой законы Ньютона нашли свое точное место среди других фундаментальных законов природы.

Е. Е. Городецкий

Расширение газа в пустоту

Спросите кого угодно, чтó произойдет с температурой идеального газа, который расширяется в замкнутом сосуде без теплообмена с окружающей средой, и почти все вам ответят, что газ охладится. Не верьте! Это не всегда так.

Вообразим такой мысленный эксперимент. Пусть одна половина теплоизолированного сосуда занята идеальным газом с давлением p_1 и температурой T_1, а другая — пуста (рис. 1). В некоторый момент уберем перегородку между половинами сосуда. Газ, естественно, будет расширяться, причем в пустоту, и после многочисленных столкновений его молекул со стенками и между собой установится новое равновесное состояние. Ясно, что теперь объем газа вдвое больше: $V_2=2V_1$. А каковы его давление p_2 и температура T_2?

С одной стороны, так как процесс адиабатический, точки, соответствующие начальному и конечному состояниям газа, должны лежать на адиабате *1—2′* (рис. 2). Адиабата, как известно, падает круче изотермы, поэтому температура газа должна уменьшаться: $T_2' < T_1$.

С другой стороны, посмотрим, чтó говорит первый закон термодинамики. Количество теплоты Q, подведенное к газу, идет на увеличение его внутренней энергии ΔU и на работу по расширению A:

$$Q = \Delta U + A.$$

В нашем случае $Q=0$ (по условию адиабатичности). А какая работа совершается газом? Да никакой, потому, что он расширяется в вакуум, со стороны которого не встречает противодействия. Значит, и сила, и работа равны нулю: $A=0$. Следовательно, и изменение внутренней энергии тоже равно нулю: $\Delta U=0$. Но поскольку в случае идеального газа внутренняя энергия зависит только от температуры, температура не изменится: $T_2=T_1$, и давление станет равным $p_2=p_1/2$. Это означает, что точки, соответствующие начальному и конечному состояниям, будут лежать на изотерме *1—2*.

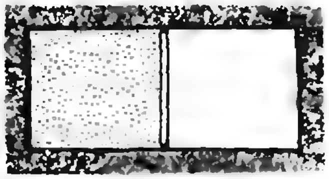


Рис. 1.

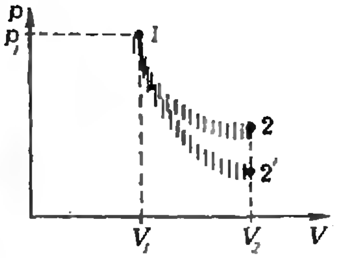


Рис. 2.

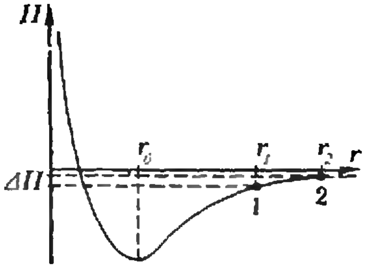


Рис. 3.

А что происходит между этими состояниями? К сожалению, школьная термодинамика ничего об этом сказать не может. Почему? Да потому, что вся она верна только для очень медленных (так называемых квазистатических) процессов, которые происходят со скоростями, много меньшими тепловой скорости движения молекул. В нашем же случае как только мы уберем перегородку, газ буквально бросится в вакуум со скоростью порядка тепловой скорости молекул и даже еще быстрее, потому что в газе есть отдельные молекулы, скорость которых намного больше тепловой. А тут термодинамика просто неверна. Вот почему на рисунке 2 мы изобразили неизвестный нам процесс штрихами, а не сплошной линией.

Все наши рассуждения справедливы для случая идеального газа. А если газ не идеальный? Тогда его молекулы взаимодействуют друг с другом, и внутренняя энергия газа складывается из кинетической энергии движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия.

На рисунке 3 изображена зависимость потенциальной энергии $П$ взаимодействия двух молекул от расстояния r между ними. Там, где потенциальная энергия минимальна (точка r_0), вещество конденсируется, т. е. переходит в жидкое состояние. Так как, по условию, мы имеем в начальный момент газ, то среднее расстояние между молекулами соответствует точке $r_1 \gg r_0$. После удвоения объема среднее расстояние между молекулами станет равным $r_2 = r_1 \sqrt[3]{2} > r_1$. Получилось, как будто в результате расширения газ слегка «вытащили» наверх, по склону потенциальной ямы. Но кто поработал над тем, чтобы увеличить потенциальную энергию на $ΔП$? Никто. И сам газ тоже ни над кем не работал. Поэтому остается признать, что увеличение потенциальной энергии произошло за счет уменьшения кинетической энергии движущихся молекул. Значит, и температура — мера средней кинетической энергии молекул газа — в результате расширения слегка упадет. Но это верно только в случае реального газа.

А. Л. Стасенко

Электромагнитная индукция и принцип относительности

В 1831 году Фарадей открыл явление электромагнитной индукции. Он обнаружил, что изменение магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, приводит к возникновению в нем электрического тока. Опыты Фарадея убедительно доказали, что сила индукционного тока (а значит, и величина ЭДС индукции) совершенно не зависит от того, по какой причине меняется магнитный поток. Можно менять внешнее магнитное поле, оставляя контур неподвижным, — для этого надо либо перемещать источник поля (катушку с током, постоянный магнит), либо менять силу тока в катушке, создающей поле (например, как Фарадей, размыкать и замыкать цепь катушки). Но можно поступить иначе: не меняя магнитного поля, добиться изменения магнитного потока перемещением самого контура или его деформацией (как, например, в генераторе переменного тока, где ЭДС индукции возникает в проволочной рамке при ее вращении в неизменном магнитном поле). В любом случае индуцированная ЭДС оказывается пропорциональной скорости изменения магнитного потока (закон Фарадея), а направление индукционного тока определяется правилом Ленца («Физика 9», § 92, 93).

Самому Фарадею казалось совершенно естественным, что оба варианта описываются одним и тем же законом. Однако внимательный анализ показывает, что такая ситуация является далеко не очевидной. Попробуем разобраться в этом вопросе поподробнее.

При перемещении контура в магнитном поле, которое не изменяется со временем, роль сторонней силы, порождающей ток в цепи, играет сила Лоренца, которая действует со стороны магнитного поля на любой движущийся заряд. Напомним известный вам пример («Физика 9», § 95). Пусть в однородное магнитное поле с индукцией B помещен прямоугольный контур, плоскость которого перпендикулярна линиям индукции (рис. 1). Одна из сторон контура представляет собой перемычку со скользящими контактами. Если перемещать перемычку со скоростью v, то в ней возникнет ЭДС индукции $\mathscr{E} = Bvl$ (l — длина перемычки). Действительно, на свободный заряд q в движущейся перемычке действует сила Лоренца $F = qvB$ (направление силы указано стрелкой); соответствующая этой сторонней силе ЭДС

$$\mathscr{E} = \frac{A}{q} = \frac{Fl}{q} = \frac{qvBl}{q} = Bvl,$$

где A — работа сторонней силы на длине перемычки. Сравним этот результат со скоростью изменения магнитного потока:

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\Delta(BS)}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\Delta(Bxl)}{\Delta t}\right| = Bvl.$$

Легко также проверить, что знак возникшей ЭДС соответствует правилу Ленца.

Разобранный пример показывает, что в случае движения проводников в постоянном магнитном поле возникновение индукционного тока не представляет собой принципиально нового физического явления.

Совсем другая картина получается в случае неподвижного контура, помещенного в изменяющееся со временем магнитное поле. Так как свободные заряды в проводнике изначально неподвижны (разумеется, хаотичное тепловое движение мы не учитываем), магнитное поле на них не действует и поэтому не может вызвать их направленного перемещения. Следовательно, индукционный ток может появиться только под действием электрического поля. Как оно возникает и какими свойствами обладает?

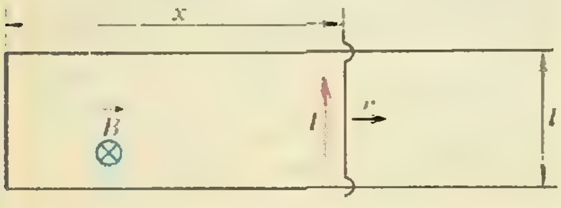


Рис. 1.

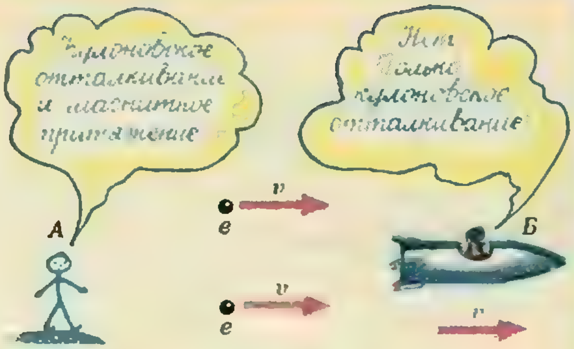

Кулоновское отталкивание и магнитное притяжение
Нет! Только кулоновское отталкивание!
A
Б
v
e
v
e
v

Рис. 2.

Ясно, что во многом это электрическое поле отличается от известного электростатического поля. Например, оно создает ЭДС в замкнутом контуре, значит, его работа по перемещению зарядов по замкнутому пути не равна нулю. Это поле вихревое, т. е. его силовые линии имеют вид замкнутых линий. И т. д.

Мы видим, что анализ ситуации, возникающей в случае неподвижного контура в переменном магнитном поле, приводит к широкому кругу совершенно новых физических явлений, указывающих на прямую взаимосвязь электрического и магнитного полей. Так Максвелл в 1860 году пришел к выводу, что переменное во времени магнитное поле всегда порождает вихревое электрическое поле. Далее, следуя внутреннему ощущению симметрии физических законов, он постулирует факт, не подкрепленный в то время никакими экспериментами: переменное во времени электрическое поле всегда, в свою очередь, порождает магнитное поле. Придав этим физическим утверждениям математически симметричную форму (уравнения Максвелла), он завершил построение единой теории электромагнитного поля.

После всех этих рассуждений может показаться, что закон электромагнитной индукции описывает два

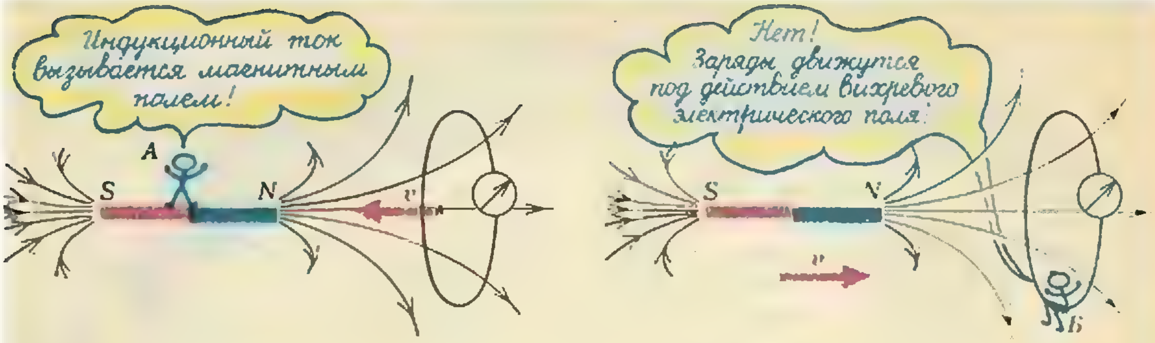

Индукционный ток вызывается магнитным полем!
A
S
N
v
Нет! Заряды движутся под действием вихревого электрического поля!
S
N
v
Б

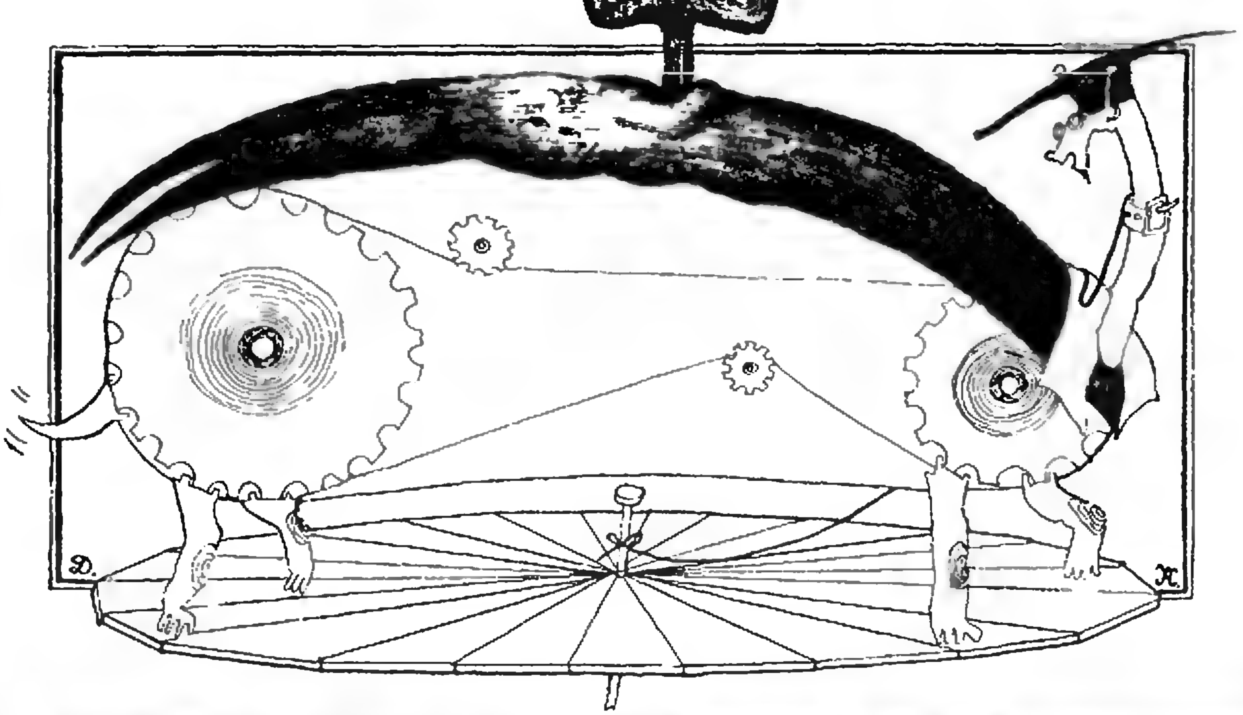
Рис. 3.

совершенно разных физических явления. В постоянном магнитном поле индукционный ток в движущемся контуре вызывается самим магнитным полем, а изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, которое и заставляет заряды двигаться вдоль неподвижного контура. Так почему же закон электромагнитной индукции для этих случаев один и тот же? Что это — удивительное совпадение? Оказывается, в этом «совпадении» проявляется глубокая связь теории электромагнитного поля со специальной теорией относительности, в основе которой лежит принцип относительности Эйнштейна. (Основные идеи специальной теории относительности были сформулированы Эйнштейном в 1905 году.) Согласно этому принципу все явления природы (не только законы механики, как это следует из принципа относительности Галилея) должны происходить одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Важное следствие этого принципа заключается, в частности, в том, что нельзя однозначно, вне зависимости от системы отсчета, сказать, какие поля существуют в окружающем пространстве.

Рассмотрим в качестве примера взаимодействие двух электронов с точки зрения двух наблюдателей (рис. 2). Наблюдатель *А* утверждает, что движущиеся заряды создают вокруг себя как электрическое, так и магнитное поле, и кроме кулоновского отталкивания между ними действует магнитное притяжение (как между параллельными токами). Наблюдатель *Б* не согласен с ним и утверждает, что магнитного поля нет, раз заряды покоятся, и между электронами действует только кулоновское отталкивание. Принцип же относительности примиряет обоих наблюдателей, утверждая, что оба они правы, поскольку понятия электрического и магнитного полей являются относительными, зависящими от системы отсчета. Оба эти поля выступают как части единого целого — электромагнитного поля.

Вернемся, однако, к закону Фарадея и представим себе следующий мысленный эксперимент. Будем сближать постоянный магнит и замкнутый проводящий контур (рис. 3). Гальванометр, включенный в контур, зафиксирует индукционный ток. Отклонение стрелки гальванометра увидят как наблюдатель *А*, который стоит на магните, так и наблюдатель *Б*, сидящий на контуре. «Все ясно, — скажет наблюдатель *А*, — контур движется в постоянном поле моего магнита, на заряды в контуре действует сила Лоренца — вот и течет ток!». Наблюдатель *Б* скажет иное: «Магнит приближается к моему неподвижному контуру. Изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле — оно и создает ток в контуре!». Но, по Эйнштейну, оба наблюдателя правы. Оба они видят одно и то же отклонение стрелки гальванометра, т. е. один и тот же результат проявления закона Фарадея. А это означает, что и сам закон Фарадея, конечно же, должен быть одинаковым для обоих рассмотренных случаев.

А. И. Черноуцан



Искусство программирования

Язык Лого

Урок 2: Черепашья академия

А. А. ДУВАНОВ, Ю. А. ПЕРВИН

Арифметика Лого.

ЭВМ, конечно же, должна уметь вычислять. Мы можем набрать на клавиатуре команду ВПЕРЕД 10+20. Машина сложит 10+20 и пошлет Черепаху на 30 шагов вперед. Во всех ранее введенных командах вместо конкретного числа шагов или градусов поворота можно использовать арифметическое выражение. Машина выполнит указанные в нем действия, округлит результат до ближайшего целого числа и будет использовать это число как параметр команды. Так, движения исполнителя будут совершенно одинаковы при выполнении команд

```
НАЗАД (100+20)/5 и НАЗАД 24
ВПРАВО 30—200/(2+3) и ВПРАВО —10
ВЛЕВО 20/3 и ВЛЕВО 7.
```

В языке Лого в качестве знаков арифметических операций используются:

- + операция сложения;
- — операция вычитания;
- ✱ операция умножения;
- / операция деления.

Круглые скобки служат, как обычно, для управления порядком действий. Выражения должны быть «вытянуты» в строку: (2+7)/5, а «многоэтажные» записи типа $\frac{2+7}{5}$ недопустимы. Это ограничение связано с тем, что на клавиатуре ЭВМ все символы выражения можно набирать только последовательно. Все знаки в арифметическом выражении должны быть явно указаны. Запись вида ВПЕРЕД (3+7) (40+30) заставит машину признаться:

```
НЕПОНЯТНО ЧТО ТАКОЕ (3+7) (40+30)
```

Правильно следует писать: ВПЕРЕД (3+7)✱(40+30). Десятичные дроби в Лого записываются как обычно, но вместо запятой для отделения дробной части используется точка.

Черепаха одинаково среагирует на команды:

```
ВПЕРЕД 2✱(48+3)/2.5 и ВПЕРЕД 40
ВПРАВО 180/3.14 и ВПРАВО 57
```

Все эти, не совсем привычные, правила записи арифметических выражений не имеют никакого отношения к самому предмету программирования и связаны лишь с несовершенством нынешних машин, но в силу этого становятся суровой необходимостью, когда действительно нужно задать программу реальной ЭВМ.

Коль скоро ЭВМ может считать, естественно, что она умеет выводить на экран результаты своих вычислений. Для того, чтобы заставить машину напечатать на экране результат деления 25 на 4, достаточно дать ей команду:

```
ПИШИ 25/4
```

Выполняя команду, ЭВМ зажигает на экране результат: 6.25. Заметьте, без округления! Дело в том, что округляются только параметры команд, заставляющих Черепаху перемещаться. И в самом деле, ведь единицей перемещения является число «шагов» — точек экрана, которое должно быть целым. Машина же умеет вычислять (и выдавать) результат с весьма высокой точностью.

Задача 1 (на тренировку записи выражений). а) Запишите команду НАЗАД без знаков операций, выполняющую то же действие, что и команда НАЗАД (42✱5/7—15)/7; б) Заставьте машину сосчитать арифметическое выражение

$$\frac{5}{6}\left(\frac{21}{0,56}+\frac{6}{19}-21,31\right).$$

Так необходимые имена

... Мою подругу зовут Валентина. Правда, красивое имя?

... Кис-кис! Феропонт, котик, иди сюда.

... Величина, именуемая x, не может принимать нулевое значение, когда она является знаменателем дроби $1/x$.

Имена служат удобным средством для идентификации людей, животных, предметов, понятий, явлений, т. е. для выделения конкретного объекта среди других, однотипных с ним. В языках программирования имена так и называются — *идентификаторы*. Как и в математике, они обозначают переменные величины. Идентификатором в Лого может быть произвольное слово, такое как $x1$, СТОРОНА или ВАСЯ. Идентификатором, как ярлыком, помечается некоторая область в памяти ЭВМ, где хранится значение переменной. Чтобы различить, когда идет речь об именуемой области памяти, а когда о ее содержимом, в Лого в первом случае перед идентификатором переменной ставят кавычку, а во втором — двоеточие. Так, запись "X означает имя переменной X, а запись :X — значение этой переменной.

В Лого существует специальная команда СДЕЛАЙ, называемая *командой присваивания*, при помощи которой переменным можно присваивать значения. Например, при выполнении команды

```
СДЕЛАЙ "X 1
```

ЭВМ запишет в область памяти, отведенную переменной X, числовое значение 1, а выполнение следующей за ней команды

```
СДЕЛАЙ "X :X+1
```

приведет к увеличению значения переменной X на 1, так что X получит значение 2.

Итак, в команде присваивания — три части: обязательное (ключевое) слово СДЕЛАЙ, идентификатор переменной и выражение. По этой команде сначала вычисляется арифметическое выражение. Если в нем есть переменные, то эти значения извлекаются из соответствующих областей памяти и подставляются в выражение. Результат вычислений становится значением переменной, идентификатор которой располагается непосредственно за словом СДЕЛАЙ. Вот пример:

```
СДЕЛАЙ "ВАСЯ 2
СДЕЛАЙ "ВАСЯ :ВАСЯ ✱ :ВАСЯ +1
```

(переменная ВАСЯ получает значение 5). Рассмотрим другой пример, связанный уже с геометрией.

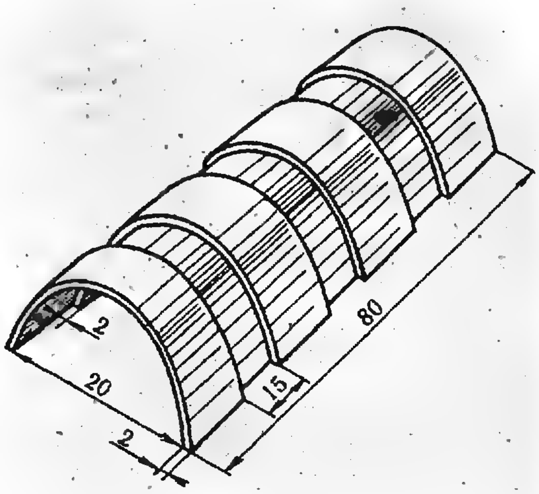


Рис. 1.

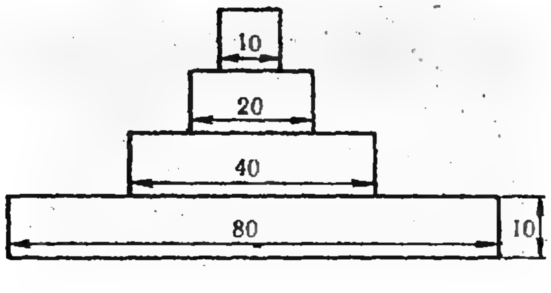


Рис. 2.

```
СДЕЛАЙ СТОРОНА 100 СДЕЛАЙ •УГОЛ 180
ПОВТОРИ 4 [В :СТОРОНА П :УГОЛ/2]
ПОВТОРИ 4 [В :СТОРОНА/2 П :УГОЛ/2]
```

(нарисованы два вложенных друг в друга квадрата, с совмещенным левым нижним углом).

Задача 2. Составьте программу, вычисляющую объем ангара, изображенного на рисунке 1.

Процедуры с параметром

Занимаясь арифметикой и рассуждая об именах, мы совсем забыли нашу Черепаху, которая весьма умело чертит ... если ею правильно управлять. Давайте научим Черепаху рисовать вот такую «пирамиду» (рис. 2).

Задача решается при помощи вызова процедуры ПИРАМИДА, описание которой имеет вид

```
ЭТО ПИРАМИДА
     ПРЯМОУГОЛЬНИК1
     НР В 10 П 90 В 20 Л 90 Р
     ПРЯМОУГОЛЬНИК2
     НР В 10 П 90 В 10 Л 90 Р
     ПРЯМОУГОЛЬНИК3
     НР В  10 П 90 В 5 Л 90 Р
     ПРЯМОУГОЛЬНИК4
КОНЕЦ
```

Здесь использованы четыре «прямоугольных» процедуры:

```
ЭТО ПРЯМОУГОЛЬНИК1
     ПОВТОРИ 2 [В 10 П 90 В 80 П 90]
КОНЕЦ
ЭТО ПРЯМОУГОЛЬНИК2
     ПОВТОРИ 2 [В 10 П 90 В 40 П 90]
КОНЕЦ
ЭТО ПРЯМОУГОЛЬНИК3
     ПОВТОРИ 2 [В 10 П 90 В 20 П 90]
КОНЕЦ
ЭТО ПРЯМОУГОЛЬНИК4
     ПОВТОРИ 2 [В 10 П 90 В 10 П 90]
КОНЕЦ
```

Они очень похожи друг на друга.

В таком случае можно записать всего одну процедуру с параметром, вынесенным в заголовок описания процедуры и названным, например, СТОРОНА. Тогда в описании процедуры вместо размера стороны прямоугольника будет фигурировать имя СТОРОНА, обозначающее значение из таким образом поименованной области памяти.

```
ЭТО ПРЯМОУГОЛЬНИК :СТОРОНА
     ПОВТОРИ 2 [В 10 П 90 В :СТОРОНА
     П 90]
КОНЕЦ
```

Параметр процедуры, представляющий собой имя переменной, называется параметром описания процедуры, или ее *формальным параметром.*

Наша процедура вызывается к исполнению при помощи команды

ПРЯМОУГОЛЬНИК a,

где a — арифметическое выражение (в частности, число), называемое *фактическим параметром* процедуры, или параметром вызова. Вызов происходит так: формальному параметру СТОРОНА выделяется область свободной памяти (возможно при каждом вызове разная); вычисляется фактический параметр и его значение помещается в выделенную для формального параметра область; выполняются команды тела процедуры; после этого область памяти, временно отведенная под параметр, объявляется свободной.

Переменная, для которой место в памяти отводится каждый раз заново в момент вызова процедуры, называется *локальной переменной* этой процедуры. Формальные параметры процедуры в Лого — это локальные переменные.

Даже если несколько процедур используют одинаково поименованные формальные параметры, это не опасно для программы, вызывающей эти процедуры. Действительно, формальные параметры локальны, и значит, будучи занятыми во время выполнения некоторой процедуры, соответствующие области памяти освобождаются к ее завершению и могут быть использованы под любым (и в том числе, тем же самым) именем в других процедурах. Таким образом, локальность формальных параметров позволяет распределять составление сложной программы, включающей несколько процедур, между целым коллективом программистов. В следующем примере

```
ЭТО A :X :Y
     ВПЕРЕД :X ВПРАВО :Y ВПЕРЕД :X
КОНЕЦ
СДЕЛАЙ •T 45
A :T :T∗2
```

переменные X, Y — формальные, а выражения $:T$ и $:T*2$ — фактические параметры процедуры A. Соот-

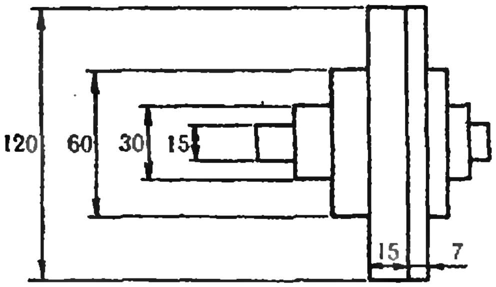


Рис. 3.

ветствие между формальными и фактическими параметрами — позиционное: первый формальный параметр соответствует первому фактическому, второй — второму и т. д.

Вернемся теперь к нашей пирамиде.

```
ЭТО ПИРАМИДА
     ПРЯМОУГОЛЬНИК 80
     НР В 10 П 90 В 20 Л 90 Р
     ПРЯМОУГОЛЬНИК 40
     НР В 10 П 90 В 10 Л 90 Р
     ПРЯМОУГОЛЬНИК 20                    (1)
     НР В 10 П 90 В 5 Л 90 Р
     ПРЯМОУГОЛЬНИК 10
КОНЕЦ
```

Задача 3. В программе (1) четырежды повторяется вызов процедуры ПРЯМОУГОЛЬНИК, правда, с разным, но закономерно изменяющимся фактическим параметром. Проанализировав закономерности программы, составьте описание процедуры с параметром ПИРАМИДА :ОСНОВАНИЕ, где вызов процедуры ПРЯМОУГОЛЬНИК осуществлялся бы внутри цикла. Предложите, по крайней мере, два варианта такой программы. Объясните, какой из них и почему, по вашему мнению, лучше. Используйте вашу программу для рисования пирамиды с основанием 120.

Программисты стараются всегда, когда это возможно, сделать свои программы универсальными.

Задача 4. Расширьте возможности предыдущей программы, описав процедуру, которая рисует пирамиду с произвольной высотой кольца. Нарисуйте с помощью вашей новой программы рисунок, составленный из двух пирамид (рис. 3).

Правильные многоугольники

Рисуя правильные многоугольники с тремя, четырьмя, пятью, ... сторонами (рис. 4), легко убедиться, что с возрастанием числа сторон фигура становится все более «круглой». На правильном шестиугольнике уже вполне можно ехать, как на колесе, если он достаточно мал (рис. 5)!

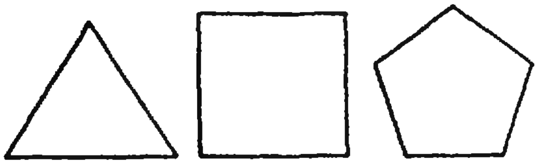


Рис. 4.

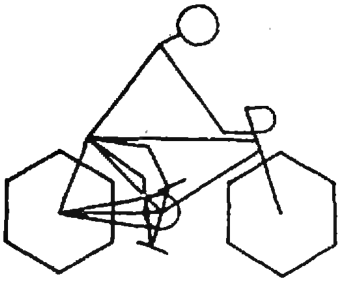


Рис. 5.

Угол правильного n-угольника равен $180-360/n$ градусов. Значит, Черепаха после отрисовки каждой стороны должна поворачиваться на дополнительный угол, равный $360/n$ градусов. Вот описание процедуры для построения произвольного правильного n-угольника:

```
ЭТО ПРАВИЛЬНЫЙ :N :СТОРОНА
     ПОВТОРИ :N [В :СТОРОНА П 360/N]
КОНЕЦ
```

Вызов

```
     ПРАВИЛЬНЫЙ 4 100
```

нарисует на экране квадрат со стороной 100, а вызов

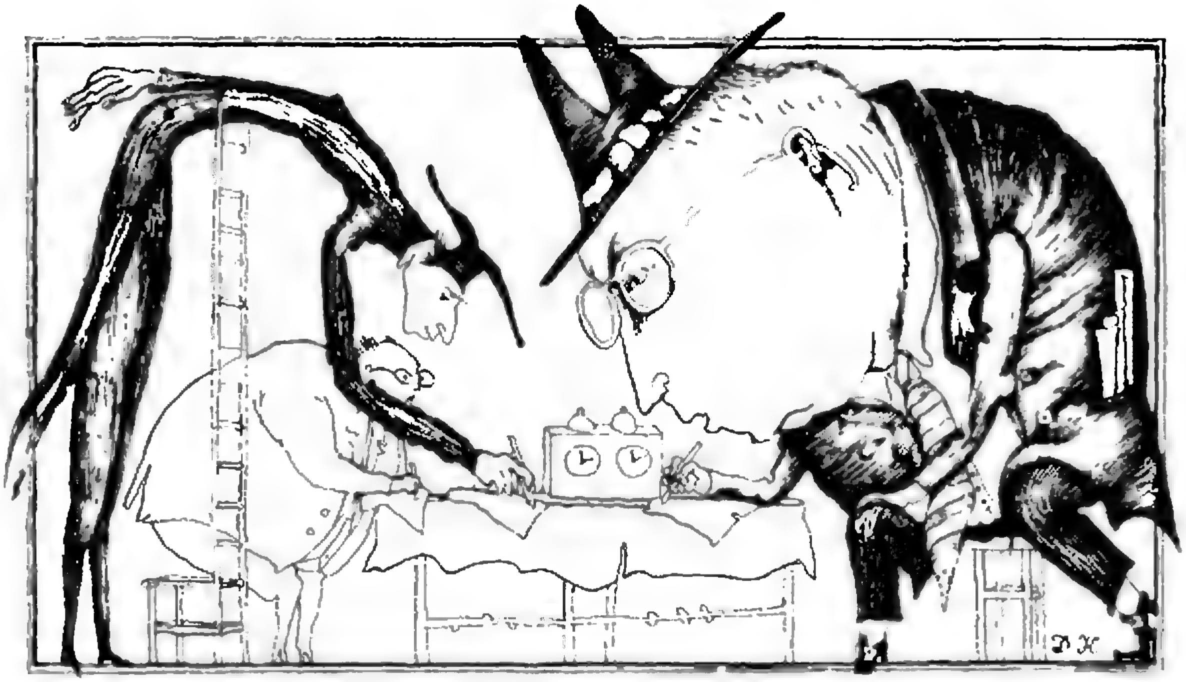
```
     ПРАВИЛЬНЫЙ 8 20
```

— правильный восьмиугольник со стороной 20. Наконец, рисунок правильного 360-угольника со стороной 1 — это вызов

```
     ПРАВИЛЬНЫЙ 360 1
```

Это наилучшее приближение окружности, создаваемое Черепахой, которая не умеет поворачиваться на углы, меньше 1 градуса, и перемещаться на расстояния, меньше 1 черепашьего шага. Длина этой окружности 360 шагов, а радиус $R=360/2\pi$, т. е. приблизительно 57 шагов. Увеличить ее радиус можно, если при обращении к процедуре ПРАВИЛЬНЫЙ будет увеличена сторона. А вот уменьшить радиус можно, только уменьшив число сторон многоугольника.

Задача 5. Придумайте процедуру ОКРУЖНОСТЬ с одним параметром РАДИУС. Она должна рисовать наилучшее возможное приближение к окружности заданного радиуса. Точку расположения Черепахи на экране используйте в качестве центра окружности, в которую исполнитель должен вернуться после завершения рисования.



Практикум абитуриента

Решение систем тригонометрических уравнений

Кандидат физико-математических наук
А. А. БОЛИБРУХ,
кандидат физико-математических наук
В. М. УРОЕВ,
профессор М. И. ШАБУНИН

В данной заметке на примерах задач, предлагавшихся в разные годы на вступительных экзаменах в МФТИ (письменных и устных), приведены некоторые способы решения систем тригонометрических уравнений.

Напомним определения, относящиеся к любым, не обязательно тригонометрическим, системам. Если каждое решение одной системы является решением другой системы, то вторая система называется *следствием* первой. Если первая система является следствием второй, а вторая — следствием первой, то такие системы называются *равносильными*.

Укажем некоторые преобразования систем, в результате которых получаются системы, равносильные исходной.

1. Любое уравнение системы можно заменить равносильным ему уравнением.

2. Любое уравнение системы можно заменить уравнением, которое получается сложением данного с другим уравнением системы.

3. Значение неизвестного, найденное из некоторого уравнения системы, можно подставить в любое другое уравнение той же системы.

4. К системе можно добавить уравнение, являющееся следствием данной системы.

5. Если система содержит уравнение $f \cdot g = 0$, где функции f и g определены на одном и том же множестве, то она равносильна совокупности двух систем, в одной из которых уравнение $f \cdot g = 0$ заменено уравнением $f = 0$, а в другой — уравнением $g = 0$.

Приступая к решению системы тригонометрических уравнений, целесообразно вначале проверить, нельзя ли непосредственно из какого-либо уравнения системы выразить одно из неизвестных через другие.

Задача 1 (МФТИ, 1983). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y, & (1) \\ \sin 2y - \sqrt{2} \sin x = 1. & (2) \end{cases}$$

Решение. Исходная система имеет смысл лишь в случае, когда определены функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$, т. е. выполняются условия

$$\cos x \ne 0, \quad \cos y \ne 0. \qquad (3)$$

Рассмотрим первое уравнение. Естественно было бы разделить обе его части на $1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$ и воспользоваться формулой тангенса суммы. Тогда уравнение (1) можно было бы переписать в виде

$$\operatorname{tg}(x + y) = 1; \qquad (4)$$

но при этом мы можем потерять те решения системы (1), (2), для которых

$$1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 0. \qquad (5)$$

Однако легко убедиться в том, что система (1), (2), (5) не имеет решений. В самом деле, если бы существовали решения этой системы, то из уравнения (1) следовало бы, что $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0$. Но тогда уравнение (5) приняло бы вид $1 + \operatorname{tg}^2 y = 0$, и следовательно, оно бы решений не имело.

Таким образом, исходная система при условии (3) равносильна системе (2), (4).

Из уравнения (4) находим $x + y = \pi/4 + \pi n$, т. е.

$$y = \pi/4 + \pi n - x, \quad n \in \mathbf{Z}. \qquad (6)$$

Теперь найденное для y выражение подставим в уравнение (2) исходной системы:

$$\sin(\pi/2 - 2x + 2\pi n) - \sqrt{2} \sin x = 1.$$

Полученное уравнение приводится к виду $\sin x (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0$, откуда

а) $\sin x = 0, \quad x = \pi m, \quad m \in \mathbf{Z}$,

б) $\sin x = -\sqrt{2}/2$,
$x = (-1)^{k+1}\pi/4 + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

По формуле (6) определяем соответствующие значения y. Для серии а)

$$y = \pi/4 + \pi(n - m), \quad n, m \in \mathbf{Z}; \ (7)$$

для серии б)

$$y = \pi/4 - (-1)^{k+1}\pi/4 + \pi(n - k), \quad n, k \in \mathbf{Z}. \qquad (8)$$

Значения (x, y) из формулы (7) удовлетворяют условию (3). Для серии (8) требуется дополнительное исследование. Если $\sin x = -\sqrt{2}/2$, то $\cos x \ne 0$, так что первое неравенство условия (3) заведомо выполнено. Второе неравенство $\cos y \ne 0$ выполняется не всегда.

Если k — четное число, т. е. $k = 2p$, где $p \in \mathbf{Z}$, то по формуле (8) находим $y = \pi/2 + \pi(n - 2p)$. Для этих значений y условие (3) не выполняется. Если же k — нечетное число, т. е. $k = 2p - 1$, где $p \in \mathbf{Z}$, то $y = \pi(n - 2p + 1)$ и условие (3) выполнено. Соответствующие значения x находим по формуле б): $x = -3\pi/4 + 2\pi p$.

Ответ: $(\pi m;\ \pi/4 + \pi(n - m))$, $(-3\pi/4 + 2\pi p;\ \pi(n - 2p + 1))$, $m, n, p \in \mathbf{Z}$.

Целочисленные параметры, входящие в запись решений системы, нельзя обозначать одной буквой. Это означало бы, что они обязаны принимать одинаковые значения, в то время как в действительности они принимают какие-угодно целые значения — одинаковые или разные.

В дальнейшем k, l, m, n, p, r, s, t, если не оговорено противное, принимают все целые значения.

Задача 2. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -1/2, \\ \cos x \cdot \sin y = 1/2. \end{cases} \qquad (9)$$

Решение. Сложив уравнения системы (9), а затем вычтя из второго уравнения первое, получим систему, равносильную системе (9):

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ \sin(y - x) = 1, \end{cases}$$

откуда последовательно находим

$$x + y = \pi n, \quad y - x = \pi/2 + 2\pi k,$$
$$x = \pi(n/2 - k - 1/4),$$
$$y = \pi(n/2 + k + 1/4).$$

Ответ: $(\pi(n/2 - k - 1/4);\ \pi(n/2 + k + 1/4))$.

Так же, как систему (9), можно решить любую систему вида

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a, \\ \cos x \cdot \cos y = b. \end{cases}$$

К таким системам приводятся, например, системы

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = b, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} y = b. \end{cases}$$

Если система содержит только две комбинации тригонометрических функций либо приводится к таковой, то, обозначив эти комбинации функций за новые неизвестные, можно свести исходную систему к алгебраической.

Задача 3. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 1 + \cos y - \sin y, \\ 3 \sin 2x - 2 \sin 2y = 3/4. \end{cases} \qquad (10)$$

Решение. Воспользуемся тождеством

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

и обозначим

$$\cos x - \sin x = u, \quad \cos y - \sin y = v; \qquad (11)$$

тогда

$$\sin 2x = 1 - u^2, \quad \sin 2y = 1 - v^2,$$

и система (10) сводится к алгебраической системе

$$\begin{cases} u = 1 + v, \\ 3u^2 - 2v^2 = 1/4. \end{cases} \qquad (12)$$

Система (12) имеет два решения:

$$u_1 = -9/2, \quad v_1 = -11/2 \quad \text{и} \quad u_2 = 1/2, \quad v_2 = -1/2.$$

Рассмотрим вначале значения u_1, v_1. Возвращаясь к исходным переменным, по формулам (11) получаем:

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = -9/2, \\ \cos y - \sin y = -11/2. \end{cases} \qquad (13)$$

Но уже первое уравнение системы (13) решений не имеет, так как

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x + \pi/4) \geqslant \geqslant -\sqrt{2} > -9/2.$$

Следовательно, система (13) решений не имеет.

Рассмотрим теперь значения u_2 и v_2. Вновь по формулам (11) получим

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 1/2, \\ \cos y - \sin y = -1/2. \end{cases}$$

Для первого уравнения находим

$$\cos x \cdot 1/\sqrt{2} - \sin x \cdot 1/\sqrt{2} = 1/2\sqrt{2}, \quad \cos(x + \pi/4) = 1/2\sqrt{2},$$

$$x + \pi/4 = \pm\arccos(1/2\sqrt{2}) + 2\pi n,$$

$$x = -\pi/4 \pm \arccos(1/2\sqrt{2}) + 2\pi n.$$

Точно так же получаем

$$y = -\pi/4 \pm \arccos(-1/2\sqrt{2}) + 2\pi m.$$

Таким образом, найдем следующие решения исходной системы:

$$(-\pi/4 \pm \arccos(1/2\sqrt{2}) + 2\pi n; \; -\pi/4 \pm \arccos(-1/2\sqrt{2}) + 2\pi m)$$

(знаки выбираются независимо друг от друга).

В некоторых случаях систему удается привести к виду

$$\begin{cases} \sin x = f(y), \\ \cos x = g(y), \end{cases} \qquad (14)$$

откуда в силу основного тригонометрического тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ получаем уравнение $f^2(y) + g^2(y) = 1$, содержащее лишь одно неизвестное.

Если система приведена к виду

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = f(y), \\ \operatorname{ctg} x = g(y), \end{cases}$$

то неизвестное x исключается перемножением уравнений: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$, откуда $f(y) \cdot g(y) = 1$.

При таких способах решения необходимо внимательно следить за тем, чтобы не потерять решений и не приобрести посторонних решений.

Задача 4 (МФТИ, 1978). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} 4\sin x - 2\sin y = 3, \\ 2\cos x - \cos y = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Решение. Систему (15) можно привести к виду (14). Сделав это, получим равносильную систему

$$\begin{cases} \sin x = 3/4 + 1/2 \cdot \sin y, \\ \cos x = 1/2 \cdot \cos y. \end{cases} \qquad (16)$$

Возводя почленно уравнения системы (16) в квадрат и складывая, получаем уравнение, являющееся следствием системы (16):

$$1 = \frac{9}{16} + \frac{3}{4}\sin y + \frac{1}{4}\sin^2 y + \frac{1}{4}\cos^2 y,$$

или

$$\sin y = 1/4, \qquad (17)$$

откуда

$$y = (-1)^n \arcsin 1/4 + \pi n. \qquad (18)$$

Из первого уравнения системы (16) с учетом (17) находим $\sin x = 7/8$,

$$x = (-1)^m \arcsin 7/8 + \pi m. \qquad (19)$$

Поскольку при решении системы (15) могли появиться посторонние решения (использовалась операция возведения в квадрат), необходимо произвести отбор, подставив найденные значения (18), (19) во второе уравнение этой системы.

Легко видеть, что при четных m и n в формулах (18), (19) соответствующие значения $\cos x$ и $\cos y$ положительны, а при нечетных m и n эти значения отрицательны. Таким образом, $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{15}/8$, $|\cos y| = \sqrt{15}/4$, так что для выполнения второго уравнения системы (16) требуется только, чтобы знаки $\cos x$ и $\cos y$ совпадали. Отсюда получаем

$$\begin{cases} x = \arcsin \frac{7}{8} + 2\pi k, \\ y = \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi l, \end{cases} \qquad (20)$$

$$\begin{cases} x = -\arcsin \frac{7}{8} + (2k + 1)\pi, \\ y = -\arcsin \frac{1}{4} + (2l + 1)\pi. \end{cases}$$

Обе полученные серии (20) можно объединить и ответ записать в следующем виде.

Ответ:

$$\left((-1)^p \arcsin\frac{7}{8}+\pi p,\right.$$
$$\left.(-1)^p \arcsin\frac{1}{4}+\pi(p+2r)\right).$$

При решении тригонометрических систем часто бывает непросто сделать первый шаг, найти «ключ» к решению задачи. Какие-то общие рекомендации здесь дать нельзя. Можно лишь посоветовать стараться применять такие преобразования уравнений системы, которые приводят к появлению тригонометрических функций одного аргумента или хотя бы не увеличивают число функций с разными аргументами.

Задача 5 (МФТИ, 1982). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} 3\cos 3x=\sin(x+2y), \\ 3\sin(2x+y)=-\cos 3y. \end{cases} \qquad (21)$$

Решение. Если выразить члены уравнений через синусы и косинусы аргументов x и y, то получится довольно сложная система. Поэтому следует избрать другой способ решения.

Заметим, что сумма аргументов косинусов в уравнениях системы, равная $3x+3y$, совпадает с суммой аргументов синусов. Учитывая это, перемножим уравнения системы (21) «крест-накрест», т. е. умножим левую часть одного уравнения на правую часть другого. Получим уравнение

$$-\cos 3x\cos 3y = \\ =\sin(x+2y)\sin(2x+y), \qquad (22)$$

являющееся следствием системы (21).

Заменим в уравнении (22) произведения тригонометрических функций соответствующими суммами (разностями); получим после приведения подобных $\cos(x-y)+\cos(3x-3y)=0$, откуда $2\cos(x-y)\cdot\cos(2x-2y)=0$. Это уравнение распадается на два уравнения:

$$\cos(x-y)=0, \qquad (23)$$
$$\cos(2x-2y)=0. \qquad (24)$$

Следовательно, система (21) равносильна совокупности систем (21), (23) и (21), (24).

а) Из уравнения (23) следует, что

$$x=y+\pi/2+\pi n. \qquad (25)$$

Подставляя x из (25) в систему (21), получаем:

$$\begin{cases} 3\cos(3y+3\pi/2+3\pi n)= \\ =\sin(3y+\pi/2+\pi n), \\ 3\sin(3y+\pi+2\pi n)=-\cos 3y. \end{cases}$$

Оба уравнения этой системы приводятся к виду $3\sin 3y=\cos 3y$, откуда $y=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi m}{3}$. Из (25) находим соответствующие значения x.

б) Рассмотрим теперь систему (21), (24). Из уравнения (24) находим $x=y+\pi/4+\pi k/2$. Подставляя это значение в систему (21), получаем:

$$\begin{cases} 3\cos(3y+3\pi/4+3\pi k/2)= \\ =\sin(3y+\pi/4+\pi k/2), \\ 3\sin(3y+\pi/2+\pi k)=-\cos 3y. \end{cases} \qquad (26)$$

Далее воспользуемся формулами приведения. Из второго уравнения системы (26) следует, что $\cos 3y=0$, т. е. $y=\pi/6+\pi p/3$. Подставляя это значение в первое уравнение, получаем

$$3\cos(\pi p+\pi/2+3\pi/4+3\pi k/2)= \\ =\sin(\pi p+3\pi/4+\pi k/2),$$

откуда $(3(-1)^k+1)\sin(3\pi/4+\pi k/2)=0$. Последнее равенство не выполняется ни при каких целых k, поэтому система (26) несовместна, и в случае б) решений нет.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi m}{3}+\right.$ $\left.+\pi n;\ \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi m}{3}\right)$.

Упражнения

Решите системы уравнений:

1 (МФТИ, 1982).

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y-\operatorname{tg} x=1+\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y, \\ \cos 2y+\sqrt{3}\cos 2x=-1. \end{cases}$$

2 (МФТИ, 1978).

$$\begin{cases} 6\cos x+4\cos y=5, \\ 3\sin x+2\sin y=0. \end{cases}$$

3 (МФТИ, 1982).

$$\begin{cases} 2\cos(3x+y)=\sin(x-y), \\ 2\sin(x+y)=\cos(3x-y). \end{cases}$$

4 (МФТИ, 1982).

$$\begin{cases} \sin(2x+y)+\sin(2x-y)=\sqrt{2}\cos y, \\ \operatorname{tg}(x+\pi/8)+\cos y=\operatorname{tg}^2 y. \end{cases}$$

5 (МФТИ, 1981).

$$\begin{cases} \cos 2y+1/2=(\cos y-1/2)(1+2\sin 2x), \\ \sin y(\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x)=3\operatorname{ctg} y. \end{cases}$$

6 (МФТИ, 1976).

$$\begin{cases} \sin^2 x+\cos y\cdot\sin x=\cos 2y, \\ \cos 2x+\sin 2y=\sin^2 y+3\cos y\cdot\sin x. \end{cases}$$

7 (МФТИ, 1978).

$$\begin{cases} \sqrt{1+\sin x\cdot\sin y}=\cos x, \\ 2\sin x\cdot\operatorname{ctg} y+1=0. \end{cases}$$

8 (МФТИ, 1986).

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x\cdot\sin y+2\operatorname{ctg} x\cos y=\sqrt{5/2}, \\ 2\operatorname{ctg} x\cdot\sin y-\operatorname{tg} x\cdot\cos y=\sqrt{5/2}. \end{cases}$$

9 (МФТИ, 1982). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x\cdot\sin y+2\operatorname{ctg} x\cdot\cos y=\sqrt{5/2}, \\ 2\operatorname{ctg} x\cdot\sin y-\operatorname{tg} x\cdot\cos y=\sqrt{5/2}. \end{cases}$$

Олимпиады

XXI Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
С. В. РЕЗНИЧЕНКО,
кандидат физико-математических наук
А. М. СЛИНЬКО

Заключительный этап XXI Всесоюзной математической олимпиады школьников проходил в апреле 1987 года во Фрунзе. В нем приняли участие 29 команд: 14 команд союзных республик, команды четырех зон РСФСР, Москвы и Ленинграда, а также 8 команд специализированных физико-математических школ и команда Фрунзе. Всего в олимпиаде участвовало 162 школьника: 3 семиклассника, 43 восьмиклассника, 58 девятиклассников и 58 десятиклассников (семиклассники решали задачи, предложенные для восьмиклассников).

Торжественное открытие олимпиады состоялось 12 апреля в здании филиала музея В. И. Ленина, а незадолго до него участники олимпиады возложили цветы к памятнику В. И. Ленину. С теплыми словами приветствия, пожеланиями успешного выступления и честного соперничества к участникам олимпиады при ее открытии обратились министр просвещения Киргизской ССР М. Б. Базаркулов, заведующий отделом школ, науки и учебных заведений ЦК КП Киргизии А. А. Акаев, старший методист Ученого методического совета Минпроса СССР Т. А. Сарычева, заведующая отделом школьной молодежи ЦК ЛКСМ Киргизии Л. М. Скудина, председатель жюри академик АН УССР Б. В. Гнеденко, зам. председателя жюри зам. директора института математики АН Киргизии доктор физико-математических наук А. Н. Боташев и другие. С письменным приветствием к участникам олимпиады обратился министр просвещения СССР С. Г. Щербаков.

С первых минут пребывания на гостеприимной земле Киргизии и на протяжении всей олимпиады участники были окружены теплотой и вниманием хозяев, превративших олимпиаду в настоящий праздник юных математиков. В программу олимпиады входили ставшие традиционными вечер дружбы народов СССР, встреча с учеными и передовиками предприятий республики, посещения театров и экскурсии. Надолго запомнится участникам экскурсия в Ала-Арчинское ущелье, где находится Всесоюзный альплагерь.

Заключительный этап олимпиады по традиции проводился в два тура, состоявшиеся 13 и 14 апреля. На каждом из них школьникам было предложено по четыре задачи, на решение которых отводилось по пять часов. Ниже приводятся условия всех задач олимпиады с указанием автора, предложившего задачу (звездочкой отмечены задачи, наиболее понравившиеся участникам и вошедшие в Задачник «Кванта»).

После проверки работ жюри олимпиады оценило каждую задачу в

№ задачи Класс	1	2	3	4	5	6	7	8
8	5	7	8	10	8	6	6	10
9	6	7	7	10	5	7	8	10
10	6	7	10	7	9	7	8	6

Таблица 1

Класс	I премия	II премия	III премия
8	3 (54—60)	9 (30—46)	14 (20—28)
9	3 (46—49)	15 (39—45)	10 (31—37)
10	5 (60)	6 (54—56)	8 (45—50)
Итого:	11	30	32

Таблица 2

баллах (см. таблицу 1); наивысший балл получала задача, с которой справилось наименьшее число участников. Затем на итоговом заседании жюри были выработаны критерии, на основании которых присуждались I, II и III премии участникам олимпиады (см. таблицу 2, в которой в скобках указано число баллов). Наиболее трудными задачами оказались задачи второго дня в 9 классе: последнюю (восьмую) задачу не решил полностью ни один участник олимпиады.

В программу олимпиады входили также Математический бой между командой участников и командой, составленной из членов жюри. На этот раз в упорной борьбе победила команда членов жюри, которую возглавлял победитель многих школьных олимпиад преподаватель МГУ С. В. Конягин. Очень интересно и увлекательно прошли «компьютерные игры».

13 апреля состоялась встреча участников олимпиады с членами редколлегии журнала «Квант»: зам. главного редактора журнала Ю. П. Соловьевым, членами редколлегии А. П. Савиным и В. В. Вавиловым и членом редакционного совета Г. Н. Яковлевым. На этой встрече участники получили ответы на интересующие их вопросы и высказали соображения о содержании уже опубликованных в журнале материалов, а также некоторые предложения по тематике статей и оформлению журнала в будущем.

Быстро и незаметно пролетели восемь дней олимпиады, но добрую память о ней ребята сохранят на долгие годы.

Задачи

Первый день

8 класс

1. Десять спортсменов участвовали в турнире по настольному теннису. Каждые два из них сыграли между собой ровно одну партию. Первый игрок одержал в ходе турнира x_1 побед и потерпел y_1 поражений, второй одержал x_2 побед и потерпел y_2 поражений и так далее. Докажите, что

$$x_1^2+\ldots+x_{10}^2=y_1^2+\ldots+y_{10}^2.$$

А. Анджанс

2. Известно, что с помощью набора из 6 гирь можно уравновесить 63 груза, веса которых являются последовательными натуральными числами. Найдите все такие наборы.

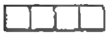
А. Слинько

3. Дан правильный семиугольник $A_1A_2\ldots A_7$. Докажите, что

$$\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}.$$

М. Розенберг

4. Игра «Морской бой» происходит в квадрате 7×7 клеток. Какое наименьшее число выстрелов необходимо сделать, чтобы наверняка ранить четырехпалубный корабль, если известно, что он

а) имеет вид ?

б) состоит из четырех клеток, примыкающих друг к другу сторонами?

А. Холодов

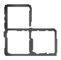
9 класс

1. Докажите, что ни при каком натуральном n число

$$1^{1987}+2^{1987}+\ldots+n^{1987}$$

не делится на $n+2$.

Д. Митькин

2. Какое наименьшее число фигур вида  нужно разместить в квадрате 8×8 клеток, чтобы в него нельзя было больше поместить без наложения ни одной такой фигуры?

А. Берзиньш

3. Параллельно сторонам треугольника проведены три прямые. Каждая из прямых удалена от стороны, которой они параллельны, на расстояние, равное длине этой стороны. При этом для каждой стороны треугольника параллельная ей прямая и противолежащая этой стороне вершина расположены по разные стороны от нее. Докажите, что точки пересечения продолжений сторон треугольника с тремя проведенными прямыми лежат на одной окружности.

Б. Чиник

4.* На плоскости даны две замкнутые ломаные, каждая с нечетным числом звеньев. Все прямые, содержащие звенья этих ломаных, различны, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что из каждой ломаной можно выбрать по одному звену так, чтобы они были противоположными сторонами некоторого выпуклого четырехугольника.

А. Сердюков, Д. Флаас

10 класс

1. Найдите такой набор из пяти различных натуральных чисел, в котором любые два числа взаимно просты, а любые несколько чисел дают в сумме составное число.

Н. Агаханов

2. Докажите, что если в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ имеют место равенства $\angle ABC=\angle ADE$ и $\angle AEC=\angle ADB$, то $\angle BAC=\angle DAE$.

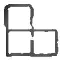
Н. Сергеев

3. Найдите все значения α, для каждого из которых последовательность

$$\cos\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \cos 4\alpha,\ \cos 8\alpha,\ \ldots$$

состоит только из отрицательных чисел.

В. Салихов

4. В квадрате из 1987×1987 клеток вырезана одна произвольная клетка. Докажите, что оставшуюся часть всегда можно разрезать на трехклеточные «уголки» вида .

Р. Стадья

Второй день

8 класс

5. Положительные числа a, b, c, A, B, C удовлетворяют условиям $a+A=b+B=c+C=k$. Докажите, что

$$aB+bC+cA<k^2.$$

Д. Флаас

6.* В каждой клетке квадратной таблицы 1987×1987 написано число, не превосходящее по модулю 1. В любом квадрате 2×2 данной таблицы сумма чисел равна 0. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не превосходит 1987.

А. Меркурьев

7. Вершина B угла ABC лежит вне окружности, а лучи BA и BC ее пересекают. Из точки K пересечения луча BA и окружности перпендикулярно биссектрисе угла проведена прямая, пересекающая окружность в точках K и P, а луч BC — в точке M. Докажите, что отрезок PM вдвое длиннее перпендикуляра, опущенного из центра окружности на биссектрису угла ABC.

С. Дужин

8.* Два игрока поочередно выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p. Правилами игры запрещается писать на доске делители уже выписанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

а) Выясните, что из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=10$, и укажите ее.

б) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=1000$.

Д. Фомин

9 класс

5. Дядька Черномор каждый вечер из 33 богатырей назначает на дежурство 9 или 10 по своему усмотрению. Через какое наименьшее число дней может оказаться, что каждый из богатырей выходил на дежурство одинаковое число раз?

Б. Ивлев

6.* На целочисленной решетке отмечено непустое множество узлов. Кроме того, задан конечный набор ненулевых векторов с целыми координатами. Известно, что если от любого отмеченного узла отложить все заданные векторы, то среди их концов будет больше отмеченных узлов, чем неотмеченных. Докажите, что отмеченных узлов бесконечно много.

Д. Флаас

7. Выпуклый p-угольник ($p\geqslant5$) разрезан по всем диагоналям. Докажите, что среди получившихся при этом частей найдутся части разной площади.

А. Анджанс

8. Множество T_0 состоит из всех чисел вида $(2^k)!$, где $k=0, 1, 2, \ldots$ При каждом значении $p=1, 2, \ldots, 1987$ множество T_p получается добавлением к множеству T_{p-1} всех чисел, представимых в виде суммы нескольких различных чисел из T_{p-1}. Докажите, что хотя бы одно натуральное число не принадлежит множеству T_{1987}.

С. Конягин

10 класс

5. См. задачу 8 для 8 класса.

6.* График функции $y=f(x)$, определенной на всей числовой прямой, переходит в себя при повороте на угол $\pi/2$ вокруг начала координат.

а) Докажите, что уравнение $f(x)=x$ имеет ровно одно решение.

б) Приведите пример такой функции.

А. Клюшин

7. Все грани выпуклого многогранника являются треугольниками. Докажите, что каждое ребро этого многогранника можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы в итоге из любой его вершины в любую другую можно было попасть, двигаясь только по красным ребрам, а также только по синим.

О. Ляшко

8. Докажите, что при любом натуральном значении n справедливо неравенство

$$(2n+1)^n\geqslant(2n)^n+(2n-1)^n.$$

Ю. Нестеренко

XXI Всесоюзная олимпиада по физике

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН

В этом году заключительный этап Всесоюзной олимпиады школьников по физике проходил в городе Таллине с 15 по 21 апреля. Торжественное открытие олимпиады состоялось 16 апреля, а уже на следующий день участники писали теоретический тур. Вот условия теоретических задач (как обычно, часть этих задач опубликована в Задачнике «Кванта» в двух предыдущих номерах журнала):

8 класс

1. Маленький упругий мячик отпускают с высоты $H=1$ м над полом, а на его пути закрепляют твердую пластинку, от которой он отскакивает. Какая скорость будет у мячика в момент удара о пол? Как нужно расположить пластинку, чтобы мячик ударился о пол как можно дальше от начальной точки? Чему равно это максимальное расстояние?

2. Папа Карло сделал для Буратино колпак из тонкой жести. Колпак имеет форму конуса высотой $H=20$ см с углом $\alpha=60^\circ$ при вершине. Будет ли этот колпак держаться на голове у Буратино, если его голова — гладкий шар диаметром $d=15$ см?

3. Выполняя лабораторную работу, студент опустил в сосуд с водой кипятильник, включил его в сеть и стал каждые 3 минуты записывать температуру. Данные этого опыта таковы:

25,2° — 26,4° — 27,6° — 28,7° — 29,7° — 30,6° — 31,5° — 32,3° — 33,1°.

Затем он охладил воду, положив в сосуд небольшой металлический образец, и вновь провел опыт. Вот результаты этого опыта:

22,6° — 23,8° — 25,0° — 26,0° — 27,0° —
28,0° — 28,9° — 29,8° — 30,6°.

Определите по этим данным теплоемкость образца. Напряжение сети $U=35$ В, ток через кипятильник $I=0{,}2$ А, температура в комнате $t=+20$ °С.

4. Для исследования солнечной батареи используется многопредельный вольтметр (он состоит из чувствительного микроамперметра и набора добавочных резисторов). Подключив его к батарее на пределе 1 В, мы получаем показание $U_1=0{,}7$ В. Переключив вольтметр на предел 10 В, мы получим $U_2=2{,}6$ В. Что получилось бы на пределе 100 В? Известно, что при неизменном освещении солнечная батарея ведет себя как обычный источник, последовательно к которому подключен резистор большого сопротивления.

9 класс

1. Длинная тонкая нить с грузом на конце переброшена через блок и привязана к носу модели лодки, которая может плыть по длинному прямолинейному каналу с водой (рис. 1). Лодку отпускают, а ее скорость (в см/с) записывают каждую секунду. К сожалению, сохранился только конец этой записи:

5,65—6,44—6,96—7,31—7,54—7,70
—7,80—7,86—7,91—7,94—7,96—7,97.

Определите по этим данным скорость лодки через 0,1 секунды после того, как ее отпустили.

2. Если полностью открыт кран холодной воды, а кран горячей воды закрыт (рис. 2), то ванна наполняется за $\tau_1=8$ мин, а если при этом на выходное отверстие насадить шланг с душем на конце, то это время увеличится до $\tau_2=14$ мин. Когда кран холодной воды закрыт, а кран горячей открыт полностью, время наполнения ванны $\tau_3=12$ мин. То же, но с душем на конце, дает $\tau_4=18$ мин. За какое время наполнится ванна, если полностью открыты оба крана? А если при этом насажен шланг с душем?

3. Тонкостенный сосуд непрерывно откачивают насосом, однако из-за наличия микротрещин в стенке сосуда в нем устанавливается неизменное давление $p_у=0{,}001$ мм рт. ст. Снаружи атмосферное давление нормальное — $p_0=760$ мм рт. ст., относительная влажность воздуха $\varphi=80$ %. Найдите давление паров воды в сосуде. Давление насыщенных паров воды при данной температуре $p_н=17{,}5$ мм рт. ст.

4. Для очистки воздуха от пыли, которая в обычных условиях оседает очень медленно, можно использовать тот факт, что пылинки заряжены. В первом опыте стеклянный цилиндр (высотой $H=1$ м и радиусом основания $R=0{,}1$ м) с пыльным воздухом помещают в электрическое поле напряженностью $E_1=1\cdot10^4$ В/м, направленное вдоль оси цилиндра. Через время $\tau=2$ мин вся содержавшаяся в цилиндре пыль осела на дно. Во втором опыте вдоль оси цилиндра натягивают тонкую проволоку и соединяют ее с источником высокого напряжения. Известно, что в этом случае напряженность поля $E\sim1/r$, где r — расстояние до оси. Напряжение источника подбирают так, чтобы напряженность электрического поля у стенок цилиндра была, как и в первом опыте, E_1. Считая пылинки одинаковыми, а заряды пылинок равными, определите время оседания всей пыли на стенки цилиндра во втором опыте. Пыли в воздухе немного, так что объемным зарядом можно пренебречь.

5. В схеме, приведенной на рисунке 3, амперметр показывает $I_1=20$ мА. Если батарейку $\mathcal{E}_x$ включить наоборот, ток увеличится до $I_2=35$ мА. Какой ток потечет в исходной схеме, если лампочку замкнуть накоротко? Вольтамперная характеристика лампочки приведена на рисунке 4.

10 класс

1. По одной из гипотез звезды образуются из межзвездной среды (космическая пыль) путем сжатия под действием гравитационных сил. Оцените время образования звезды из гигантского сферического облака космической пыли плотностью $\rho=2\cdot10^{-20}$ г/см³. Можно считать, что при сжатии частицы не обгоняют друг друга. Гравитационная постоянная $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг².

2. В одном из научно-фантастических романов описана ситуация, когда фотонная ракета полностью потеряла скорость в окрестностях массивной звезды. Запас горючего достаточен лишь для того, чтобы при однократном запуске двигателя выйти на круговую орбиту вокруг звезды. Но космонавтов это не устраивает. Они применяют такой маневр: за малое время расходуют три четверти горючего и раз-

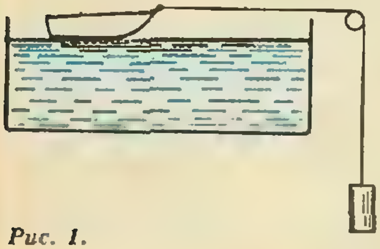


Рис. 1.

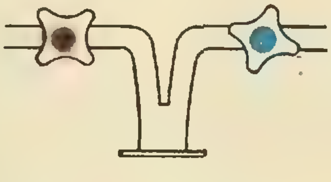


Рис. 2.

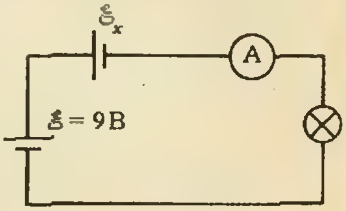


Рис. 3.

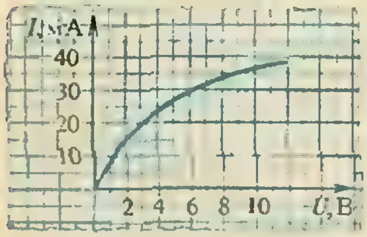


Рис. 4.

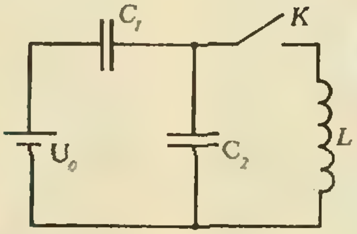


Рис. 5.

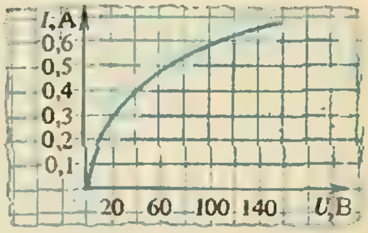


Рис. 6.

гоняют корабль, переходя на орбиту, которая касается поверхности звезды. Затем они еще раз включают двигатель на короткое время. На каком расстоянии от центра звезды корабль находится в момент начала маневра, если горючего в обрез хватило для выхода из поля тяготения звезды? Радиус звезды R.

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. В схеме, приведенной на рисунке 5, замыкают ключ K. Найдите максимальный ток через катушку L. Найдите также максимальное напряжение на конденсаторе C_1. Неидеальностью элементов схемы можно пренебречь.

5. Лампочку накаливания подключают к сети переменного напряжения (220 В, 50 Гц) последовательно с резистором сопротивлением $R=100$ Ом, а параллельно лампочке присоединяют диод. Считая диод идеальным, нарисуйте график зависимости тока через лампочку от времени. Найдите мощность, выделяемую на лампочке. Вольтамперная характеристика лампочки, снятая на постоянном токе, приведена на рисунке 6.

При подборе задач методическая комиссия обычно старается сделать так, чтобы вариант содержал задачи различной трудности — от довольно простых до весьма сложных. (Не всегда это в полной мере удается — мнения участников по поводу сложности задач порой не совпадают с мнением комиссии, причем комиссия чаще склонна преувеличивать сложность задач. Впрочем, бывает и наоборот.)

На этот раз, как и предполагалось, более сложными для участников оказались задачи 8.2, 9.2, 9.4, 10.1, 10.4 и 10.5. Относительно простыми были задачи 8.1, 8.4, 9.1, 9.5 и 10.3.

Порядок проведения олимпиады практически не изменился по сравнению с прошлым годом, поэтому мы не будем подробно описывать работу жюри (прочесть об этом можно в 11 номере «Кванта» за прошлый год).

В воскресенье 19 апреля состоялся экспериментальный тур. Участникам были предложены задачи, подготовленные хозяевами олимпиады — учеными Эстонии. Хочется отметить две из них, не требующие сложного оборудования. Их можно повторить не только в физическом кабинете, но и дома.

Первую делали восьмиклассники. Им были даны вырезанные из листа металла неправильные многоугольники, и нужно было без весов определить отношение их масс. Пользоваться можно было линейкой (деревянной), бумагой и карандашом. Попробуйте это сделать сами. Любопытно, что точность можно получить очень хорошую — до 1—2 %.

Вторая задача была предложена девятиклассникам. Довольно широко известна задача о длинной веревке, переброшенной через блок и сложенной бухтами по обе стороны от блока на подставках, расположенных на различных высотах. В этой задаче требуется определить скорость установившегося «перетекания» веревки через блок. Экспериментаторам же было предложено определить не только эту скорость (и зависимость ее от перепада высот), но и минимальную длину веревки, при которой движение успевает установиться, и время установления. Если вы будете делать работу самостоятельно, то возьмите тонкую бельевую веревку длиной 5—10 метров, блок не обязателен — стальной стержень вполне его заменит, если трение невелико. Самое интересное в этой задаче — объяснить большие расхождения между теоретически выведенным ответом $v=\sqrt{gH}$ и результатами эксперимента.

Кроме решения задач теоретического и экспериментального туров, участникам было предложено множество интересных мероприятий: очень веселый концерт после церемонии открытия олимпиады (он наверняка запомнился многим участникам и членам жюри), театральное представление, концерт ансамбля «Машина времени», вечера отдыха в школах, интересные экскурсии по городу и окрестностям, спортивные состязания, встреча с выпускниками и студентами МГУ и МФТИ, которые сами в прошлом были участниками и победителями таких олимпиад (известно, что участники всесоюзных олимпиад становятся, как правило, хорошими студентами — а хорошие студенты нужны всем, отсюда и интерес к ним со стороны солидных вузов), и еще многое — в том числе церемония закрытия олимпиады и награждение победителей.

Список призеров олимпиады, получивших дипломы I, II и III степени, вы можете прочесть в этом номере журнала. Но призы получили не только они — жюри присудило также немало специальных призов. По давней традиции приз получил участник, прибывший из самой отдаленной (от Таллина) точки нашей страны — Э. Ермолов из Сахалинской области. Специальный приз получил и самый молодой из участников — В. Ким из города Ангрен. Было еще много призов, среди которых отметим специальный приз имени академика И. К. Кикоина — его получил семиклассник из города Березняки С. Шинкевич, занявший I место среди восьмиклассников. Еще один специальный приз — подшивку журнала «Квант» за 1986 год с автографами членов редколлегии — получил самый молодой среди участников-хозяев олимпиады Л. Тоомет из города Тарту.

Мы желаем успехов всем участникам XXI Всесоюзной олимпиады школьников по физике.

Призеры XXI Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Виро А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Иванов Д. (Москва, с. ш. № 57),
Иванов С. (Ленинград, с. ш. № 533);

по 9 классам —
Берлов С. (Ленинград, с. ш. № 239),
Румынин Д. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Хохлов Ю. (Ленинград, с. ш. № 30);

по 10 классам —
Апситис К. (Рига, ФМШ № 1),
Борисов Л. (Минск, с. ш. № 19),
Каринский А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Озолс Д. (Рига, ФМШ № 1),
Черных А. (Краснодар, с. ш. № 40).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Гольднер В. (Кишинев, с. ш. № 40),
Дубнов Б. (Минск, с. ш. № 107),
Звайгзне В. (п/о Зелтыни Алуксненского района ЛатвССР, с. ш. № 1),
Кулик А. (Киев, с. ш. № 145),
Рагулин В. (Челябинск, с. ш. № 127),
Рогинская М. (Ленинград, с. ш. № 344),
Семенцов В. (Смоленск, с. ш. № 26),
Симановскис Р. (Рига, ФМШ № 1),
Скопенков А. (Саратов, с. ш. № 13);

по 9 классам —
Анисов С. (Харьков, с. ш. № 142),
Баран А. (Минск, с. ш. № 6),
Валиуллин М. (Казань, с. ш. № 94),
Гороховский А. (Киев, с. ш. № 79),
Гравит В. (Северодвинск, с. ш. № 27),
Грынив Р. (Львов, с. ш. № 62),
Жарков И. (Свердловск, с. ш. № 130),
Кокорев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Никоноров Ю. (с. ш. им. Муратбаева с. Михайловка Джамбульской области КазССР),
Пелевин О. (Кострома, с. ш. № 32),
Процак В. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Слитинский В. (Киев, с. ш. № 206),
Туляков Д. (Жданов, с. ш. № 7),
Филонов Н. (Ленинград, с. ш. № 30),
Христенко О. (Караганда, с. ш. № 63);

по 10 классам —
Борисов А. (Минск, с. ш. № 19),
Гринберг М. (Харьков, с. ш. № 27),
Дынников И. (Жуковский, с. ш. № 1),
Павлов С. (Черновцы, с. ш. № 4),
Пухов И. (Москва, с. ш. № 57),
Шанько Ю. (Красноярск, с. ш. № 10).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Бачурин А. (Стерлитамак, с. ш. № 2),
Бутвина С. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Вержбицкий П. (Устинов, с. ш. № 11),
Верченко М. (Армавир, с. ш. № 12),
Доброва Д. (Абакан, с. ш. № 20),
Калустов Г. (Ашхабад, с. ш. № 15),
Кожевников А. (Калуга, с. ш. № 24),
Лаба М. (Львов, с. ш. № 79),
Лапуста Н. (Терасполь, с. ш. № 3),
Межиров А. (Калинин, с. ш. № 37),
Подобряев А. (Волгоград, с. ш. № 31),
Сапрыкин А. (Новосибирск, с. ш. № 110),
Хасидовский М. (Ташкент, с. ш. № 110),
Яконский В. (с. ш. с. Бабин Гощанского района Ровенской области);

по 9 классам —
Бессолицын М. (Киров, с. ш. № 30),
Вайвадс А. (Рига, ФМШ № 1),
Варшавский Я. (Харьков, с. ш. № 27),
Вологодский В. (Омск, с. ш. № 91),
Вольфович Л. (Бельцы, с. ш. № 16),
Мищейките Р. (Вильнюс, с. ш. № 41),
Мороз В. (Гродно, с. ш. № 1),
Степанянц А. (Ереван, ФМШ при ЕрГУ),
Сарканс (Алуксне, с. ш. № 1),
Терехов А. (Алма-Ата, РФМШ);

по 10 классам —
Биндер И. (Ленинград, с. ш. № 239),
Когон Л. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Мельцер А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Меркулов Б. (Куйбышев, с. ш. № 11),
Пушня В. (Харьков, с. ш. № 27),
Райтумс И. (Рига, ФМШ № 1),
Смирнов С. (Ленинград, с. ш. № 239),
Стыркас К. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Шинкевич С. (Березники, с. ш. № 3);
по 9 классам —
Головин Д. (Тамбов, с. ш. № 29),

Дробышев М. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Кравченко Ю. (Москва, с. ш. № 820),
Малкин А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Мороз В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 10 классам —
Глущенков Д. (Ленингрвд, с. ш. № 239),
Гольдин А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ).

Дипломы II степени
по 8 классам получили
Жданов А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Мороз М. (Киев, с. ш. № 145),
Павлов С. (Владивосток, с. ш. № 58),
Фалькович Д. (Москва, с. ш. № 57);

по 9 классам —
Кияшко К. (Коммунарск, с. ш. № 7),
Мазуренко А. (Минск, с. ш. № 50),
Новоселов А. (Минск, с. ш. № 137),
Панафидин С. (Ленинград, с. ш. № 30),
Пенанен К. (Одесса, с. ш. № 63),
Пушкин А. (Москва, с. ш. № 57),
Сагайдак Р. (Черкасская обл., Матусовская с. ш.),
Тодощенко И. (Пермь, с. ш. № 16);

по 10 классам —
Анисимов А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Гурарий В. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Оводов И. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Дипломы III степени
по 8 классам получили
Дубина Ю. (Каменец-Подольский, с. ш. № 9),
Коршков А. (Мозырь, с. ш. № 8),
Кузьма Н. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1),
Самборский Д. (Истра, с. ш. № 12),
Свинаренко А. (ст. Калининская Краснодарского кр., с. ш. № 1),
Тервитс Г. (Рига, с. ш. № 1),
Терещенко В. (Киев, с. ш. № 145),
Тоомет Л. (Тарту, с. ш. № 1);

по 9 классам —
Анспер А. (п. Нью ЭССР, с. ш. № 1),
Афонин А. (Брест, с. ш. № 14),
Вихорев А. (Калинин, с. ш. № 17),
Вольфбейн П. (Киев, с. ш. № 145),
Гапоненко А. (ст. Динская Краснодарского кр., с. ш. № 4),
Жуков В. (Магадан, с. ш. № 1),
Зароченцев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Кириллов Э. (Комсомольск, с. ш. № 6),
Мамаев А. (Заволжье, с. ш. № 13),
Медведев М. (Горький, с. ш. № 40),
Смирнов А. (Челябинск, с. ш. № 31),
Смирнов Р. (школа МПС),
Степанов С. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Шакенов К. (Алма-Ата, РФМШ),
Шиховцев С. (Верхняя Салда, с. ш. № 1);

по 10 классам —
Белиц А. (Гомель, с. ш. № 24),
Бибиков А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Будько Д. (Белгород, с. ш. № 3),
Вилькялис Г. (Вильнюс, с. ш. № 45),
Карасев Д. (Москва, ФШМ № 18 при МГУ),
Пащенко В. (Черновцы, с. ш. № 2),
Рейаль А. (Таллин, с. ш. № 1).

I Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

(Начало см. на с. 30)

I Международная олимпиада по программированию

Братислава, 23—30 августа 1987 г.

1 тур

Задача 1 (СССР). Для натуральных чисел X и Y будем говорить, что X входит в Y, если двоичную запись X можно получить из двоичной записи Y вычеркиванием нулевого, единичного или большего количества цифр. (Например: X=1010 входит в Y=1001100). Постройте алгоритм, который для двух данных натуральных чисел A и B найдет максимальное число C, входящее как в A, так и в B.

Задача 2 (ЧССР). Даны n карточек, занумерованных числами 1, 2, 3, ..., n (каждый номер встречается только один раз). Постройте алгоритм, который для произвольной последовательности $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ из этих карточек найдет наименьшее число перестановок, необходимых для того, чтобы расположить карточки в порядке возрастания их номеров. Под перестановкой понимается единичный обмен местами любых двух карточек. Пример: Для последовательности 1, 5, 3, 2, 4 необходимы две перестановки: № 5 и № 2, а затем № 4 и № 5, после чего получается упорядоченная последовательность 1, 2, 3, 4, 5.

2 тур

Задача 3 (НРБ). Постройте алгоритм, который распределяет первые N^2 натуральных чисел ($N > 2$) в N групп так, что одновременно выполняются следующие три условия:

1) каждая группа содержит ровно N чисел;

2) каждое число принадлежит только одной группе;

3) сумма чисел в каждой группе одинакова для всех групп.

Задача 4 (ЧССР). Рассмотрим следующую игру. Для заданного фиксированного натурального числа $N > 1$ игрок A выбирает натуральное число X, не превосходящее N. Цель игрока B — угадать число X при помощи вопросов вида «Число X больше или равно K?», где K — некоторое натуральное число. На каждый вопрос игрока B игрок A отвечает честно и не меняет числа X. Игрок B платит игроку A за каждый ответ: 2 руб. за ответ «ДА» и 1 руб. за «НЕТ». Определите для данного N наименьшую сумму денег P(N), достаточную для гарантированного угадывания любого числа X от 1 до N. Постройте алгоритм, по которому игрок B задаст вопросы таким образом, что угадает число X и при этом заплатит не более P(N) рублей (т. е. алгоритм, который определяет значения K и задаваемых вопросах).

Р. М. Шакиров,
Ученый секретарь секции
по основам информатики
и вычислительной техники
Ученого методического совета
при Министерстве просвещения
СССР.

Ответы, указания, решения

«Все», «некоторые» и отрицание

1. Есть хотя бы один белый шар.
2. Все шары — белые.
3. Все шары — красные.
4. Некоторые равнобедренные треугольники не являются прямоугольными.
5. Некоторые ученики класса не были на собрании.
6. Ни одной девочки не было на собрании.
7. Некоторые углы данного шестиугольника — прямые или острые.
8. По крайней мере для одного x из A x^2 не превосходит 4.
9. Все люди — не дети.
10. Для всех x из A $x^2-2x+1\neq 0$.
11. Некоторые мужчины не выше 2-х метров.
12. Некоторые простые числа четны.
13. По крайней мере для одного простого числа p число 2^p-1 не является простым.
14. Неверно. Может быть один белый шар, а остальные — синие.
15. Верно.
16. Чтобы наверняка попался белый шар, надо вынуть, по крайней мере 20 шаров. Меньшего числа может не хватить, ибо первыми могут быть вынуты красные и черные шары — их 19. Чтобы наверняка попались шары всех трех цветов, надо вынуть как минимум 22 шара; 21 может не хватить, если первыми вынуты все белые и черные шары: их как раз 21.
17. Надо вызвать 31 человека. Меньше нельзя — может случиться, что к доске выйдут лишь троечники и хорошисты (их $10+20=30$) и каждый ответ не более, чем на 4. Если же вызвать 31 человека, то, по крайней мере, один из них окажется отличником и ответит на 5.

Решение систем тригонометрических уравнений

1. $(-5\pi/12+\pi k;\ -\pi/6+\pi n)$.

2. $\left(\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k;\ \mp\arccos\frac{1}{8}+2\pi n\right)$.

3. $(\pi/4+\pi k/2;\quad \pi/4+\pi k/2+\operatorname{arctg}2+\pi n)$.

4. $(\pi/8+\pi k;\ \pi+2\pi n)$, $\left(\pi/8+\pi k;\ \pm\arccos\frac{\sqrt5-1}{2}+2\pi n\right)$.

5. $(\pi/4+\pi k;\ \pm\pi/3+2\pi l)$,
$\left((-1)^m 1/2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\pi m/2;\ \pm\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}+2\pi n\right)$, $\left((-1)^{p+1}\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\pi p/2;\ \pm\left(\pi-\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+2\pi q\right)$.

6. $((-1)^{n+k+1}\pi/4+\pi k;\ -\pi/4+\pi n)$,
$\left((-1)^{n+k}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n\right)$.

7. $(\pi(6n+1)/3;\ \pi(6m-1)/3)$,
$(\pi(6n-1)/3;\ \pi(6m+1)/3)$.
8. $(\pm\pi/24+\pi n/4+2\pi k;\ \pm\pi/48+\pi n/8)$.
(Одновременно берутся либо верхние, либо нижние знаки.)
9. $\left(5\pi/4;\ \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$,

$\left(\pi+\operatorname{arctg}2;\ \pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

XXI Всесоюзная олимпиада по математике

8 класс

1. Указание. Воспользуйтесь тем, что $x_1+y_1=x_2+y_2=\ldots=x_{10}+y_{10}=9$, причем $x_1+x_2+\ldots+x_{10}=y_1+y_2+\ldots+y_{10}$.
2. Ответ: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Указание. Если $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_6$ — массы гирь, то каждая масса, которую можно уравновесить с помощью этих гирь, записывается в виде $\varepsilon_1x_1+\varepsilon_2x_2+\ldots+\varepsilon_6x_6$, где $\varepsilon_i=0,1$ и не все $\varepsilon_i=0$. Таких сумм всего 63. Поэтому все они должны быть различны. Ясно, что $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$. Пусть доказано, что $x_k=2^{k-1}$, тогда наибольшая масса, уравновешиваемая с помощью гирь $x_1,\ldots,x_k$, равна $x_1+x_2+\ldots+x_k=2^k-1$. Поэтому $x_{k+1}=2^k$.
3. Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_7$ — данный семиугольник, B — точка пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, $A_1A_2=x$, $A_1A_3=y$, $A_1A_4=z$. Треугольник BA_3A_1 — равнобедренный ($\angle A_1BA_3=\angle BA_3A_1=3\pi/7$), а треугольники A_2BA_3 и A_1BA_4 подобны ($A_2A_3\parallel A_1A_4$). Отсюда сразу получаем, что $\frac{y-x}{y}=\frac{x}{z}$, или $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.
4. а) Ответ: 12 выстрелов. Решение. В квадрате 7×7 корабль может стоять в одной из 12 позиций, показанных на рисунке 1, поэтому необходимо сделать не меньше 12 выстрелов. На рисунке 2 показано, что 12 выстрелов достаточно.

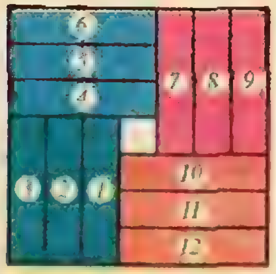


Рис. 1.

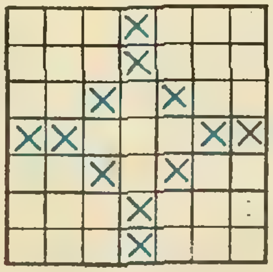


Рис. 2.

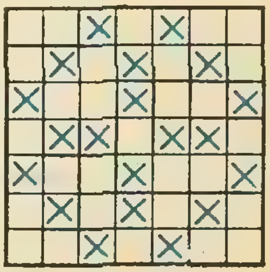


Рис. 3.

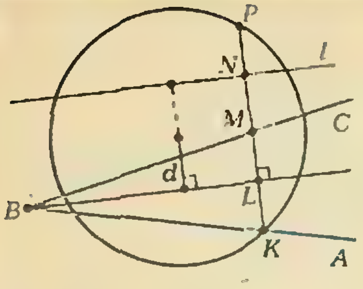


Рис. 4.

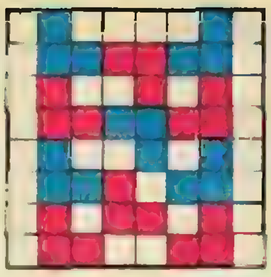


Рис. 5.

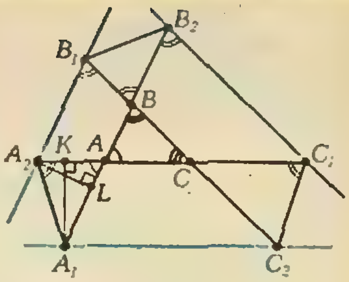


Рис. 6.

б) **Ответ:** 20 выстрелов. **Указание.** Как следует из рисунка 3, 20 выстрелов достаточно. С другой стороны, так как в квадрате 7×7 можно без наложений расположить четыре прямоугольника размером 3×4 (см. рис. 1), достаточно доказать, что в каждый такой прямоугольник необходимо сделать по крайней мере 5 выстрелов.

5. Решение следует из равенства

$$k^2 = (a + A)(b + B)(c + C) = \\ = abc + ABC + k(aB + bC + cA).$$

6. См. решение задачи М1056 («Квант», 1987, № 12).

7. Пусть L — точка пересечения отрезка KP с биссектрисой угла ABC (рис. 4). Очевидно, что $KL = LM$. Обозначим длину перпендикуляра, опущенного из центра окружности на биссектрису угла ABC, через d. Параллельно этой биссектрисе и на таком же расстоянии от центра, но по другую сторону от него, проведем прямую l и пусть N — точка ее пересечения с KP. Тогда $NP = KL = LM$ и $PM = LN = 2d$. Если лучи BA и BC поменять местами, получится картина, немного отличная от рисунка 6. Мы рекомендуем разобрать этот случай самостоятельно.

8. См. решение задачи М1057 («Квант», 1987, № 12).

9 класс

1. **Указание.** Пусть $a_k = 1^{1987} + 2^{1987} + \ldots + n^{1987}$. Тогда $2a_n = 2 + (2^{1987} + n^{1987}) + \ldots + (n^{1987} + 2^{1987}) = 2 + b_n$, но b_n делится на $n + 2$.

2. **Ответ:** 11 фигур. В каждом квадрате 2×2 должно быть покрыто по крайней мере две клетки. Разбивая квадрат 8×8 на 16 квадратов 2×2, получаем, что надо покрыть по крайней мере $2 \times 16 = 32$ клетки, для чего понадобится по крайней мере 11 фигур. Требуемое размещение 11 фигур в квадрате 8×8, показано на рисунке 5.

3. Пусть $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ — точки пересечения продолжений сторон с данными прямыми. Тогда (рис. 6) $\frac{c}{AA_2} = \frac{b}{AA_1} = \sin\alpha$. Это значит, что $\triangle AA_2A_1 \backsim \triangle ABC$, причем $A_1A_2 = \frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, где R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$. Аналогично, $C_1C_2 = B_1B_2 = 2R$, так что трапеция $A_1A_2C_1C_2$ равнобедренная. Поскольку $\angle A_2B_1C_2 = \angle A_2C_1C_2 = \angle A_1B_2C_1 = \angle A_1A_2C_1 = \beta$, точки B_1 и B_2 лежат на окружности, описанной около трапеции $A_1A_2C_1C_2$.

4. См. решение задачи М1060 («Квант», 1987, № 12).

5. **Ответ:** 7 дней. Пусть k — число дней, когда дежурили 9 богатырей, а l — число дней, когда дежурили 10 богатырей, и каждый из богатырей дежурил m раз. Тогда $9k + 10l = 33m$. При $m = 1$ это уравнение решений не имеет, а при $m = 2$ имеет единственное решение $k = 4$, $l = 3$. Итак, $k + l \geqslant 7$. Заметим, что организовать дежурство в течение 7 дней так, чтобы каждый отдежурил 2 раза, можно: для этого следует занумеровать богатырей и отправить на дежурство в первый день всех с номерами с 1 по 9, во второй — с 10 по 17, в третий — с 18 по 27, в четвертый — с 28 до 33 и с 1 до 3. В оставшиеся 3 дня отправлять по 10 богатырей, начиная с 4-го.

6. См. решение задачи М1058 («Квант», 1987, № 12).

7. Предположим противное: выпуклый p-угольник разрезан по всем диагоналям на части одинаковой площади. Проведем диагонали A_1A_3, A_1A_4, A_2A_p, A_2A_{p-1} и обозначим через B_1, B_2, B_3, B_4 точки их попарных пересечений (рис. 7); в случае $p = 5$ точки B_4 и A_4 совпадают). Рассмотрим треугольники $A_1B_1B_2$ и $A_1B_2A_2$. По предположению их площади равны, значит, $B_1B_2 = B_2A_2$. Аналогично получаем, что $A_1B_2 = B_2B_3$. Следовательно, четырехугольник $A_1A_2B_3B_1$ является параллелограммом, и поэтому прямые A_1A_4 и A_2A_{p-1} параллельны. Получили противоречие.

8. Пусть n — натуральное число. Рассмотрим множество $T_p(n) \subset T_p$ и состоящее из всех чисел, меньших $(2^n)!$ Так, множество $T_0(n)$ состоит из n чисел $(2^0)!, (2^1)!, \ldots, (2^{n-1})!$, а множество $T_1(n)$ состоит из чисел вида

$$\alpha_0(2^0)! + \alpha_1(2^1)! + \ldots + \alpha_{n-1}(2^{n-1})!,$$

где $\alpha_i \in \{0; 1\}$.

Пусть далее $N_p(n)$ — количество чисел в $T_p(n)$. Мы должны доказать, что $N_{1987}(n) < (2^n)! - 1$.

Образуя суммы чисел из множества $T_{p-1}(n)$ и приводя подобные члены при $(2^i)!$ мы можем всякое число из $T_p(n)$ записать в виде $\beta_0(2^0)! + \beta_1(2^1)! + \ldots + \beta_{n-1}(2^{n-1})!$ Пусть $A_p(n) - 1$ — максимальное значение коэффициентов среди *всех* чисел из $T_p(n)$. Тогда для любого $(2^i)!$ коэффициент при $(2^i)!$ принимает не более, чем $A_p(n)$ *различных* значений. Поэтому $N_p(n) \leqslant (A_p(n))^n$.

Теперь доказательство можно получить из следующих лемм.

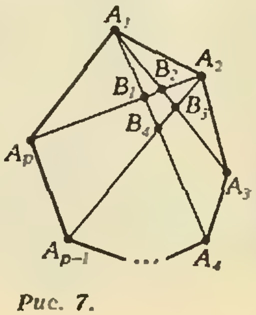


Рис. 7.

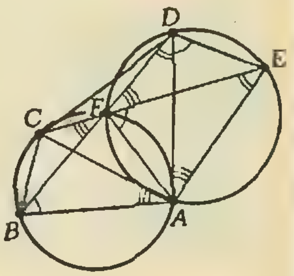


Рис. 8.

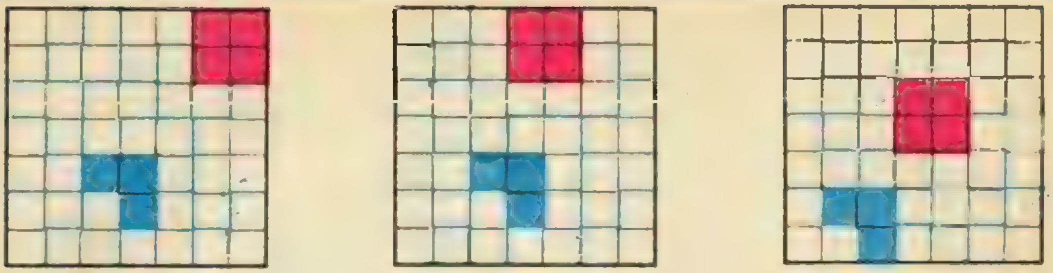


Рис. 9.

Лемма 1. $A_{p+1}(n) \leqslant A_p(n) \cdot N_p(n) \leqslant (A_p(n))^{n+1}$.

Лемма 2. $A_{1987}(n) \leqslant 2^{(n+1)^{1987}}$.

Лемма 3. $2^{(n+1)^{1987}} < (2^n)!$ при некотором n.

Лемма 4. $(2^n)! > 2^{2^n}$ при $n \geqslant 2$.

Лемма 5. $2^n > (n+1)^{1987}$ при некотором n.

10 класс

1. Рассмотрим набор из n чисел: $a_i = i \cdot n! + 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда сумма любых k чисел из этого набора имеет вид $m \cdot n! + k$ ($m \in N$) и делится на k, так как число $n! = 1 \ldots k \ldots n$ кратно k. Любые два числа a_i и a_j при $i > j$ не могут иметь общих простых делителей, отличных от простых делителей из разности $a_i - a_j = (i - j)\,n!$, т. е. от делителей числа $n!$ (ибо $0 < i - j < n$), взаимно-простого с числами a_i. Положив $n = 5$, получаем набор: 121, 241, 361, 481, 601, удовлетворяющий всем условиям задачи.

2. Пусть F — точка пересечения диагоналей BD и CE (рис. 8). Так как $\angle AEF = \angle ADF$, точки A, F, D, E лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle ABC = \angle ADE = \angle AFE$ и $\angle ABC + \angle AFC = 180^\circ$, поэтому точки A, B, C, F также лежат на одной окружности. Таким образом, $\angle BAC = \angle BFC = \angle DFE = \angle DAE$, что и требовалось доказать.

3. Ответ. $\alpha = \pm\frac{2k}{3} + 2k\pi$. Если α удовлетворяет условию задачи, то $\cos\alpha \leqslant -\frac{1}{4}$ (иначе $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 < -\frac{7}{8}$ и $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 > 0$.

По той же причине для любого натурального n имеем $\cos 2^n\alpha \leqslant -\frac{1}{4}$, откуда получаем оценку

$$\left|\cos 2^n\alpha - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{3}{4}.$$

Учитывая, что

$$\left|\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right| = 2\left|\cos\alpha - \frac{1}{2}\right|\left|\cos\alpha + \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{3}{2}\left|\cos\alpha + \frac{1}{2}\right|$$

получим

$$\left|\cos\alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{2}{3}\left|\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2\left|\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n\left|\cos 2^n\alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

при любом $n \in N$. Отсюда следует, что $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

4. $1987 = 6 \cdot 331 + 1$. Докажем утверждение задачи для квадратов размером $(6n+1)(6n+1)$ индукцией по n. Сначала заметим, что утверждение справедливо при $n = 1$, т. е. для квадрата 7×7. Действительно, из соображений симметрии следует, что достаточно рассмотреть только случаи, когда вырезанная клетка лежит в одном из квадратов размером 2×2, заштрихованных на рисунке 9, где показано, как разрезать оставшуюся часть. Пусть утверждение уже доказано при некотором значении n. Докажем его для квадрата размером $(6n+7) \times (6n+7)$. Для этого в одном из углов данного квадрата поместим квадрат размером $(6n+1) \times (6n+1)$, покрывающий вырезанную клетку и удовлетворяющий предположению индукции. Оставшуюся же часть разрежем на прямоугольники размером 2×3, а затем и на уголки.

6. См. решение задачи М1059 («Квант», 1987, № 12).

7. Возьмем какую-нибудь вершину и все грани многогранника при этой вершине. Раскрасим ребра этой части многогранника так, как показано на рисунке 10 (ребра одинакового цвета изображены сплошными линиями одинаковой толщины). Тогда для вершин раскрашенной части требуемое в задаче условие будет выполнено.

Будем последовательно добавлять к раскрашенной части по одной грани, имеющей с этой частью общее ребро, и раскрашивать ее ребра следующим образом: если у добавляемой грани уже покрашены два ребра, то ее третье ребро красим в любой цвет (на рисунке 10 пунктирное ребро грани α), а если уже покрашено только одно ребро, то два остальных ребра красим в разные цвета (см. на рисунке 10 пунктирные ребра грани β). В любом случае для вершин раскрашенной части требуемое условие будет выполнено, причем в конечном счете все ребра будут раскрашены.

8. Докажем равносильное неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \geqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Из тождеств $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + a_2x \pm a_3x^3 + \ldots$,

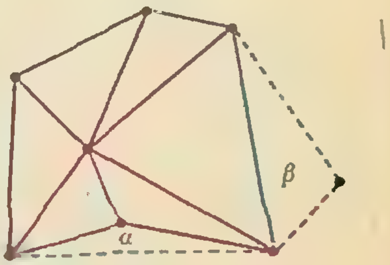


Рис. 10.

где $a_i \geqslant 0$, при $x = \frac{1}{2n}$ следует, что

$$(1+x)^n + (1-x)^n - 2nx = 2a_3x^3 + \\ + 2a_5x^5 + \ldots \geqslant 0.$$

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 10)

Головоломки

1. См. рис. 11.
2. См. рис. 12 и 13.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 10)

1. Соединим две соседние вершины звезды, например A и E (рис. 14). Так как у треугольника AME и BMD углы при вершине M равны, сумма углов при вершинах B и D треугольника BMD равна сумме углов при вершинах A и E треугольника AME; но тогда сумма углов при вершинах звезды равна сумме углов треугольника ACE, т. е. 180°.
2. Таких чисел два: 41312432 и 23421314.
3. Решение, единственное с точностью до симметрии, изображено на рисунке 15. Сначала определяется, что в центральных кружках стоят числа 1 и 8, так как они соединены с 5 кружками каждый; затем однозначно определяются положения чисел 2 и 7; затем — числа 3 и всех остальных.
4. Часы идут точно, но минутная стрелка плохо закреплена на своей оси. Она может свободно отклоняться от правильного положения на ±2 минуты. Часы висят на стене и под действием силы тяжести стрелка располагается ниже своего нормального положения. В правой части циферблата это приводит к опережению на две минуты а в левой — к отставанию. Нужно закрепить минутную стрелку.
5. Если провести через выбранную точку еще три прямые, параллельные сторонам треугольника, то образуются пары равных разноцветных треугольников (рис. 16).

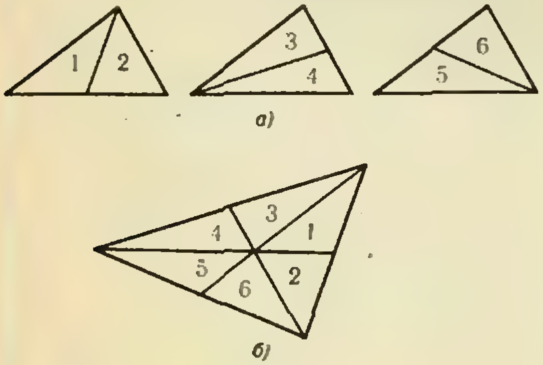


Рис. 11.

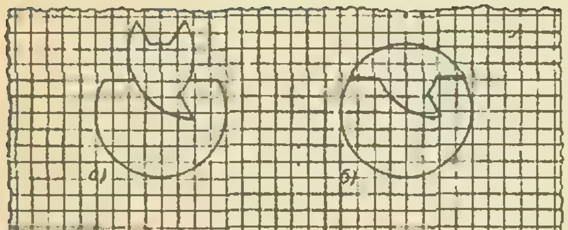


Рис. 12

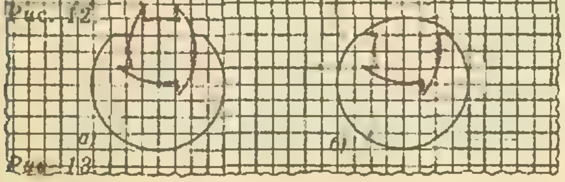


Рис. 13

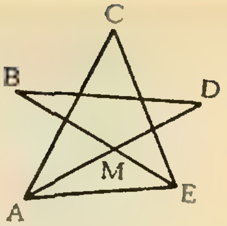


Рис. 14.

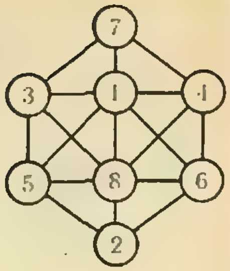


Рис. 15.

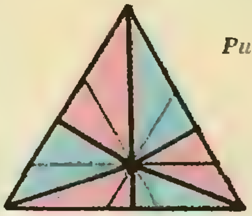


Рис. 16.

XIII Всероссийская олимпиада школьников
(см. «Квант». № 10)

Математика

8 класс

1. Ответ: (2; 14), (0; —20), (18; —2), (—16; —4). Указание. Данное уравнение равносильно уравнению $(x-1)(y+3)=17$, поэтому либо $x-1=\pm1$, $y+3=\pm17$, либо $x-1=\pm17$, $y+3=\pm1$.
2. Указание. Достаточно рассмотреть множество M, являющееся объединением трех отрезков единичной длины: $\Delta_1=[a_1; b_1]$, $\Delta_2=[a_2; b_2]$, и $\Delta_3=[a_3; b_3]$. Если точки x и y принадлежат какому-нибудь из этих отрезков $[a_i, b_i]$, то и точка $(x+y)/2$ тоже принадлежит этому отрезку, если же точка $x\in[a_i, b_i]$, и $y\in[a_k, b_k]$, то

$$\frac{a_i+a_k}{2} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant \frac{b_i+b_k}{2}$$

и отрезок

$$\Delta_{ik}=\left[\frac{a_i+a_k}{2}; \frac{b_i+b_k}{2}\right]$$

имеет единичную длину. Поэтому все множество M покрывается шестью отрезками Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_{12}, Δ_{13}, Δ_{23}.
Если $M=[1; 2]\cup[5; 6]\cup[17; 18]$, то M' покрывается в точности шестью отрезками [1; 2], [3; 4], [5; 6], [9; 10], [11; 12], [17; 18].
3. Четырехугольник $BPMR$ вписан в окружность, поэтому $\angle BPM + \angle BRM = 180°$ (рис. 17). Отсюда и из равенства $\angle BPM + \angle MPA = 180°$ следует, что $\angle BRM = \angle MPA$. Аналогично получаем, что $\angle CRM = \angle MQA$. Так как четырехугольник $APMQ$ вписан в окружность, то $\angle MPA + \angle MQA = 180°$. Следовательно, $\angle BRM + \angle CRM = 180°$ и, значит, точки B, C и R лежат на одной прямой.
Замечание. Утверждение задачи остается верным и при других расположениях окружности и выборе точки A (разберите возможные случаи самостоятельно).
4. Каждая цифра встречается в записи данной десятичной дроби либо конечное, либо бесконечное количество раз. Возьмем все цифры, встре-

чающиеся конечное число раз и выпишем их перед запятой в любом порядке. После запятой сначала запишем по одной все цифры, встречающиеся бесконечное количество раз, затем опять выпишем по одной и в том же порядке те же цифры и т. д. Получится бесконечная периодическая дробь.

5. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 точки пересечения диагоналей пятиугольника, α — величина угла при вершине «звезды» $ACEBDA$ (рис. 18). Тогда $\angle DA_1B_1=\angle DB_1A_1=2\alpha$ как внешние углы треугольников BA_1E и AB_1C. Следовательно, сумма углов треугольника A_1DB_1 равна 5α и, значит, $\alpha=36°$.

Если $\beta=\angle BCA$, $\gamma=\angle DCE$, то $\alpha+\beta+\gamma=\angle BCD=108°$, т. е. $\beta+\gamma=72°$. С другой стороны, $\gamma+\angle A_1DC=2\alpha=72°$. Следовательно, $\angle A_1DC=\beta$. Аналогично получаем, что $\angle DEC=\angle EAD=\angle ABE=\beta$ и, значит, $\angle ADE=\angle BEA=\angle CAB=\angle DBC=\gamma$.

Таким образом, треугольники ABC, BCD, CDE, DEA и EAB подобны. Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD}=\frac{CD}{DE}=\frac{DE}{AE}=\frac{AE}{AB}=k.$$

Перемножая эти отношения, получим, что $k^5=1$, то есть $k=1$, это означает равенство всех сторон пятиугольника.

9 класс

1. **Ответ:** 2 и 3. **Указание.** Если $N=1\underbrace{4\ldots4}_{n}$, где $n\geqslant4$, то $N/4=36\underbrace{1\ldots1}_{n-2}$ не может быть квадратом ни четного, ни нечетного числа.

2. **Указание.** Из условия легко следует, что число фальшивых монет четно. Отложим любую из монет и разделим остальные 98 на 2 группы по 49 монет и положим эти группы на чашки весов. Если стрелка весов покажет четное число граммов, то отложенная монета настоящая, если нечетное, то фальшивая.

3. Преобразуя данное неравенство, получим равносильное ему неравенство $4\cos(\alpha+\beta)\times(1-\cos(\alpha-\beta))<1$.

Так как $4xy\leqslant(x+y)^2$ при любых x и y, то $4\cos(\alpha+\beta)(1-\cos(\alpha-\beta))\leqslant(1-2\sin\alpha\sin\beta)^2$, но $0<2\sin\alpha\sin\beta<2$ и поэтому $(1-2\sin\alpha\sin\beta)^2<1$.

Замечание. Данное неравенство точное: левую часть можно сделать сколь угодно близкой к 3/4: достаточно взять $\gamma=2\pi/3$, а α близким к $\pi/3$.

4. **Указание.** Через точку N проведем прямую $l_3\parallel l_1$. Возможны два случая: 1) точки K и L лежат по разные стороны от точки N (рис. 19); 2) точки K и L лежат по одну сторону от точки N (рис. 20). В обоих случаях четырехугольник $ABLK$ параллелограмм (для доказательства этого воспользуйтесь тем, что $AMNK$ и $MBLN$ — равнобедренные трапеции). Поэтому $AB=KL$. Осталось заметить, что прямые l_2 и l_3 симметричны относительно линии центров данных окружностей.

5. **Указание.** Докажите, что биллиардный шар, пущенный из какой-либо точки, может двигаться после отражений от сторон треугольника лишь по шести направлениям, зависящим, конечно, от направления, по которому он начал двигаться. Поэтому, если шар через некоторую точку пройдет 7 раз, то по крайней мере дважды он прошел в одном направлении. С этого момента его движение станет периодическим.

10 класс

1. 376 и 625. **Указание.** Если A число, удовлетворяющее условию, то $A^2-A=A(A-1)$ делится на $1000=8\cdot125$. Числа A и $A-1$ взаимно просты. Поэтому одно из них делится на 125, а другие — на 8. Осталось разобрать возможные случаи.

2. Назовем функцию $f(x)$ пилой длины n и высоты h, если ее график имеет вид, показанный на рисунке 21 (все прямолинейные участки образуют угол 45° с осью абсцисс). Если $f(x)$ — пила длины n и высоты h, то $|f(x)-h|$ — пила длины $n+1$ и высоты h, а $\left|f(x)-\frac{h}{2}\right|$ — пила длины $2n$ и высоты $\frac{h}{2}$. Заметим, что $||x|-a|$ — пила длины 2 и высоты a. Определим функции

$$P_n(x)=\underbrace{|\ldots||}_{n\text{ раз}}x|-1|-1|\ldots-1| \quad \text{и} \quad Q_{n,a}(x)=\underbrace{|\ldots||}_{n+2\text{ раз}}|x|-a|-\frac{a}{2}|\ldots-\frac{a}{2^n}|.$$

После сделанных замечаний легко доказать по индукции, что $P_n(x)$ — пила длины n и высоты 1, $Q_{n,a}(x)$ — пила длины 2^{n+1} и высоты $\frac{a}{2^n}$.

Отсюда следует, что функция, стоящая в левой части тождества (это $Q_{n,2^n}(x)$) — пила длины 2^{n+1} и высоты 1. Также и правая часть тождества (это $P_{2^{n+1}}(x)$) — пила длины 2^{n+1} и высоты 1. Поскольку графики обеих функций симметричны относительно оси Oy, они совпадают.

3. **Указание.** Складывая одинаково отстоящие от концов суммы слагаемые (их число четно), получаем дроби, числители которых делятся на 1987. Сумма таких дробей также будет дробью, числитель которой делится на 1987 (1987 — простое число!). Утверждение

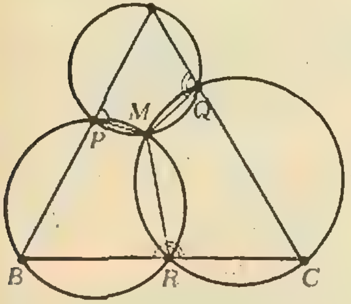


Рис. 17.

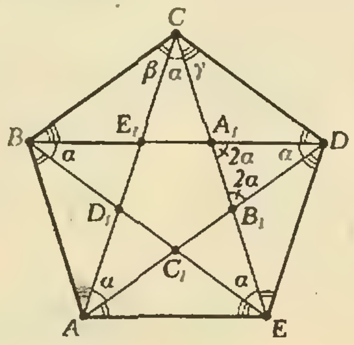


Рис. 18.

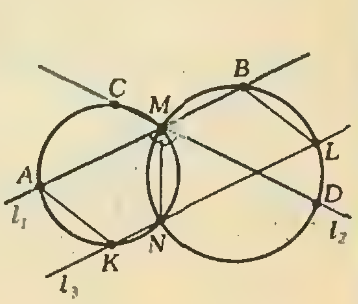


Рис. 19.

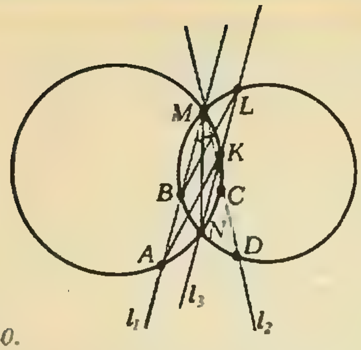


Рис. 20.

задачи верно для любой суммы

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{1}{(p-3)(p-2)(p-1)},\text{ где}$$

$p=6k+1$ — простое число.

4. а) Пусть x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i — проекции i-го звена ломаной соответственно на оси координат Ox, Oy, Oz и координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy соответственно, а l_i — длина этого звена.

Тогда $a_i^2=y_i^2+z_i^2$, $b_i^2=x_i^2+z_i^2$, $c_i^2=x_i^2+y_i^2$, $l_i^2=$ $=x_i^2+y_i^2+z_i^2=\frac{1}{2}(a_i^2+b_i^2+c_i^2)$, но $(a_i+b_i+$ $+c_i)^2=a_i^2+b_i^2+c_i^2+2a_ib_i+2a_ic_i+2b_ic_i\leqslant$ $\leqslant 3a_ia_i^2+3b_i^2+3c_i^2=6l_i^2$.

Итак, $a_i+b_i+c_i\leqslant l_i\sqrt{6}$.

Сложив все полученные неравенства, получим требуемое.

б) Замкнутая ломаная, для которой $a+b+c=$ $=l\sqrt{6}$ существует. Для этого достаточно, чтобы каждое ее звено было параллельно одной из диагоналей единичного куба, причем проекции различных звеньев на координатные плоскости не должны иметь общих отрезков. Примером может служить шестизвенная ломаная с вершинами (0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 1, −1), (2, 0, −2), (1, −1, 1).

5. Пусть $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ и $C_1C_2C_3C_4$ — такие три четырехугольника на плоскости, что

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2},\quad \overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{B_2B_3}+\overrightarrow{C_2C_3},$$
$$\overrightarrow{A_3A_4}=\overrightarrow{B_3B_4}+\overrightarrow{C_3C_4},\quad \overrightarrow{A_4A_1}=\overrightarrow{B_4B_1}+\overrightarrow{C_4C_1}. \qquad (1)$$

Тогда справедливо следующее утверждение: если два из данных четырехугольников являются квадратами, вершины которых перечислены по (против) часовой стрелке, то и третий четырехугольник также является квадратом, вершины которого перечислены по (против) часовой стрелке. Действительно, если, например, $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ — квадраты, причем векторы $\overrightarrow{A_2A_3}$ и $\overrightarrow{B_2B_3}$ получаются, соответственно, из векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ поворотом на угол 90° по часовой стрелке, то вектор $\overrightarrow{C_2C_3}=\overrightarrow{A_2A_3}-\overrightarrow{B_2B_3}$ получается из вектора $\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{A_1A_2}-\overrightarrow{B_1B_2}$ указанным поворотом. Аналогично, последующими поворотами на угол 90° по часовой стрелке получаются векторы $\overrightarrow{C_3C_4}$ и $\overrightarrow{C_4C_1}$.

Пусть теперь $B_1B_2B_3B_4$ — квадрат, образованный центрами часов, перечисленными, для определенности, по часовой стрелке, $A_1A_2A_3A_4$ — квадрат, образованный в указанный момент времени концами минутных стрелок соответствующих часов (также перечисленными по часовой стрелке). Перенесем все часы параллельно так, чтобы их центры совпали. Пусть C_1, C_2, C_3, C_4 — концы их минутных стрелок в этом положении. Тогда, очевидно, соотношение (1) выполнено. Следовательно, четырехугольник $C_1C_2C_3C_4$ — квадрат. Так как все данные часы являются правильно идущими, отсюда следует, что концы их минутных стрелок в их новом положении будут образовывать квадрат и в любой другой момент времени. Но тогда из тех же соображений концы их минутных стрелок и в первоначальном положении в любой момент времени образуют квадрат.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. $v'\approx3{,}2$ м/с. Указание. Задачу удобно решать в системе отсчета, связанной с лентой транспортера.

2. См. решение задачи Ф1065 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

3. См. решение задачи Ф1071 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

4. $s=(mv_0^2\sin\alpha)/F$; $\vec{s}\perp\vec{F}$. Указание. Движение данной частицы аналогично движению тела, брошенного под углом $\alpha/2$ к горизонту (рис. 22).

9 класс

1. Судя по всему, гантелька за ширмой сталкивается одним из своих шариков с очень тонкой абсолютно упругой стенкой, поворачивается на 180° вокруг остановившегося центра масс O (рис. 23) с угловой скоростью $\omega=$ $=v_0/(l/2)$ и сталкивается со стенкой во второй раз другим шариком, после чего продолжает двигаться практически в прежнем (в меру малости шариков) направлении и перевернутом виде. Время нахождения за ширмой

$$t=\frac{L}{v_0}+\frac{\pi l}{2v_0}.$$

2. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{C(2\mathscr{E})^2}{2}+(-C\mathscr{E}^2)=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}+2Q,$$

где $C(2\mathscr{E})^2/2$ — энергия конденсатора 2 до переключения ключа, $(-C\mathscr{E}^2)$ — работа источника 2, $C\mathscr{E}^2/2$ — энергия конденсатора 2 после переключения, Q — количество теплоты, выделившееся на каждом резисторе. Отсюда

$$Q=C\mathscr{E}^2/4.$$

3. Мощность насоса $N=\rho Vgh+\rho Vv^2/2$ (скорость потока жидкости v можно найти из условия $vS\Delta t=V\Delta t$). Для воды $N\approx11{,}6$ кВт, для цементного раствора $N'\approx10{,}4$ кВт.

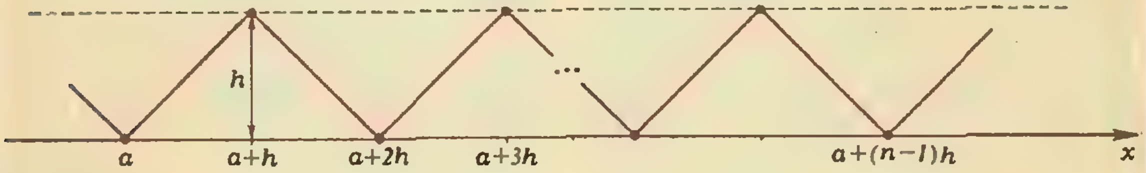


Рис. 21.

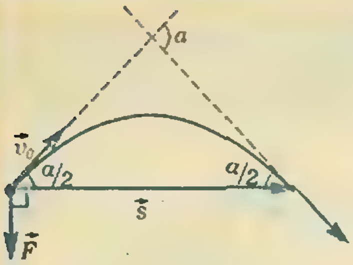


Рис. 22.

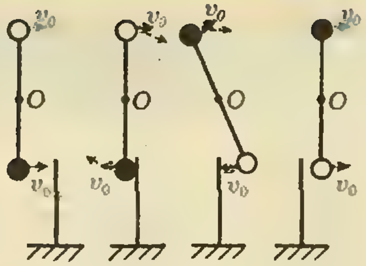


Рис. 23.

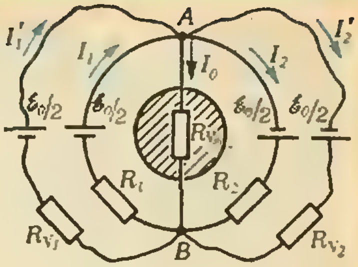


Рис. 24.

4. Сосуд теплоизолирован, поэтому изменение внутренней энергии газа равно совершенной поршнем работе:

$$\frac{3}{2}R(\nu_1+\nu_2)T-\frac{3}{2}R(\nu_1T_1+\nu_2T_2)=A,$$

где

$$A=\nu_1R(T_1-T)-Mg\Delta h.$$

Отсюда находим

$$\Delta h\approx0{,}08\text{ м}.$$

10 класс

1. См. решение задачи Ф1066 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

2. При испытании первым должен лопнуть шар радиусом $3R$. Если изменять толщину шаров таким образом, чтобы $d_i/R_i=\text{const}$ ($i=1,2,3$), то шары будут выдерживать одинаковое предельное давление.

3. Так как в соленоиде протекает переменный ток, возникающая в контурах ЭДС индукции также переменная. Однако можно ограничиться рассмотрением мгновенных значений ЭДС, напряжений и токов в некоторый фиксированный момент времени.

Прежде всего нужно учесть, что ЭДС индукции, наводимая в любом замкнутом контуре, складывается из ЭДС, возникающих на отдельных участках контура. Пусть ЭДС индукции, наведенная в обруче, имеет в рассматриваемый момент времени величину $\mathscr{E}_0$ и положительна по отношению к обходу по часовой стрелке. Тогда из соображений симметрии ясно, что на участках $B-R_1-A$ и $A-R_2-B$ ЭДС одинаковы и равны $\mathscr{E}_0/2$ (рис. 24). Рассмотрим далее контур $A-\mathrm{V}_1-B-R_1-A$. Полная ЭДС в этом контуре равна нулю, т. к. отсутствует изменяющийся магнитный поток через площадь контура. Отсюда следует, что на участке $B-\mathrm{V}_1-A$ возникает ЭДС, также равная $\mathscr{E}_0/2$. Аналогично, на участке $A-\mathrm{V}_2-B$ ЭДС также равна $\mathscr{E}_0/2$. На участке $A-\mathrm{V}_0-B$, лежащем в плоскости симметрии соленоида, ЭДС индукции не возникает. Запишем закон Ома для всех участков цепи между точками A и B:

$\varphi_A-\varphi_B=I_0R_{\mathrm{V}_0}$, $\varphi_A-\varphi_B=\mathscr{E}_0/2-I_1R_1$,
$\varphi_B-\varphi_A=\mathscr{E}_0/2-I_2R_2$, $\varphi_A-\varphi_B=\mathscr{E}_0/2-I_1'R_{\mathrm{V}_1}$,
$\varphi_B-\varphi_A=\mathscr{E}_0/2-I_2'R_{\mathrm{V}_2}$.

Учитывая, что $I_1'R_{\mathrm{V}_1}=u_1$, $I_2'R_{\mathrm{V}_2}=u_2$, $I_0R_{\mathrm{V}_0}=u_0$, получим

$$u_2=2u_0+u_1=20\text{ В}.$$

Из системы уравнений вытекает, что

$$u_1=I_1R_1,\quad u_2=I_2R_2.$$

Найденное решение получено в предположении, что в рассматриваемый момент времени потенциал φ_A больше φ_B (ток I_0 течет от A к B). Это имеет место, если $R_2>R_1$ (в нашем случае $R_2/R_1=(u_2I_1)/(u_1I_2)\geqslant2$).

Если же окажется, что K_2 меньше K_1, то при указанных на рисунке 24 знаках ЭДС ток I_0 должен быть направлен в другую сторону — от B к A, а $\varphi_A<\varphi_B$. Система уравнений для этого случая дает

$$u_2=u_1-2u_0=0.$$

Так как $u_2=I_2R_2$, то этому решению отвечает условие $R_2=0$ ($R_1\neq0$).

Поскольку в условии задачи величины R_1 и R_2 не оговорены, то необходимо учитывать оба решения:

$$1)\ u_2=20\text{ В},\quad 2)\ u_2=0.$$

4. Обозначим разность высот нижней точки гармошки (см. рис. 7, *а* и *б* в статье) через h и найдем его значение:

$$h=6l_0\left(\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right).\tag{1}$$

Если подвесить груз к нижней точке гармошки и отпустить его, то возникнут колебания с амплитудой, равной h. Скорость груза максимальна в момент прохождения положения равновесия и равна

$$v_m=h\omega.\tag{2}$$

Работа равнодействующей силы над грузом при перемещении из положения *а)* в положение *б)* равна $mgh/2$ (сила линейно изменяется от значения mg до 0). Приравняв эту работу максимальной кинетической энергии, находим

$$v_m=\sqrt{gh}.\tag{3}$$

Решив совместно уравнения (1), (2) и (3), получим

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=6\pi\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{l_0}{g}\left(\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 8)

Задание 15 (Л. Куббель, 1896 г.). **1. Фе4+ Крс5 2. d3 Фе6 3. d4+ Крс4 (b4) 4. d5+ Крс5 5. Фс2+** (5. de? пат) **5...Кр:d5 6. Фb3 (a2)+** и 7. Ф:е6. Любопытно, что вскрытое нападение, отражаемое черными посредством патовой ловушки, привело к геометрическому выигрышу ферзя.

Задание 16 (Г. Каспарян, 1969 г.). **1. Фh1! Кра7 2. Фg1+ Кра8 3. а6 Лb2 4. Фd4 Лb8 5. Фс5!** И в этом этюде белые избегают патовой комбинации. Если 5. а7?, то 5...Лb4+! 6. Кр:b4 с5+ 7. Ф:с5 Се7 8. Ф:е7 пат, или 7. Кр:с5 Сb6+ 8. Кр:b6 пат. **5...с6! 6. а7! Лс8 7. Фf5 Лс7 8. Фе5 Лс8 9. Фе6 Лс7 10. Фd6 Лс8 11. Фd7**, и ферзь справился с двумя фигурами соперника.

Вниманию наших читателей

Принимается подписка на фундаментальное научно-справочное издание в пяти томах «Физическая энциклопедия» (издательство «Советская энциклопедия»).

Энциклопедия рассчитана на научных сотрудников, инженеров, преподавателей и аспирантов, работающих в различных областях физики; может быть полезной студентам старших курсов физических и инженерно-физических факультетов университетов и втузов, учителям физики средней школы, ею заинтересуются также астрономы, химики, биологи, математики. 6000 расположенных в алфавитном порядке статей содержат обзоры по отдельным разделам физики, материалы о важнейших физических теориях, физических законах, явлениях и понятиях, основных объектах исследований в физике, методах исследования, важнейших установках, приборах, единицах физических величин. Главный редактор — один из основоположников квантовой электроники, лауреат Ленинской, Государственной и Нобелевской премий, дважды Герой Социалистического Труда академик А. М. Прохоров. Первый том выйдет в 1988 году. Ориентировочная стоимость тома 7 руб. 80 коп.

Подписка принимается книжными магазинами, распространяющими подписные издания. *При подписке вносится задаток 5 руб., который засчитывается при получении последнего тома.*

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, И. Н. Клумова,
Т. С. Петрова, А. Л. Рябов, А. Б. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили
М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов,
С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, П. И. Чернуский,
В. В. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор Н. Б. Румянцева

Сдано в набор 17.09.87. Подписано к печати 21.10.87.
Т-19435 Бумага 70×108/16. Печать офсетная
Усл. кр.-от. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,30
Тираж 200 802 экз. Цена 40 коп. Заказ 2589

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300, г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».
тел. 250-33-54

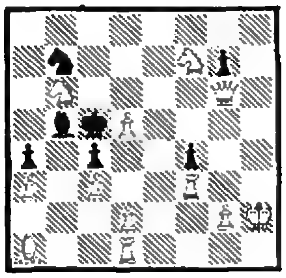
Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕМЫ

Многие шахматные задачи имеют геометрическую основу, все как бы строится на пересечении линий.

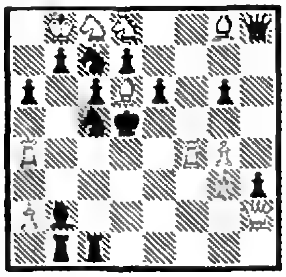
Бристольская тема (тема прокладки пути). Эта тема открыта английским проблемистом Хили и заключается в освобождении линии.



Ф. Хили, 1861 г.
Мат в 3 хода.

1. Лh1! Черные в цугцванге, конь неподвижен из-за 2. Фd6×, на любой ход слона следует **2. Фb1!** и, поскольку ладья заблаговременно уступила место ферзю, **3. Фg1×**.

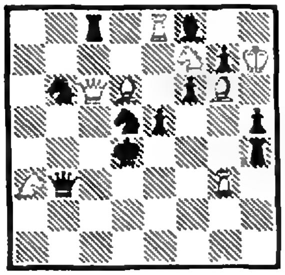
Антибристольская тема. На сей раз дальнобойная фигура закрывает путь другой фигуре.



П. Коппинг, 1961 г.
Мат в 3 хода.

1. Фe2! с угрозой 2. Фf3+ Ke4 3. Ф:e4×. Черные вынуждены привлечь своего ферзя: 1...Фc3 2. K:b7, 1...Фd4 2. Kp:c7, 1...Фe5 2. Kf7 — всякий раз с неизбежным матом 3. Kb6× *или* 3. Ke7×. От обоих матов в исходной позиции защищало 2...Cf6, теперь мешает свой ферзь.

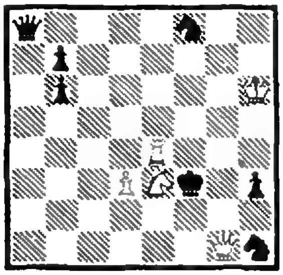
Клапан (тема ближе к физике) образуется двумя черными фигурами, одна из которых, открывая линию действия второй, одновременно перекрывает ее по другой линии. Если одна из фигур, открывая линию действия второй, одновременно перекрывает третью, то это — двойной клапан.



Л. Исаев, С. Левман, 1928 г.
Мат в 2 хода.

После **1. Kg5**, защищаясь от угрозы 2. Ke6×, черный конь d5 должен отступить (1...fg 2. C:e5×), открывая дорогу своему ферзю. В трех вариантах конь перекрывает ферзя по другим линиям: 1...Kb4 2. Kb5×, 1...Kc3 2. Лd3×, 1...Ke3 2. Kf3× — простой клапан; в трех других вариантах перекрывается путь другим фигурам: 1...Ke7 2. Cc5×, 1...Kc7 2. Фc5×, 1...Kf4 2. Фe4× — двойной клапан.

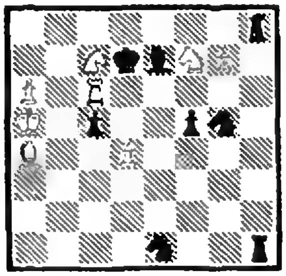
Коневое колесо — механизм восьмикратной игры одного из коней, расположенного в центральной части доски.



К. Мэнсфилд, 1958 г.
Мат в 2 хода.

В распоряжении белого коня восемь возможностей, но семь из них тонко опровергаются ходами черного ферзя: 1. Kf1 Фa2! 1. Kd1 Фc8! 1. Kc2 Фa1!, 1. Kc4 Фa5!, 1. Kd5 Фe8!, 1. Kf5 Фd8! и 1. Kg4 Фb8! Решает самый странный ход **1. Kg2!** с неизбежным матом. Тема коневого колеса оригинально воплощена в ложных следах.

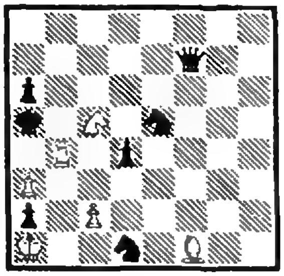
Крест — механизм четырехкратной игры короля, ферзя или ладьи на одинаковые расстояния по горизонтали и вертикали, **звездочка** — аналогичная игра по диагоналям.



В. Руденко, 1980 г.
Мат в 3 хода.

1. Kd5! с угрозой 2. Kb6+ Kpe8 3. Лf6×. 1...Cd6 2. Л:c5+ Kpe6 3. K:g5×, 1...Cd8+ 2. Лb6+ Kpc8 3. Kd6×, 1...Cf8 2. Лd6+ Kpc8 3. Лd8× и 1...Cf6 2. Лc7+ Kpe6 3. Kf4×. Ладейный крест в ответ на звездочку слона!

Фокальная тема — устранение контроля черного ферзя (ладьи) над одним из двух защищаемых им по разным линиям полей, называемых фокальными.



В. Гольцгаузен, 1909 г.
Мат в 3 хода.

Белый конь готов объявить мат на b7 или b3. 1. Cc4 опровергается путем 1...Фf3! — ферзь вновь берет под прицел оба фокальных поля. Белые предварительно играют 1. c4! и только после 1...dc (1...Фf3 2. Cd3!) проводят основную идею 2. Cc4!

Конкурсные задания

21. Белые: Kpa1, Лd3, Лd8, Ke7, Cf3 Ch4; черные: Kpe5, Лa7, Kb5, пп. a3, b7, c7, e6, f4, f5, h7. Мат в 3 хода.

22. Белые: Kph8, Лe8, Лh7, Ka4, Kb3, Ch1, пп. b5, c2; черные: Kpd6, Лb4, пп. a5, b6, d3, f5. Мат в 3 хода.

Срок отправки решений — 25 января 1988 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 21, 22».

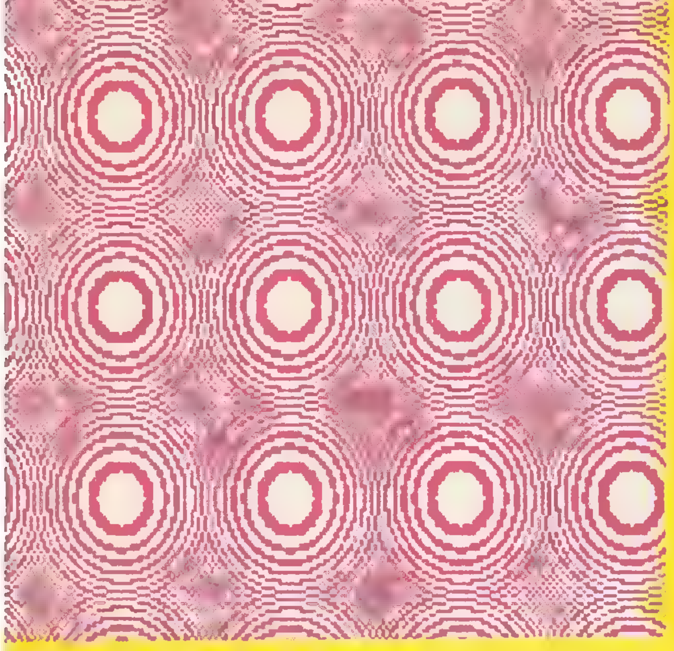


Рис. 1а.

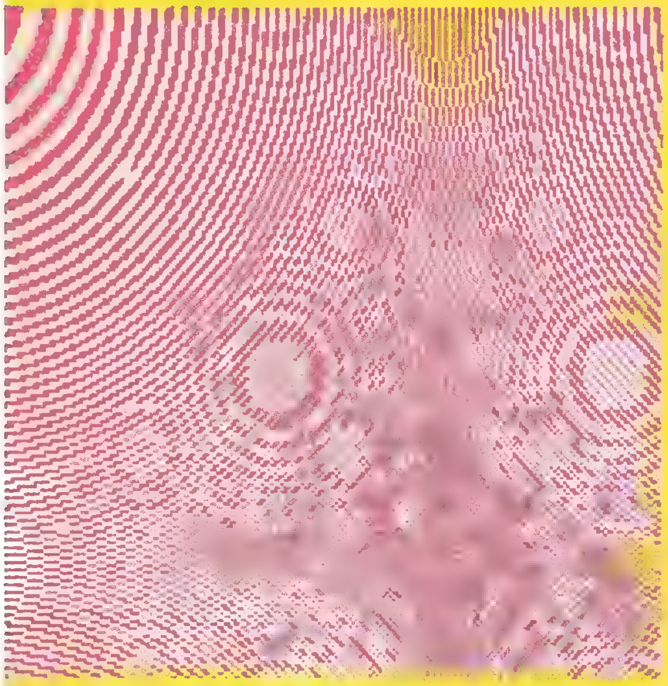
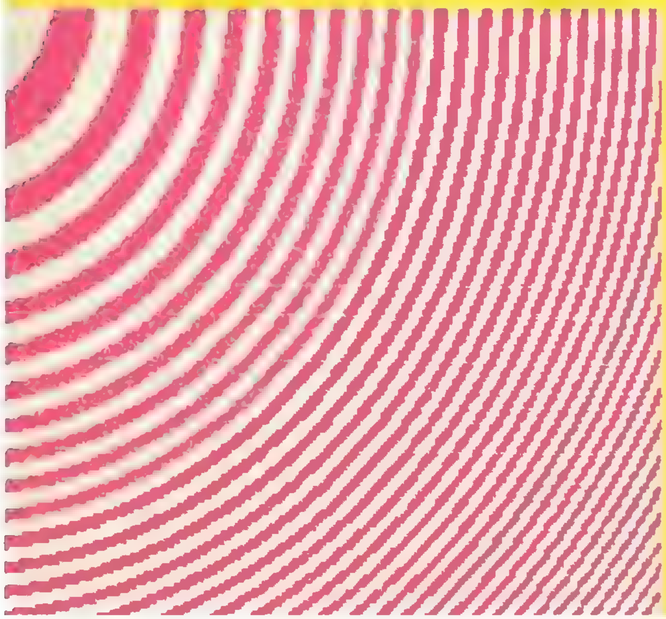


Рис. 1б.

Рис. 1в.



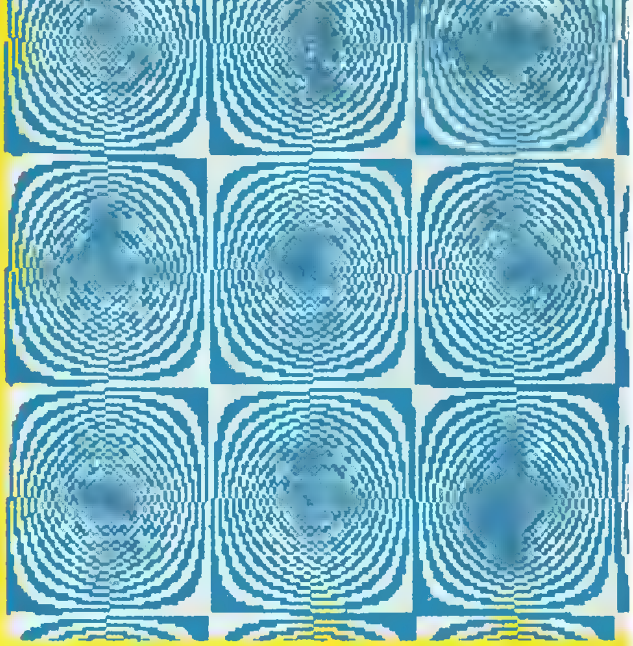


Рис. 2а

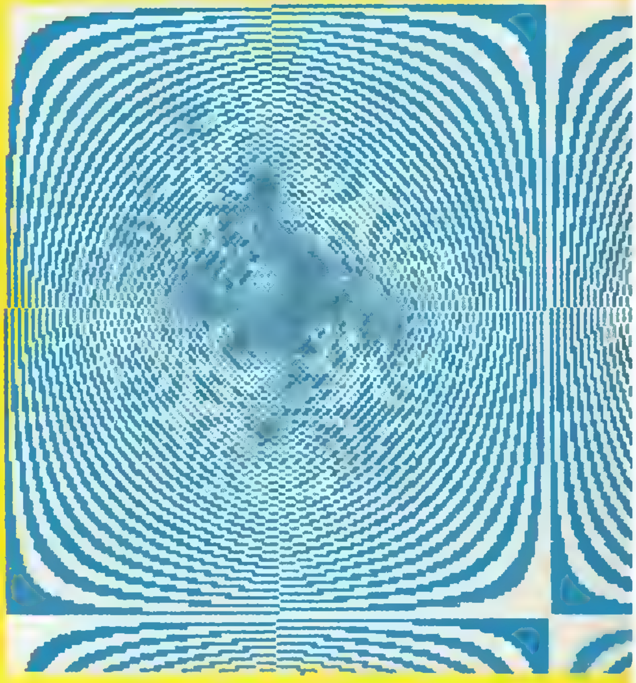
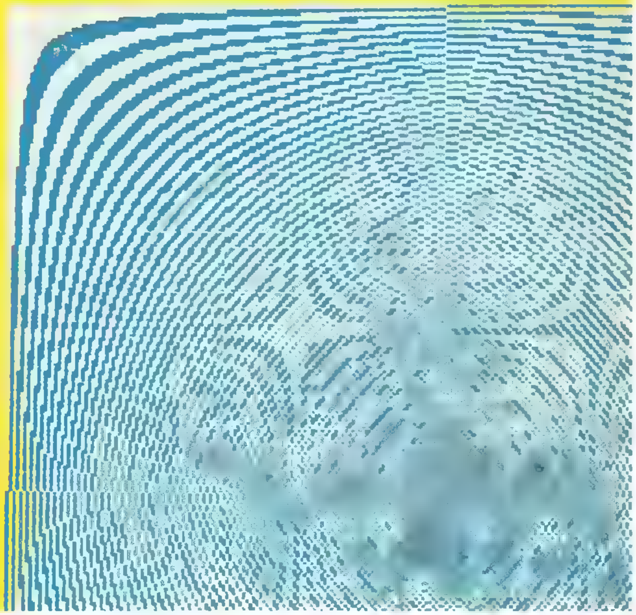


Рис. 2б

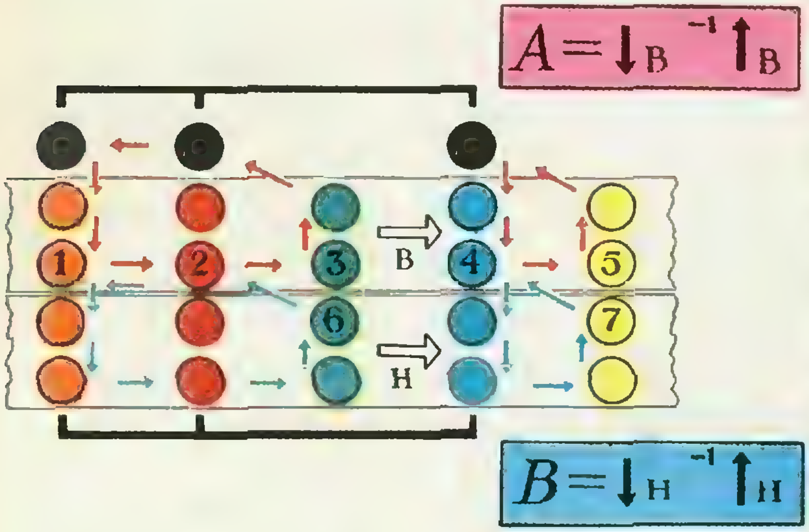
Рис. 2в



Цена 40 коп.
Индекс 70465

«Чертову бочку» изобрел Гумпей Иокои — менеджер японской фирмы, производящей игральные автоматы. Ее общий вид показан справа, слева — схематическая развертка. Эта головоломка внешне напоминает хорошо известные «варикон» и «вавилонскую башню» (см. «Квант» № 6), но перемещение шариков осуществляется здесь иначе. Разрешается: 1) с помощью двух барабанов поворачивать сразу по два «слоя» шариков; поворот нижнего барабана на 1/5 полного оборота по стрелке на схеме обозначим н, *верхнего —* в; *2) сдвигать сразу три длинных вертикальных ряда шариков (по 5 штук) на один шарик — вниз, если три «лишних» шарика вверху, и вверх, если они внизу; эти сдвиги будем обозначать стрелками ↓ и ↑. К этому описанию остается добавить, что расположение шариков, показанное слева, считается «правильным». Его и нужно научиться получать из произвольной расстановки.*

Поищем операции, помогающие решить эту задачу. В прошлых номерах мы не раз уже видели, что особенно удобны «пары обменов» (устроенные так: a ↔ b, c ↔ d) и «3 – циклы» (a → b → c → a), а искать их надо среди коммутаторов — операций вида $XYX^{-1}Y^{-1}$. *Действие двух простейших коммутаторов —* $A = \downarrow в^{-1} \uparrow в$ *и* $B = \downarrow н^{-1} \uparrow н$ *— показано, соответственно, красными и синими стрелками слева. Каждый из них порождает два независимых цикла (из 7 и из 5 элементов), т. е. перемещает одновременно 12 шариков. Это много. Но из них составляются более простые перестановки.* BAB^{-1} *Например, коммутатор* $K = A^{-1}$ *передвигает только 7 шариков: он порождает 3-цикл 5 → 4 → 7 → 5 и пару обменов 1 ↔ 2, 3 ↔ 6 (цифры — это номера шариков на схеме). Теперь самое время познакомиться еще с одним полезным приемом конструирования хороших операций — повторением. Если выполнить K дважды, то, очевидно, обмены 1 ↔ 2 и 3 ↔ 6 исчезнут, а останется только 3-цикл 4 → 5 → 7 → 4. А при тройном повторении, наоборот, исчезнет 3-цикл, пара обменов же останется. Аналогично мы могли бы избавиться от одного из двух циклов в операции A или B: проверьте, что* A^5 *— это 7-цикл, а* A^7 *— 5-цикл и посмотрите, как действуют коммутаторы* $A^5B^5A^{-5}B^{-5}$, $A^7B^7A^{-7}B^{-7}$.


$A = \downarrow в^{-1} \uparrow в$
1
2
3
4
5
6
7
в
н
$B = \downarrow н^{-1} \uparrow н$

Внимательный читатель мог заметить, что операции A и B по существу совпадают с одноименными операциями из прошлого номера «Кванта», которые использовались для плоской головоломки, аналогичной «чертовой бочке» (сравните их схемы!). Но «бочка» все-таки предмет круглый и образовать циклы в ней можно просто крутнув барабан. Это не слишком хитроумное соображение «работает» в следующих двух операциях:

$$\downarrow н \uparrow в \downarrow н^{-1} \uparrow в^{-1}$$

(1 ↔ 2, 5 ↔ 7, 3 → 6 → 4 → 3; ср. с K) и

$$\downarrow в^2 \uparrow н^2 \downarrow в^{-2} \uparrow н^{-2}$$

(1 ↔ 4, 5 ↔ 7). Как видим, экономия в числе ходов немалая!

НОМЕР
12

Квант

Основан в 1970 году

1987

12

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

3 *И. З. Пирогов, И. А. Тюлина.* Мехматовцы МГУ в битве за Москву
7 *В. С. Эдельман.* Эта простая теплоемкость
13 *С. Р. Филонович.* Великая книга Ньютона
17 *В. И. Арнольд.* Второй закон Кеплера и топология абелевых интегралов

Задачник «Кванта»
22 Задачи М1076 — М1080, Ф1088 — Ф1092
24 Решения задач М1056 — М1060, Ф1067 — Ф1072
30 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников
31 Задачи
32 *А. И. Буздин, С. С. Кротов.* Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...

Лаборатория «Кванта»
36 *В. В. Майер, Р. В. Майер.* Наблюдение электростатической индукции

Искусство программирования
38 *А. А. Дуванов, Ю. А. Первин.* Язык Лого. Урок 3: Рекурсии, функции

Новости науки
43 Самый далекий квазар

Практикум абитуриента
44 *В. А. Нахшин.* Уравнения думают за нас

Олимпиады
48 *В. В. Вавилов, Ю. П. Соловьев, А. А. Фомин.* XXVIII Международная математическая олимпиада
51 *С. С. Кротов.* XVIII Международная физическая олимпиада
56 Избранные задачи Ленинградской городской олимпиады по математике

Информация
57 Заочная физико-техническая школа при МФТИ

«Квант» улыбается *(с. 55)*
Ответы, указания, решения
Шахматная страничка
Метод треугольника *(3-я с. обложки)*

Наша обложка

На главной площади вашего города стоит новогодняя елка? Посмотрите на нее в вечернее время издалека, и вы увидите, что она... красная, хотя освещают ее разноцветные лампочки. Почему? На этот вопрос вы сможете ответить, прочитав статью «Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...» (с. 32).

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1987

Двадцатого октября 1987 года закончился жизненный путь великого ученого, крупнейшего математика современности Андрея Николаевича Колмогорова.

Место А. Н. Колмогорова в истории математики уникально — ему принадлежат фундаментальные открытия почти во всех областях этой науки и ее приложений. Но помимо собственного математического творчества, в жизни Андрея Николаевича огромное значение имело стремление служить Просвещению, служить воспитанию подрастающего поколения.

А. Н. Колмогоров родился 25 апреля 1903 года в Тамбове. Его редкостное и разностороннее дарование проявилось рано: в семь лет он самостоятельно переоткрывает представление квадратов целых чисел в виде суммы простых, в двенадцать начинает изучать высшую математику, затем увлекается историей Новгорода (где делает важное открытие), серьезно интересуется металлургией. Поступив на физико-математический факультет Московского университета в 1920 году, он окончательно связывает свою жизнь с математикой и с университетом. Уже в 19 лет ему удается построить пример «почти всюду расходящегося тригонометрического ряда», принесший ему мировую известность. В 1931 году А. Н. Колмогоров становится профессором Московского университета, где он возглавлял в разное время три кафедры и создал несколько научных школ. Нет возможности даже перечислить здесь те области знания, где Андрей Николаевич сделал важнейшие открытия. Отметим лишь создание основ теории вероятностей и статистики, решение (при участии В. И. Арнольда) XIII проблемы Гильберта.

В те же годы, когда Андрей Николаевич делает свои первые открытия, он становится школьным учителем и несколько лет работает в общеобразовательной школе. Начиная с 30-х годов, он читает многочисленные лекции школьникам и студентам, активно участвует в становлении школьных математических олимпиад, сначала Московских, а затем Всероссийских и Всесоюзных. В шестидесятые годы он создает физико-математическую школу-интернат при МГУ (которую все сразу окрестили «колмогоровской»), много сил вкладывает в усовершенствование школьных программ и учебников. В 1970 г. он вместе с И. К. Кикоиным создает журнал «Квант» и остается до самых последних своих дней его автором и активным руководителем.

Андрей Николаевич как-то сказал одному из своих учеников, что человечество представляется ему в виде блуждающих в тумане огней, которые лишь смутно чувствуют свет, рассеиваемый другими. Но эти слова невозможно отнести к нему самому: он был не только великим ученым, не только великим учителем, но и великим Просветителем. Андрей Николаевич принадлежал к числу тех несравненных гениев, которые высветляют жизнь уже самим фактом своего существования. Человек, обладающий столь совершенным разумом и столь бескорыстной душой, не нуждается в похвале потомства — его труды продолжают воздействовать на нас, его имя не будет забыто.

МЕХМАТОВЦЫ МГУ В БИТВЕ ЗА МОСКВУ

Кандидат физико-математических наук
И. З. ПИРОГОВ,
кандидат физико-математических наук
И. А. ТЮЛИНА

> *Когда меня спрашивают, что больше всего запомнилось из минувшей войны, я всегда отвечаю: битва за Москву.*
>
> Г. К. Жуков

Из тринадцати Героев Советского Союза — воспитанников Московского университета — семь человек — с механико-математического факультета*).

Авторы этой статьи — доценты мехмата (механико-математического факультета) МГУ Иван Зиновьевич Пирогов и Ирина Александровна Тюлина — были в числе тех, кто защищал Москву осенью сорок первого года.

И. З. Пирогов перед войной работал в Восточном Казахстане. Несмотря на «свинцово-цинковую» бронь**) 18 августа 1941 года он получил направление во Фрунзенское пехотное училище, из личного состава которого вскоре была сформирована одна из особых курсантских стрелковых бригад. В конце октября 34-я бригада, где служил И. З. Пирогов, была направлена в Подмосковье. В составе 49-й армии эта бригада вступила в бой под Серпуховом в конце ноября, а в декабре эти части вели бои под Тарусой. 20 декабря Иван Пирогов был тяжело ранен. Пройдя нелегкий путь поэтапной эвакуации, летом 1942 г. он оказался на излечении в Свердловске, где в это время был в эвакуации мехмат МГУ. Еще в госпитале Пирогов стал серьезно готовиться и вскоре поступил на мехмат, с которым неразрывно связана вся его дальнейшая жизнь. И. З. Пирогов награжден орденами Отечественной войны I степени, Красной Звезды и медалями военного и мирного времени.

Студентка 3-го курса мехмата И. А. Тюлина в июне сорок первого года поступила, а к осени окончила двухмесячные курсы медсестер. Ее военная дорога была долгой: началась в Туле, протянулась на тысячи километров через Калужскую область, Белоруссию, Польшу, Померанию до Эльбы (весной сорок пятого). Сначала И. А. Тюлина была санинструктором 330-й стрелковой дивизии, а затем — старшей операционной сестрой и парторгом медсанбата. Возвратилась на мехмат летом 1945 г.; окончив мехмат и его аспирантуру, преподает там же историю механики. Награждена двумя орденами Отечественной войны II степени, медалями, Почетной грамотой Верховного Совета РСФСР.

В конце 1941 г. на Москву была брошена треть всех пехотных и две трети танковых и моторизованных сил Восточного фронта гитлеровской Германии. По Ленинградскому, Рогачевскому, Дмитровскому, Волоколамскому, Минскому, Варшавскому шоссе на Москву обрушились танковые тараны фашистов. Москвичи включились в оборонные работы. К осени сорок первого года были сформированы 15 стрелковых дивизий народного ополчения; из них 12 уже в июле заняли боевые рубежи.

Сотни студентов, аспирантов и сотрудников Московского университета вместе с рабочими Краснопресненского района, студентами консерватории, артистами театра Революции (теперь это театр им. В. Маяковского) и других организаций записывались в 8-ю стрелковую Краснопресненскую дивизию. В отличие от регулярных войск, подавляющее большинство подразделений ополчения было укомплектовано при менее тщательном возрастном и медицинском отборе. Поэтому туда попали люди сугубо мирных профессий, так называемые «белобилетники». Военная учеба ополченцев была очень краткой.

В 8-ю Краснопресненскую дивизию народного ополчения Москвы записалось 213 мехматовцев. Большинство студентов, аспирантов и преподавателей мехмата направили в 975-й артполк этой дивизии.

В августе 8-я Краснопресненская дивизия заняла рубеж на Ржевско-вяземском направлении. Боевая подготовка сочеталась с напряженными оборонительными работами. К сентябрю были созданы противотанковые заграждения, огневые точки, минные поля.

Однако противник внес резкие изменения в ход ожидаемых событий. В начале октября обстановка на Ельнинском направлении быстро осложнилась: враг бросил сюда свежие войска, во много раз превосходящие наши силы в танках, стволах и в личном составе. В связи с этим командование Резервным фронтом передало 8-ю Краснопресненскую дивизию из 32-й в 24-ю армию, поставив перед краснопресненцами новую боевую задачу. Нужно было молниеносно сняться с подготовленных надежных позиций и передислоцироваться в район деревни Уварово Смоленской области, что несколько южнее Ельни.

---

*) О Героях Советского Союза, учившихся на механико-математическом факультете МГУ, см.: «Квант», 1977, № 11, с. 38—40 и 1980, № 5, с. 10—17, а также журнал «Математика в школе», 1985, № 2, с. 7—13.

**) Рабочие, занятые в производстве свинца и цинка, освобождались от военной службы.

В осенней распутице обозы с боеприпасами и продуктами отстали, но бойцы 975-го артполка, как и всей 8-й дивизии, выполнили свою задачу, задержав рвущегося к Москве врага на несколько дней. Ополченцы многих районов Москвы сражались здесь бок о бок с кадровыми частями Советской Армии. Оккупантам эти бои под Ельней стоили больших потерь: около 45 тысяч солдат и офицеров. Наши потери также были велики: более трети ополченцев 8-й Краснопресненской дивизии погибли или попали ранеными в плен. Среди погибших и пропавших без вести было много молодых ученых — аспирантов мехмата: С. С. Кудашев, А. И. Герчиков, С. Я. Карнов, М. Е. Глезерман, М. И. Песин, А. И. Вихров, В. Н. Засухин, М. Д. Брогинский, Х. М. Мильштейн, Г. Н. Алексеев и другие.

Многие выпускники мехмата сорок первого года были распределены в конструкторские бюро и на предприятия оборонного значения, предоставлявшие бронь. Однако и они почти все добровольно пошли на фронт; многие вступили в ополчение. Среди них был и Михаил Иванов, уже имевший тогда несколько рабочих специальностей. Всюду он вел активную комсомольскую и партийную работу. В 1936 г., имея большой трудовой стаж, М. И. Иванов поступил на мехмат Московского университета и в начале войны окончил его с отличием. Михаил Иванович Иванов был зачислен в 975-й артполк в звании капитана. Из кровопролитных боев под Ельней в начале октября сорок первого года он не вернулся. Погибли там же и его товарищи, только что окончившие мехмат: Мстислав Долгов, Олег Сорокин, Евгений Павлов, Петр Соколов и студенты IV курса Александр Сивков, Владимир Муранов, Виктор Подьячев и многие другие.

Среди тех, кто возвратился из этих жесточайших боев под Ельней, был Горимир Горимирович Черный, ныне академик, директор Института механики МГУ.

Вместе со студентами и аспирантами мехмата пошел в ополчение доцент Николай Борисович Веденисов. Любовь к точным наукам привил ему отец Б. Н. Веденисов, выдающийся строитель и ученый, член-корреспондент АН СССР, лауреат Государственной премии. В 1922 г. Н. Б. Веденисов поступил на физико-математический факультет Московского университета. Он учился вместе с А. Н. Тихоновым, В. В. Немыцким, Л. А. Тумаркиным, А. Н. Черкасовым, в будущем известными математиками. Со второго курса эти математики вошли в семинар по топологии, организованный П. С. Урысоном и П. С. Александровым.

По окончании учебы в университете Н. Б. Веденисов преподавал математику в Московском государственном педагогическом институте, одновременно работая в Московском университете. В годы, предшествующие Великой Отечественной войне, он был доцентом военной Артиллерийской академии. Всюду у него были ученики; в топологическом семинаре МГУ он руководил работой дипломников и аспирантов.

Вместе с сотнями студентов механико-математического факультета, десятками аспирантов и сотрудников Н. Б. Веденисов записался в 8-ю Краснопресненскую ополченскую дивизию. За несколько лет до войны он повредил позвоночник и врачи рекомендовали ему остаться в тылу. Николай Борисович отвечал всем лаконично: я должен быть там, где мои ученики — на фронте. Как и большинство ополченцев мехмата, он был направлен в 975-й артполк 8-й Краснопресненской дивизии. В боях под Ельней Н. Б. Веденисов был ранен, захвачен в плен и умер в октябре 1941 г.

Тяжелые испытания выпали на долю тех, кто был захвачен в плен. Об их судьбе можно прочитать в книге «Без вести пропавшие» С. П. Злобина, перенесшего четыре года в лагерях для военнопленных в Германии.

Доброволец с мехмата Владимир Муранов был на IV курсе, когда грянула война. Он записался в народное ополчение и был направлен в 975-й артполк. В октябре 1941 г. пропал без вести. Почти 40 лет искали его следы четыре сестры Володи. И вот наконец пришло сообщение из Общества Красного Креста, что В. П. Муранов погиб 27 декабря 1941 г. в фашистском шталаге № 324 в Гродно. За три года «хозяйничанья» в окрестностях Гродно оккупанты расстреляли и замучили в лагерях смерти 33 тысячи мирных жителей и военнопленных.

Долгие годы ничего не было известно о судьбе Андрея Павлова и его друга — мехматовца Ивана Лепехина. Оба оканчивали аспирантуру; у Андрея была подготовлена большая часть диссертации, когда началась война. По призыву Московского комитета партии Андрей и Иван были направлены на переподготовку под Серпухов (в военкомат Краснопресненского района Москвы оба явились добровольно 28 июня). В июле они были прикомандированы к 48-му полку 38-й стрелковой дивизии на Смоленское направление. Андрей Павлов был назначен командиром взвода 120-мм минометной батареи. Осенью сорок первого он оказался на самом опасном направлении осеннего натиска фашистов — под Ярцево. К. К. Рокоссовский отмечал в своих воспоминаниях 38-ю стрелковую дивизию как самую стойкую. После некоторой стабилизации линии фронта на этом участке обстановка вновь осложнилась в начале октября. Началась операция гитлеровцев «Тайфун». 38-й дивизии пришлось взять на себя сдерживание натиска сильнейших ударных сил фашистов, прикрывая отход 16-й армии. Оставшиеся в заслоне части 30-й дивизии вели бой до последней гранаты. Теперь на месте октябрьского сражения 1941 г. построен грандиозный мемориал в память бойцов и командиров, задержавших стремительный напор танковых и механизированных колонн врага на подступах к Москве.

* * *

С первых дней Великой Отечественной войны Государственный комитет обороны уделял особое внимание защите нашей столицы. В сложнейшей проблеме жизни прифронтового города самое активное участие принимали ученые, студенты, аспиранты и сотрудники МГУ, в том числе механико-математического факультета.

Приказом по МГУ от 12 июля 1941 г. была организована Местная противовоздушная оборона (МПВО) МГУ. В составе 1-й роты рядовыми бойцами были крупнейшие ученые факультета: И. Г. Петровский, П. С. Александров, С. Л. Соболев, Б. В. Булгаков, А. А. Ильюшин, Н. А. Слезкин, А. А. Космодемьянский, Д. Е. Меньшов, А. Г. Курош и другие. Кто не вошел в состав МПВО, использовался по линии МПВО на подсобных и других оборонительных работах.

Занятия в университете начались 1 августа 1941 г.; сроки обучения сокращались, интенсивность обучения сильно возросла, многие студенты были на спецработах. 13 октября, в связи с эвакуацией основного состава МГУ в Ашхабад, занятия в Москве прекратились.

Москва готовилась к отражению наступления врага с воздуха. Ученый-геометр Н. А. Глаголев успешно решал задачу об оптимальном размещении зенитных батарей и аэростатов заграждения вокруг Москвы, С. В. Бахвалов (тоже геометр) в самом начале войны разработал теорию приборов управления артиллерийским огнем (кстати, в годы гражданской войны он был артиллеристом). Специалист по механике Х. А. Рахматуллин проводил теоретические и экспериментальные работы по изучению аэродинамики привязных аэростатов и расчет тросов при поперечном ударе. Он же интенсивно проводил работы по исследованию аэродинамики парашютов.

С первых же дней войны коллектив кафедры теории вероятностей под руководством А. Н. Колмогорова провел ряд исследований по разработке теории артиллерийской стрельбы. За короткое время была решена задача о наивыгоднейшем рассеивании снарядов при стрельбе по площадям. Особо важной в этот начальный период войны была разработка таблиц бомбометания для малых бомбардировщиков типа ПО-2. Эту задачу также решили на кафедре теории вероятностей. Другая важная задача — задача низкого торпедирования с самолетов — была решена учеными кафедры гидромеханики Л. И. Седовым и Н. А. Слезкиным. Задача о влиянии несоосности снаряда и канала ствола орудия на отклонения при стрельбе была решена Н. А. Слезкиным; он же рассматривал вопросы теории бронепробивания и удара снаряда о броню.

В тяжелых оборонительных боях часто приходилось перебазировать самолеты на временные неблагоустроенные аэродромы по земле. При этом возникла проблема устойчивости таких движений. Эту проблему разрешили ученые мехмата А. А. Космодемьянский, Н. Г. Четаев, Н. Д. Моисеев.

При грандиозных масштабах военных действий исключительное значение имела служба времени ГАИШ, обеспечивавшая бесперебойную передачу радиосигналов точного времени для нужд фронта. Этой работой руководил Н. Д. Моисеев.

К началу войны на мехмате было несколько лабораторных установок; часть из них была расположена в подвальных помещениях факультета. На этих установках проводились важные исследования оборонного значения. Особенно интенсивные исследования проводились коллективом кафедры теории упругости под руководством А. А. Ильюшина. Эти исследования велись несмотря на воздушные налеты врага. Лишь после бомбардировки 29 октября, когда фашистский бомбардировщик сбросил 200-килограммовую фугасную бомбу перед зданием мехмата, работы в лабораториях теории упругости были временно прекращены. Но уже в начале 1942 г. работы в этих лабораториях продолжались. Важнейшим результатом этих экспериментально-теоретических исследований явилось доказательство возможности изготовления снарядов из вязких сталей без термообработки и из сталистых чугунов. А это значительно удешевляло и упрощало производство снарядов. Исследуя вопрос об устойчивости вязко-пластических течений, было определено число осколков и их разлет при разрыве снарядов, а эти результаты позволили дать рекомендации об оптимальном проектировании снарядов.

В осажденной Москве и блокадном Ленинграде разрабатывалась фантастическая идея построения дороги по льду Ладожского озера (Дороги жизни). Активнейшее участие в решении задачи о прочности ледового покрытия принял ученый кафедры теории упругости М. М. Филоненко-Бородич.

В предвоенные годы Б. В. Булгаков занимался теорией гироскопов. Накануне войны он интенсивно разрабатывал теорию гироскопических систем, в частности автопилотов. Во время войны А. Ю. Ишлинский, Б. В. Булгаков, Я. Н. Ройтенберг работали над совершенствованием гироскопических приборов и приборов управления артиллерийским огнем на кораблях Военно-морского флота.

В начале 1942 г., после декабрьского разгрома немцев под Москвой, многие ученые стали возвращаться в Москву из эвакуации. В феврале 1942 г. возобновились занятия в Московском университете. Хотя враг был отброшен от Москвы, условия для занятий и научно-исследовательских работ были очень трудными. Как и прежде, работали команды МПВО, студенты заготавливали дрова для столицы и в то же время восстанавливали лаборатории, сдавали зачеты и экзамены. Весной 1943 г. возвратилась из Свердловска большая часть механико-математического факультета и библиотека, особенно ценнейшая ее математическая часть — кабинет математики и механики Московского математического общества. Но здание мехмата было разрушено, занятия проходили в разных помещениях, подчас в далеких от центра города. Усилиями строителей и студентов помещение мехмата на Моховой было восстановлено. Среди студентов появились фронтовики, демобилизованные по ранению, началась кипучая мехматовская жизнь: заработали кружки, семинары — учебная жизнь мехмата входила в свой нормальный ритм.

Самоотверженный труд ученых мехмата был высоко оценен правительством: большинство перечисленных работ было отмечено Государственными премиями, а их авторы награждены орденами и медалями.

Мы попытались отразить лишь небольшую часть значительного вклада в дело обороны столицы и окончательного разгрома врага, который внесли ученые, студенты, аспиранты — весь коллектив механико-математического факультета МГУ.

ЭТА ПРОСТАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ

Доктор физико-математических наук
В. С. ЭДЕЛЬМАН

Я уверен, что многие читатели, взглянув на заголовок этой статьи, только пожмут плечами: а что в этом интересного? Да, есть такая величина, нужная для того, чтобы подсчитать количество теплоты, затрачиваемой на нагревание того или иного тела. Для техники это, конечно, важно, а посему нашлись люди, которые, потратив уйму времени, измерили удельные теплоемкости разных материалов. Измерения эти в принципе не такие уж и сложные — даже в школьном практикуме есть задача по калориметрии. Потом были составлены справочники, таблицы, любой может ими пользоваться, и нечего больше об этом думать. В общем, казалось бы, дело нехитрое и скучное. Однако...

Если полистать самые солидные научные журналы, то все время будут попадаться работы, в которых исследуется теплоемкость, и вовсе не обязательно теплоемкость новых, только что синтезированных веществ, а зачастую вполне обыденных, разве что в не обыденных условиях. В чем же секрет, почему в эпоху лазеров, физики высоких энергий, микроэлектроники, термоядерного синтеза и т. п. не угасает интерес физиков к такому, казалось бы, рутинному вопросу? Дело в том, что теплоемкость тесно связана со строением вещества и динамикой движения частиц, его составляющих, и иной раз именно измерение теплоемкости позволяет хоть что-то узнать о природе вещей, когда пасуют самые современные методы.

Чтобы воочию убедиться в такой связи, не надо ходить далеко за примерами. Посмотрите на рисунок 1: так меняется теплоемкость обычной воды при изменении температуры. Конечно, первое, что бросается в глаза, — это скачок при 0 °С, т. е. при температуре перехода воды из одного агрегатного состояния в другое. Но это не все: и в твердой фазе, и в жидкой теплоемкость сложным образом зави-

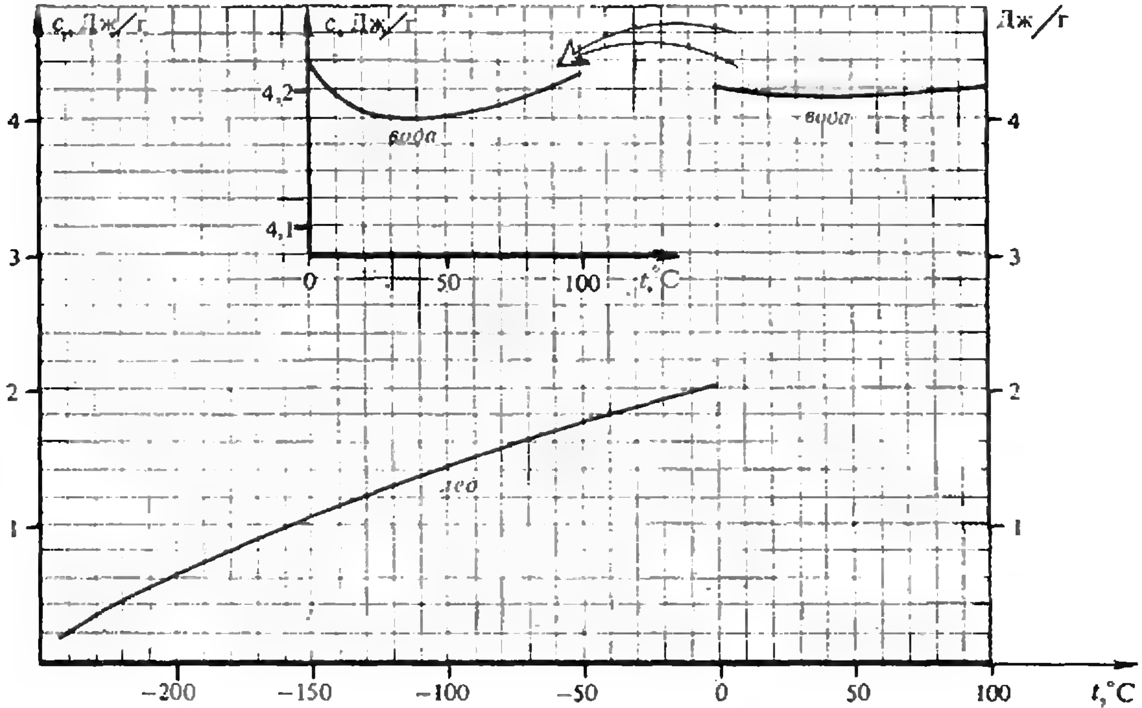


Рис. 1.

Таблица 1

Теплоемкость газов при комнатной температуре и постоянном объеме

Газ	He	Ar	Xe	H_2	N_2	O_2	CO_2	NH_3	CH_4
$c_{уд}$, Дж/(г · К)	3,15	0,31	0,096	10,26	0,74	0,66	0,65	1,62	1,68

сит от температуры. И это у воды, которая еще не так давно служила эталоном теплоемкости!

Современная наука может объяснить, что происходит с водой, но нам за это дело браться не стоит. Лучше начать с самого простого, что известно,— с идеальных газов.

Идеальные газы

Строго говоря, этот заголовок не совсем точен, потому что речь все-таки пойдет о реально существующих газах, идеальных только в одном смысле: для них при комнатной температуре с высокой точностью справедлив закон

$$pV = NkT,$$

и энергия поступательного движения $E_п$ молекулы газа равна

$$E_п = \frac{3}{2} kT$$

(здесь, как и обычно, p, V, T — давление, объем и абсолютная температура газа, N — число молекул, «запертых» в объеме V, а $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — константа Больцмана).

Выпишем из справочника значения удельной теплоемкости $c_{уд}$ при постоянном объеме, измеренные для нескольких газов (см. таблицу 1). На первый взгляд, трудно усмотреть в этих числах какую-либо закономерность. Но не будем торопиться, а попробуем представить эти же величины в несколько ином виде. Дело в том, что один грамм разных газов содержит разное количество молекул. А только что приведенная формула для $E_п$ подсказывает, что надо бы сравнивать величины, приходящиеся на одну молекулу. Пересчитать числа в таблице нетрудно. Вспомним, что моль любого вещества содержит одно и то же число молекул — $6{,}02 \cdot 10^{23}$ (это N_A — число Авогадро). Теплоемкость одного моля — молярную теплоемкость — найти нетрудно: $c_\mu = c_{уд}\mu$, где μ — молярная масса вещества. Следовательно, теплоемкость, приходящаяся на одну молекулу,—

$$c_{мол} = c_{уд} \cdot \frac{\mu}{N_A}.$$

Эта величина, естественно, очень мала, и нам удобнее будет сравнивать между собой значения $c'_{мол} = c_{мол}/k$ (легко убедиться, что величины $c'_{мол}$ безразмерны — это просто числа).

Вычислим значения $c'_{мол}$ для тех же газов, для которых мы выписали в таблице 1 значения $c_{уд}$, и посмотрим, что получилось (см. таблицу 2). Сразу бросается в глаза, что для всех одноатомных газов $c'_{мол}$ одно и то же. Иными словами, молекулярная теплоемкость $c_{мол}$ всех одноатомных газов одинакова и равна точно $1{,}5k$, т. е. $\frac{3}{2}k$.

Но ведь это очень уж знакомое число: именно коэффициент 3/2 фигурирует в приведенной выше формуле, описывающей среднюю энергию поступательного движения молекул идеального газа. А так как теплоемкость $c = \frac{\Delta E}{\Delta T}$, то и получим $\frac{3}{2} k \frac{\Delta T}{\Delta T} = = \frac{3}{2} k = c_{мол}$.

Замечательный получился результат: для гелия, неона, аргона все тепло, подводимое к ним, без остатка преобразуется в энергию поступательного движения атомов. Мысленно можно

Таблица 2

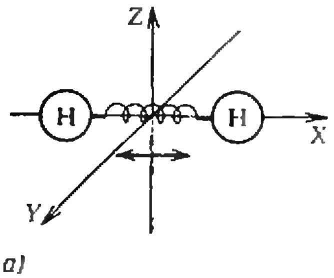
Газ	He	Ar	Xe	H_2	N_2	O_2	CO_2	NH_3	CH_4
$c_{уд}$, Дж/(г · К)	3,15	0,31	0,096	10,26	0,74	0,66	0,65	1,62	1,68
$c'_{мол} = c_{мол}/k$	1,50	1,50	1,50	2,45	2,49	2,53	3,42	3,30	3,23

представить, что атомы могут еще и вращаться, но на это движение, как видно, подведенного тепла уже не остается, и никакой теплоемкости, связанной с вращением, нет. Вывод этот, вообще-то говоря, верен только при умеренных температурах, при которых и получены результаты, представленные в таблицах 1 и 2. При очень высоких температурах (в тысячи градусов) все уже не так просто, и, как показывают опыт и теория, вращение может возбудиться. Но не будем пока усложнять себе жизнь. И без того возникают вопросы, стоит лишь взглянуть на теплоемкость газов, молекулы которых состоят из двух или большего числа атомов. В их теплоемкостях кое-что остается сверх $\frac{3}{2}k$. Любопытно, что для двухатомных газов — водорода, кислорода, азота — остаток, приходящийся на каждый атом, почти точно равен $\frac{1}{2}k$. Но для многоатомных газов ситуация сложнее: соответствующие остатки равны $\sim 0{,}65k$/атом для CO_2 и всего $\sim 0{,}34k$/атом у CH_4. Так что, по-видимому, дело не просто в числе частиц.

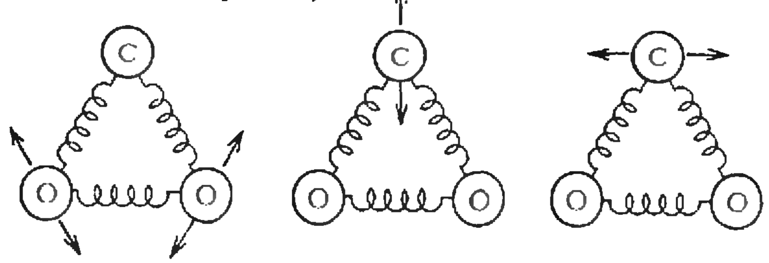
Подойдем к этому вопросу с другой стороны — посмотрим, какие различные типы движений возможны для молекул. Двухатомную молекулу можно представить так, как на рисунке 2а, — атомы, соединенные пружинкой. Поступательное движение молекулы может быть описано как движение ее центра масс по трем взаимно перпендикулярным осям X, Y, Z (см. рисунок 2а). Молекулу можно поворачивать вокруг осей Y и Z, перпендикулярных пружинке, соединяющей атомы. Вращение молекулы вокруг оси X, проходящей вдоль пружинки, надо, пожалуй, исключить — это, по существу, то же самое, что вращение каждого атома самого по себе, а как мы только что видели на примере одноатомных газов, тепло на это не расходуется. Наконец, сами атомы могут колебаться вдоль оси X навстречу друг другу.

Итак, для двухатомной молекулы возможных типов движения — их еще называют «степенями свободы»,— с учетом поступательного движения по трем осям координат, всего шесть. Для трехатомной молекулы типов движения всего девять, так как ее можно поворачивать уже вокруг трех осей и есть три различных типа колебаний (см. рисунок 2б). Если молекула составлена из n атомов и $n>3$, то подобную картинку нарисовать уже трудно, но есть простое правило, позволяющее подсчитать число степеней свободы: их полное количество, включая поступательное движение (три степени свободы) и три поворота вокруг трех взаимно перпендикулярных осей, равно числу координат атомов, составляющих молекулу, т. е. равно $3n$.

Воспользовавшись этим рецептом, сосчитаем число возможных движений для разных газовых молекул и, помня о трех степенях свободы, приходящихся на поступательное движение, добавим к таблице 2 еще пару строк (таблица 3). Присмотримся теперь к многоатомным газам CO_2, NH_3, CH_4. Каждую из этих молекул можно вращать вокруг трех осей, но число возможных типов колебаний для этих молекул разное: для CO_2 — три, для NH_3 — шесть, а для CH_4 — целых девять. А теплоемкости этих газов почти одинаковы! Разумно предположить, что при тепловом движении энергия, сообщаемая молекуле, тратится на поступательные и вращательные движения, а колебания атомов не возбуждаются. Иными словами, колебания не дают вклада в теплоемкость. Но тогда столь же разумно не учитывать колебания и у двухатомных молекул, а считать, что добавка (по сравнению с одноатомными молекулами) к их теплоемкости связана



а)
Рис. 2а.



б)
Рис. 2б.

Таблица 3

Газ	He	Ar	Xe	H_2	N_2	O_2	CO_2	NH_3	CH_4
$c_{уд}$, Дж/(г · К)	3,15	0,31	0,096	10,26	0,74	0,66	0,65	1,62	1,68
$c_{мол}/k$	1,50	1,50	1,50	2,45	2,49	2,53	3,42	3,30	3,23
Число поворотов молекулы	0	0	0	2	2	2	3	3	3
Число возможных колебаний	0	0	0	1	1	1	3	6	9

исключительно с поворотами. Для двухатомных молекул, как видно из таблицы 3, при комнатной температуре эта добавка почти точно равна $\frac{1}{2}k$ на каждый поворот. Если принять такое же правило для многоатомных молекул, то для них полная теплоемкость должна быть равна $3k$. Фактически она несколько больше, но не будем пока обращать на это внимания.

Мы пришли к интересному результату: на каждое из возможных движений молекулы как целого — будь то перемещение по одной из осей координат или поворот вокруг одной из трех осей — приходится одинаковая теплоемкость, равная $\frac{1}{2}k$. Это заключение физики называют «законом равнораспределения».

Колебания — вне закона?

Но если это закон, то почему он не универсален, почему сделано исключение для колебаний? Конечно, можно сказать, что «лишняя» теплоемкость у многоатомных молекул связана с *колебаниями, но вклады от колебаний* для CO_2 ($0{,}15k$ на каждое колебание) и для CH_4 ($0{,}025k$ на колебание) столь различны, что о равнораспределении говорить не приходится.

Еще запутаннее ситуация становится, если посмотреть на громадную «супермолекулу» — частицу твердого тела. В твердых телах все составляющие их молекулы расположены в узлах кристаллической решетки и не могут двигаться поступательно или вращаться. Единственный возможный вид движения, если не считать движения предмета как целого, это колебания атомов около своих положений равновесия. Поэтому вся теплоемкость твердых тел связана с возбуждением колебаний. И теплоемкость эта отнюдь не мала. Так, почти все кристаллы, составленные из атомов, имеют при обычных условиях почти одинаковую молярную теплоемкость, близкую к 25 Дж/(моль · К). Это правило известно как закон Дюлонга и Пти. К примеру, теплоемкость алюминия равна 24,4 Дж/(моль · К), серебра — 25,2 (в тех же единицах), меди — 24,6, золота — 26,5, свинца — 26,6. Легко вычислить, что на каждый атом в твердом теле приходится в среднем теплоемкость $3k$, т. е. на каждое колебание (а их число, напомню, для моля вещества равно $3N_A$) приходится не $\frac{1}{2}k$, а вдвое большее значение! Но попробуйте каждому колебанию в молекуле CH_4 приписать вклад в теплоемкость, равный $1k$, и вы получите громадное расхождение с экспериментом.

Чтобы разобраться, в чем дело, надо посмотреть на результаты опытов. В первую очередь, было бы неплохо узнать, зависит ли от температуры теплоемкость газов, а если зависит, то как? Приведем такую зависимость

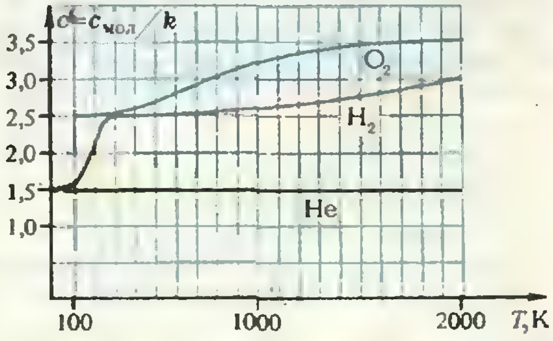


Рис. 3.

для нескольких газов: для гелия, водорода и кислорода (рисунок 3). Первое, что сразу видно,— у одноатомного газа гелия в интервале температур от близких к 4,2 К (температура ожижения гелия) и до тысяч градусов Кельвина теплоемкость неизменна. А вот поведение теплоемкости водорода совершенно иное. При низких температурах она, как и у гелия, равна точно $1{,}5k$ — в этой области температур водород ведет себя как одноатомный газ. При $T \approx 70$ К начинается рост теплоемкости, и при $T \approx 250$ К она выходит на новое, почти постоянное значение $c_{\text{мол}} = 2{,}5k$. Но где-то около 1000 К начинается новый подъем, и при 2000 К теплоемкость водорода становится больше $3k$. При дальнейшем росте температуры теплоемкость продолжает увеличиваться, но не будем забираться в эту область, так как слишком много явлений разыгрывается в газе, когда он сильно нагрет.

Посмотрим лучше, как ведет себя в том же температурном интервале кислород. Для него измерить теплоемкость в газовой фазе при температурах, заметно меньших 100 К, нельзя, так как кислород перестает быть газом. Однако если бы это было не так, то при низких температурах теплоемкость газообразного кислорода тоже была бы равна $1{,}5k$; а так кривая сразу начинается с уровня $2{,}5k$, но зато к 2000 К теплоемкость успевает вырасти до значения $3{,}5k$.

Какие выводы можем мы сделать по приведенным экспериментальным данным?

1. Поступательное движение молекул газа есть всегда, и связанная с ним теплоемкость не зависит от температуры.

2. Вращения и колебания при низких температурах исчезают — они, как говорят, «вымерзают». При этом обычная комнатная температура попадает в такую область, когда вращение уже есть (для молекул водорода, например, оно «вымерзает» при $T \approx 100$ К), а колебания еще «заморожены».

И, наконец,

3. У молекулы кислорода есть только один тип колебаний, а теплоемкость при его «размораживании» вырастает не на $\frac{1}{2}k$, а на $1k$. Значит, теплоемкость, приходящаяся на каждое «размороженное» колебание, равна $1k$.

Но это число мы уже встречали — именно такая теплоемкость приходится на каждое колебание в твердом теле! Как же понять эти результаты?

На помощь приходит квантование

Оказывается, все дело — в квантовании. И показать это нам поможет аналогия с одним из первых ставшим известным квантовым явлением — эмиссией электронов из металла. Фотоэмиссия — испускание электронов из металла под действием света — происходит лишь тогда, когда энергия кванта света $h\nu$ больше работы выхода электрона из металла. Но есть и другое явление — термоэлектронная эмиссия, которая широко используется в технике для создания электронных пучков, например в телевизионных трубках. В этом случае электроны покидают металл, когда он нагрет до высоких температур, таких, что энергия теплового движения $\sim kT$ становится сравнимой с работой выхода. Можно сказать, что эмиссия «заморожена» при низких температурах и «размораживается» при нагревании. Другими словами, «вымораживание» движения происходит тогда, когда для его возбуждения надо приложить какой-то определенный квант энергии. И это верно всегда, а не только для эмиссии электронов.

Отсюда следует: поскольку колебания и вращения «вымораживаются», то, значит, эти движения квантуются! Такое заключение кажется особенно неожиданным, когда речь идет о вращении,— трудно представить, что молекулы нельзя поворачивать с любой, как угодно малой, скоростью. Но в квантовой механике это непреложный факт, и молекулы либо не вращаются вовсе, либо уже сразу так, чтобы их кинетическая энергия, поделенная на постоянную Больцмана k, стала равна примерно десяти — ста градусам Кельвина (точные числа, конечно, зависят от физических характеристик молекул конкретного вещества). Ну, а когда речь идет о газе, содержащем громадное количество молекул, то в нем всегда найдутся такие, которые не вращаются,— их доля подавляюще велика при низких температурах;

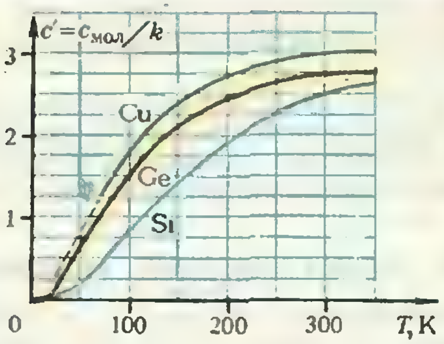


Рис. 4.

есть и такие, которые вращаются, и их становится все больше и больше по мере нагревания газа. Итак, чисто квантовое явление влияет на такую, казалось бы, сугубо классическую величину, как теплоемкость идеального газа.

То же самое, что о вращении, можно сказать и о колебаниях. И теперь понятно, что различие между вкладом колебаний в теплоемкости твердых тел и газов при комнатной температуре не носит принципиального характера, а связано с численным различием характеристик веществ. Для молекулы водорода или кислорода квант колебаний в шкале температур равен тысячам градусов Кельвина, а для твердых тел — только сотням. И действительно, именно при таких температурах теплоемкость твердых тел тоже начинает быстро изменяться (рисунок 4). И это различие чисел тесно связано с тем, что плавление твердых тел происходит при температурах порядка тысячи градусов Кельвина, а заметная диссоциация молекул кислорода и водорода — при десятке тысяч градусов. А ведь механизм обоих процессов один и тот же — это тепловая раскачка колебаний до такой амплитуды, при которой «рвутся» связи, и чем меньше температура, при которой наступают колебания, тем меньше и температура «разрыва» связей.

Вот какая красивая картина теплового движения получена нами из анализа теплоемкости. Для полной гармонии не хватает одного штриха: както надо уложить в одну схему $\frac{1}{2}k$ для теплоемкости, связанной с поступательными или вращательными степенями свободы, и $1k$ — для колебаний. Оказывается, и здесь есть прекрасный выход. В самом деле, обратите внимание, что $\frac{1}{2}$ появляется там, где движение характеризуется только кинетической энергией. Но при колебаниях есть еще и потенциальная энергия, и если полная энергия колебаний равна kT (т. е. теплоемкость равна $1k$), то это значит, что система периодически переходит из состояния с нулевой кинетической и с максимальной потенциальной энергией, равной kT, в состояние с нулевой потенциальной и максимальной кинетической энергией, тоже равной kT. А в среднем по времени кинетическая энергия в точности равна потенциальной и, очевидно, обе они равны $\frac{1}{2}kT$ — и мы вернулись к половинке.

Итак, окончательные выводы: при заданной температуре возбуждаются те виды движения, энергия кванта которых сравнима с kT или меньше этой величины. При этом и кинетическая, и потенциальная энергия (если она есть!), приходящаяся на каждую степень свободы, одна и та же и равна $\frac{T}{2}$. Эти выводы прекрасно согласуются со многими экспериментами и подтверждаются строгой теорией, основанной на квантовой механике.

Конечно же, рассмотренный здесь случай — простейший из возможных. Мы можем заглянуть и глубже: вычисляя степени свободы, мы считали атом единой частицей, но ведь это не так. И у каждого атома есть свои внутренние степени свободы движения электронов атомных оболочек относительно ядер. Однако для их «размораживания» требуются уже десятки и сотни тысяч градусов. Собственно, физика плазмы и изучает газы, в которых «разморожено» движение электронов. Можно пойти и дальше — и ядра составлены из отдельных элементарных частиц, да и сами эти частицы совсем не элементарны. Но чтобы возбудить такие тепловые движения, нужны уже миллионы и миллиарды градусов, а то и много больше, и тут начинается тропа, ведущая в историю рождения звезд, галактик да и самой Вселенной. А первая веха на этой тропе — идеальные газы со своими законами.

ВЕЛИКАЯ КНИГА НЬЮТОНА

(К 300-летию первого издания «Математических начал натуральной философии»)

Кандидат физико-математических наук
С. Р. ФИЛОНОВИЧ

В предыдущем номере журнала мы познакомились с первой книгой «Начал». Сегодня мы откроем вторую книгу. Называется она так же, как и первая,— «О движении тел»— и посвящена, говоря современным языком, механике сплошных сред. В ней рассматриваются задачи, связанные с движением тел в средах с сопротивлением, когда сила сопротивления зависит от скорости. Обсуждаются различные виды движения: прямолинейное, криволинейное, колебания маятников. Наконец, здесь же решаются задачи о распространении движения через жидкости и о движении самих жидкостей в различных условиях.

Может возникнуть вопрос: зачем Ньютону понадобилось так подробно обсуждать задачи, не имеющие столь фундаментального значения, как проблемы небесной механики, составляющие основу первой книги?

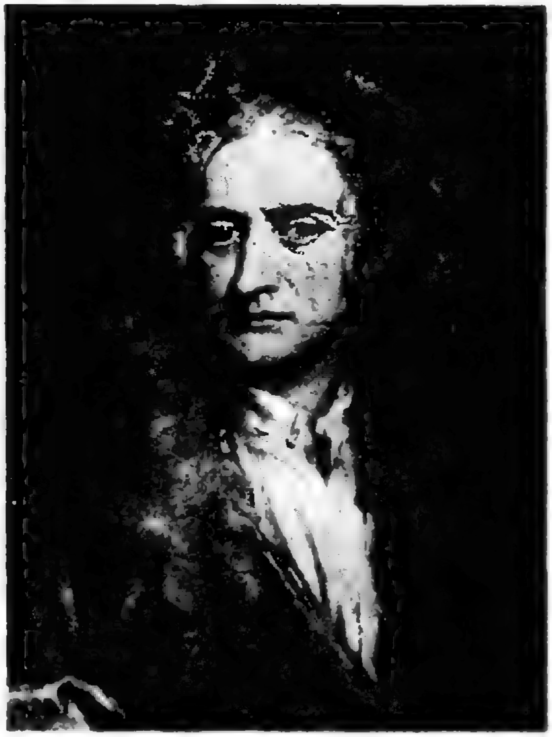
Вероятно, Ньютон хотел продемонстрировать эффективность построенной им механики для решения еще одного класса задач. Однако главная причина состояла в том, что Ньютон стремился опровергнуть теорию тяготения Декарта, объяснявшую закономерности движения планет вокруг Солнца с помощью представления о вихрях всепроникающей жидкости — эфира. Рассмотрение Ньютона убедительно показало, что теория Декарта не совместима с законами механики. Наконец, есть и еще одно обстоятельство, которое, возможно, повлияло на выбор задач для второй книги «Начал». Дело в том, что Ньютон был не только гениальным теоретиком, но и блестящим экспериментатором, для которого опыт являлся главным критерием истинности физической теории. Поэтому там, где это было возможно, Ньютон на опыте стремился получить подтверждения своих теоретических выкладок. Применительно к движению тел под действием центральных сил поставить натурный эксперимент очень трудно. Применительно же к задачам второй книги «Начал» открывался широкий простор для опытной проверки, чем Ньютон и воспользовался. Он провел и описал много интересных механических экспериментов, дополняющих теоретическое обсуждение задач.

Приведем в качестве примера отрывок из второй книги.

«Есть мнение, что существует некоторая чрезвычайно тонкая эфирная среда, свободно проникающая через поры и промежутки между частицами всяких тел; от такой среды, при течении ее через поры тел, должно было бы происходить сопротивление, поэтому я произвел испытания, чтобы определить, сосредоточено ли полностью сопротивление, испытываемое телами при движении, на их наружной поверхности или же внутренние части тел претерпевают заметное сопротивление. Опыт, который я придумал, состоял в следующем: к достаточно прочно укрепленному стальному крюку, при помощи стального кольца, я подвесил на нити длиною в 11 футов [1 фут=0,3048 м.— С.Ф.] круглую еловую кадочку, чтобы получить маятник сказанной длины. Крюк сверху был на своей впалой поверхности хорошо заострен, так чтобы кольцо, налегая верхнею своею частью на это острое ребро, могло двигаться совершенно свободно, к нижней же части кольца была привязана нить. Я отклонял маятник таким образом устроенный, приблизительно на 6 футов от

Окончание. Начало см. в «Кванте» № 11, 1987.

отвеса в плоскости, перпендикулярной к заостренному ребру крюка, чтобы кольцо при качаниях маятника не скользило взад и вперед, ибо точка подвеса, в которой кольцо касается крюка, должна оставаться неподвижной. Я точно замечал начальное отклонение, сообщаемое мною маятнику, затем, пустив маятник, я замечал еще три других его отклонения, которые маятник имел после первого, второго и третьего размаха. Я повторял это многократно, чтобы определить эти отклонения как можно точнее. Затем я наполнял кадочку свинцом и более тяжелыми из имевшихся под рукою металлами; перед тем я взвесил порожнюю кадочку вместе с тою частью нити, которою она была обмотана, и половиною остальной части, заключенной между крюком и подвешенной кадочкою, ибо нить, когда маятник отклонен от прямого положения, действует на него половиною своего веса. К этому весу я прибавил вес воздуха, заполнявшего кадочку. Полный вес порожней кадочки составлял приблизительно 1/78 веса кадочки, наполненной металлами. Так как кадочка, наполненная металлами, растягивая нить, увеличивала ее длину, то я укорачивал нить настолько, чтобы при качаниях маятника длина ее была такою же, как и раньше. Отведя затем маятник до первого из замеченных, как сказано, отклонений, я его пускал и насчитывал около 77 качаний, пока маятник имел отклонение, равное второму, затем еще столько, пока оно становилось равным третьему, и наконец, еще столько же, когда оно становилось равным четвертому. Отсюда я заключаю, что все сопротивление заполненной кадочки имеет не большее отношение к сопротивлению порожней, как 78 и 77. Ибо, если бы оба сопротивления были равны, то заполненная кадочка, масса которой в 78 раз больше массы порожней кадочки, должна была бы сохранять и во столько же раз дольше свое колебательное движение и, следовательно, по совершении 78 размахов приходить в замеченные, как сказано выше, положения. Она же приходила в них через 77 размахов... При этих опытах я воспользовался сперва недостаточно прочным крюком, тогда заполненная кадочка замедлялась значительно сильнее; изыскивая причину, я заметил, что крюк, поддаваясь весу заполненной кадочки, следовал за ее колебаниями и гнулся взад и вперед; я изготовил затем более прочный крюк, чтобы точка подвеса оставалась неподвижной, после чего все шло, как описано выше.»



Исаак Ньютон (1643—1727).

На основе полученных результатов Ньютон пришел к выводу, что сопротивление, действующее на внутренние частицы кадочки (т. е. возможное сопротивление эфира), по крайней мере в 6000 раз меньше, чем сопротивление, действующее на внешнюю поверхность кадочки (сопротивление воздуха). Конечно, с позиций современной науки, отрицающей существование эфира, результаты этого опыта объясняются иначе. (Справедливости ради отметим, что и сам Ньютон понимал условность своей интерпретации данных.) Однако из этого примера видны удивительная изобретательность Ньютона в постановке опытов, его внимание к деталям и добросовестность описания результатов, которая не позволяет умолчать... даже о своих исправленных ошибках,— одним словом, все то, что составляет талант экспериментатора. Тщательность описания свидетельствует также о значении, которое Ньютон придавал своим опытам. Стоит подчеркнуть, что повторение опытов Ньютона с маятниками, проведенное в 1915 году по инициативе переводчика «Начал», выдающегося математика и кораблестроителя А. Н. Крылова, показало их высокую точность.

Апофеозом «Начал» является третья книга, озаглавленная «О системе мира». Здесь Ньютон продемонстрировал всю мощь построенной им механики, анализируя многие, в том числе и весьма сложные астрономические явления с помощью сформулированных им законов движения и закона всемирного тяготения, рассмотренного в начале третьей книги. Ньютон строит изложение таким образом, что закон всемирного тяготения как бы выводится на основе обобщения результатов наблюдений. Привычная нам формулировка этого закона следует из теоремы VII (*«Тяготение существует ко всем телам вообще и пропорционально массе каждого из них»*) и следствия 2 из нее (*«Тяготение к отдельным равным частицам тел обратно пропорционально квадратам расстояний мест до частиц»*), а также третьего закона динамики. В этой части Ньютон обсуждает особенности движения планет и Луны, строит теорию приливов и теорию движения комет. Он смело объединяет «земную» и «небесную» механику, демонстрируя тем самым познавательные возможности науки.

Следует отметить, что и в построении, и в содержании этой части «Начал» особенно отчетливо проявилась неприязнь Ньютона к изобретению гипотез (его выражение «Hypothesis non fingo» — «Гипотез не измышляю» — стало почти афоризмом). С этой чертой творчества ученого связано отсутствие каких-либо объяснений механизма передачи тяготения на расстояние. Поэтому в XVIII и XIX веках учение Ньютона о тяготении обычно рассматривалось как образец теории дальнодействия. Однако сам Ньютон прекрасно понимал незавершенность своей теории тяготения. Уже после выхода в свет «Начал» он писал одному из своих корреспондентов: *«Что тяготение должно быть врожденным, присущим и необходимым свойством материи, так что одно тело может взаимодействовать с другим на расстоянии, через пустоту, без участия чего-либо постороннего, при посредстве чего и через что их действие и сила могли бы передаваться от одного к другому,— это мне кажется столь большим абсурдом, что я не представляю себе, чтобы кто-либо, владеющий способностью компетентно мыслить в области вопросов философского характера, мог к этому прийти.»*

Первое постоянное здание Лондонского королевского общества, приобретенное по настоянию Ньютона в 1710 году.

Эти соображения Ньютона были известны Фарадею и Максвеллу, они вдохновляли их на разработку важнейших представлений теории электромагнитного поля. Так даже нерешенные Ньютоном проблемы способствовали прогрессу науки.

Завершаются «Начала» подробным анализом астрономических закономерностей, известных в конце XVII века. Здесь Ньютону удалось свести множество разрозненных наблюдений и фактов в единую систему, что явилось наилучшим доказательством достоинств построенной им механики.

«И всюду свет разлился»

Английский поэт А. Поп написал о Ньютоне строки, ставшие хрестоматийными:

«Природы строй, ее закон
В извечной тьме таился,
И бог сказал: «Явись, Ньютон!»
И всюду свет разлился».

Эти строки отражают восхищение гением Ньютона человека XVIII века. А как восприняли книгу кембриджского профессора его современники сразу после ее появления?

Рецензенты в целом высоко оценили «Начала». Однако того восхищения, которого она заслуживала (с нашей, современной точки зрения), не было. Почему? Причин было несколько. Прежде всего, сказалось влияние авторитета Декарта и его теории вихрей. Именно поэтому с бóльшим вниманием изучали гидродинамику «Начал», чем теорию тяготения.

Значение теории тяготения было осознано позднее, после того как усилиями Эйлера, Клеро, Даламбера, Лагранжа и Лапласа небесная механика была превращена в наиболее развитую отрасль естествознания. Другое обстоятельство, наложившее отпечаток на восприятие «Начал», было связано с «синтетическим» методом изложения, о котором уже говорилось в первой части статьи (см. «Квант» № 11, 1987). Когда-то было сказано: «с легкостью делать то, что затрудняет других,— талант; делать же то, что недоступно таланту,— гениальность». С этих позиций «Начала»— свидетельство гениальности Ньютона. Но ведь у любой научной работы есть и другая задача — помочь последователям пойти дальше автора. Метод решения задач механики, использованный Ньютоном, затруднял продвижение вперед. Это прекрасно пояснил великий Эйлер: «Хотя читатель и убеждается в истинности выставленных положений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно... Хотя мне казалось, что я достаточно ясно понял решение многих задач, однако задач, чуть отступающих от них, я уже решить не мог». Механика Ньютона начала «работать» в науке после того, как она была переведена на язык дифференциального и интегрального исчисления и дифференциальных уравнений. Основной вклад здесь принадлежит Эйлеру, Даламберу и Лагранжу.

И все же «большое видится на расстоянии». История показала, что ньютоновские «Начала» действительно можно считать началом новой науки. В этой книге впервые была построена система анализа физических (точнее, механических) явлений, основанная не на качественных рассуждениях, а на их математическом описании. Важнейшей чертой «Начал» является последовательное использование данных опыта для построения теории. «Начала» дали пример беспрецедентно широкого охвата явлений — от перемещения тел на Земле до движения планет, их спутников и комет.

Всякая поистине значительная научная книга интересна и важна не только решенными в ней задачами. Она дает направление дальнейшему развитию науки и своими нерешенными проблемами. В «Началах» была намечена целая научная программа, которая осуществлялась учеными XVIII — первой половины XIX века. Упоминание об этой программе можно найти уже в предисловии Ньютона к первому изданию «Начал»:

«Было бы желательно вывести из начал механики и остальные явления природы, рассуждая подобным же образом, ибо многое заставляет меня предполагать, что все эти явления обусловливаются некоторыми силами, с которыми частицы тел, вследствие причин покуда неизвестных, или стремятся друг к другу и сцепляются в правильные фигуры, или же взаимно отталкиваются и удаляются друг от друга. Так как эти силы неизвестны, то до сих пор попытки философов объяснить явления природы и оставались бесплодными. Я надеюсь, однако, что или этому способу рассуждения, или другому, более правильному, изложенные здесь основания доставят некоторое освещение».

Действительно, законы динамики послужили базой для реализации ньютоновской программы. Творению Ньютона предстояла долгая жизнь, полная интересных событий, приведших в середине XIX века к формированию механической картины мира.

ВТОРОЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА И ТОПОЛОГИЯ АБЕЛЕВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(по Ньютону)

От редакции. ***На страницах книг великих ученых порой встречаются незамеченные современниками и последователями глубокие идеи, значение которых становится понятным лишь много позже. Расшифровку с современных позиций двух таких удивительных страниц книги Ньютона Principia предпринял автор предлагаемой статьи. Редакция понимает, что не всем читателям будет доступна очень смелая трактовка хода мысли Ньютона, написанная современным математическим языком, однако мы надеемся, что эта статья позволит если не понять, то хотя бы прочувствовать связь между идеями Ньютона и современной математикой.***

В. И. АРНОЛЬД

> *Это учение [о степенных рядах] находится в таком же отношении к алгебре, как учение о десятичных дробях к обыкновенной арифметике.*
>
> И. Ньютон, *Метод флюксий*

1. Математика и физика. Перелистывая *Principia* («Математические начала натуральной философии») Ньютона в связи с исполняющимся в этом году трехсотлетием этой великой книги, заложившей основы теоретической и математической физики, я наткнулся на две чисто математические страницы, содержащие удивительно современное топологическое доказательство замечательной теоремы о трансцендентности абелевых интегралов.

Затерянная среди небесно-механических исследований, эта теорема Ньютона, видимо, не обратила на себя внимания математиков. Возможно, это произошло потому, что топологические рассуждения Ньютона обогнали уровень науки его времени на пару сотен лет.

Доказательство Ньютона в сущности основано на исследовании некоторой очень современной по духу конструкции (эквивалента римановых поверхностей для алгебраических кривых), поэтому оно непонятно как с точки зрения его современников, так и для воспитанных на теории множеств и теории функций действительного переменного математиков двадцатого века, боящихся многозначных функций.

2. Формулировка теоремы Ньютона. Кривая на плоскости называется *алгебраической*, если она удовлетворяет уравнению $P(x,y)=0$ (P — ненулевой многочлен). Например, окружность $x^2+y^2=1$ — алгебраическая кривая. Алгебраическими кривыми являются эллипсы, гиперболы, лемниската (*не* Бернулли) $y^2=x^2-x^4$ (рис. 1). Синусоида — неалгебраическая кривая (почему?).

Функция называется *алгебраической*, если ее график — алгебраическая кривая; это определение относится как к обычным (однозначным) функциям, так и к *многозначным* функциям (т. е. таким функциям, как $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ или $y=\mathrm{Arcsin}\,x$). Например, $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ — двухзначная алгебраическая функция.

Рассмотрим *алгебраический овал* (замкнутую выпуклую алгебраическую кривую). Овал называется *алгебраически квадрируемым*, если площадь любого его сегмента выражается алгебраически. Иными словами, площадь S сегмента, отсекаемого прямой

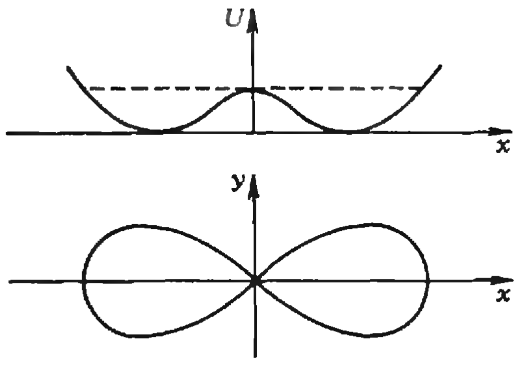


Рис. 1. Лемниската — алгебраическая кривая $y^2=x^2-x^4$. Так выглядит линия уровня энергии на фазовой плоскости частицы, движущейся в силовом поле, задаваемом многочленом третьей степени, с двумя симметричными потенциальными ямами.

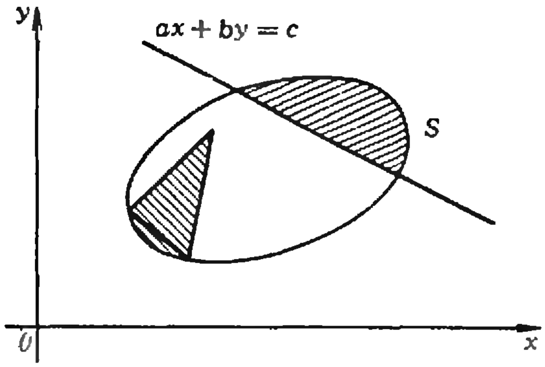


Рис. 2. Площадь S сегмента, отсекаемого от овала прямой $ax+by=c$, является функцией от (a, b, c): площадь сектора — функцией от двух прямых. Такие функции, построенные по алгебраическому овалу, называются абелевыми интегралами.

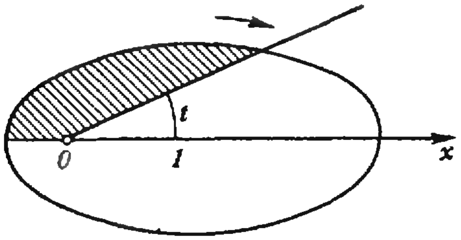


Рис. 3. Заметенная радиус-вектором площадь не может быть алгебраической функцией от тангенса t его угла наклона, так как она принимает при одном и том же t бесконечно много значений.

$ax+by=c$ (рис. 2), должна быть алгебраической функцией от прямой, т. е. должна удовлетворять алгебраическому уравнению $P(S; a, b, c)=0$, где P — ненулевой многочлен от четырех переменных.

Замечание. Если овал алгебраически квадрируем, то и площадь сектора, отсекаемого от него углом с лежащей внутри овала вершиной, является алгебраической функцией от прямых, образующих угол. Ибо площадь треугольника, отличающего сектор от сегмента, алгебраична.

Ньютон поставил себе целью найти все алгебраически квадрируемые овалы. Его результат таков:

Теорема. *Всякий алгебраически квадрируемый овал имеет особые точки*): все гладкие овалы алгебраически не квадрируемы.*

Пример. Эллипс алгебраически неквадрируем. Отсюда следует, что уравнение Кеплера, определяющее положение планеты на кеплеровом эллипсе как функцию времени (в соответствии со вторым законом Кеплера, по которому площадь, заметенная радиус-вектором, пропорциональна времени) — трансцендетное, т. е. не может быть решено в алгебраических функциях.

Этот пример и привел Ньютона к его общей теореме. Удивительна теорема потому, что на первый взгляд между алгебраической квадрируемостью и особыми точками не видно никакой связи.

Замечание. В современных обозначениях уравнение Кеплера имеет вид $x-e\sin x=t$. Это уравнение сыграло большую роль в истории математики. Со времен Ньютона решение x искали в виде ряда по степеням эксцентриситета e. Ряд сходится при $|e| \leqslant 0,6627434...$.

Исследование происхождения этой загадочной константы привело О. Коши к созданию комплексного анализа. Такие фундаментальные математические понятия и результаты, как функции Бесселя, ряды Фурье, топологический индекс векторного поля и «принцип аргумента» теории функций комплексного переменного, также впервые появились при исследовании уравнения Кеплера.

3. Доказательство Ньютона. Выберем точку O внутри овала и будем поворачивать выходящий из нее луч $y=tx$. Если овал алгебраически квадрируем, то площадь сектора, заметаемая радиус-вектором точки овала (рис. 3) должна быть алгебраической функцией от тангенса t угла наклона луча к оси x.

Заставим луч обегать овал снова и снова. При каждом обороте заметенная площадь будет увеличиваться на всю величину площади, ограниченной овалом. Следовательно, заметенная площадь, рассматриваемая как много-

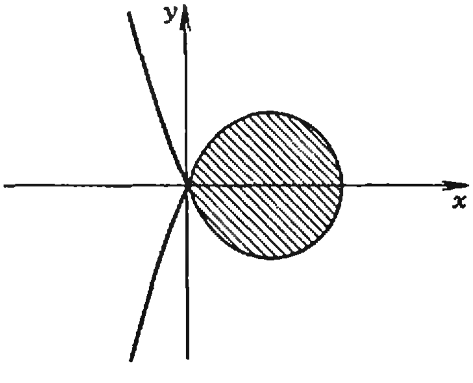


Рис. 1. Локально алгебраически квадрируемый овал с одной особой (угловой) точкой.

---

*) Точка кривой называется *особой*, если вблизи этой точки кривая не является графиком бесконечное число раз дифференцируемой функции. Примеры: точка самопересечения (рис. 4), точка возврата (рис. 8).

значная функция от t, имеет для одного и того же положения луча бесконечно много различных значений.

Но алгебраическая функция не может быть бесконечно многозначной, так как число корней ненулевого многочлена не превосходит его степени.

Следовательно, заметенная площадь — не алгебраическая функция, а потому овал алгебраически не квадрируем.

Ньютон замечает, что такое же рассуждение доказывает и неалгебраичность длины дуги овала.

4. Примеры алгебраически квадрируемых овалов. Итак, алгебраически квадрируемые овалы не существуют? Нет, Ньютону уже были известны примеры овалов, площади сегментов которых выражаются алгебраически, и он упоминает о них при обсуждении своей теоремы в Principia.

Простейший пример доставляет овал на рисунке 4, $y^2=x^2-x^3$. Обозначим через t тангенс угла наклона секущей $y=tx$. Тогда $t^2=1-x$, откуда получается параметрическое представление овала:

$$x=1-t^2,\quad y=t^2-t^3.$$

Из этого представления видно, что интеграл площади, $\int y\,dx$ — многочлен относительно t. Поэтому площадь любого сегмента, отсекаемого от этого овала прямой, вычисляется алгебраически, т. е. овал на рисунке 4 алгебраически квадрируем.

Хотя построенный овал не гладкий, рассуждение Ньютона к нему тоже применимо. Оно показывает, что площадь, заметенная радиус-вектором, не выражается в целом единой алгебраической функцией. Нет ли здесь противоречия? Нет. Дело в том, что каждый раз, когда луч проходит через особую (угловую) точку овала, алгебраическая функция, выражающая заметенную площадь, скачком заменяется на новую алгебраическую функцию.

5. Глобальная и локальная алгебраическая квадрируемость. Предыдущий пример показывает, что функция может быть локально алгебраической, не будучи алгебраической в целом (рис. 5). В этом смысле наш овал (п. 4) можно назвать *локально алгебраически квадрируемым.**)

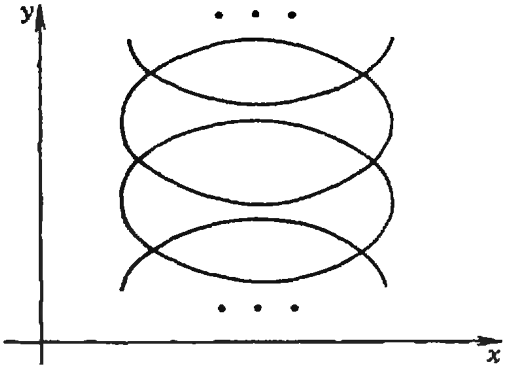


Рис. 5. График локально алгебраической, но неалгебраической функции. Такая функция может иметь в одной точке бесконечное число значений.

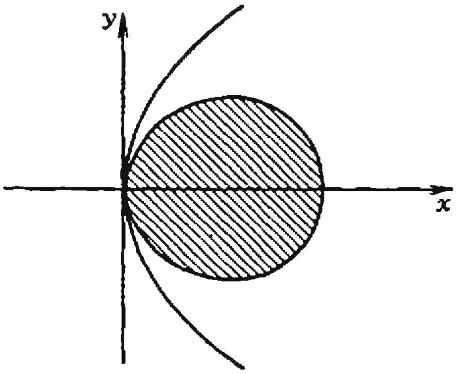


Рис. 6. Локально алгебраически квадрируемый овал. Всякий многочлен, равный нулю в точках овала, обращается в нуль и на бесконечных ветвях.

Практически локальная алгебраическая квадрируемость почти столь же полезна, как и настоящая, глобальная. Поэтому у Ньютона естественно возник вопрос: *может ли гладкий алгебраический овал быть локально алгебраически квадрируемым?* То есть может ли площадь S сегмента, отсекаемого прямой $ax+by=c$, быть алгебраической функцией от (a, b, c) в окрестности каждой точки?

Чтобы методом п. 4 построить локально алгебраически квадрируемый овал, всюду имеющий касательную, достаточно подобрать подходящую пару многочленов. Например, многочлены $x=(t^2-1)^2$, $y=t^3-t$ задают овал, показанный на рисунке 6, притом соответствующая функция $x=x(y)$ дважды непрерывно дифференцируема в нуле. Таким образом, мы получили совершенно гладкий на вид овал, который локально алгебраически квадрируем (глобальная алгебраическая квадрируемость и здесь исключается рассуждением Ньютона).

Задача. Постройте локально алгебраически квадрируемый овал с одной особой точкой, являющийся в окрестности особой точки графиком функции, имеющей 1987 непрерывных производных (а в окрестностях остальных точек — графиком неограниченное число раз дифференцируемой функции).

6. Теорема Ньютона о локальной неалгебраичности. Итак, *локально* алгебраически квадрируемый овал может иметь сколь угодно большую конечную *гладкость* (может всюду задаваться функциями со сколь угодно большим числом производных). Однако во всех наших примерах на овале есть особая точка, где производная некоторого порядка разрывна.

---

*) *Овал называется локально алгебраически квадрируемым, если площадь сегмента, отсекаемого от него прямой, — локально алгебраическая функция от прямой; иными словами, для любой прямой $ax+by=c$, близкой к данной, площади S всех частей, отсекаемых прямой от овала, удовлетворяют уравнению $P(S; a, b, c)=0$, где P — многочлен.*

Ньютон считал истинно гладкой кривой лишь такую, которая в окрестности каждой точки является графиком функции, разлагающейся в сходящийся степенной ряд

$$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

(где начало координат выбрано в рассматриваемой точке). Сейчас такие кривые называются *аналитическими*.

Замечание. Различие в поведении кривых различной конечной гладкости было Ньютону хорошо известно и обсуждается в *Principia*, а разложение всех алгебраических и элементарных функций в быстро сходящиеся степенные ряды было одним из основных его математических достижений.

Из теоремы п. 2 Ньютон выводит гораздо более сильное утверждение:

Теорема. *Любой аналитический овал алгебраически не квадрируем даже и локально.*

7. Доказательство локальной алгебраической неквадрируемости аналитических овалов. Если бы овал был локально, но не глобально алгебраически квадрируемым, то заметенная площадь выражалась бы одной алгебраической функцией по одну сторону от некоторой его точки и другой — по другую. Но для аналитического овала заметенная площадь аналитически зависит от направления луча. Поэтому обе указанные алгебраические функции разлагаются в окрестности этой точки аналитического овала в один и тот же сходящийся степенной ряд. Значит, обе эти алгебраические функции совпадают и в окрестности указанной точки. Но тогда они совпадают вообще всюду (это следует из того, что многочлен, не равный тождественно нулю, не может иметь больше корней, чем его степень).

Итак, если бы существовал локально алгебраически квадрируемый аналитический овал, то он был бы алгебраически квадрируемым и в целом. А поскольку это невозможно (пп. 2, 3), то аналитический овал не может быть алгебраически квадрируемым даже и локально.

8. Как узнать, аналитичен ли овал? Кривая называется *бесконечно-гладкой*, если она локально является графиком функции, дифференцируемой сколько угодно раз.

Теорема. *Бесконечно-гладкая алгебраическая кривая аналитична.*

Этот факт был Ньютону известен, так как Ньютон умел записывать уравнение любой «ветви» алгебраической кривой в окрестности любой ее точки в виде быстро сходящегося ряда

$$y=a_1x^{1/n}+a_2x^{2/n}+a_3x^{3/n}+\ldots$$

(где начало координат помещено в исследуемую точку).

Теорему о сходимости этого ряда Ньютон формулировал так: «Чем дальше развертывается при достаточно малом x результат, тем более он подходит к истинному значению y, так что разность, на которую он отличается от точного значения y, делается, наконец, меньше всякой данной величины».

Ряд строится при помощи так называемого многоугольника Ньютона. Метод многоугольника Ньютона*), являющийся одним из самых эффективных средства локального анализа, к сожалению, выпал из современного схоластизированного преподавания.

Каждый член ряда с нецелым показателем имеет лишь ограниченное число производных. Если в ряду присутствует хотя бы один такой член нецелой степени, то определенная таким рядом кривая уже не может быть бесконечно-гладкой в окрестности изучаемой точки.

Для бесконечно-гладкой алгебраической кривой в разложении участвуют поэтому только целые степени, и это и значит, что кривая аналитична.

Следствие. *Всякий бесконечно-гладкий алгебраический овал алгебраически неквадрируем даже локально.*

Итак, бесконечно-гладкая замкнутая выпуклая кривая не может быть локально алгебраически квадрируемой, если она алгебраична.

9. Может ли быть алгебраически квадрируемым гладкий неалгебраический овал? Отрицательный ответ следует из уже доказанного, ибо имеет место

Теорема. *Всякий локально алгебраически квадрируемый овал алгебраичен.*

Этот факт Ньютон использует как очевидный. Видимо, он рассуждал так:

Лемма. *Огибающая любого алгебраического семейства прямых алгебраична.*

Иными словами, если касательные к кривой удовлетворяют алгебраическому уравнению, то сама кривая алгебраична.

Доказательство леммы. Рассмотрим две близкие касательные с тангенсами угла наклона к оси x, равными t и $t+h$ (рис. 7). Их точка пересечения пробегает при переменном t и фиксированном h алгебраическую кривую. Степень этой кривой (т. е. степень многочлена, ее задающего) ограничена не зависящей от h постоянной (это следует из того, что условие совместности двух алгебраических уравнений выражается равенством нулю многочлена от их коэффициентов — факт, обсуждающийся Ньютоном все на тех же двух страницах *Principia*, где заодно объясняется, что две алгебраические кривые степеней m и n пересекаются не более чем в mn точках).

При стремлении h к нулю точка пересечения близких касательных стремится к исходной кривой. Будучи, таким образом, пределом алгебраических кривых ограниченной степени, исходная кривая также алгебраична.

Доказательство теоремы. Касательные к овалу отсекают от него сегменты нулевой площади. Поэтому касательные $ax+by=c$ к алгебраически локально квадрируемому овалу удовлетворяют алгебраическому уравнению $P(0;a,b,c)=0$ (см. п. 2). По лемме овал алгебраичен.

10. Алгебраически неквадрируемые кривые с особенностями. Таким образом, все бесконечно гладкие овалы алгебраически неквадрируемы (даже локально). Более того, рассуждения Ньютона доказывают локальную алгебраическую неквадрируемость бесконечно гладких невыпуклых замкнутых несамопересекающихся кривых и многих кривых с особенностями.

Локально алгебраически неквадрируемы все кривые, все особые точки которых являются точками возврата, в частности кривые, заданные уравнениями $y^2=x^3-x^4$ или $y^2=(1-x^2)^3$ (рис. 8), или кривые с особенностями типа $y=x^{p/q}$, где q нечетно, и т. п.

---

*) См. «Квант», 1977, № 6, с. 13.

Ньютон замечает, что для того, чтобы гарантировать локальную алгебраическую неквадрируемость, достаточно потребовать, чтобы к точкам замкнутой кривой не подходили «сопряженные ветви кривой, уходящие на бесконечность». Видимо, он имел в виду примеры вроде показанных на рисунках 4 и 6.

В действительности, слова «уходящие на бесконечность» употреблены тут по ошибке, нужно обязательно потребовать отсутствия каких бы то ни было самопересечений.

Правильное условие отсутствия самопересечений на замкнутой кривой, удовлетворяющей уравнению $P(x, y)=0$, состоит в том, что многочлен P обращается в нуль ровно в двух точках окружности с центром в любой точке кривой, если радиус достаточно мал.

Методом Ньютона доказывается

Теорема. *Все несамопересекающиеся в указанном смысле алгебраические кривые алгебраически неквадрируемы (даже локально).*

Напротив, самопересекающая замкнутая кривая вполне может оказаться локально алгебраически квадрируемой (эту возможность Ньютон почему-то упустил, когда писал «уходящие на бесконечность»).

Так, для лемнискаты $y^2=x^2-x^4$ (рис. 1):

$$\int y dx = \int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -(\sqrt{1-x^2})^3/3$$

— алгебраическая функция.

Но и для самопересекающихся кривых алгебраическая квадрируемость — редкость.

Из рассуждений Ньютона видно, что суммарная площадь, ограниченная самопересекающейся замкнутой локально алгебраически квадрируемой кривой (с учетом знаков), равна нулю. Например, лемниската алгебраически квадрируема лишь потому, что обе петли лемнискаты дают в суммарную площадь противоположные вклады. И если продеформировать лемнискату так, чтобы модули площадей петель стали неравными, то она утратит локальную алгебраическую квадрируемость.

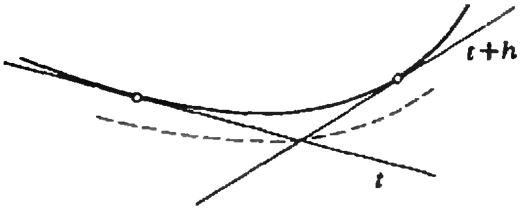


Рис. 7. При стремлении шага h к нулю пунктирная кривая, образованная точками пересечения касательных, стремится к исходной кривой. Отсюда следует, что огибающая алгебраического семейства прямых алгебраична.

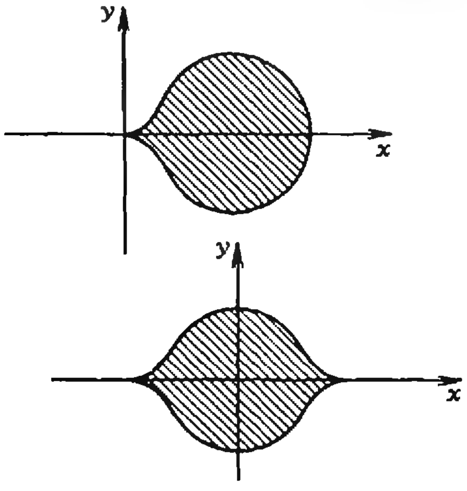


Рис. 8. Несамопересекающиеся кривые с точками возврата. К таким кривым применимо рассуждение Ньютона, и они локально алгебраически не квадрируемы.

Полное описание всех самопересекающихся алгебраически квадрируемых кривых пока не найдено.

11. Доказательство Ньютона и современная математика.

Сегодня идеи, на которых основано доказательство Ньютона, называются идеями *аналитического продолжения* и *монодромии*. Они лежат в основе теории римановых поверхностей и ряда отделов современной топологии, алгебраической геометрии и теории дифференциальных уравнений, связанных прежде всего с именем Пуанкаре,— тех отделов, где анализ, скорее, сливается с геометрией, чем с алгеброй.

Современная математика позволяет доказать многомерный аналог теоремы Ньютона о плоских кривых. Сфера в трехмерном пространстве алгебраически квадрируема. Это вытекает из теоремы Архимеда, согласно которой площадь сферического сегмента пропорциональна его высоте. Поэтому все эллипсоиды в трехмерном (и в любом нечетномерном) пространстве алгебраически квадрируемы.

Напротив, в четырехмерном (и вообще четномерном) пространстве алгебраически квадрируемых гладких поверхностей нет (это обобщение теоремы Ньютона принадлежит В. А. Васильеву, 1987 г.).

Забытое доказательство Ньютона алгебраической неквадрируемости овалов было первым «доказательством невозможности» в математике нового времени — прообразом будущих доказательств неразрешимости алгебраических уравнений в радикалах (Абель) и неразрешимости дифференциальных уравнений в элементарных функциях или в квадратурах (Лиувилль), и Ньютон недаром сравнивал его с доказательством иррациональности корней квадратных в «Началах» Эвклида.

Сравнивая сегодня тексты Ньютона с комментариями его последователей, поражаешься, насколько оригинальное изложение Ньютона современнее, понятнее и идейно богаче, чем принадлежащий комментаторам перевод его геометрических идей на формальный язык исчисления Лейбница: двухсотлетие от Ньютона до Римана и Пуанкаре кажется мне математической пустыней, заполненной одними лишь вычислениями...

Задачник „Кванта"

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 марта 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12 — 87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1076» или «Ф1088». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи по математике в этом номере предлагались на Международной математической олимпиаде в июле этого года. Мы рады отметить, что две из них принадлежат постоянным авторам нашего журнала.

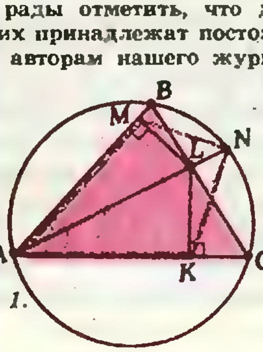


Рис. 1.

Задачи

М1076 — М1080, Ф1088—Ф1092

М1076. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L, а описанную окружность треугольника — в точке N (отличной от A); K и M — основания перпендикуляров, опущенных из L на стороны AB и AC (рис. 1). Докажите, что четырехугольник $AKNM$ равновелик треугольнику ABC.

Н. А. Кушнир

М1077. Пусть $p_n(k)$ — число перестановок множества из n $(n \geqslant 1)$ элементов, имеющих ровно k неподвижных точек. Докажите, что:

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = 0 \cdot p_n(0) + 1 \cdot p_n(1) + \ldots + n \cdot p_n(n) = n!$

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-1)^2 \, p_n(k) = n!$

Примечание. *Перестановкой* конечного множества S называется взаимно однозначное отображение f множества S на себя; число всех перестановок множества из n элементов равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Элемент a множества S называется *неподвижной точкой* перестановки f, если $f(a) = a$.

М1078. Функция f определена на множестве N_0 всех неотрицательных целых чисел и принимает значения в этом множестве. Докажите, что равенство $f(f(n)) = n + 1987$ не может выполняться для всех n из N_0.

М1079. Пусть n — натуральное число, $n \geqslant 3$. Можно ли расположить на плоскости n точек так, чтобы расстояние между любыми двумя выражалось иррациональным числом, а площадь треугольника с вершинами в любых трех — рациональным числом (отличным от нуля)?

М1080. Пусть q — натуральное число, $q \geqslant 3$. Докажите, что если $k^2 + k + q$ — простое число для всех целых k, где $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{q/3}$, то $k^2 + k + q$ — простое для всех целых k, где $0 \leqslant k \leqslant q - 2$.

В. Ф. Лев

Ф1088. Невесомая лестница закреплена во вращающемся со скоростью $f = 10$ об/мин невесомом подвесе так, что может свободно качаться относительно верхней ступеньки (рис. 2). Обезьяна массой $m = 30$ кг начинает спускаться по лестнице. На каком расстоянии l от подвеса она будет находиться, когда вертикальное положение лестницы перестанет быть устойчивым?

А. В. Андрианов

Ф1089. При перелете со станции «Мир» на станцию «Салют-7», которые находились на одной орбите, наши космонавты затормозили свой корабль, перешли на более низкую орбиту и за время $t = 30$ часов нагнали «Салют-7», который летел впереди «Мира» на расстоянии $L = 3000$ км. Считая орбиты круговыми, определить, на сколько километров промежуточная орбита ниже основной? Высоты обеих орбит много меньше радиуса Земли $R_З \approx 6400$ км.

М. В. Семенов

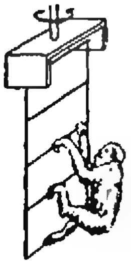


Рис. 2.

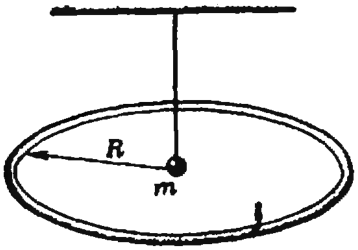


Рис. 3.

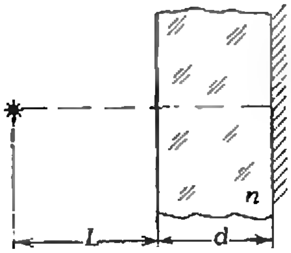


Рис. 4.

Ф1090. Ясной морозной ночью посмотрите на небо. Какие звезды мерцают более заметно: находящиеся высоко над горизонтом или низко, и почему?

А. С. Бутов

Ф1091. Подвешенный на нерастяжимой нити длиной l шарик с массой m и зарядом q находится в центре обруча, вдоль которого равномерно распределен заряд Q (рис. 3). Радиус обруча — R, заряды q и Q — одноименны. Определить частоту малых колебаний шарика, воспользовавшись формулой $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ $(x \ll 1)$.

Г. В. Григорьев

Ф1092. Найти положение изображения точечного объекта, расположенного на расстоянии L от передней поверхности толстой плоскопараллельной стеклянной пластины, посеребренной с задней стороны (рис. 4). Изображение рассматривается перпендикулярно к поверхности пластины. Толщина пластины равна d, показатель преломления — n.

В. К. Петерсон

Problems

M1076 — M1080, P1088 — P1092

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 1st 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we

M1076. The bissector of angle A in the acute-angled triangle ABC intersects side BC at the point L and the triangle's incircle at N $(\neq A)$; perpendiculars, drawn from L to AB and AC, intersect them at K and M. Prove that the quadrilateral $AKNM$ has the same area as ABC (see figure Рис. 1)

I. A. Kushnir

M1077. Denote by $p_n(k)$ the number of permutations of an n-element set having exactly k fixed points. Prove that

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = 0 \cdot p_n(0) + 1 \cdot p_n(1) + \ldots + n \cdot p_n(n) = n!$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-1)^2 p_n(k) = n!$

Remark. A permutation of a finite set S is any one-to-one map f of S onto itself; the number of all permutations of an n-element set is $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. The element a of the set S is a fixed point of the permutation f if $f(a) = a$.

M1078. The function f is defined on the set N_0 of all nonnegative integers and ranges over N_0. Prove that the relation $f(f(n)) = n + 1987$ cannot hold for all n from N_0.

M1079. Suppose n is an integer, $n \geqslant 3$. Is it possible to choose n points in the plane so that the distance between any two points is irrational, while the area of a triangle with vertices at any three of those points is rational and positive?

shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

M1080. Suppose q is an integer, $q \geqslant 3$. Prove that if k^2+k+q is simple for all integer k, where $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{q/3}$ then k^2+k+q is simple for all integer k satisfying $0 \leqslant k \leqslant q-2$.

V. F. Lev

P1088. A weightless ladder is fixed to a weightless support, rotating with velocity $f=10$ rev/min, so that the ladder can oscillate relatively to the upper step (figure Рис. 2, p. 23). A monkey of mass $m=30$ kg begins to climb down the ladder. At what distance l from the support will it be, when the vertical position of the ladder ceases to be the equilibrium one?

A. V. Andrianov

P1089. In the flight from the station "Mir" to the station "Salut-7", which were on the same orbit, our astronauts slowed down their ship, switched to a lower orbit and in time $t=30$ hours caught up with "Salut-7", which had been flying $L=3000$ km ahead of "Mir". Assuming the orbits circular, find how many kilometers lower the intermediate orbit was than the main one. The altitudes of the orbits are much less than the Earth's radius $R_E=6400$ km.

M. V. Semionov

P1090. Look at the sky on a clear, freezing night. What stars scintillate more noticeably — those high up or those nearer the horizon, and why?

A. S. Butov

P1091. A small ball of mass m and charge q hangs by an unstrechable string of length l in the centre of a hoop, along which the charge Q is uniformly distributed (figure Рис. 3, p. 23). The hoop's radius is R, the charges have the same sign. Determine the frequency of small oscillations of the ball, using the formula $(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x$ $(x \ll 1)$.

G. V. Grigoriev

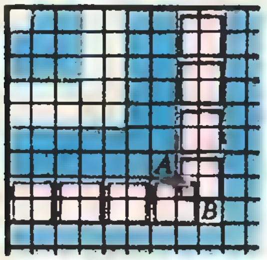
P1092. Find the position of the image of a point-like object, located at the distance L from plane parallel the front surface of a thick glass plate whose back surface is silvered (figure Рис. 4, p. 23). The image is viewed perpendicularly to the plate's surface. The thickness of the plate is d, the refraction index is n.

V. K. Peterson

Решения задач

M1056 — M1060*), Ф1067 — Ф1072

M1056. *В каждой клетке квадратной таблицы 1987×1987 написано число, не превосходящее по модулю 1. В любом квадрате 2×2 данной таблицы сумма чисел равна 0. Доказать, что сумма всех чисел в таблице не превосходит 1987.*



Разобьем квадрат на 994 области, как показано на рисунке: первая область — это угловая клетка, вторая — квадрат 3×3 без угловой клетки, третья — квадрат 5×5 без первых двух областей и так далее. В каждой из 993 областей, начиная со второй, сумма чисел не превосходит 2. Действительно, поместим в такую область квадраты 2×2 (красные квадраты на рисунке). Клетка A будет покрываться ими дважды, а клетка B не будет покрыта ни одним квадратом. Пусть в клетке A стоит число a, в клетке B — число b. По условию сумма чисел в каждом квадрате 2×2 равна 0, так что сумма всех чисел в этой области равна $b-a$ и, следовательно, не превосходит 2. Таким образом, сумма всех чисел таблицы не превосходит $1+2 \cdot 993=1987$.

С. Иванов (8 кл., с. ш. № 239, Ленинград)

---

*) Эти решения составлены на основе работ участников Всесоюзной математической олимпиады этого года.

Задачник „Кванта"

shall use ■ to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

M1080. Suppose ■ is an integer, $q \geqslant 3$. Prove that if k^2+k+q is simple for all integer k, where $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{q/3}$ then k^2+k+q is simple for all integer k satisfying $0 \leqslant k \leqslant q-2$.

V. F. Lev

P1088. A weightless ladder is fixed to a weightless support, rotating with velocity $f=10$ rev/min, so that the ladder can oscillate relatively to the upper step (figure Рис. 2, p. 23). A monkey of mass ■$=30$ kg begins to climb down the ladder. At what distance l from the support will it be, when the vertical position of the ladder ceases to be the equilibrium one?

A. V. Andrianov

P1089. In the flight from the station "Mir" to the station "Salut-7", which were on the same orbit, our astronauts slowed down their ship, switched to a lower orbit and in time $t=30$ hours caught up with "Salut-7", which had been flying $L=3000$ km ahead of "Mir". Assuming the orbits circular, find how many kilometers lower the intermediate orbit was than the main one. The altitudes of the orbits are much less than the Earth's radius $R_E=6400$ km.

M. V. Semionov

P1090. Look at the sky on a clear, freezing night. What stars scintillate more noticeably — those high up or those nearer the horizon, and why?

A. S. Butov

P1091. A small ball of mass m and charge ■ hangs by an unstrechable string of length l in the centre of a hoop, along which the charge Q is uniformly distributed (figure Рис. 3, p. 23). The hoop's radius is R, the charges have the same sign. Determine the frequency of small oscillations of the ball, using the formula $(1+x)^a \approx 1+ax$ $(x \ll 1)$.

G. V. Grigoriev

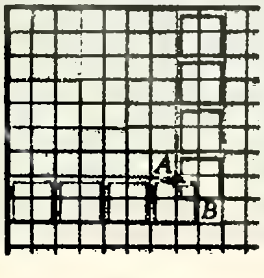
P1092. Find the position of the image of a point-like object, located at the distance L from plane parallel the front surface of ■ thick glass plate whose back surface is silvered (figure Рис. 4, p. 23). The image is viewed perpendicularly to the plate's surface. The thickness of the plate is d, the refraction index is n.

V. K. Peterson

Решения задач

M1056 — M1060*), Ф1067 — Ф1072

M1056. *В каждой клетке квадратной таблицы 1987×1987 написано число, не превосходящее по модулю 1. ■ любом квадрате 2×2 данной таблицы сумма чисел равна 0. Доказать, что сумма всех чисел ■ таблице не превосходит 1987.*



Разобьем квадрат на 994 области, как показано на рисунке: первая область — это угловая клетка, вторая — квадрат 3×3 без угловой клетки, третья — квадрат 5×5 без первых двух областей ■ так далее. В каждой из 993 областей, начиная со второй, сумма чисел не превосходит 2. Действительно, поместим ■ такую область квадраты 2×2 (красные квадраты на рисунке). Клетка A будет покрываться ими дважды, ■ клетка ■ не будет покрыта ни одним квадратом. Пусть ■ клетке A стоит число a, ■ клетке ■ — число b. По условию сумма чисел ■ каждом квадрате 2×2 равна 0, так что сумма всех чисел ■ этой области равна ■ — a и, следовательно, не превосходит 2. Таким образом, сумма всех чисел таблицы не превосходит $1+2 \cdot 993=1987$.

С. Иванов (8 кл., с. ш. № 239, Ленинград)

---

*) Эти решения составлены на основе работ участников Всесоюзной математической олимпиады этого года.

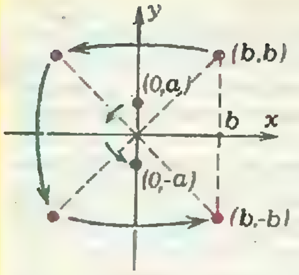


Рис. 1.

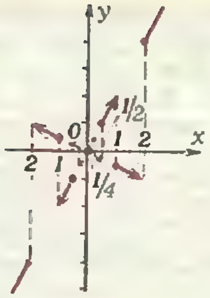


Рис. 2.

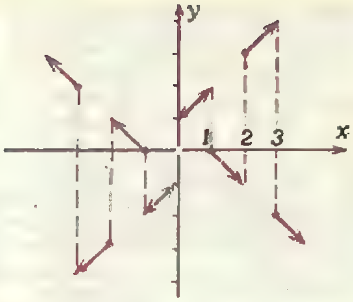


Рис. 3.

Имеются и другие функции, удовлетворяющие условию; см., например, рисунок 3. Эту функцию на олимпиаде предложил К. Апситис (10 кл., ФМШ № 1, Рига); интересно, что ее можно задать при $x \neq 0$ одной формулой

$$f(x)=\frac{x}{|x|}-x\cdot(-1)^{[x]},$$

где $[x]$ — целая часть x.

А. Каринский (10 кл., ФМШ № 18 при МГУ, Москва)

М1060. *На плоскости даны две замкнутые ломаные, каждая с нечетным числом звеньев. Все прямые, содержащие звенья этих ломаных, различны, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Доказать, что из каждой ломаной можно выбрать по одному звену так, чтобы они были противоположными сторонами некоторого выпуклого четырехугольника.*

Если одно из звеньев первой ломаной параллельно некоторому звену второй, то утверждение задачи очевидно (эти два звена — основания трапеции). Поэтому будем в дальнейшем предполагать, что никакие два звена разных ломаных не параллельны.

Прямую, содержащую звено, будем называть несущей прямой этого звена. Поскольку обе ломаные состоят из нечетного числа звеньев, число N точек пересечения несущих прямых одной ломаной с несущими прямыми другой нечетно.

Допустим, что утверждение задачи неверно. Тогда, как бы ни выбрать на каждой ломаной по звену, точка пересечения их несущих прямых будет лежать на одном из этих двух звеньев. Следовательно, число N можно представить как

(число пересечений первой ломаной с несущими прямыми второй) + (число пересечений второй ломаной с несущими прямыми первой) — (число пересечений ломаных друг с другом),

поскольку последнее число дважды учитывается в сумме первых. Покажем, что каждое из этих чисел, а значит, и число N, четно, в противоречие со сказанным выше. Тем самым, задача будет решена.

Будем сдвигать одну ломаную в некотором направлении до тех пор, пока она не перестанет пересекаться с другой, и следить за тем, как меняется число их точек пересечения. Ясно, что оно может измениться только в тот момент, когда какая-то вершина A одной из ломаных попадет на некоторое звено l другой. Направление сдвига можно выбрать так, чтобы вершина A не могла совпасть с вершиной или точкой самопересечения другой ломаной. Тогда достаточно рассмотреть два случая: когда два звена, выходящие из вершины A, лежат по разные стороны от l (рис. 1) и по одну сторону (рис. 2). В первом случае число пересечений не меняется, во втором — увеличивается или уменьшается на 2. В любом случае четность его сохраняется, и так как в конце пересечений не будет, число точек пересечения двух замкнутых ломаных четно. Аналогично доказывается четность числа пересечений замкнутой ло-

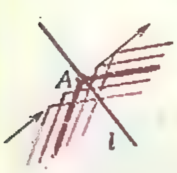


Рис. 1.

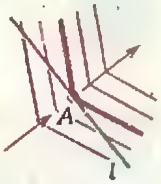


Рис. 2.

маной с прямой, т. е. четность первых двух слагаемых в выражении для N.

Ю. Хохлов (9 кл., с. ш. № 30, Ленинград)

Ф1067. *Внутри прозрачного шара радиусом R, сделанного из материала с показателем преломления n, имеется небольшое вкрапление A. При рассматривании вкрапления кажущееся расстояние от вкрапления до центра шара оказывается не зависящим от α для достаточно больших α (см. рисунок 1). Найдите, на каком расстоянии от центра шара находится вкрапление.*

Покажем, что если вкрапление A находится на расстоянии R/n от центра шара O, то его изображение A' будет лежать на прямой OA на расстоянии Rn от центра шара.

Действительно, рассмотрим произвольный луч AC, выходящий из точки A. При этом введем обозначения: $\angle MOC=\alpha_0$, а угол падения этого луча на сферическую поверхность $\angle ACD=\alpha$. Пусть продолжение преломленного луча AC пересекает прямую OA в точке A'. Тогда для треугольника OAC применима теорема синусов:

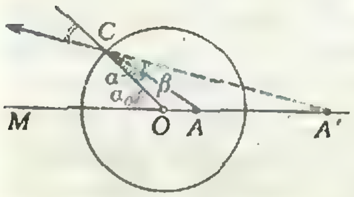
$$\frac{\sin\alpha}{OA}=\frac{\sin\alpha_0}{AC}. \qquad (1)$$

(см. рисунок). Кроме того, по теореме косинусов получим

$$(AC)^2=R^2+(OA)^2+2R\cdot OA\cdot\cos\alpha_0. \qquad (2)$$

Аналогично, рассматривая треугольник OCA', можно записать:

$$\frac{\sin\beta}{OA'}=\frac{\sin\alpha_0}{A'C},\ (A'C)^2=R^2+(OA')^2+2R\cdot OA'\cdot\cos\alpha_0. \qquad (3)$$



Учитывая, что по закону преломления $n\sin\alpha=\sin\beta$ (угол преломления луча AC $\angle\beta=\angle OCA'$), из (1) и (3) получим

$$A'C=OA'\frac{AC}{n\cdot OA}. \qquad (4)$$

Из (4) и (2) следует, что

$$(A'C)^2=\frac{(OA')^2}{n^2}\frac{(AC)^2}{(OA)^2}=\frac{(OA')^2}{n^2}\frac{1}{(OA)^2}(R^2+(OA)^2+$$
$$+2R\cdot OA\cdot\cos\alpha_0),$$

откуда, используя (3),

$$\frac{(OA')^2}{n^2}\frac{1}{(OA)^2}(R^2+(OA)^2+2R\cdot OA\cdot\cos\alpha_0)=$$
$$=R^2+(OA')^2+2R\cdot OA'\cdot\cos\alpha_0. \qquad (5)$$

Равенство (5) справедливо для любых $\cos\alpha_0$ при некоторой длине отрезка OA, если слагаемые, в которые входит $\cos\alpha_0$, в левой и правой частях уравнения равны между собой, т. е. $OA'/n^2=OA$.

Окончательно равенство (5) преобразуется в выражение

$$n^2(R^2+(OA)^2)=R^2+(OA)^2\cdot n^4, \qquad (6)$$

чье решение $OA=R/n$.

Заменяя в (6) OA на OA', найдем, что $OA'=Rn$.

Таким образом, решения уравнения (6) не зависят от угла α_0.

Если же вкрапление сделано на поверхности сферы, то ответ задачи тривиален: $OA=R$.

С. С. Кротов

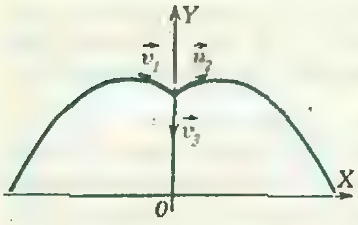
Ф1068. *Снаряд, летящий по вертикали, разрывается в верхней точке траектории на три равных осколка. Один из осколков, двигаясь по вертикали, упал через время T_1 после взрыва, два других упали одновременно через время*

Поскольку разрыв снаряда происходит в течение короткого интервала времени, то можно пренебречь импульсом силы тяжести по сравнению с приращением импульса каждого из осколков. Следовательно,

$$0=\frac{m}{3}\vec{v}_1+\frac{m}{3}\vec{v}_2+\frac{m}{3}\vec{v}_3, \qquad (1)$$

где $\vec{v}_n$ — скорость n-го осколка. Из (1) следует, что величины векторов $|\vec{v}_n|=v$ одинаковы, а углы между ними равны 120°.

T_2 ($T_1<T_2$). Найти высоту H, на которой разорвался снаряд.



На рисунке изображены векторы $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, ориентированные в соответствии с условием $T_1<T_2$.

Введем систему координат с началом в точке падения осколка № 3. Тогда зависимость координат первого и третьего осколков от времени имеет вид

$$\begin{aligned} y_1(t) &= H+\frac{1}{2}vt-\frac{gt^2}{2}, \\ y_3(t) &= H-vt-\frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку $y_1(T_2)=0$, $y_3(T_1)=0$, то из уравнений (2)

$$0=H+\frac{1}{2}vT_2-\frac{gT_2^2}{2},\quad 0=H-vT_1-\frac{gT_1^2}{2}$$

находим

$$H=g\,\frac{T_2T_1}{2}\,\frac{T_1+2T_2}{2T_1+T_2}.$$

Ю. Г. Павленко

Ф1069. *На угол величиной α, согнутый из тонкого гладкого стержня, надета легкая петля длиной l с прикрепленным к ней небольшим грузом; угол установлен вертикально. Найдите расстояние от груза до вершины угла в положении равновесия и период малых колебаний груза в плоскости угла.*

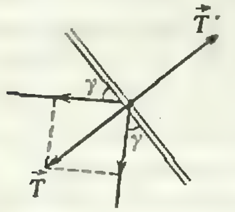


Рис. 1.

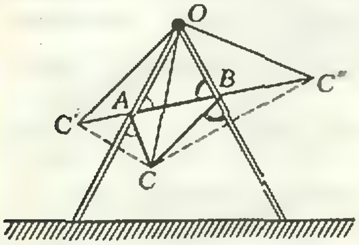


Рис. 2.

Во-первых заметим, что веревка, перекинутая через гладкий стержень, образует с ним равные углы независимо от положения груза (рис. 1). Это ясно уже из того, что сумма $\vec{T}$ сил натяжения веревки по обе стороны стержня должна быть перпендикулярна стержню, иначе из-за отсутствия силы трения нечем будет компенсировать тангенциальную составляющую $\vec{T}'$. Во-вторых, совершим следующую операцию: отразим зеркально грузик, отклонившийся от положения равновесия в плоскости угла α в точку C (рис. 2), относительно каждой из сторон угла. Тогда, в силу равенства вышеупомянутых углов, прямая, соединившая точки C' и C'', будет проходить вдоль отрезка AB. При этом, естественно, $OC=OC'=OC''$ так как OC' и OC'' — отражения отрезка OC. Следовательно, построенный нами треугольник $C'OC''$ — равнобедренный, т. е. $\angle OC''C'=\angle OC'C''$, а $\angle C'OC''$, как это легко видеть, равен 2α. Отсюда ясно, что при колебаниях груза треугольник $C'OC''$ в плоскости угла α меняет только свое положение, но сохраняет форму. Это значит, что $OC'=OC''=OC=R$, где R не зависит от положения груза. Легко вычислить R: для этого сместим груз до конца, к любой из сторон угла α. Тогда $R=\dfrac{l/2}{\sin\alpha}$. Движение грузика полностью эквивалентно движению маятника длиной R, так что период колебаний $T=2\pi\sqrt{R/g}=2\pi\sqrt{l/2g\sin\alpha}$.

И. И. Мазин

Ф1070. *Мальчик выдувает из длинной трубки мыльный пузырь. Надув пузырь, он выпускает трубку изо рта, при этом пузырь сдувается обратно в трубку и окончательно исчезает через время τ. За какое время сдуется таким же образом пузырь вдвое большего радиуса? Считать, что воздух движется по трубке достаточно мед-*

Воздух вытекает через трубку медленно , значит, силу вязкого трения можно считать пропорциональной скорости потока воздуха. Избыточное давление в пузыре мало по сравнению с атмосферным давлением, поэтому изменением плотности воздуха в пузыре мы пренебрегаем.

Сила вязкого трения в любой момент почти уравновешивает силу избыточного давления, а Δp обратно пропорционально радиусу пузыря. Тогда можно записать:

$$v\sim\Delta p\sim\frac{1}{r}, \text{и}\ \frac{\Delta V}{\Delta t}\sim\frac{1}{r}, \text{ т. е.}$$

ленно, свойства мыльной пленки у обоих пузырей одинаковы.

$$\frac{\Delta V}{V} \sim \frac{\Delta t}{r^4}.$$

Если у нас есть два пузыря радиусами r_1 и r_2, то отношения времен, за которые объем каждого из них уменьшится на одну и ту же малую часть —

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{r_2^4}{r_1^4},$$

но при этом отношение радиусов остается тем же, значит, и отношение времен исчезновения пузырей будет таким же. Итак,

$$t_2 = 16 t_1.$$

Д. А. Купцов

Ф1071. *В схеме, указанной на рисунке 1, лампочка горит одинаково ярко как при замкнутом, так и при разомкнутом ключе K: $R_1 = R_3 = 90$ Ом, $R_2 = 180$ Ом, $U = 54$ В. Найдите напряжение на лампочке.*

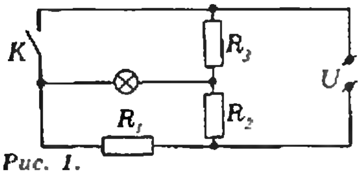


Рис. 1.

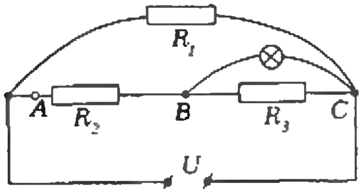


Рис. 2.

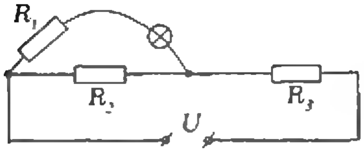


Рис. 3.

Заметим, что сопротивление лампочки зависит от напряжения на ней: с повышением напряжения увеличивается разогрев нити накаливания, и сопротивление лампочки растет. По условию задачи накал нити при замкнутом и разомкнутом ключе одинаков; следовательно, напряжение на лампочке $U_л$ и ее сопротивление R одни и те же в обоих случаях.

На рисунках 2 и 3 показаны эквивалентные схемы при замкнутом и разомкнутом ключе. Сопротивление участков BC и AC —

$$R_{BC} = \frac{RR_1}{R+R_1}, \quad R_{AC} = R_2 + R_{BC}. \qquad (1)$$

Подставив в (1) значения сопротивлений R_2 и R_1 (в омах), получим

$$R_{BC} = \frac{90R}{R+90}, \quad R_{AC} = \frac{270\,(R+60)}{R+90}. \qquad (2)$$

Напряжение на лампочке при замкнутом ключе

$$U_л = \frac{U}{R_{AC}} R_{BC}.$$

С учетом (2) и того, что $U = 54$ В, получаем

$$U_л = \frac{18R}{R+60}. \qquad (3)$$

Аналогичный расчет при разомкнутом ключе дает

$$U_л = \frac{36R}{R+150}. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) находим напряжение на лампочке:

$$U_л = 6 \text{ В}.$$

В. И. Чивилев

Ф1072. *Почему наличие ультрафиолетового компонента в спектре ухудшает резкость изображения, получаемого на фотопленке?*

Показатель преломления стекла и, следовательно, фокусное расстояние объектива зависят от длины волны излучения. Выбором формы и материала объектива и оптимального расстояния до фотопленки добиваются практического исключения размытия изображения при фотографировании. Соответствующие ухищрения не касаются длин волн за пределами видимой части спектра. Поэтому попадание ультрафиолетовых лучей на фотопленку приведет к общему размытию изображения. Для борьбы с этим недостатком применяют фильтры, не пропускающие ультрафиолетовое излучение. По той же причине на некоторые объективы наносится отдельная шкала расстояний для съемки в инфракрасном диапазоне.

Л. А. Ашкинази

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1031—М1045, Ф1043—Ф1057, справились с задачами М1031—М1033, М1036, М1040, Ф1043—Ф1045, Ф1048, Ф1051 и Ф1054. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

А. Адылбаева (Целиноград) 41, 42; *А. Акимов* (Евпатория) 35, 38, 41, 43; *Д. Алиевский* (Свердловск) 37—39, 41—45; *Е. Амдур* (Ленинград) 41; *А. Андрас* (Румыния) 43, 44; *И. Аржанцев* (Киев) 42, 44; *В. Арутюнян* (Ереван) 44; *А. Бабкин* (Киев) 37, 42; *Ю. Безгачева* (Красноярск) 37, 38, 41—45; *А. Березовский* (Киев) 34, 35, 37; *Ю. Бернштейн* (Иркутск) 41—43; *А. Билибин* (Боровичи) 42; *А. Блинова* (Ленинград) 34; *Р. Бочев* (Враца) 34, 35; *Ю. Васильев* (Усть-Каменогорск) 37; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 37, 42, 44, 45; *К. Вербицкий* (Москва) 37, 41—45; *А. Винницкий* (Калуга) 37; *Д. Виткуп* (Киев) 44; *А. Витяев* (Новосибирск) 39, 41—45; *В. Вологодский* (Омск) 34, 35, 37—39, 42—45; *В. Волчков* (Шахтерск) 34, 35, 37—39, 41—45; *Д. Вольпер* (Омск) 38, 39, 42—45; *М. Выборнов* (Киев) 34, 37, 44; *С. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) 39, 44; *Т. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) 39, 44; *О. Гилязов* (Уфа) 34; *Ю. Гнатюк* (Каменец-Подольский) 41—45; *Голомбовский* (г. п. Ивье Гродненской обл.) 39; *М. Гольдшейд* (Челябинск) 34, 35, 41—45; *А. Гороховский* (Киев) 37—42, 43, 44; *В. Гравит* (Северодвинск) 37—39, 42—45; *Р. Гринив* (Львов) 34, 35, 38, 42—45; *В. Грищенко* (Киев) 41; *Б. Гуревич* (Саратов) 34; *С. Гурский* (Новый Роздол) 42; *А. Даниленко* (Волгоград) 43; *С. Деревягин* (Белгород-Днестровский) 42; *А. Джаббаров* (с. Чинабад Узб. ССР) 39; *О. Джавадов* (п. Борадыгях АзССР) 39, 44; *Н.Дохолян* (Тбилиси) 44; *С. Дронов* (Пущино) 34, 37, 42—44; *И. Жарков* (Свердловск) 42—45; *И. Жильцов* (Свердловск) 42, 43; *Ю. Жуков* (Тула) 45; *Ю. Журавель* (Киев) 41, 42, 44; *А. Зайцева* (Новосибирск) 34, 41; *А. Залеский* (Харьков) 34, 39; *Н. Зверев* (Москва) 41—43; *С. Зелик* (Краматорск) 34, 41, 42, 44; *Е. Зельцер* (Киев) 39; *И. Зефиров* (Химки Московской обл.) 41—44; *К. Ибраев* (Целиноград) 41—43; *А. Калинин* (Саратов) 34, 35, 39, 42, 43; *В. Калошин* (Харьков) 34, 37, 41—45; *И. Карп* (Киев) 34, 37, 42, 44; *К. Касимов* (Целиноград) 41, 42; *С. Кириллов* (Одесса) 39, 41; *О. Кирнасовский* (Винница) 42—45; *В. Кицио* (Черкассы) 44; *О. Коваленко* (Киев) 39; *Я. Коваль* (Киев) 41; *С. Ковация* (Винница) 34, 44; *О. Коврижкин* (Майкоп) 34, 41—44; *А. Козачко* (Винница) 44; *И. Кокарев* (Ленинград) 41—45; *Г. Колесницкий* (Тбилиси) 39, 41—43; *А. Коляндр* (Харьков) 42; *А. Коршков* (Мозырь) 37, 38, 41—44; *Д. Косоня* (Белорецк) 34, 38, 39, 41, 42; *В. Крепец* (Новосибирск) 34, 41, 42, 44; *В. Крушкаль* (Новосибирск) 41—45; *А. Кулик* (Киев) 34, 35, 37—39, 42—44; *К. Левин* (Киев) 42; *С. Лесик* (Донецк) 41, 42; *Н. Локоть* (Киев) 39; *А. Лосев* (Ленинград) 41—44; *В. Лысенков* (Белорецк) 37, 42, 45; *Р. Малендевич* (Болехов) 42; *А. Мальцев* (п. Медведка Курской обл.) 39, 42, 43, 45; *В. Мамедов* (п. Борадыгях Аз. ССР) 39; *И. Марков* (Киев) 22, 23, 25, 42; *Т. Мартиросова* (Ташкент) 41, 42, 44, 45; *В. Матвеев* (Москва) 34, 41—44; *А. Мельник* (Гайворон) 34, 37, 41—43; *А. Мельников* (Краснодар) 42; *А. Мельцер* (Ленинград) 34, 35, 37, 38, 41—44; *Д. Миллер* (Днепропетровск) 41; *С. Морозов* (Заволжье) 39, 41; *Ю. Морозов* (Тбилиси) 42; *А. Морозова* (Одесса) 42, 44; *Я. Мустафаев* (Баку) 34, 38, 39, 41—44; *А. Назарян* (Тбилиси) 34, 38, 39, 41—44; *Е. Недуев* (Одесса) 37, 42—44; *С. Несторов* (Пловдив, НРБ) 34; *О Павлов* (Новосибирск) 41—45; *А. Павлунин* (Фрунзе) 42, 43; *В. Павлунин* (Фрунзе) 37; *З. Петренко* (п. Дружный Минской обл.) 42; *М. Пискарев* (Баку) 42; *В. Полищук* (Киев) 34, 35, 37, 42, 44; *Д. Прокофьев* (п. Сертолово Ленинградской обл.) 34, 35, 37, 38, 42—44; *В. Рагулин* (Челябинск) 35, 39, 42—45; *Д. Румынин* (Красноярск) 34; *П. Рушайло* (Москва) 37; *Р. Садреев* (Алма-Ата) 42, 44; *Х. Сайднасимов* (Алма-Ата) 41; *А. Силкин* (Свердловск) 41—43; *Д. Синицкий* (Ленинград) 42; *С. Синяков* (Москва) 37, 42—45; *М. Скворцов* (п. Черноголовка Московской обл.) 38, 41—44; *А. Скопенков* (Саратов) 37, 42—45; *А. Слесарчук* (Киев) 44; *В. Слитинский* (Киев) 34, 35, 37, 38, 41—45; *Д. Смиренников* (Подпорожье) 42—44; *А. Смирнова* (Киров) 38; *А. Смоляк* (Москва) 39, 41, 44; *И. Соловьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 41—44; *И. Солтан* (Павлодар) 39, 41; *Д. Сторожук* (Киев) 44; *В. Стрижевский* (Одесса) 41; *В. Стрельников* (Киев) 34, 37; *А. Строев* (Москва) 41; *С. Сурин* (Железнодорожный Московской обл.) 34; *Г. Тер-Саакова* (Баку) 42; *С. Тер-Сааков* (Баку) 42; *С. Тихонов* (Воронеж) 38, 41—44; *А. Толстых* (Днепродзержинск) 42; *Ю. Томилов* (Киев) 39, 42, 44; *Д. Туляков* (Жданов) 37, 38, 42, 44, *А. Тхор* (Червоноград) 39, 42, 44; *О. Тымченко* (Киев) 39; *М. Унтершлак* (Одесса) 42; *Т. Усик* (Харьков) 38; *Ю. Файзуллаев* (к-з Правда Хорезмской обл.) 41; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 34, 35; 37, 39, 42—45; *В. Фельдшеров* (Алма-Ата) 39, 42, 44; *В. Филлипов* (Киев) 42; *Ф. Фог* (Томск) 34, 37—39, 41—45; *М. Фукс* (Москва) 34; *М. Хараба* (с. Надречное Тернопольской обл.) 42; *К. Хриневский* (ПНР) 35; *О. Христенко* (Караганда) 34, 38, 41—44; *Р. Хусаинов* (Уфа) 42; *Ж. Хутамова* (к-з Узбекистон Хорезмской обл.) 41; *К. Худавердиев* (Сиазынь Аз. ССР) 37; *Д. Цуй* (Павлодар) 34, 41; *Д. Черников* (Баку) 42; *А. Шаповал* (Киев) 37, 41, 42; *Ф. Шейнерман* (Киев) 34; *З. Шония* (Тбилиси) 34; *Е. Шубин* (с. Романовка Красноярского края) 42; *К. Щербаков* (Арзамас) 34, 41—43; *Я. Эфендиев* (Баку) 34, 37—39, 42—44; *А. Яврян* (Ереван) 38; *А. Яхшимуратов* (Шават) 39.

Физика

А. Агашкова (Баку) 47; *В. Адамия* (Тула) 50, 55; *Н. Адигезалов* (Баку) 52; *А. Амиров* (Уфа) 52; *А. Андрианов* (Кузнецовск) 47, 52, 56, 57; *Д. Андриенко* (Калинин) 53; *О. Армоник* (Гродно) 50; *С. Артамонов* (Душанбе) 47; *А. Афонин* (Брест) 46, 50, 53, 56, 57; *Г. Ахмедов* (Сумгаит) 52; *А. Бабкин* (Киев) 50; *С. Белоусов* (Ленинград) 49, 52, 53, 55—57; *А. Бережной* (Воронеж) 47; *А. Билибин* (Боровичи) 46, 49, 50, 52, 53, 55, 57; *С. Бобровник* (Черновцы) 49, 53, 55; *С. Бобылев* (Березники) 46, 47; *В. Бодров* (Сасово) 47; *П. Буко*

(Продолжение см. на с. 35)

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Про три простых числа известно, что одно из них равно разности кубов двух других. Какие это числа?

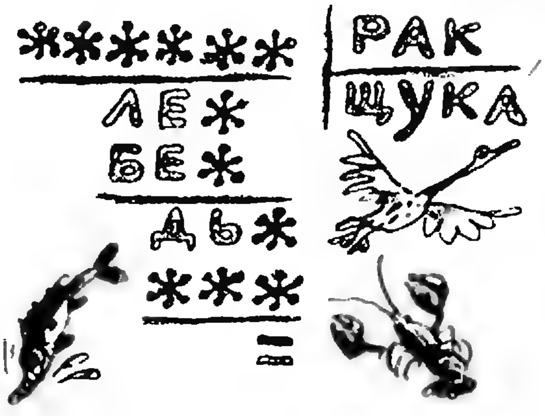
2. В некоторых старинных часах, предназначенных для работы на открытом воздухе, маятник изготовлялся в виде длинной трубки, заканчивающейся сосудом со ртутью. С какой целью это делалось?

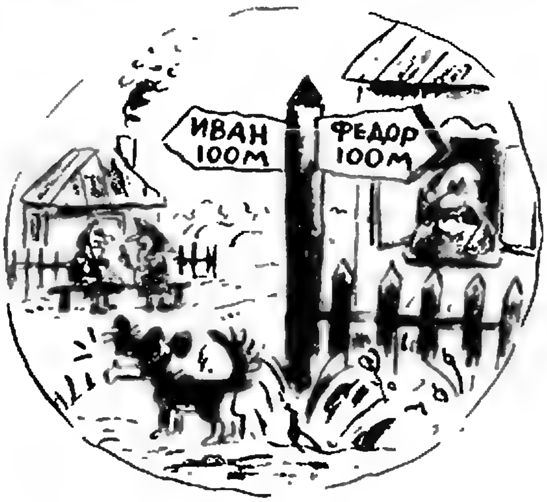
3. Решите числовой ребус (см. рисунок). Одинаковым буквам соответствуют одинаковые числа, разным — разные.

4. На хуторе Семидворье семь домов. Любопытно, что какие бы три дома мы ни выбирали, расстояние хотя бы между одной парой из них равняется 100 метрам. Начертите план расположения домов на хуторе.

5. Тартарен, путешествуя по Африке, однажды остановился на ночлег на берегу небольшого озера с чистейшей водой (на дне били ключи). Однако утром к озеру подошло стадо слонов. Тартарен насчитал 183 головы. На следующее утро они ушли, оставив вместо озера грязную лужу. Через несколько лет Тартарен вновь попал на это место. Озеро вновь было полно воды, но утром опять появились слоны. На этот раз в стаде было 37 слонов и воды им хватило на 5 дней. Покидая берега выпитого до дна озера, Тартарен задумался: за сколько дней опустошит озеро один слон?

Эти задачи нам предложили *П. Я. Антонович, А. С. Бутов, А. М. Домашенко, ученик с. ш. № 15 г. Ставрополя Павел Скучарев, А. П. Савин*





Если все краски радуги вместе смешать,—
то... получится черная грязь.
Вреднюга (из детского мультфильма)

КАК ОДНАЖДЫ ЖАК-ЗВОНАРЬ ГОЛОВОЙ СЛОМАЛ ФОНАРЬ...

Кандидат физико-математических наук
[illegible] И. БУЗДИН.
[illegible]дидат физико-математических наук
[illegible] КРОТОВ

Не будем чересчур строгими по отношению к выводу Вреднюги про краски, а рассмотрим все по порядку, поскольку физически чистый эксперимент — это вещь достаточно тонкая...

Сколько существует на свете разных цветов? Откуда вообще берутся разные цвета? Эти и многие другие вопросы издавна занимали любознательных людей. Большой вклад в создание науки о цвете внес великий Ньютон. Он наблюдал разложение солнечного (белого) света при прохождении его через стеклянную призму в так называемый спектр (от латинского spectrum). Получающиеся при этом цвета в точности соответствуют цветам радуги. Призма позволила Ньютону получить радугу в «лабораторных» условиях. Вот они, цвета радуги: красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый. Посмотрите еще раз на заглавие статьи. Мы воспользовались шуточной фразой, помогающей запомнить последовательность цветов в солнечном спектре (как видите, и в нашей шутке есть доля правды). Наверняка кто-то из вас вспомнит еще одно мнемоническое правило — фразу «каждый охотник желает знать, где сидит фазан».

Именно благодаря опытам Ньютона в конце XVII века было установлено, что белый свет представляет собой смесь из различных цветов. (В частности, Ньютон показал, что если разложенный в спектр белый свет смешать, то опять получится белый свет.) Прошло много времени, пока ученые осознали, что свет — это распространяющиеся в пространстве колебания связанных друг с другом электрических и магнитных полей, иначе говоря — электромагнитные волны. Наиболее привычный пример такого рода волн — радиоволны. Было доказано, что природа света и радиоволн — одна и та же, они отличаются лишь частотой колебаний. Частота радиоволн в тысячи раз более низкая, чем у световых. Каждому цвету отвечает определенная частота колебаний. Если воспользоваться аналогией с музыкальными инструментами, то красный цвет отвечает «басам», а фиолетовый — высоким нотам.

Скорость распространения электромагнитных волн $c = 300\,000$ км/с. Она во много тысяч раз больше скорости звука, так что радиослушатель, сидящий дома во Владивостоке около радиоприемника, слышит голос певца на концерте, транслируемом из Москвы, раньше, чем слушатель, сидящий в дальнем ряду концертного зала.

Приведенное значение скорости света ($c = 3 \cdot 10^5$ км/с) относится к вакууму. При распространении света в прозрачном веществе скорость оказывается меньшей. Особый интерес представляет тот факт, что при прохождении через вещество свет разных цветов распространяется с разными скоростями. Это явление называется дисперсией, и именно благодаря дисперсии призма разлагает белый свет в цветной спектр.

Итак, из белого света можно получить все цвета радуги. А что означают разные цвета клякс на этой странице? Стоит вам прихватить с собой эту статью в темную комнату (действительно, а почему бы и нет?), как все цвета вообще пропадут, кляксы станут просто серыми — сами по себе они не «светятся», какого бы цвета ни были. Чтобы видеть их разноцветными, их необходимо освещать. При этом падающий на страницу свет частично поглощается, частично рассеивается, а видим мы именно рассеянные световые лучи.

Очень важно, что разные вещества (в силу особенностей строения их молекул) обладают избирательностью к цвету — они по-разному поглощают и рассеивают свет различных участков спектра. Охра потому нам и кажется желтой, что из падающего на нее белого света поглощаются почти все лучи, кроме желтого цвета. Или вспомните про... помидор. На разных стадиях созревания он преимущественно рассеивает сначала зеленые лучи, потом — красные. В этом проявляются изменения молекулярного строения вещества помидора. Кстати, не случайно в химии цвет — важная характеристика вещества.

Пришло время оставить заботы земные и... воспарить. Действительно, вряд ли найдется человек, которого хоть раз в жизни не увлекла загадочная игра небесных красок. «Цвет небесный — синий цвет...»,— написал замечательный грузинский поэт Нико Бараташвили. Но зададимся вопросом — безупречна ли физически упомянутая строчка?

Обычно голубизну неба объясняют рассеянием света в атмосфере. Однако почему тогда ночное небо даже при полной луне не бывает голубым? Или почему разные участки неба окрашены в синий цвет по-разному — одни более ярко, другие — менее? А если обратиться к заходу солнца? Внимательный физик, наблюдавший заход солнца, отметил, что сначала западная часть неба приобретает желтый или оранжевый оттенок; затем, когда солнце становится огненно-красным, свечение неба меняется от желто-оранжевого до ярко-зеленого; наконец, примерно до высоты 25° над горизонтом небо окрашивается в розовый цвет.

Поскольку причиной всех перечисленных цветовых коллизий является рассеяние солнечного света в атмосфере, остановимся более подробно на этом процессе.

Объяснение особенностей окраски неба принадлежит английскому физику У. Рэлею. В общих чертах суть дела такова. Цвет неба определяется зависимостью рассеяния света от частоты последнего. Приходящая от солнца электромагнитная волна «раскачивает» электроны, входящие в состав молекул воздуха. Наиболее сильное воздействие на электроны оказывают лучи синей части спектра. Таким образом, из пришедшей световой волны электроны молекул воздуха «забирают» колебания синей части спектра. Но, придя в вынужденное колебательное движение, электроны отдают назад взятую у волны энергию. Однако отдают они эту энергию уже во всех направлениях, а не только в направлении падения первоначальной волны от солнца. Этот процесс и представляет собой рассеяние света.

Существенным для объяснения рассеяния света в атмосфере является неравномерность распределения молекул воздуха в атмосфере — постоянно имеющие место флуктуации плотности воздуха. При равномерном распределении молекул в пространстве рассеяние было бы совершенно иным — небо просто-напросто было бы черным.

Итак, сильнее всего молекулы воздуха рассеивают синюю часть спектра, и поэтому участки неба, которые мы видим в рассеянном свете, кажутся нам голубыми.*) Чем сильнее удалены от солнца соответствующие участки небосвода, тем менее яркими они будут нам казаться. Причина состоит в том, что чем больший путь в атмосфере проходят солнечные лучи, тем меньшая в них доля приходится на синюю составляющую. Теперь, наверное, вам понятно, почему говорят «красно солнышко»? Прямые солнечные лучи по пути к нам «теряют» синюю составляющую, и преимущественную долю приходящего к наблюдателю излучения составляет именно красно-желтая часть спектра.

Понятно, что дым, пыль и другие мелкие частицы, содержащиеся в воздухе, существенным образом влияют на рассеяние света в атмосфере. Известно, что после больших извержений вулканов восходы и заходы солнца порой играют удивительными красками — солнце и луна могут даже стать синими. Приведем описание последствий катастрофического извержения вулкана Кракатау в 1883 году, которое дает в своей книге «Занимательная геология» замечательный русский ученый В. А. Обручев: «Мелкий пепел затемнял Солнце в Японии и в других местах на расстоянии свыше 3000 километров. Этот пепел, долго плававший в атмосфере, обусловил синеватый цвет солнца и луны в Африке и на островах Тихого океана и замечательные красные зори в конце 1883 года и в начале 1884 года, наблюдавшиеся по всей Земле».

Синяя окраска солнца и луны в данном случае обуславливается рассеянием света на атмосферных аэрозолях размером 0,4—0,9 мкм, т. е. размером, сравнимым с длиной волны видимого света. Атмосферные аэрозоли указанных размеров образуются путем осаждения на твердых частицах дыма, пепла и т. д. при вулканических извержениях и крупных лесных пожарах. Именно вследствие своего относительно небольшого размера частицы рассеивают свет красной части спектра сильнее, чем синей. Это рассеяние связывают с именем немецкого ученого Ми. При наблюдении солнца и луны сквозь такой аэрозоль они видятся синеватыми — красная составляющая белого света рассеивается, и до нас доходит только синий свет.

---

*) Может возникнуть вопрос: почему голубыми, а не фиолетовыми? Дело в том, что надо еще принимать во внимание специфику восприятия цветов человеческим глазом и тот факт, что в солнечном свете фиолетовых лучей «меньше», чем синих. Подробнее об этом мы обещаем рассказать в другой статье, в одном из следующих номеров журнала.

Итак, оттенки цветов, окрашивающих небесный свод, обусловлены в каждой конкретной ситуации комбинацией рэлеевского рассеяния с рассеянием света на мелких частицах.

«Голубые горы, голубые дали, голубые города» — все эти поэтические сочетания слов обычно используют в качестве символов первозданности, необыкновенной чистоты, загадочности. Самое удивительное состоит в том, что и здесь не обошлось без физики.

Так, иногда над покрытой зеленью открытой местностью, не слишком загрязненной вследствие человеческой деятельности, возникает очень красивая таинственная голубая дымка. В литературе часто упоминаются голубые горы Кавказа, Голубые горы в Австралии знамениты именно своей голубой дымкой. Голубой цвет «дымки» обусловлен рассеянием света на мельчайших частицах, размер которых много меньше длины волны видимого света. Такими частицами могут быть органические макромолекулы, испускаемые растительностью, а также мельчайшие частицы, срываемые с острых частей растений электрическим полем земли. Итак, в местах скопления мельчайших частиц возникает добавочный эффект рассеяния синей части спектра.

Завершая статью, предлагаем читателю сюжеты для самостоятельного рассмотрения.

1. Почему издалека новогодняя елка (скажем, стоящая на главной площади вашего города) в вечернее время кажется красной, хотя она освещена огоньками разного цвета?

2. Если вам доведется в новогоднюю ночь сидеть у костра, не забудьте поэкспериментировать и может быть блеснуть перед окружающими, задав им следующий вопрос. Почему внизу на фоне деревьев дым костра кажется синим, однако над верхушками деревьев (на фоне светлого неба) он выглядит желтым?

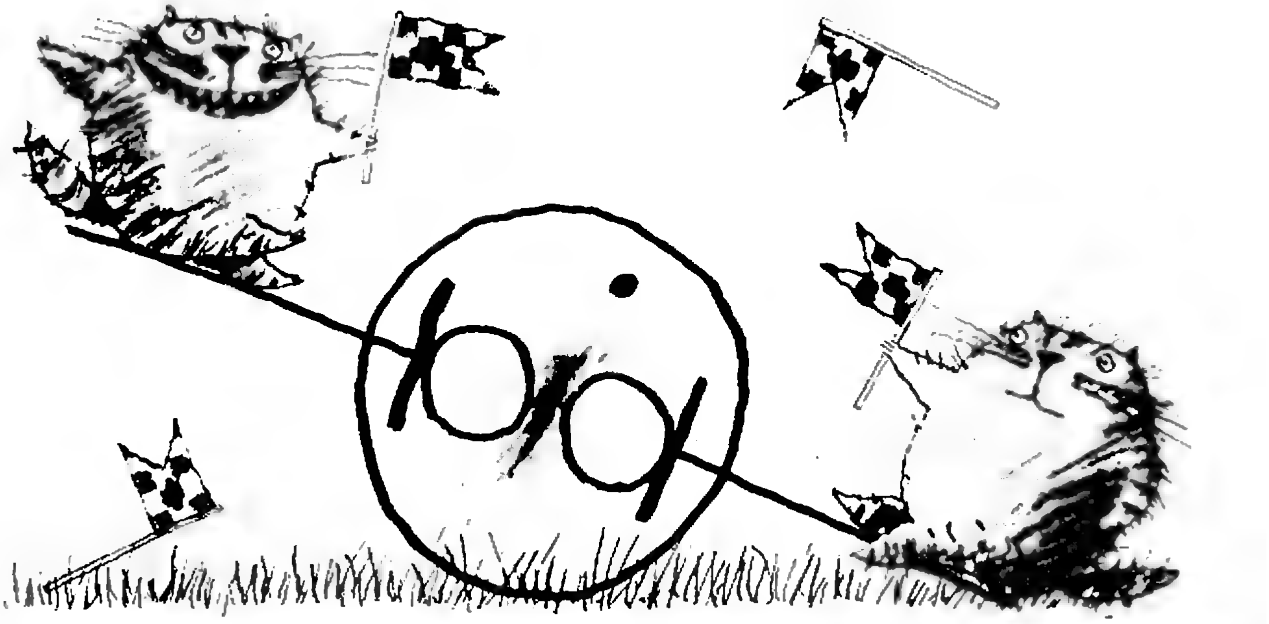
3. Капнув несколько капель молока в стакан с водой, посмотрите сквозь него на светящуюся лампочку. Лампочка покажется красновато-желтоватой. Если же посмотреть на отраженный от стакана свет, он будет голубым. Объясните наблюдаемое различие цветов.

Список читателей, присылавших правильные решения

(Начало см. на с. 30)

(Минск) 47; *С. Бураков* (Киев) 47; *С. Бусленко* (Тула) 50, 55; *А. Бучель* (Луцк) 53; *С. Вавринюк* (Брест) 47; *С. Валюх* (Киев) 53; *М. Ванюшов* (Ленинград) 53; *К. Василою* (Крайова, СРР) 47; *К. Вербицкий* (Москва) 55, 57; *Д. Виноградов* (Рига) 57; *А. Винцюк* (Киев) 53; *Д. Виткуп* (Киев) 50, 55, 57; *В. Вовк* (Барвенково) 53, 55; *К. Волошин* (Москва) 49; *П. Вольфбейн* (Киев) 49, 53, 55, 57; *А. Гладышев* (Красноярск) 47; *О. Глазунов* (Москва) 49, 53; *А. Гончаров* (Новосибирск) 50; *М. Гончаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 53, 55, 57; *П. Горьков* (п. Черноголовка Московской обл.) 50, 53, 57; *Г. Григорян* (Москва) 50; *Б. Гуревич* (Саратов) 49, 50, 53, 55, 57; *С. Гурский* (Новый Роздол) 47; *С. Гусев* (Лобня) 50; *С. Дворник* (п. Сарыозек Талды-Курганской обл.) 49, 53, 55, 57; *Е. Демлер* (Новосибирск) 50, 53, 55, 57; *Е. Демченко* (Жданов) 55, 57; *К. Демьяненко* (Киев) 46, 47; *С. Дикий* (Черкассы) 53, 55, 57; *С. Дронов* (Пущино) 53, 55; *В. Дядечко* (Винница) 49; *А. Езерский* (Минск) 47, 50, 53, 55, 57; *А. Ельяшевич* (Минск) 47, 49, 50, 57; *Д. Еременко* (Сумы) 47; *П. Забелин* (Куйбышев) 49, 52; *В. Завражний* (Фрунзе) 50; *Ф. Занин* (Старый Оскол) 47; *Е. Зельцер* (Киев) 55; *А. Зискинд* (Винница) 46, 55; *К. Зуев* (Вологда) 49, 57; *Е. Казьмирук* (п. Черноголовка Московской обл.) 50; *У. Каланов* (Фергана) 50; *В. Каменькович* (Харьков) 47, 49, 50, 55—57; *В. Камчатный* (Киев) 52; *А. Капустин* (Москва) 52, 53; *Д. Катков* (Брест) 47; *А. Клочанов* (Алма-Ата) 47; *С. Коваленко* (Винница) 47; *Н. Колачевский* (Долгопрудный) 46; *Е. Колеватов* (Ивано-Франковск) 53; *А. Комник* (Старый Оскол) 47; *А. Коновалов* (Мытищи) 55; *И. Королев* (Старый Оскол) 47; *Е. Корсунский* (Харьков) 49; *А. Коршков* (Мозырь) 53, 57; *Ю. Кравченко* (Москва) 49, 50, 52, 53, 56, 57; *К. Краснов* (Киев) 52, 55, 57; *М. Кудава* (Тбилиси) 49, 53; *О. Кушнир* (Дубляны) 57; *В. Лапко* (п. Курово Калининской обл.) 47; *Ю. Левин* (Харьков) 49, 56; *В. Лендерман* (Киев) 49, 52; *А. Лосев* (Ленинград) 47; *С. Луганский* (Москва) 47; *О. Лугуев* (Махачкала) 50; *А. Лутовинов* (Мичуринск) 47; *А. Львовский* (Москва) 47, 49, 53; *А. Лягузин* (Старый Оскол) 47; *А. Мазуренко* (Минск) 47, 53, 56, 57; *А. Майков* (Старый Оскол) 47, 53, 55—57; *Д. Макунин* (Серпухов) 55; *Р. Малендевич* (Болехов) 55; *Р. Малков* (Саратов) 49, 53, 55; *А. Малышев* (п. Медвянка Курской обл.) 47, 55; *А. Мамаев* (Заволжье) 49, 53; *А. Мамедов* (Одесса) 47;

(Окончание см. на с. 59)



Лаборатория „Кванта"

Наблюдение электростатической индукции

В. В. МАЙЕР.
Р. В. МАЙЕР

Поднесем к проводнику заряженное тело. Пусть, для определенности, проводник металлический, а заряд на теле — положительный. В проводнике возникнет электрическое поле, и свободные электроны, двигаясь против поля, будут собираться в ближайшей к заряженному телу области проводника. Следовательно, эта область приобретет отрицательный заряд, а область, наиболее удаленная от заряженного тела,— положительный заряд (что приведет к исчезновению электрического поля в проводнике). Описанное явление, как вы знаете, и называется электростатической индукцией.

При электростатической индукции в проводнике происходит перераспределение зарядов, значит, в нем возникает кратковременный электрический ток. Попробуем экспериментально доказать это, воспользовавшись неоновой лампочкой.

Такая лампочка (ее можно, например, купить в магазине радиотоваров) представляет собой стеклянный баллон, заполненный неоном при пониженном давлении. В баллон впаяны два электрода — анод и катод. Если на электроды подать соответствующее напряжение, в газе возникнет тлеющий разряд, который сопровождается свечением красновато-оранжевого цвета.*)

Понятно, что неоновая лампочка может служить индикатором электрического тока. Основные преимущества ее заключаются в том, что она компактна и что даже очень слабый ток (порядка нескольких микроампер) вызывает заметное свечение газа в лампе. Идея прибора для нашего опыта почти очевидна: проводник, в котором происходит перераспределение зарядов, нужно разорвать посередине и в его разрыв включить неоновую лампочку. Конкретная конструкция прибора может быть самой различной и определяется в первую очередь типом используемой неоновой лампочки. В принципе подойдет любая, но лучше применить лампочки типа ВМН-1 или ВМН-2, электроды которых равноправны, т. е. в равной степени каждый из них может быть как анодом, так и катодом.

---

*) Более подробно о самой неоновой лампочке, ее свойствах и практическом использовании можно прочитать в статье А. А. Боровного («Квант», 1983, № 6).

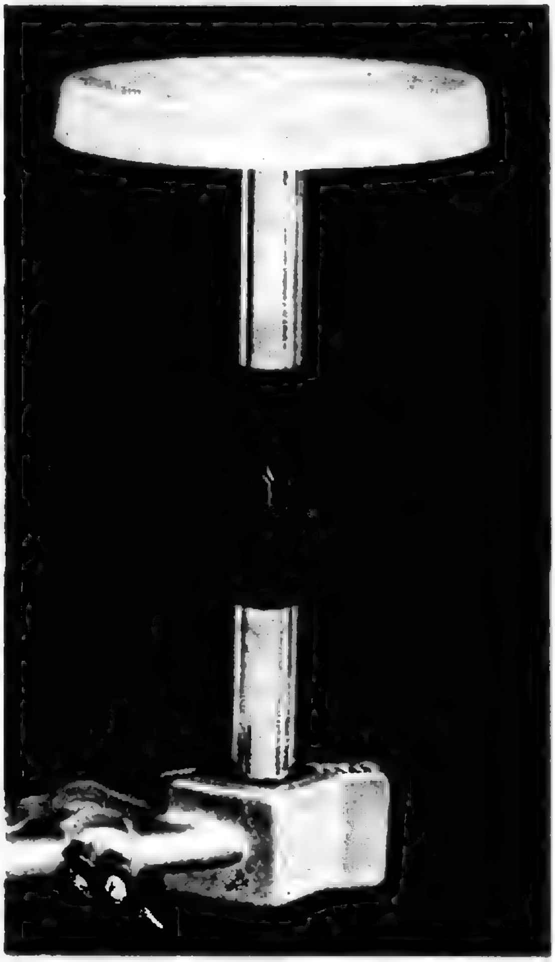
На рисунке приведена фотография одного из возможных вариантов прибора. Проводник образован двумя металлическими стержнями. Между ними в эбонитовом корпусе с окном расположена неоновая лампочка типа ВМН-2, касающаяся своими электродами торцов стержней. На конце верхнего стержня закреплен дюралевый диск, повышающий чувствительность прибора. Диск снабжен полиэтиленовой крышкой, предотвращающей искровой разряд между ним и заряженным телом.

Столь основательный прибор был изготовлен нами лишь потому, что нам часто приходится показывать опыты и нерационально каждый раз терять время на подготовку оборудования. Если вы хотите только пронаблюдать явление, то легко догадаетесь, как в течение получаса сделать прибор из подручных материалов, скажем медной проволоки диаметром 1,5—3 мм, полихлорвиниловой трубки, припоя и т. п.

Теперь о самом эксперименте. Наэлектризуйте трением эбонитовую палочку, пластмассовую расческу или полоску оргстекла. Прибор закрепите на изолированной подставке или возьмите в руку за нижний стержень. При приближении заряженной палочки к диску вы заметите свечение лампочки; следовательно, по проводнику идет ток, обусловленный перераспределением зарядов. Как только палочка окажется неподвижной относительно диска, свечение прекратится: заряды в проводнике перераспределились и вновь находятся в равновесии. При удалении палочки от диска лампочка опять загорается. Чем больше скорость движения палочки, тем ярче свечение лампочки, так как тем значительнее проходящий по проводнику ток.

Заметим, что опыт лучше всего проводить в полумраке, так как яркость свечения неоновой лампочки невелика.

В заключение предлагаем несколько вопросов для размышления.

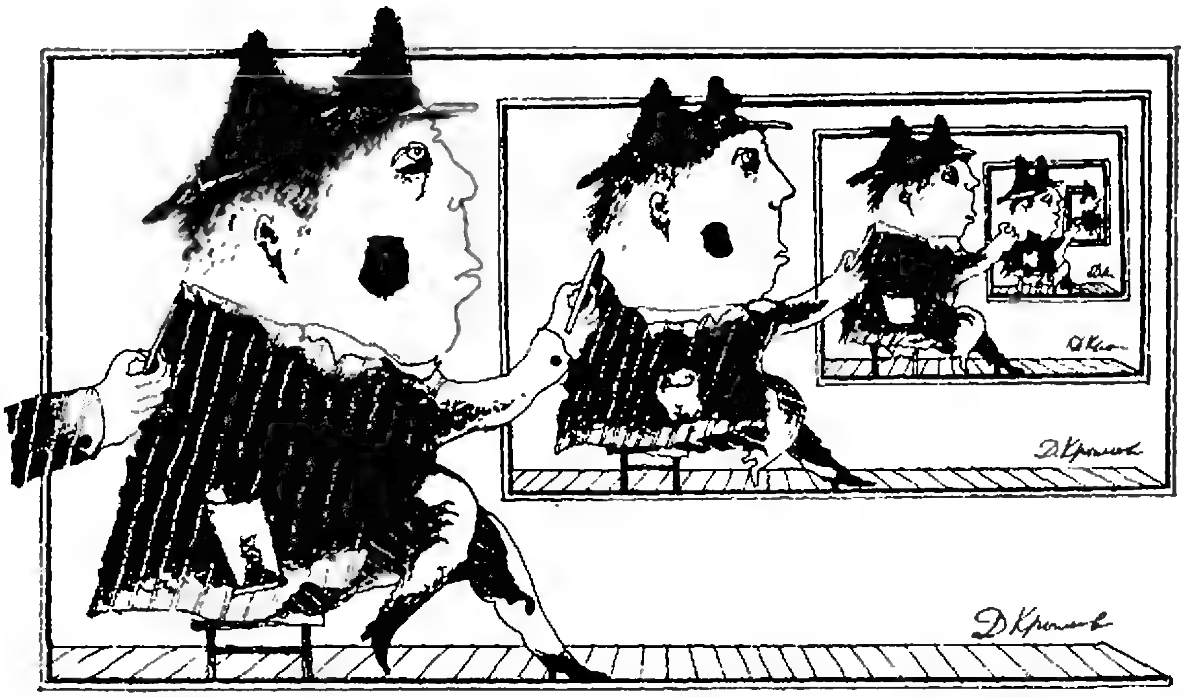


Прибор для демонстрации явления электростатической индукции с помощью неоновой лампочки.

1) Объясните, почему диск на конце проводника увеличивает чувствительность прибора.

2) Не кажется ли вам удивительным, что в описанном опыте электрический ток проходит по незамкнутой цепи? Сформулируйте условия, при которых такое явление действительно может существовать.

3) Проведите еще один опыт — рядом с прибором получите искровой разряд, например, с помощью электрофорной машины. Не возникло ли у вас ощущение, что все наблюдаемые явления имеют некоторое отношение к радиосвязи (см. статью М. П. Бронштейна «Изобретатели радиотелеграфа», опубликованную во втором номере журнала за этот год)?



Искусство программирования

Язык Лого

Урок 3: Рекурсии, функции

А. А. ДУВАНОВ,
Ю. А. ПЕРВИН

Все возвращается на круги своя

Выполняя процедуру ОКРУЖНОСТЬ (см. Урок 2 в прошлом номере «Кванта»), Черепаха обежит один полный оборот и остановится. Приятно наблюдать ее бег на экране дисплея! Поэтому хочется заставить ее покружиться еще и еще. Вот как это можно сделать:

```
ЭТО КАРУСЕЛЬ :R
   ОКРУЖНОСТЬ :R
   КАРУСЕЛЬ :R
КОНЕЦ
```

Эта процедура имеет непривычное описание: в него включен вызов той же самой процедуры. Процедура, вызывающая сама себя, называется *рекурсивной,* а ее вызов — *рекурсией.* С рекурсией часто и неожиданно можно встретиться и вдали от уроков информатики. Художники любят рисунки-шутки: на рисунке изображен зритель, наблюдающий экран телевизора, на котором виден зритель, взирающий на экран ... и т. д. Пример «литературной» рекурсии — знаменитый стишок про попа, у которого была собака.

Вызвав рекурсивную процедуру КАРУСЕЛЬ, можно убедиться в том, что не так уж она и хороша: она заставляет бедную Черепаху безостановочно бегать по кругу, ... пока включена машина.

Чтобы остановить Черепаху, управляемую рекурсивной процедурой, надо уметь отсчитывать число пройденных кругов и сравнивать эту переменную величину с заданным значением. Если в качестве счетчика кругов взять переменную с именем СЧЕТЧИК, то вести отсчет кругов можно с помощью команды

```
СДЕЛАЙ «СЧЕТЧИК :СЧЕТЧИК+1,
```

которую следует включить в описание процедуры КАРУСЕЛЬ сразу вслед за вызовом ОКРУЖНОСТЬ :R (вы догадываетесь, по-видимому, что для правильной работы задуманной программы надо будет в самом начале выполнить команду

```
СДЕЛАЙ «СЧЕТЧИК 0;
```

почему?).

А вот для того, чтобы сравнивать две величины, потребуется новая команда. *Условная команда* имеет вид

```
ЕСЛИ условие [список-1 команд] [список-2 команд]
```

Стоящие в квадратных скобках списки команд представляют собою одно из двух возможных продолжений программы: в том случае, когда условие, записанное после слова ЕСЛИ, истинно, выполняются команды первого списка (и пропускается весь второй список!), и наоборот, если условие ложно, пропускается первый список и выполняются команды второго списка. *Условием* (точнее, *простым условием)* называют два выражения, соединенные знаками отношений «<», «>», «>=» (больше или равно), «<=» (меньше или равно), «=», «/=» (не равно). Определяемое таким образом условие может быть либо истинным, либо ложным. Например, условная команда

```
ЕСЛИ: R/2>3.14*2 [ВПЕРЕД 50] [НАЗАД 50]
```

сначала вычисляет истинность условия при текущем значении *R* и, получив положительный ответ, посылает Черепаху вперед, а в противном случае — назад.

Допустима сокращенная форма условной команды (с одним списком):

```
ЕСЛИ условие [список команд]
```

Тогда в случае истинности условия выполняется команда списка, а если условие ложно, то машина ... ничего не делает, а просто переходит к выполнению следующей команды программы, если она есть. Этой формой условной команды мы и воспользуемся для решения поставленной задачи, заставляя Черепаху гулять по кругу, например, 17 раз. Для этого надо составить описание процедуры

```
ЭТО ПРОГУЛКА :R
  СДЕЛАЙ «СЧЕТЧИК 0
  КАРУСЕЛЬ :R
КОНЕЦ
```

описание процедуры КАРУСЕЛЬ будет иметь вид

```
ЭТО КАРУСЕЛЬ :R
  ОКРУЖНОСТЬ :R
  СДЕЛАЙ «СЧЕТЧИК :СЧЕТЧИК+1
  ЕСЛИ СЧЕТЧИК<17 [КАРУСЕЛЬ :R]
КОНЕЦ
```

На сей раз процедура КАРУСЕЛЬ, хотя и остается рекурсивной, все же вызывается не всякий раз, а только если значение переменной СЧЕТЧИК не превосходит 17. Заметьте, что в процедуре ПРОГУЛКА пришлось предусмотреть установку нулевого начального значения счетчика. Такая программа после завершения своей работы оставит переменную СЧЕТЧИК равной 17. Переменные, не являющиеся параметрами процедуры и используемые как внутри процедуры, так и в вызывающей ее программе под одним и тем же именем и с теми же значениями, называются *глобальными* (ср. с определением *локальной переменной* на предыдущем уроке). Переменная СЧЕТЧИК в последнем примере глобальна. Поэтому программист должен помнить, что вызов процедуры ПРОГУЛКА может изменить значение глобальной переменной СЧЕТЧИК, существовавшее до вызова. Уйти от этого ограничения можно, сделав СЧЕТЧИК параметром процедуры: параметры всегда локальны. Такая процедура имеет описание

```
ЭТО КАРУСЕЛЬ :R :СЧЕТЧИК
  ОКРУЖНОСТЬ :R
  СДЕЛАЙ «СЧЕТЧИК :СЧЕТЧИК+1
  ЕСЛИ :СЧЕТЧИК<17 [КАРУСЕЛЬ :R
  :СЧЕТЧИК]
КОНЕЦ
```

Теперь процедура ПРОГУЛКА вовсе не нужна. Вызов

```
КАРУСЕЛЬ 50 0
```

обеспечивает 17-кратное движение по окружности радиусом 50. От присваивания начального значения программист не избавлен, но теперь он делает это не отдельной командой, а установкой нулевого значения фактического параметра.

Задача 1. Перепишите процедуру КАРУСЕЛЬ так, чтобы Черепаха могла обегать любое заданное число кругов.

На прошлом уроке мы видели, что всегда, когда известно число повторяемых одинаковых действий, можно воспользоваться командой ПОВТОРИ. Значит, можно это сделать и в нашем

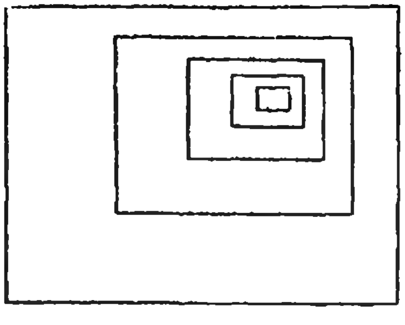


Рис. 1.

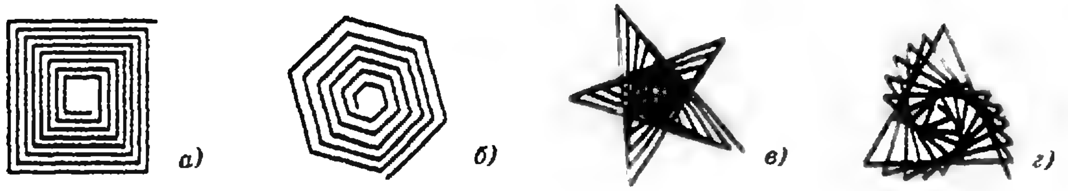


Рис 2

несложном задании — прогулке Черепахи по окружности.

Задача 2. Еще раз перепишите процедуру КАРУСЕЛЬ, исключив рекурсию и воспользовавшись командой цикла.

«Рекурсивный» рисунок на с. 38 программировать мы не будем. Но часть его — прямоугольники внутри прямоугольников (рис. 1) — запрограммировать легко:

```
ЭТО РЕКУРСИЯ :СТОРОНА
   ПОВТОРИ 2 [В :СТОРОНА П 90 В
   1.5 * :СТОРОНА П 90]
   НР В :СТОРОНА / 2 П 90 В
   1.5 * :СТОРОНА / 2 Л 90 Р
   СДЕЛАЙ "СТОРОНА :СТОРОНА * 0.4
   РЕКУРСИЯ :СТОРОНА
КОНЕЦ
```

Эта процедура будет безостановочно рисовать вложенные прямоугольники. Самым последним (но бесконечно повторяемым!) изображается прямоугольник с минимальным значением СТОРОНА, при котором еще выполняется условие СТОРОНА $>$ 1. А как добиться остановки процедуры?

Рисунки 2, *а—г* выполнены рекурсивной процедурой СПИРАЛЬ с двумя параметрами.

Задача 3. Сделайте описание процедуры СПИРАЛЬ, воспроизводящей рисунки 2, *а—г*.

Процедуры и функции

Введем понятие *предписания* как некоторого приказа, отданного машине в понятной для нее форме. Такие предписания, как ВПЕРЕД, заставляющие машину произвести определенные действия без вычисления результатов, мы будем называть *командами*, а такие, как «+», вычисляющие значения — *операциями*.

Набор встроенных команд в Лого относительно невелик. Описывая процедуры, мы объясняем машине новые команды. Например, можно ввести команду

КВАДРАТ α

рисующую квадрат со стороной α (α — арифметическое выражение). Для этого достаточно занести в память компьютера описание

```
ЭТО КВАДРАТ :А
  ПОВТОРИ 4 [ВПЕРЕД :А ВПРАВО 90]
КОНЕЦ
```

Выполняя команду (или процедуру), ЭВМ осуществляет некоторые действия — передвигает Черепаху, выводит сообщения на экран, организует повторения. Выполняя операцию, машина не только делает предписанные действия, но и (это главное!) вырабатывает в качестве результата некоторое единственное значение (сумму, разность, ...).

Мы уже пользовались арифметическими операциями: сложением, вычитанием, умножением, делением. Для более сложных математических выкладок требуются операции, вычисляющие значения функций. В Лого такие операции записываются в виде

$$\text{имя } \alpha, \tag{1}$$

где «имя» — идентификатор функции, α — выражение, на которое воздействует функция, т. е. операнд операции. Операции и функции могут иметь не один, а несколько операндов.

Вот несколько имен, резервированных в Лого для обозначения элементарных функций: SIN — синус, COS — косинус, TAN — тангенс, ARCTAN — арктангенс, SQRT — квадратный корень, RND — функция, генерирующая случайное число.

Например, выражение

$$\frac{\operatorname{tg} 2 + \sqrt{\sin a + 2}}{2} \tag{2}$$

перепишется на Лого в виде

$$\text{(TAN 2 + SQRT(SIN :}A\text{ + 2))/2.} \tag{3}$$

Выражение RND N можно использовать в качестве датчика случайных целых чисел из интервала (0; N—1).

Для знакомых операций «+», «—», «*», «/» в Лого также предусмотрены имена: СЛОЖИ для «+», ВЫЧТИ для «—», УМНОЖЬ для «*», РАЗДЕЛИ для «/». Эти операции можно тоже записывать в форме (1) с двумя параметрами-операндами:

$$\text{имя } \alpha\,\beta \tag{4}$$

(α и β — арифметические выражения).

Так, выражение $x+1$ можно переписать в виде

```
СЛОЖИ :x1
```

Для записи выражения (2) имеется эквивалент:

```
РАЗДЕЛИ СЛОЖИ TAN 2 SQRT
        СЛОЖИ SIN :A 2 2          (5)
```

(рассмотрите внимательно соответствие форм записи (3) и (5)!). Запись выражений в форме (4), когда имя операции ставится перед операндами, называется *префиксной*, в отличие от более привычной, *инфиксной* записи, когда имя (знак) операции ставится между операндами. Например, 2+3 — инфиксная форма записи,

СЛОЖИ 2 3 — префиксная форма записи той же операции.

Задача 4. Перепишите выражение

$$\frac{\sqrt{\sin^2 a+\cos a}}{a+1}$$

на Лого, используя префиксную форму записи.

Форма записи операций (1) и (4) делает их поразительно похожими на команды и вызовы процедур. Однако программа СЛОЖИ :*A* :*B* (равно как и :*A*+:*B*) вызовет недоумение ЭВМ — что делать с полученным результатом? Чтобы избежать ошибок, надо помнить, что операции можно использовать только в выражениях; например:

```
ВПЕРЕД СЛОЖИ :A :B
СДЕЛАЙ •X СЛОЖИ :A :B
ПИШИ СЛОЖИ :A :B
```

Рассмотрим пример, связанный с одним красивым математическим фактом. Известно, что предел последовательности

$$x_n=\underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{a}}}}_{n} \qquad (6)$$

равен 1 при любом $a>0$.

Проверим это утверждение экспериментально при помощи Черепахи. Заставим исполнитель вычерчивать на экране отрезки прямых, численно равные членам последовательности (6), под прямыми углами друг к другу. Довольно быстро Черепаха должна выйти на замкнутую квадратную орбиту со стороной 1 (рис. 3). Для большей наглядности введем масштабирующий множитель для отрезков спирали, равный 10:

```
ЭТО ПРЕДЕЛ :A
  ВПЕРЕД :A * 10
  ВПРАВО 90
  ПРЕДЕЛ SQRT :A
КОНЕЦ
```

Процедура ПРЕДЕЛ использует встроенную в Лого функцию квадратного корня SQRT. Однако в Лого можно создавать и свои собственные функции, точно так же, как это делается при описании процедур. Единственное отличие описаний функций от описаний процедуры — это обязательное присутствие в описании функции команды **ВЕРНИ** α

Эта команда возвращает в вызывающую программу в качестве результата значение выражения α.

Итак, описание *пользовательской* (создаваемой программистом) функции имеет вид

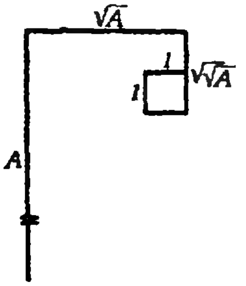


Рис. 3.

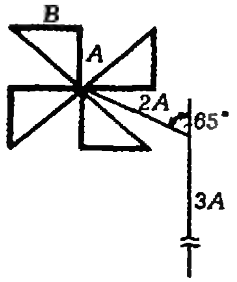


Рис. 4.

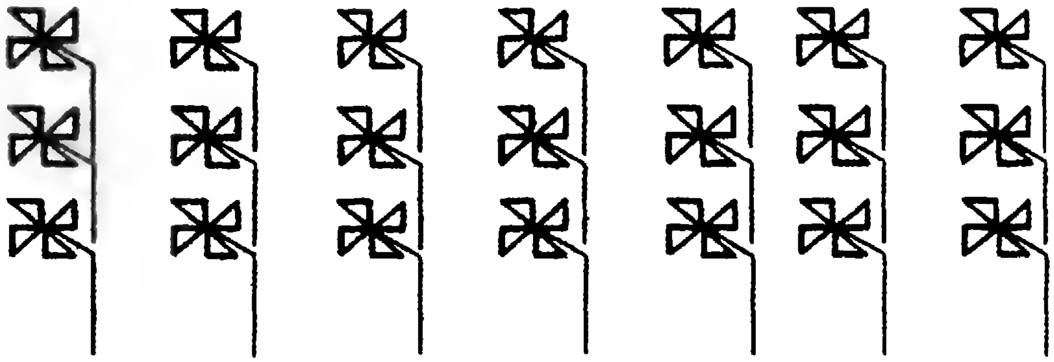


Рис. 5.

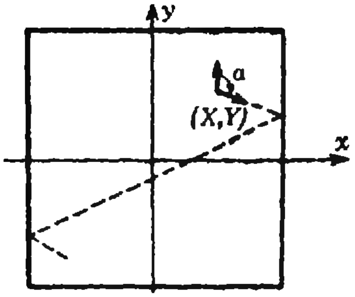


Рис. 6.

```
ЭТО имя параметры
...
  ВЕРНИ α
КОНЕЦ
```

Здесь «имя» — это имя функции, «параметры» — список (возможно, пустой) параметров-операндов, α — выражение.

Проиллюстрируем использование созданных программистом функций при рисовании цветка, имеющего лепестки в форме прямоугольных треугольников с катетами, равными *A* и *B* (рис. 4). Сначала опишем процедуру, которая рисует стебель, организует рисование четырех лепестков и возвращает Черепаху в исходное положение:

```
ЭТО ЦВЕТОК :A :B
  (*          РИСУЕМ СТЕБЕЛЬ              *)
  РИСУЙ ВПЕРЕД 3 * :A ВЛЕВО 65
  ВПЕРЕД 2 * :5 ВПРАВО 65
  (*          РИСУЕМ ЦВЕТОК               *)
  ПОВТОРИ 4 ЛЕПЕСТОК :A :B ВПРАВО 90
  (* ВОЗВРАТ В ИСХОДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ *)
  НЕ РИСУЙ ВЛЕВО :65 НАЗАД 2 * :A
  ВПРАВО 65 НАЗАД 3 * :A
  КОНЕЦ
```

Скобки «(*» и «*)» здесь и в дальнейшем будем использовать для записи комментариев — записанных в программе, но не обрабатываемых машиной сообщений. Лепесток рисует следующая процедура:

```
ЭТО ЛЕПЕСТОК :A :B
  (*         РИСУЕМ КАТЕТЫ               *)
  ВПРАВО :A ВЛЕВО 90 ВПЕРЕД :B
  (* ПОВОРОТ ДЛЯ РИСОВАНИЯ ГИПО-
                              ТЕНУЗЫ *)
  ВЛЕВО УГОЛ :A :B
  (*        РИСУЕМ ГИПОТЕНУЗУ            *)
   ВПЕРЕД ГИПОТЕНУЗА :A :B
   (* ПОВОРОТ В ИСХОДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ *)
   ВЛЕВО УГОЛ :A :B
КОНЕЦ
```

Процедура ЛЕПЕСТОК использует две функции: **УГОЛ** и **ГИПОТЕНУЗА**:

```
ЭТО УГОЛ :A :B
ВЕРНИ 180 — ARCTAN (:A / :B)
КОНЕЦ
ЭТО ГИПОТЕНУЗА :A :B
ВЕРНИ SQRT (:A * :A + :B*:B)
КОНЕЦ
```

Задача 5. Используя процедуру ЦВЕТОК, нарисуйте клумбу, изображенную на рисунке 5.

Вот еще два примера описаний функций.

```
ЭТО MAX :A :B

  (* ЭТА ФУНКЦИЯ ВОЗВРАЩАЕТ
     МАКСИМУМ ИЗ ДВУХ ЗНАЧЕНИЙ *)
  ЕСЛИ :A>:B [ВЕРНИ :A] [ВЕРНИ :B]
  КОНЕЦ

ЭТО ФАКТОРИАЛ :N
  (* ВОЗВРАЩАЕТ ЗНАЧЕНИЕ N! *)
  ЕСЛИ :N=0 [ВЕРНИ 1 ]
  [ВЕРНИ :N * ФАКТОРИАЛ (:N—1)]
КОНЕЦ
```

Последняя рекурсивная функция вычисления факториала использует тот факт, что $0!=1$ и $N!=N(N-1)!$

Задача 6. Напишите процедуру, которая моделирует движение «абсолютно упругой» Черепахи в квадратном «ящике», образованном границами экрана (рис. 6). Параметры процедуры — координаты начального положения (x; y) Черепахи в системе координат с началом в центре экрана и угол α, отсчитываемый по часовой стрелке между направлением на «север» (ось y) и носиком Черепахи.

Возвращаясь к напечатанному

Как заметили многие читатели, в формулировку задачи М1047 (решение которой было опубликовано в «Кванте» № 10) должно быть внесено уточнение. В задаче требовалось доказать, что если в турнире более 3/4 сыгранных партий закончились вничью, то некоторые два участника набрали поровну очков. Утверждение и решение будут верны, если подразумевать, что все участники сыгрвли по одинаковому количеству партий, в частности,— все сыграли друг с другом. (Без этого первый шаг решения — переход к системе подсчета очков, при которой за выигрыш дается 1, за ничью 0, и за поражение —1,— не позволяет правильно судить о первоначальной сумме очков, как видно из следующего примера: четыре участника А, Б, В, Г сыграли 5 партий, А выиграл у Г, В и Г не играли между собой, остальные партии закончились вничью.)

Новости «Кванта»

Как обнаружили 30 декабря 1987 года,
ровно 70 лет назад
в городе Малая Вишера
Новгородской области
родился член редколлегии
журнала «Квант» (со дня его основания)
доктор физико-математических наук,
профессор,
замечательный физик
и блестящий популяризатор науки,
автор и редактор многих книг
и огромного числа статей,
чрезвычайно эрудированный,
добрый и веселый,
молодой и обаятельный человек —
Яков Абрамович Смородинский.
Мы поздравляем Я. С. с юбилеем
и желаем ему здоровья,
неиссякаемого жизнелюбия и, конечно,
творческих успехов, с которыми обязуемся
незамедлительно знакомить читателей
нашего журнала.

Редакция
Редакционная коллегия
Редакционный совет

Новости науки

Самый далекий квазар

Поиски новых квазаров содержат элемент соревнований. Астрономы стараются найти квазар, который был бы расположен дальше всех уже известных.

Летом этого года по снимкам, сделанным в Австралии, обнаружен квазар, который находится от нас на расстоянии около $13\cdot10^9$ световых лет. Кроме того, что открытый квазар очень далекий, он еще и очень яркий. Энергия его излучения в 10 000 раз превышает энергию излучения средней галактики.

Расстояние до небесного объекта, находящегося на столь большом удалении, можно оценить только по величине смещения линий спектров атомов этого объекта, которое связано с расширением Вселенной. Однако пересчет по современным данным величин смещения в расстояния делается с большими ошибками. Неопределенность в вычислениях возникает здесь из-за того, что до сих пор еще не удается согласовать различные определения постоянной Хаббла, связывающей относительную скорость «разбегания» галактик и с расстоянием R между ними:

$$v=H\cdot R.$$

Способы определения постоянной Хаббла дают для нее два значения — 50 и 100 км/(с · Мпс). Какое из них более точное, не выяснено, но для расчетов берут обычно $H\approx70$ км/(с · Мпс).

Относительное изменение длины волны излучения, или красное смещение нового квазара —

$$z=\frac{\lambda_{\text{набл}}-\lambda_0}{\lambda_0}=4{,}10.$$

Это означает, что линия в ультрафиолетовой части спектра водорода с длиной волны λ_0 = 1215,7 Å = 0,12157 мкм в спектре излучения квазара находится в середине видимой области. Максимальные красные смещения ранее были 4,04 — для двух квазаров, открытых в этом году, и 4,01 — для квазара, открытого в 1986 году.

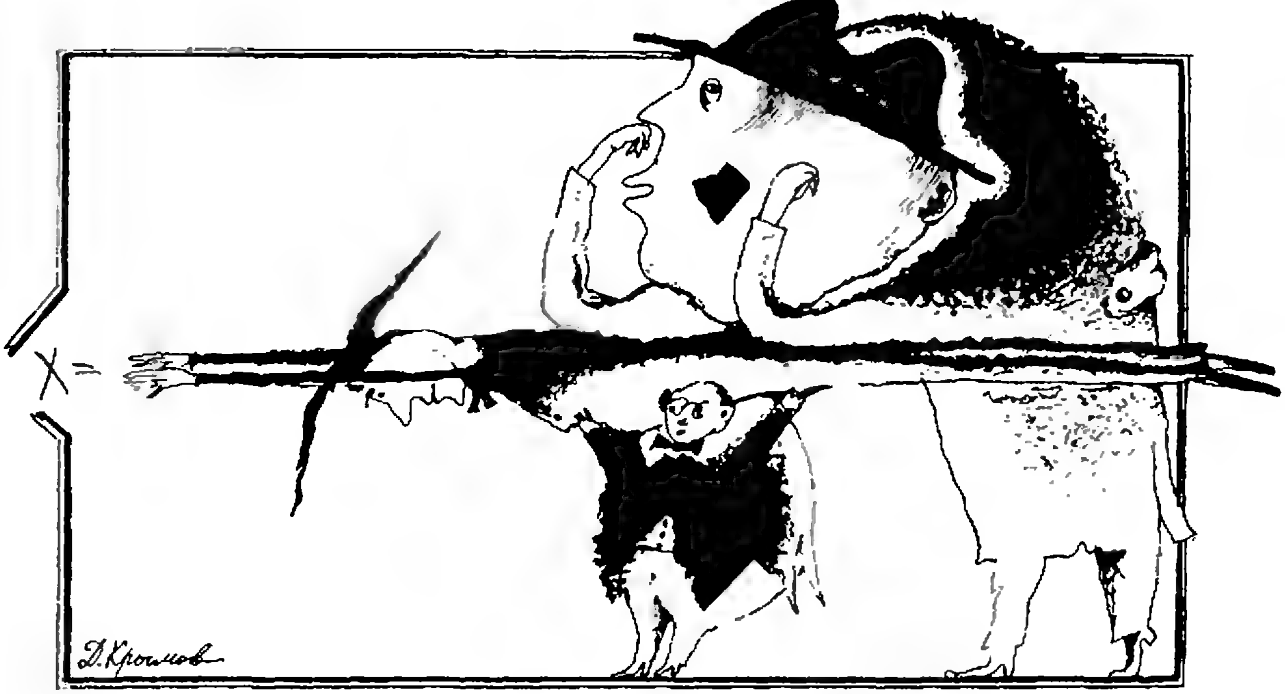
Далее из величины z определяют по формуле Доплера

$$z+1=\frac{\lambda_{\text{набл}}}{\lambda_0}=\frac{\sqrt{1+v/c}}{\sqrt{1-v/c}}$$

скорость v, а затем по формуле Хаббла находят расстояние до интересующего нас объекта. Строго говоря, при таком пересчете нужно учитывать эффект кривизны Вселенной, но так как он невелик, то такая поправка не внесет ничего существенного.

Что касается открытого квазара, то остается только сообщить его координаты. Он лежит на небесном меридиане, проходящем через точку весеннего равноденствия (прямое восхождение 00 часов 00 минут), и имеет склонение 26°20′.

Я. С.



Практикум абитуриента

Уравнения думают за нас

В. А. НАХШИН

Решение любой расчетной задачи по физике состоит из двух частей — физической и математической.

Пока мы обдумываем условие задачи, анализируем, в соответствии с какими физическими законами происходит данное явление, и составляем соответствующую систему уравнений, мы — физики. После этого физика временно отходит на задний план. Теперь мы — математики, и перед нами стоят иные проблемы: как наиболее рационально решить полученную систему уравнений и найти ответ? Причем ответ нужно найти в общем (буквенном) виде, чтобы слева от знака равенства стояла только искомая величина (в буквенном обозначении), а справа — комбинация из только известных величин (тоже в соответствующих буквенных обозначениях).

Но вот ответ в общем виде получен, и мы снова обращаемся к физике: прежде чем подставить числовые данные, надо проверить размерность искомой величины и проанализировать ответ с точки зрения его правдоподобности. Если размерность верна и ответ правдоподобен, можно подставлять данные и считать.

Описанные этапы решения присущи практически всем задачам. Однако иногда — а именно о таких случаях и будет рассказано в статье — после расчетов получается неожиданный абсурдный результат, что свидетельствует о неверном решении. Так бывает, например, когда ни условие задачи, ни интуиция, ни здравый смысл не могут подсказать, в какую сторону протекает тот или иной процесс или каким будет конечный результат.

Приступая к решению задачи, мы вынуждены предположить какой-то вариант и в соответствии с ним составить систему уравнений. Если ответ получится абсурдным, отчаиваться не стоит. Просто нам не повезло: наше предположение оказалось неверным. Однако определенную информацию мы все же получили — в предполагаемом направлении процесс не идет.

Впервые эта статья была опубликована в сентябрьском номере «Кванта» в 1981 году. (*Примеч. ред.*)

Что же, допустим другой вариант и так далее. Задача превращается в небольшое исследование, а уравнения — как бы в товарищей по размышлению. В конце концов они нас не подведут (разумеется, если мы их не подведем, т. е. не ошибемся в составлении и решении) и расскажут нам об истинном направлении процесса или о конечном результате.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *На вершине шероховатой наклонной плоскости укреплен блок, через который переброшена нить. К концам нити прикреплены два тела массами $m_1=3$ кг и $m_2=2$ кг. Найдите ускорение системы и силу трения между первым телом и плоскостью, если коэффициент трения $\mu=0{,}5$ и угол наклона плоскости к горизонту $\alpha=30°$.*

Куда ускоряется система и движется ли она вообще? Из условия задачи не ясно. Между тем, знать это очень важно. Так, если система движется, имеет место трение скольжения и модуль этой силы равен $F_{\text{тр}}=\mu N$ (N — модуль силы нормальной реакции). Если же система покоится, на первое тело действует сила трения покоя, про которую известно только, что она не больше силы трения скольжения.

Может быть, поможет интуиция? С одной стороны, первое тело тяжелее второго, но, с другой стороны, второе тело висит в воздухе, а первое лежит на наклонной плоскости, да к тому же есть трение. Нет, интуиция нас не выручит, нужен анализ. Попробуем переложить наши заботы на уравнения.

Предположим, что блок вращается по часовой стрелке, т. е. второе тело опускается с ускорением, а первое — с тем же по модулю ускорением поднимается по плоскости. Изобразим силы, действующие на каждое тело (рис. 1), и запишем систему уравнений второго закона Ньютона в проекциях на соответствующие направления (для первого тела — это направления вдоль плоскости и перпендикулярно к ней, а для второго тела — это вертикальное направление):

$$\begin{cases} T-m_1g\sin\alpha-\mu N=m_1a, \\ N-m_1g\cos\alpha=0, \\ m_2g-T=m_2a. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$a=g\frac{m_2-\mu m_1\cos\alpha-m_1\sin\alpha}{m_1+m_2}\approx-1{,}6\ \text{м/с}^2$$

— проекция ускорения на выбранное направление отрицательна. Значит, наше предположение неверно.

Что же тогда происходит с системой? Движется в противоположном направлении? А с каким ускорением?

В этом месте многие допускают ошибку, считая, что система ускоряется в противоположном направлении с тем же по модулю ускорением ($\approx 1{,}6$ м/с^2). Иногда так действительно можно считать. Например, если бы в данной системе не было силы трения, при изменении выбранного направления движения на противоположное проекции всех сил изменили бы свой знак, и ускорение получилось бы таким же по модулю, но с противоположным знаком. В нашем же случае при новом предположении проекция силы трения по-прежнему отрицательна, поэтому соответствующая система уравнений будет другой (рис. 2):

$$\begin{cases} m_1g\sin\alpha-T-\mu N=m_1a, \\ N-m_1g\cos\alpha=0, \\ T-m_2g=m_2a. \end{cases}$$

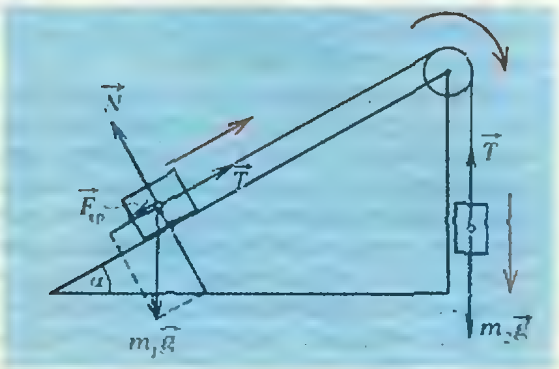


Рис. 1.

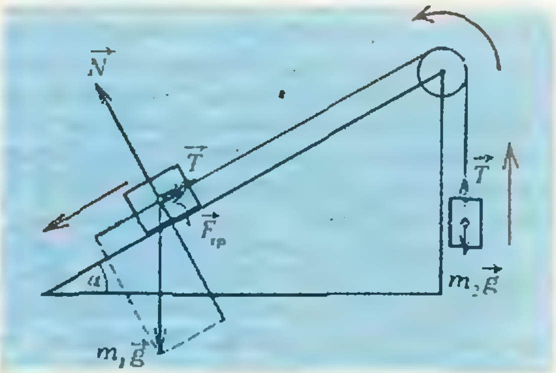


Рис. 2.

Отсюда

$$a=g\,\frac{m_1\sin\alpha-\mu m_1\cos\alpha-m_2}{m_1+m_2}\approx-3{,}6\ \text{м/с}^2.$$

И вновь проекция ускорения оказалась отрицательной; следовательно, новое предположение тоже неверно.

Итак, уравнения, «подумав» за нас, привели к выводу, что система не ускоряется, то есть

$$a=0.$$

Значит, для нахождения силы трения, точнее — силы трения покоя, нельзя пользоваться формулой $F_{\text{тр}}=\mu N$, справедливой для силы трения скольжения.

Для определения искомой силы посмотрим, какие еще силы (или их проекции) действуют на первое тело в направлении вдоль наклонной плоскости. Это — проекция силы тяжести, равная по модулю $m_1 g\sin\alpha=15$ Н, и сила натяжения нити, модуль которой можно найти из условия покоя второго тела: $T=m_2 g=20$ Н. Следовательно, сила трения покоя направлена вдоль плоскости вниз и равна по модулю

$$F_{\text{тр п}}=T-m_1 g\sin\alpha=5\ \text{Н}.$$

Кстати, нетрудно убедиться в том, что в данном случае сила трения $F_{\text{тр п}}=5$Н действительно меньше $\mu N=\mu m_1 g\cos\alpha\approx13$ Н.

Задача 2. *В калориметр, содержащий $m_1=3$ кг льда при температуре $t_1=-10$ °С, вливают $m_2=2$ кг воды при температуре $t_2=80$ °С. Какая температура установится в результате теплообмена? Теплоемкость калориметра не учитывать.*

Ясно, что конечная температура t находится в промежутке от —10 до +80 °С:

$$-10\ ^\circ\text{С}<t<80\ ^\circ\text{С}.$$

Следовательно, она может быть больше 0 °С — температуры таяния льда, меньше этой температуры или равной ей. Какой именно она окажется, заранее сказать нельзя. Будем к цели пробираться «на ощупь», перебирая возможные варианты и полагаясь на волю уравнений.

Предположим, что $t>0$ °С, т. е. в калориметре будет только вода. Тогда лед получает тепло в три этапа: будучи собственно льдом, нагреваясь от —10 до 0 °С, превращаясь в воду при 0 °С и, будучи уже водой, нагреваясь от 0 °С до t. При этом вода отдает тепло только при охлаждении от температуры t_2 до t. Запишем соответствующее уравнение теплового баланса:

$$c_1 m_1(0-t_1)+\lambda m_1+c_2 m_1(t-0)+$$
$$+c_2 m_2(t-t_2)=0,$$

где $c_1=2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К) и $c_2=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К) — удельные теплоемкости льда и воды, а $\lambda=3{,}4\cdot10^5$ Дж/кг — удельная теплота плавления льда. Отсюда найдем

$$t=\frac{c_1 m_1 t_1+c_2 m_2 t_2-\lambda m_1}{c_2(m_1+m_2)}.$$

Подставив числовые данные, получаем $t<0$ °С. Значит, наше предположение неверно.

Теперь допустим, что $t<0$ °С. В таком случае вода отдает тепло в три этапа — охлаждаясь до 0 °С, превращаясь в лед при 0 °С и в качестве льда охлаждаясь до искомой температуры t, а первоначальный лед получает тепло только в один этап — нагреваясь от t_1 до t:

$$c_1 m_1(t-t_1)+c_2 m_2(0-t_2)-\lambda m_2+$$
$$+c_1 m_2(t-0)=0.$$

Решив это уравнение, получаем

$$t=\frac{c_1 m_1 t_1+c_2 m_2 t_2+\lambda m_2}{c_1(m_1+m_2)}.$$

Подставим числовые данные и убедимся, что $t>0$ °С. Следовательно, и второе наше предположение было неверным.

Остается единственный вариант: $t=0$ °С. Это и будет ответом задачи.

Здесь мы предвидим некоторое чувство досады у читателя: почему автор нарочито подбирает примеры, где все первоначальные предположения оказываются неверными и оба столь громоздких решения приводят к сравнительно простым результатам ($a=0$, $t=0$ °С)? Почему бы, в самом деле, не предположить заранее именно эти простейшие варианты?

Такой путь возможен, но облегчения он не сулит. Так, в первой задаче, предположив покой и не имея при этом формулы для силы трения покоя, мы должны будем составить систему из трех уравнений равновесия, но, решив ее и найдя силу трения, надо обязательно проверить, действительно ли она меньше силы трения скольжения. Если окажется, что нет, придется все решение, описанное выше, начинать сначала.

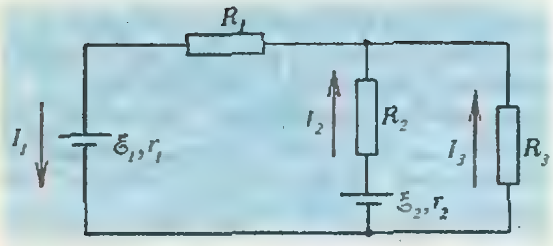


Рис. 3.

Во второй задаче, предположив $t = 0$ °C, мы должны подтвердить это уравнением теплового баланса, но неизвестно, как его составить. Мы не знаем, что́ раньше дошло до нуля: лед «снизу» или вода «сверху», и как следствие — расплавилась ли часть (и какая часть) льда или замерзла часть воды? Можно, конечно, опять что-то предположить, но число вариантов будет не меньше, а даже больше, чем в приведенном выше решении.

Задача 3. *Найдите токи во всех ветвях схемы, изображенной на рисунке 3. Здесь $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E} = 1$ В, $r_1 = r_2 = r = 1$ Ом и $R_1 = R_2 = R_3 = R = 10$ Ом.*

Предположим, что токи I_1, I_2 и I_3 направлены так, как показано на рисунке *3*, хотя мы достоверно этого и не знаем. Если мы ошиблись, соответствующие уравнения нас поправят.*)

Поскольку в точках разветвления (узлах) электрический заряд не накапливается, заряд, поступающий в единицу времени в узел, равен заряду, уходящему из узла за то же время, т. е.

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Выделим в данной схеме два простых замкнутых контура, например левый и правый, и выберем в них направления обхода, например против часовой стрелки. Согласно закону сохранения энергии, алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжения:

$$\mathscr{E} - \mathscr{E} = I_1R + I_1r + I_2r + I_2R,$$
$$-\mathscr{E} = -I_2R - I_2r + I_3R.$$

Объединим полученные уравнения в систему и для простоты подставим числовые данные:

$$\left|\begin{aligned} &I_1 = I_2 + I_3,\\ &10I_1 + I_1 + I_2 + 10I_2 = 0,\\ &10I_2 + I_2 - 10I_3 = 1.\end{aligned}\right.$$

Решив эту систему, найдем

$$I_1 = -\frac{1}{31}\ А,\quad I_2 = \frac{1}{31}\ А,\quad I_3 = -\frac{2}{31}\ А.$$

Первый и третий токи получились отрицательными. Это означает, что наши предположения об их направлениях оказались неверными. Числовые значения мы нашли верно, а направления этих токов — противоположны предполагаемым.

Задача 4. *Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с. Через какое время оно будет на высоте $h = 40$ м?*

Запишем известную формулу для координаты тела, брошенного вертикально вверх (положительным считаем направление вверх):

$$h = v_0t - \frac{gt^2}{2}.$$

Решая его относительно t, получим

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Однако при подстановке числовых данных выясняется, что выражение под корнем отрицательно. Что это означает?

Оказывается, это уравнение на своем языке подсказывает нам, что данное тело вообще не достигает такой высоты. В самом деле, максимальная высота подъема $h_{\max} = v_0^2/2g \approx 31{,}5$ м, что меньше $h = 40$ м.

Так что бывают случаи, когда уравнения «думают» неожиданно, незапланированно.

Упражнения

1. Однородный рычаг массой $m = 10$ кг опирается на опору, находящуюся на расстоянии $l_1 = 25$ см от его левого конца. Длина рычага $l = 1$ м. К левому концу рычага подвешен груз массой $m_1 = 2$ кг. С какой силой надо действовать на правый конец вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, чтобы рычаг находился в равновесии?

2. В калориметр, где находится $m_1 = 1$ кг льда при температуре $t_1 = 0$ °C, впускают $m_2 = 500$ г водяного пара при температуре $t_2 = 100$ °C. Какая температура установится после того, как произойдет теплообмен? Теплоемкостью калориметра можно пренебречь.

3. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с. Какой путь пройдет оно за $t = 2$ с полета? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.

---

*) О том, как составлять эти уравнения, подробно рассказывается в заметке «Правила Кирхгофа» («Квант», 1985, № 1, с. 26).

Олимпиады

XXVIII
Международная математическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ,
кандидат физико-математических наук
А. А. ФОМИН

XXVIII Международная математическая олимпиада проходила в Гаване — столице Республики Куба.

В олимпиаде участвовали команды из 42 стран, по 6 человек от страны. В команду школьников СССР были включены призеры Всесоюзных олимпиад последних лет: *Биндер Илья* (Ленинград, с. ш. № 239), *Борисов Лев* (Минск, с. ш. № 19), *Иванов Сергей* (Ленинград, с. ш. № 533), *Пухов Игорь* (Москва, с. ш. № 57), *Смирнов Станислав* (Ленинград, с. ш. № 239), *Стыркас Константин* (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82).

В этом году Международная математическая олимпиада впервые проводилась в Латинской Америке, в первой социалистической стране западного полушария. Центральный Комитет Компартии Кубы и кубинское правительство приложили немало усилий для того, чтобы олимпиада на Кубе превратилась в яркий праздник математики. Организационную работу возглавлял член Политбюро ЦК Компартии Кубы, министр образования Хосе Раус Фернандес; работой жюри руководили известные кубинские математики Мигель Хименес Посо и Гиермо Лопес Лагомасино.

Гавана встречала участников олимпиады 4 июля. В дни олимпиады ребята совершили несколько увлекательных экскурсий по городу и его окрестностям, побывали в историческом музее, в национальном пионерском лагере им. Хосе Марти, совершили поездку на Плая-Хирон, ну и конечно же, познакомились со знаменитыми гаванскими пляжами.

10 и 11 июля были днями математических соревнований. Они проходили в специализированной школе точных наук им. В. И. Ленина, расположенной в живописном пригороде Гаваны. В каждый из дней соревнований участникам олимпиады предлагалось решить по три задачи за 4,5 часа. Любая из шести предложенных задач оценивалась в 7 баллов, так что максимальная оценка, которую мог получить участник олимпиады, равнялась 42. Первое место в этом году присуждалось лишь участникам, набравшим 42 балла.

Итоги выступления советской команды показаны в таблице.

задачи / Ф. И. О.	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	Сумма	Место
Борисов Л.	7	7	7	7	7	7	42	1
Иванов С	7	7	7	7	7	7	42	1
Смирнов С	7	7	7	7	7	7	42	1
Пухов И.	7	7	6	7	7	7	41	2
Биндер И.	7	7	0	7	7	7	35	2
Стыркас К.	7	7	1	7	7	4	33	2

Таким образом, команда СССР, набрав 235 баллов из 252 возможных, завоевала 3 золотые и 3 серебряные медали.

В неофициальном командном зачете страны-участницы распределились следующим образом: Румыния (250), ФРГ (248), СССР (235), ГДР (231), США (220), Венгрия (218), Болгария (210), КНР (200), Чехословакия (192), Англия (182), Вьетнам (172), Франция (154), Австрия (150), Нидерланды (146), Австралия (143), Канада (139), Швеция (134), Югославия (132), Бразилия (116), Греция (111), Турция (94), Испания (91), Марроко (88), Куба (83), Бельгия (74), Иран (70), Норвегия (69), Финляндия (69), Колумбия (68), Монголия (67), Польша (55), Исландия (45), Кипр (42), Перу (41), Италия (35), Алжир (29), Кувейт (28), Люксембург (27), Уругвай (27), Мексика (17), Никарагуа (13), Панама (7).

Задание соревнующимся формировало жюри, состоящее из руководителей 42 национальных команд. В итоге жарких обсуждений участникам были предложены следующие задачи.

Первый день

1 (ФРГ). Пусть $p_n(k)$ — число перестановок множества из n, $n\geqslant 1$, элементов, имеющих ровно k неподвижных точек. Докажите, что

$$p_n(1)+2\cdot p_n(2)+\ldots+n\cdot p_n(n)=n!$$

Примечание. Перестановкой множества $S=\{1, 2, \ldots, n\}$ называется взаимно однозначное отображение f множества S на S. Число i называется неподвижной точкой перестановки f, если $f(i)=i$.

2 (СССР). Продолжение биссектрисы AL ($L\in BC$) остроугольного треугольника ABC пересекает описанную вокруг него окружность в точке N ($N\neq A$). Из точки L на стороны AB и AC соответственно опущены перпендикуляры LK и LM. Докажите, что площади четырехугольника $AKNM$ и треугольника ABC равны.

3 (ФРГ). Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа и $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$. Докажите, что для любого целого числа $k\geqslant 2$ существуют целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не все равные нулю, $|a_i|\leqslant k-1$, $i=1, 2, \ldots, n$, и такие, что

$$|a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

Второй день

4 (Вьетнам). Пусть $\mathbf{N}_0=\{0, 1, 2, \ldots\}$ — множество целых неотрицательных чисел. Докажите, что не существует функции $f\colon \mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ такой, что

$$f(f(n))=n+1987$$

для любого $n\in\mathbf{N}_0$.

5 (ГДР). Докажите, что для каждого натурального числа n, $n\geqslant 3$, можно выбрать на плоскости n точек так, чтобы выполнялись два условия:

а) расстояние между любыми двумя точками было иррациональным числом;

б) любые три точки являлись вершинами невырожденного треугольника, площадь которого выражалась бы рациональным числом.

6 (СССР). Пусть $n\geqslant 2$ — натуральное число. Докажите, что если числа k^2+k+n — простые для каждого целого k, $0\leqslant k\leqslant\sqrt{n/3}$, то числа k^2+k+n — простые для каждого целого k, $0\leqslant k\leqslant n-2$.

Во время работы олимпиады состоялось заседание Международного подготовительного комитета по проведению Международных математических олимпиад, возглавляемого его президентом, профессором МФТИ Г. Н. Яковлевым. Было решено, что XXIX ММО состоится в 1988 г. в Австралии, XXX ММО — в 1989 г. в Федеративной Республике Германии, XXXI ММО — в 1990 г. в Китайской Народной Республике.

Олимпиада прошла в атмосфере дружбы и взаимопонимания, способствовала установлению научных контактов молодежи разных стран, делу мира во всем мире.

Редколлегия и редакция журнала «Квант» горячо поздравляют всех членов советской команды с успешным выступлением на XXVIII Международной математической олимпиаде и желают им больших научных успехов.

В заключение предоставим слово самим участникам.

Пухов Игорь, выпускник школы № 57 г. Москвы. Учитель математики — Гордин Р. К. На всесоюзных олимпиадах награждался дипломами II степени в 1986 и 1987 гг. II премия на XXVIII ММО.

«Хотя задачи нынешней олимпиады не были очень сложными, они мне понравились. На мой взгляд, самая трудная задача — третья, самая интересная — шестая. На Международной олимпиаде я набрал 41 балл — это мой наилучший результат, полученный на различных олимпиадах. Честно говоря, я такого не ожидал. Но больше всего мы не ожидали третьего места нашей команды. Пожалуй, это уже не наша вина, а скорее «вина» румынской команды, установившей рекорд, который вряд ли когда-либо побьют».

Борисов Лев, выпускник школы № 19 г. Минска. Учитель математики — Фельдман А. М. На Всесоюзных олимпиадах награждался дипломом II степени в 1984 г. и дипломами I степени в 1985— 1987 гг. I место на XXVIII ММО.

«Олимпиада была легкой, все задачи, кроме шестой, показались мне неинтересными. Наша команда выступила успешно, но результат мог бы быть гораздо лучше, если бы не сбой в третьей задаче, которая, несмотря на внешнюю сложность, была простой».

Иванов Сергей, окончил 8-й класс школы № 533 г. Ленинграда. Учитель математики — Полуаршинова Н. Г. Занимается в математическом кружке при ЛГПИ. Руководители — Бураго Д. Ю. и Фомин Д. В. На Всесоюзных олимпиадах награждался дипломами I степени в 1986 и 1987 гг. I премия на XXVIII ММО.

«Задачи на олимпиаде были нетрудными. Впрочем, об этом свидетельствует и результат — 22 участника набрали по 42 балла. Выступле-

Команда СССР на XXVIII Международной математической олимпиаде. Первый ряд (слева направо): В. В. Вавилов — научный руководитель команды, С. Смирнов, С. Иванов, И. Биндер А. А. Фомин — педагогический руководитель команды. Второй ряд: А. Черных (запасной участник), И. Пухов, Л. Борисов, К. Стыркас.

ние нашей команды не назовешь вполне удачным. Хотя мы и набрали 235 баллов, повторив мировой рекорд 1984 г., это дало нам всего лишь третье место. Организаторы олимпиады и школа им. В. И. Ленина приложили все усилия для того, чтобы олимпиада удалась — был разработан удобный распорядок дня, хорошо работал транспорт. От олимпиады у меня остались самые приятные впечатления».

Стыркас Константин, выпускник школы № 82 п. Черноголовка Московской области. Учитель математики — Земляков А. Н. На Всесоюзных олимпиадах награждался дипломами I степени в 1985 и 1986 гг. и дипломом III степени в 1987 г. II премия на XXVIII ММО.

«Я выступил на олимпиаде неудачно, несмотря на то, что задачи были нетрудными. Команда Советского Союза выступила неплохо, хотя по своим возможностям могла бы выступить гораздо сильнее».

Смирнов Станислав, выпускник школы № 239 г. Ленинграда. Учитель математики — Кукса Н. М. Занимался в математическом кружке при Ленинградском Дворце пионеров. Руководитель — Рукшин С. Е. На Всесоюзных олимпиадах награждался дипломами I степени в 1985 и 1986 гг. и дипломом III степени в 1987 г. Дважды участвовал в Международных олимпиадах: I место на XXVII ММО и I место на XXVIII ММО.

«Олимпиада в этом году была организована лучше, чем в прошлом. Хуже был лишь подбор задач — они оказались менее интересными, чем задачи других олимпиад. Команда СССР выступила ниже своих возможностей: нам было по силам получить 4—5 первых мест и набрать не менее 245 баллов».

Биндер Илья, выпускник школы № 239 г. Ленинграда. Учитель математики — Кукса Н. М. Занимался в математическом кружке при Ленинградском дворце пионеров. Руководитель — Рукшин С. Е. На Всесоюзных олимпиадах награждался дипломом II степени в 1986 г. и дипломом III степени в 1987 г. II место на XXVIII ММО.

«Своим выступлением я не доволен: ведь олимпиада была очень легкой. А в целом — это были удивительные и впечатляющие дни, которые вряд ли когда-либо забудутся».

DEUTSCHE DEMOKRATISCHE REPUBLIK
XVIII. IPhO
5–13 Juli 1987 · JENA

XVIII Международная физическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

В этом году Международная олимпиада школьников по физике проходила с 5 по 13 июля в городе Йена (ГДР). По числу участников это была самая представительная олимпиада. В Йену приехали команды из 25 стран: Австралии, Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, Вьетнама, ГДР, Голландии, Исландии, Италии, Канады, Китая, Кубы, Кувейта, Норвегии, Польши, Румынии, СССР, США, Турции, Финляндии, ФРГ, Чехословакии, Швеции, Югославии. Кроме того, на олимпиаде присутствовали наблюдатели из Бельгии, Греции и Колумбии. (Как показывает опыт, возможно, уже в будущем году эти страны станут полноправными участниками олимпиады.) В проведении олимпиады приняли участие также представитель ЮНЕСКО, корреспондент журнала «Квант» и корреспонденты молодежных журналов Исландии и ФРГ.

В соответствии со статутом Международной физической олимпиады каждая команда-участник состоит из двух руководителей и пяти участников. Руководители команд вместе с членами оргкомитета страны-устроителя олимпиады образуют Международную комиссию — основной руководящий орган олимпиады. В этом году Международную комиссию возглавил профессор Гумбольдтского университета (г. Берлин) Рудольф Германн — специалист в области физики твердого тела.

В команду СССР по итогам выступлений на Всесоюзных олимпиадах и по результатам зимних и летних сборов вошли

Антон Бибиков — выпускник ФМШ № 18 г. Москвы,

Дмитрий Будько — выпускник с. ш. № 3 г. Белгорода,

Гинтас Вилькялис — выпускник с. ш. № 45 г. Вильнюса,

Дмитрий Глущенков — выпускник с. ш. № 239 г. Ленинграда,

Алексей Гольдин — выпускник ФМШ № 2 г. Киева.

Перед поездкой на олимпиаду все участники летних сборов (включая также Сергея Бобылева — выпускника с. ш. № 9 г. Березники и Павла Карклина — выпускника с. ш. № 49 г. Москвы) были зачислены без экзаменов в выбранные ими вузы.

Руководителями нашей команды были назначены научные сотрудники Научно-исследовательского института содержания и методов обучения АПН СССР О. Ф. Кабардин и В. А. Орлов.

Открытие олимпиады состоялось 6 июля в зале торжественных заседаний Йенского университета им. Фридриха Шиллера. Вечером того же дня прошло официальное заседание Международной комиссии, на котором были представлены задачи теоретического тура, разработанные специальной комиссией. После необходимых корректировок условий задач и уточнений официальных решений комиссия утвердила задание.

7 июля участникам были предложены три задачи: первая — по термодинамике, вторая — по механике и электромагнетизму и третья — на колебания и волны.

Вот условия этих задач.

Теоретический тур

Задача 1

Горный хребет обтекается адиабатически влажным воздухом (рис. 1). Метеорологические станции M_0 и M_1 фиксируют давление воздуха $p_0=100$ кПа, станция M_2 — $p_2=70$ кПа. Температура воздуха в точке M_0 — $t_0=+20$ °С. Когда воздух поднимается, при давлении $p_1=84{,}5$ кПа начинается образование облаков. При дальнейшем поднятии воздух, в котором происходит конденсация водяного пара (масса этого воздухв над каждым квадратным метром поверхности равна 2000 кг), достигает вершины хребта (станция M_2) через 1500 с. При этом он отдает, в расчете на один килограмм воздуха, $m=2{,}45$ г воды в качестве осадков (дождя).

1) Какова температура T_1 на уровне нижней границы облаков?

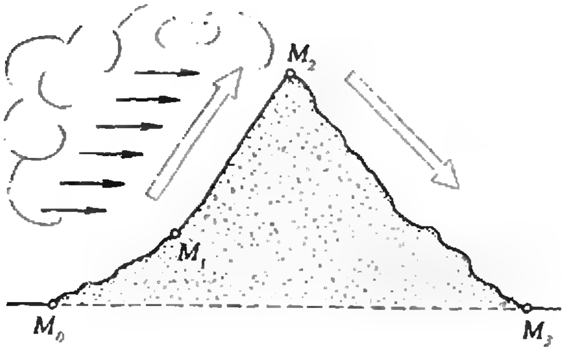


Рис. 1.

2) На какой высоте h_1 над станцией M_0 расположена нижняя граница облаков, если допустить, что плотность воздуха убывает с высотой линейно?

3) Какая температура T_2 будет измерена на вершине хребта?

4) Какой высоты достигает столб воды (высота осадков на единицу площади), выпадающей из потока воздуха в течение 3 часов? Условия конденсации пара считать одинаковыми на участке от M_1 до M_2.

5) Какова температура T_3 на задней стороне хребта у станции M_3? Обсудите состояние воздуха у станции M_3 по сравнению с его состоянием у станции M_0.

Указания и данные:

Воздух следует рассматривать как идеальный газ.

Влиянием присутствия водяного пара на удельную теплоемкость и на плотность воздуха, а также зависимостью удельной теплоты испарения от температуры следует пренебречь. Температуры следует указать с точностью до 1 К, высоту нижней границы облаков — с точностью до 10 м, высоту осадков — с точностью до 0,1 мм.

Удельная теплоемкость воздуха в интересующем нас интервале температур равна $c_p=1005$ Дж/(кг · К); плотность воздуха у станции M_0 при p_0 и T_0 — $\rho_0=1,189$ кг/м^3; удельная теплота испарения воды в области облака — $q_V=2500$ кДж/кг; $c_p/c_V=\varkappa=1,4$; $g=9,81$ м/с^2.

Задача 2

Из точечного источника P вылетает пучок электронов и влетает в магнитное поле $\vec{B}$ кольцевой (тороидальной) катушки вдоль линий поля (рис. 2). Пусть угол раскрытия электронного пучка $2\alpha_0$ очень мал ($\alpha_0 \ll 1$). Инжекция электронов происходит на среднем радиусе R тороида с помощью ускоряющего напряжения U_0. Предполагается, что модуль B постоянен. Электростатическим взаимодействием электронов в пучке пренебречь.

1) Для движения пучка по линии поля тороида необходимо приложить однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_1$, отклоняющее пучок. Вычислите B_1 для электрона, который движется по круговой траектории радиусом R внутри тороида.

2) Вычислите модуль B индукции тороидального магнитного поля, фокусирующего электронный пучок в четырех точках, сдвинутых на $\pi/2$ относительно друг друга (см. рис. 2). Указание: при исследовании траекторий электронов искривлением линий магнитного поля можно пренебречь.

3) Без отклоняющего поля $\vec{B}_1$ пучок электронов не остается в тороиде, а покидает его дрейфовым движением перпендикулярно к плоскости тороида. Покажите, что радиальное отклонение электронов от радиуса R инжекции конечно. Определите направление дрейфовой скорости. Указание: углом раскрытия электронного пучка следует пренебречь. Используйте законы сохранения энергии и момента импульса.

Данные: $e/m=1,76\cdot 10^{11}$ Кл/кг, $U_0=3$ кВ, $R=50$ мм.

Задача 3

При распространении синусоидальных колебаний силы тока и напряжения по бесконечной $L-C$ цепочке (рис. 3) фазы колебаний напряжения на конденсаторах двух последовательных ячеек отличаются на постоянную величину φ.

1) Определите зависимость φ от ω, L и C (ω — циклическая частота колебаний).

2) Определите скорость распространения волн, если каждая ячейка имеет длину l.

3) При каком условии скорость распространения колебаний слабо зависит от ω и каково значение скорости в этом случае?

4) Предложите простую механическую модель, аналогичную описанной выше электрической цепи, и выведите уравнения, которые обосновывают правильность этой модели.

Вспомогательные формулы:

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

По итогам проведения теоретического тура лучшую сумму баллов, с большим отрывом от остальных участников, получили два школьника из Румынии: К. Некула — 30 баллов и К. Малуреану — 29 баллов (каждая задача теоретического тура оценивалась в 10 баллов). Лучшим из советских школьников был А. Бибиков, набравший 24 балла (он решил задачи 2 и 3). Остальные участники советской команды получили соот-

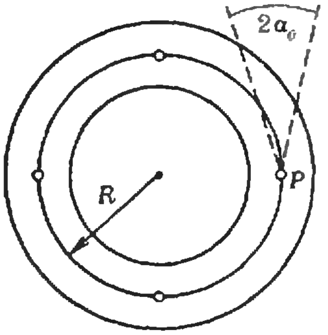


Рис. 2.

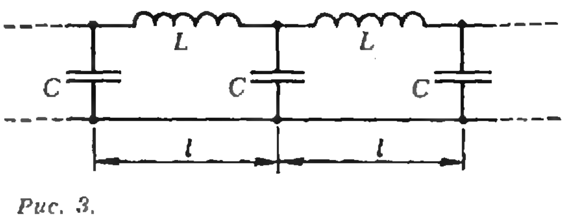


Рис. 3.

Команда Советского Союза на XVIII Международной физической олимпиаде. Слева направо: Д. Глущенков, А. Гольдин, Д. Будько, А. Бибиков, Г. Вилькялис.

ветственно: Д. Будько и А. Гольдин — 19 баллов, Д. Глущенков — 15 баллов, Г. Вилькялис — 13 баллов. Ни один из наших участников не справился полностью с задачей по термодинамике, задачу 3 полностью решил только А. Гольдин.

В целом по результатам теоретического тура команда СССР уступила школьникам из Румынии, набравшим в общей сложности 123 балла (официально командное первенство на олимпиаде не проводится, тем не менее общая сумма баллов, набранная командой, позволяет охарактеризовать ее относительную силу). Для большинства команд теоретический тур оказался достаточно трудным.

На втором заседании Международной комиссии, которое состоялось 8 июля, было рассмотрено и после обсуждения утверждено задание экспериментального тура. По предварительному прогнозу все ждали, что экспериментальное задание будет оптическим — город Йена славится своим крупнейшим оптическим предприятием «Карл Цейс Йена» по производству оптических приборов и оптического стекла. Намек на оптическую тематику многие усматривали и в официальной эмблеме олимпиады (см. заставку к статье). И действительно, экспериментальное задание оказалось по геометрической оптике.

9 июля в помещении одной из лучших школ Йены — в средней школе им. Юлиуса Шахеля II — состоялся экспериментальный тур олимпиады.

Приводим его условие.

Экспериментальный тур

Определите показатели преломления призмы и жидкости.

1) При использовании только одной призмы определите ее собственный показатель преломления n_1 двумя различными способами. Представьте задачу в виде рисунка и выведите по нему формулы для вычисления показателя преломления.

Вспомогательные средства: призма с углами 30°, 60° и 90°, миллиметровая бумага, линейка, белая бумага.

2) Определите с помощью двух таких одинаковых призм показатель преломления жидкости n_2; причем $n_1>n_2$. Представьте задачу в виде рисунка и выведите по нему формулы для вычисления показателя преломления.

Вспомогательные средства: две призмы с углами 30°, 60° и 90°, миллиметровая бумага, линейка, белая бумага, чашка Петри, круглая подставка, жидкость.

Формулы:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta.$$

Несколько забегая вперед, отметим, что участников советской команды на эксперименте постигло большое разочарование. Лучший результат в советской команде был у Г. Вилькялиса — 17 баллов (полностью выполненное задание оценивалось в 20 баллов), однако у 25 школьников результат оказался выше, причем восемь из них получили максимальное количество баллов.

Лучше всех с экспериментом справились команды Польши (90 баллов), Голландии (88 баллов) и ГДР (87 баллов), все участники которых выступили достаточно ровно (у школьников из ГДР за эксперимент было три «двадцатки»). Остальные наши участники выступили явно ниже своих возможностей и получили соответственно: А. Бибиков и А. Гольдин — 15 баллов, Д. Будько и Д. Глущенков — 12 баллов. Хотя все они в принципе справились с экспериментальным заданием (получили правильные ответы), очень низкой, по мнению жюри, оказалась культура оформления работ, явно недостаточными были четкость и аккуратность их выполнения. В целом по эксперименту наша команда заняла 10 место.

Заключительное заседание Международной комиссии по подведению итогов XVIII Международной физической олимпиады состоялось 10 июля. Три первых премии получили: К. Малуреану (Румыния) — 49 баллов, К. Некула (Румыния) — 45 баллов и Б. Бэккер (Голландия) — 44 балла.*) Вторые премии были присуждены 10 участникам. Среди них А. Бибиков, лучший в нашей команде, набравший в итоге 39 баллов. Третьи премии получили 29 участников, среди них Д. Будько — 31 балл и А. Гольдин — 34 балла. Еще два участника советской команды — Г. Вилькялис и Д. Глущенков (набравшие 30 и 27 баллов) — получили похвальные отзывы.

В неофициальном командном зачете команда СССР, набрав 161 балл, поделила 5 и 6 места с командой Венгрии, пропустив вперед команды Румынии (208 баллов), ФРГ (181 балл), Китая (175 баллов) и ГДР (162 балла). Сам по себе факт неудачного выступления нашей команды, наверное, можно было бы объяснить внешними причинами — круг участников олимпиады постоянно расширяется, уровень подготовленности команд растет, учащиеся Румынии, например, ходят в школу не 10, а 12 лет, быть всегда первыми просто невозможно и т. п. Однако даже беглый анализ существующей системы подготовки советской команды свидетельствует о том, что в этом вопросе имеется целый ряд недостатков. Например, система отбора в целом требует большей гибкости, необходимы дальнейшее углубление индивидуальной работы со школьниками и существенное укрепление материально-технической базы летних и зимних сборов. Словом, Министерство просвещения СССР, используя весь накопленный опыт работы, должно сказать свое решительное слово.

12 июля на официальном закрытии XVIII Международной олимпиады школьников по физике состоялось вручение премий и специальных призов победителям. А. Бибиков получил спецприз за наиболее оригинальное решение задачи 3 теоретического тура. К. Малуреану (Румыния) получил спецприз за лучшее решение задачи 2 теоретического тура. Еще один спецприз (их было всего три) получила Д. Сербан из Румынии, показавшая наивысший результат среди девочек (42 балла — вторая премия). Много благодарностей прозвучало в адрес организационного комитета, обеспечившего исключительно высокий уровень проведения олимпиады, обстановку радушия, гостеприимства и благожелательности. Участники олимпиады остались очень довольны предложенной им культурной программой.

Заключительное слово на церемонии закрытия произносит руководитель команды Австрии. От имени своего правительства он приглашает XIX Международную олимпиаду в город Зальцбург на период с 23 июня по 2 июля 1988 года. Как бы передавая эстафету проведения олимпиады Зальцбургу, в зале звучит волшебная музыка Вольфганга Амадея Моцарта. До встречи в Австрии, на родине великого композитора!

---

*) Заметим, что К. Некула выступал на Международной физической олимпиаде второй раз, а К. Малуреану — третий.

По поводу задачи М1065

Редакция получила несколько писем, из которых видно, что не все читатели верно поняли условие задачи М1065. В ней подразумевается, что все образующие в представлениях векторов различны. Мы продлеваем срок отправки решений этой задачи до 1 марта 1988 г. Решению ее будет посвящена специальная заметка.

„Квант" улыбается

БИЛЕТ
221122

После экзаменов

Известно, что на одно и то же событие можно посмотреть с разных точек зрения. На экзамене это точки зрения преподавателей и абитуриентов. Вот какие параллели нам удалось провести между высказываниями экзаменаторов и поступающих, которые мы подслушивали в самый разгар приемных экзаменов.

Преподаватели	Абитуриенты
Запутался у меня один абитуриент, ну да ладно. Сделал вид, что не заметил.	Перехитрил я преподавателя. Сделал ошибку, но так ответил на вопрос, что он и не заметил.
Эх, зря я сегодня одному четверку поставил. Ведь видел же, что ничего не знает. Торопился вот только очень.	Эх, не повезло! Экзаменатор куда-то торопился, а то бы я взял свои законные пять баллов.
А этот, лохматый, ничегошеньки не понимает.	А этот, лысый, ничегошеньки не понимает.
Я ему говорю: «Знать-то вы знаете, но не на пять баллов. Есть люди, которые и лучше знают».	Он мне говорит: «Знаете хорошо, немного найдется ребят, которые знают лучше вас, но ...».
Я ей один вопрос. Не отвечает. Я второй. Не отвечает. Я ей двойку ставить — в слезы!	Задает трудный вопрос, я ему сразу ответ. Он второй вопрос — я опять ответ. А он вдруг говорит: «Ничего, вы, девушка, не знаете». Ну тут я ему и сказала, что он не прав.

Из газеты МФТИ «За науку»

Избранные задачи Ленинградской городской олимпиады по математике

1(7). Имеется инструмент для геометрических построений на плоскости, позволяющий делать следующее:

а) если даны две точки, то можно провести проходящую через них прямую,

б) если дана прямая и точка на ней, то можно восставить перпендикуляр к этой прямой в этой точке.

Как с помощью этого инструмента опустить перпендикуляр из данной точки на прямую, не проходящую через эту точку?

Д. Фомин

2(8, 10). Имеется неограниченный запас монет достоинством в 1, 2, 5, 10, 20, 50 коп. и 1 руб. Известно, что А копеек можно разменять при помощи В монет. Докажите, что тогда В рублей можно разменять при помощи А монет.

Ф. Назаров

3(8). На ветвях большого дуба сидит несколько ворон. По сигналу они начинают пересаживаться. Каждую минуту одну из ворон прогоняют соседки, сидящие на той же ветке, и эта ворона перелетает на следующую по высоте (более высокую) ветку; если сверху веток нет, ворона улетает. Все ветки расположены на различной высоте. Докажите, что время, через которое процесс закончится (т. е. на каждой ветке будет не более одной вороны), зависит только от начального расположения ворон, но не от порядка перелетов.

Д. Фомин

4(9). Клетки доски 8×8 раскрашены в шахматном порядке. Разрешается менять местами любые две горизонтали или две любые вертикали. Можно ли при помощи этих операций получить доску, вся левая половина которой окрашена в черный цвет, а правая половина — в белый?

В. Уфнаровский

5(9, 10). В точках A и B пересечения двух окружностей касательные к этим окружностям взаимно перпендикулярны. Пусть M — произвольная точка на одной из окружностей, лежащая внутри другой окружности. Продолжим отрезки AM и BM за точку M до пересечения в точках X и Y с окружностью, содержащей M внутри себя. Докажите, что XY — диаметр этой окружности.

Д. Фомин

6(9, 10). Астроном, наблюдая на небе 50 звезд, обнаружил, что сумма всех попарных расстояний между ними равна S. Набежавшее облако заслонило 25 звезд. Докажите, что сумма попарных расстояний между видимыми звездами меньше $S/2$.

С. Фомин

7(8, 9). Даны положительные числа a, b, c, d. Докажите, что если $cd=1$, то на промежутке с концами ab и $(a+c)(b+d)$ найдется по крайней мере один квадрат целого числа.

Л. Курляндчик

8(8). Плоскость разрезали по нескольким окружностям, среди которых есть пересекающиеся. Докажите, что вырезанные при этом из плоскости кусочки не удастся сложить в виде нескольких непересекающихся кругов.

А. Анджанс

9(9, 10). Восемь неотрицательных вещественных чисел, сумма которых равна 1, расставлены в вершинах куба. Для каждого ребра стоящие в его концах числа перемножили. Докажите, что сумма всех полученных таким образом произведений не больше 1/4.

Д. Фомин

10(9). Дана последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, ..., в которой $a_1<1987$ и $a_i+a_{i+1}=a_{i+2}$ для всех натуральных i. Докажите, что если для некоторого n числа a_1-a_n и a_2+a_{n-1} делятся на 1987, то число n нечетно.

С. Генкин

11(10). Дана последовательность действительных чисел x_1, x_2, ... и натуральное число T. Докажите, что если среди всевозможных упорядоченных T — элементных наборов вида $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+T})$ имеется не более T различных, то последовательность x_1, x_2, ... периодична.

И. Лифшиц

12(10). Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что

$$\frac{AB}{CD}+\frac{CD}{AB}+\frac{BC}{AD}+\frac{AD}{BC}\leqslant\frac{OA}{OC}+\frac{OC}{OA}+\frac{OB}{OD}+\frac{OD}{OB}.$$

Ф. Назаров

13(10). В n-элементном множестве выделили S подмножеств, содержащих A_1, A_2, ..., A_S элементов соответственно. Известно, что среди этих подмножеств ни одно не содержится в другом. Докажите, что

$$\frac{1}{C_n^{A_1}}+\frac{1}{C_n^{A_2}}+\ldots+\frac{1}{C_n^{A_S}}\leqslant 1,$$

где $C_m^k=\dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ — биноминальный коэффициент.

А. Меркурьев

14(10). Непрерывные функции f, g: $[0;1]\to[0;1]$ обладают тем свойством, что $f(g(x))=g(f(x))$ для каждого $x\in[0;1]$. Докажите, что если f возрастает, то $f(a)=g(a)=a$ для некоторого $a\in[0;1]$.

Д. Фомин

Информация

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР и УССР, в 8, 9 и 10 классы на 1988/89 учебный год.

Цель школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по углублению своих знаний по физике и математике. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики. Руководители кружков набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества руководителей кружка и поименный список членов кружка (с указанием класса в 1988/89 учебном году и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все материалы по организации кружков и конверт для ответа о приеме кружка в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей кружка следует выслать в адрес ЗФТШ (141700 г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, с указанием «Кружок») *до 25 мая 1988 года.* (Тетради с работами членов кружка в ЗФТШ не высылаются.) Работа руководителей заочных физико-технических кружков может оплачиваться школами по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Учащиеся ЗФТШ и руководители физико-технических кружков будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ и ее филиалах, а членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы проводятся очные занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор и которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (справки по телефону 408-51-45).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу (все фамилии, имена и отчества в этой анкете должны быть написаны четко печатными буквами в именительном падеже).

Для получения ответа на вступительное задание вложите в тетрадь конверт с вашим домашним адресом.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1988 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Ре-

1. Область (край или АССР)	Куйбышевская область
2. Фамилия, имя, отчество	БУГАЕВ КОНСТАНТИН НИКОЛАЕВИЧ
3. Класс	седьмой
4. Номер, адрес и телефон школы	Тольяттинская средняя школа № 28, т. 37-28-95
5. Фамилия, имя, отчество вашего преподавателя по физике	Штанге Людмила Михайловна
по математике	Коновалова Людмила Дмитриевна
6. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	слесарь-ремонтник
мать	методист
7. Подробный домашний адрес	445038 Куйбышевская обл., г. Тольятти, б-р Баумана, д. 1, кв. 241.

Внизу начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№ п п										
Ф.										
М.										

шение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1988 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Пермской, Псковской и Ярославской областей, Карельской, Коми и Удмуртской АССР высылают работы по адресу: 198904 г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, Ленинградский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Кемеровской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской и Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской и Якутской АССР высылают работы по адресу: 660062 г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, Красноярский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Украины высылают работы по адресу: 252680 г. Киев-142, пр. Вернадского, д. 36, институт Металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 4—9 — для восьмых классов, задачи 8—14 — для девятых классов.

В задании по математике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 3—9 — для восьмых классов, задачи 6—12 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Автомобиль ехал из одного города в другой t часов со скоростью v_1. Обратно он ехал t часов со скоростью v_2, а остальной путь — со скоростью v_3. Определите среднюю скорость движения на всем пути.

2. Два велосипедиста едут со скоростью 35 км/ч. Один из них увеличивает скорость до 45 км/ч, проходит с этой скоростью 10 км, поворачивает и, не сбавляя скорости, возвращается к другому велосипедисту, который двигался с прежней скоростью. Сколько времени прошло с того момента, когда первый велосипедист ушел вперед, до момента его возвращения к партнеру?

3. Взвешивание тела в воздухе дало значение P. Взвешивание того же тела в жидкости плотностью ρ_0 дало значение P_1. Чему равна плотность вещества, из которого изготовлено тело?

4. В теплоизолированном сосуде находится 1,5 кг льда при температуре 0 °C. В сосуд вливают 1 литр кипятка, имеющего температуру 100 °C. Какая температура установится в сосуде? Удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/(кг· °C), удельная теплота плавления льда 335 кДж/кг.

5. В кастрюлю налили холодную (10 °C) воду и поставили на электроплитку. Через 10 минут вода закипела. Через какое время она полностью испарится? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·°C), удельная теплота испарения $2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг.

6. Свободно падающее без начальной скорости тело за последнюю секунду пролетело 3/4 всего пути. Сколько времени падало тело?

7. Найдите минимальный период спутника планеты, имеющей плотность 3000 кг/м^3.

8. При параллельном включении в сеть с напряжением U_1 двух нагревателей на них выделяется мощность P_1 и P_2. Какая мощность будет выделяться на каждом из этих нагревателей, если их включить последовательно в сеть с напряжением U_2? Сопротивление нагревателей не меняется.

9. Парашютист массой 80 кг спускается на парашюте с установившейся скоростью 5 м/с. Какой будет установившаяся скорость, если на том же парашюте будет спускаться мальчик массой 40 кг? Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости.

10. Биллиардный шар налетает на точно такой же покоящийся шар. Происходит абсолютно упругое соударение (потерь энергии при ударе нет). Под каким углом могут разлететься шары?

11. При нагревании газа при постоянном объеме на 1 °C давление увеличилось на 0,2 %. При какой начальной температуре находился газ?

12. С какой максимальной скоростью может проехать мотоциклист по закруглению дороги радиусом 80 м, если коэффициент трения между шинами мотоцикла и асфальтом равен 0,5?

13. Некоторое количество идеального газа нагревается от 300 К до 400 К. При этом объем газа изменяется пропорционально температуре: $V=\alpha T$. Начальный объем газа 3 л, давление, измеренное в конце процесса, оказалось равным 1 атм. Какую работу совершил газ в этом процессе?

14. Сосуд объемом 120 л разделен тонкой подвижной перегородкой на две части. В левую помещены два моля воды, в правую — моль азота. Температура поддерживается равной 100 °C. Определите объем правой части сосуда.

Математика

1. В классе 40 учеников, из них первую задачу по физике из вступительного задания ЗФТШ решили 25 человек, по математике — 26, а 9 школьников не решили ни одной из этих задач. Сколько учеников решили обе задачи?

2. Найдите 1988-ю цифру после запятой в десятичной записи числа 2/7.

3. Длины всех сторон прямоугольного треугольника — целые числа. Могут ли длины обоих катетов быть нечетными числами?

4. На окружности по разные стороны от диаметра AB расположены точки C и D. Найдите CD, если известно, что $BC=a$, $AC=b$, $AD=BD$.

5. Какие значения может принимать x, если

$$|x-y|\leqslant 2 \text{ и } |2x-y|\leqslant 1?$$

6. Найдите сумму

$$1^2-2^2+\ldots+1987^2-1988^2.$$

7. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, проведенного через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям и заключенного между боковыми сторонами. Докажите, что его длина не больше $\sqrt{ab}$.

8. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $2x^2+2ax+3a^2-2a=0$ будет наибольшей?

9. В четырехугольнике, вписанном в окружность радиусом R, одна сторона является диаметром, а длины трех других сторон равны a, b и c. Докажите, что $4R^3-R(a^2+b^2+c^2)-abc=0$.

10. Зная, что $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, найдите $|\sin\alpha-\cos\alpha|$.

11. Рассмотрим многочлен $P(x)=x^2+px+q$.

а) Докажите, что оба корня $P(x)$ лежат на отрезке $[a;b]$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$p^2-4q\geqslant 0,\ a\leqslant -p/2\leqslant b,\ P(a)\geqslant 0,\ P(b)\geqslant 0.$$

б) На координатной плоскости изобразите множество таких точек $(p;q)$, что корни $P(x)$ лежат на отрезке $[-1;1]$.

12. Четыре туриста идут по различным прямолинейным маршрутам с постоянными и различными скоростями. Известно, что первый турист встретился в пути с каждым из трех остальных, второй — с третьим и четвертым. Докажите, что третий и четвертый туристы также встретятся.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 30)

И. Маньшин (Иваново) 47; *Д. Мартыненко* (Киев) 47; *А. Мацко* (Киев) 55; *А. Мелеховец* (Брест) 47; *О. Мельников* (Красноярск) 55; *Н. Михайловский* (Красноярск) 57; *П. Михеев* (Старый Оскол) 47; *И. Мишенев* (Минск) 47; *В. Молодченко* (Одесса) 52; *А. Молчанов* (Чехов Московской обл.) 47; *Р. Моор* (Алма-Ата) 57; *В. Мороз* (Ленинград) 49, 52; *Р. Москвин* (Раменское) 46, 50; *М. Мостов* (Одесса) 47; *В. Мытько* (Минск) 47, 50, 52; *О. Наумов* (Заволжье) 47; *К. Недбаев* (Брест) 53; *Н. Некрасов* (Москва) 47; *О. Нелялин* (Старый Оскол) 47; *К. Николаев* (п. Черноголовка Московской обл.) 50, 53; *А. Никонюк* (Ровно) 53, 55, 57; *А. Новиков* (Харьков) 47; *А. Новик* (Мозырь) 53, 57; *Д. Ноготков* (Алма-Ата) 46, 57; *С. Ночевный* (Запорожье) 46, 50, 57; *А. Окунев* (Гродно) 50; *П. Орлов* (Ленинград) 47; *С. Павлов* (Владивосток) 49; *В. Павлунин* (Фрунзе) 50, 53; *Д. Пастухов* (Витебск) 47, 55, 57; *Т. Пацаева* (Куйбышев) 47; *К. Пенанен* (Одесса) 50, 56, 57; *Л. Петько* (Минск) 49, 50, 53, 55, 57; *В. Писаренко* (Киев) 47; *А. Подтележников* (Харьков) 53, 55—57; *О. Покрамович* (д. Скоки Брестской обл.) 47, 56, 57; *П. Полынкин* (Тула) 50; *Л. Пономаренко* (Буск) 49, 50; *Д. Почуев* (Харьков) 49, 55, 57; *К. Приходько* (Москва) 55, 57; *М. Пустильник* (Москва) 49; *И. Рассадин* (Минск) 53, 57; *У. Рахманов* (Ташкент) 49, 53; *А. Резуненко* (Харьков) 53, 57; *А. Рожков* (Калининград) 57; *А. Рыбак* (Новосибирск) 47; *А. Рыжов* (Горький) 50, 52, 55, 57; *И. Савельев* (Волгодонск) 47; *Р. Сагайдак* (с. Матусов Черкасской обл.) 46, 52, 55—57; *А. Сагдиев* (Целиноград) 47; *А. Садыков* (Казань) 49, 50, 53; *С. Сазонов* (Климовск) 53, 55; *А. Сапрыгин* (Арзамас) 50, 55; *А. Свердлов* (Ленинград) 50, 57; *В. Свидзинский* (Киев) 46, 52, 57; *М. Сергазин* (Алма-Ата) 49; *В. Свичар* (с. Городковка Винницкой обл.) 47, 52; *А. Сибиряков* (Томск) 49, 50, 52; *М. Соколов* (Одинцово) 47, 52, 53, 55; *А. Стародубов* (Алма-Ата) 55; *А. Степура* (Ивано-Франковск) 49, 50; *А. Субботин* (Алма-Ата) 47; *З. Таварткиладзе* (Тбилиси) 49, 57; *Г. Тартаковский* (Гайворон) 55; *Д. Тильга* (Алма-Ата) 49, 50, 53; *Н. Ткаченко* (Лубны) 47; *А. Тодоров* (Ярославль) 49, 50, *И. Тодощенко* (Пермь) 49, 52, 53, 55, 57; *С. Тозик* (Минск) 47, 53; *А. Тренихин* (Могилев) 55; *А. Тутов* (Рига) 47; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 49, 52, 55—57; *Г. Фейгин* (Тула) 50, 55, 57; *Д. Филатьев* (Алма-Ата) 47; *Ф. Фот* (Томск) 53, 55; *И. Фролов* (Москва) 49, 50, 52, 55; *П. Фурсиков* (Куйбышев) 47; *П. Хиль* (п. Овидиополь Одесской обл.) 47; *И. Химонч* (Днепропетровск) 55; *А. Хисамов* (Уфа) 49, 53, 55, 56; *Х. Ходжаев* (Касансайский р-н Наманганской обл.) 47; *О. Цодиков* (Артемовск) 53, 55; *А. Цыганок* (Кишинев) 46; *И. Чайка* (Кузнецовск) 52, 53, 55, 57; *О. Чанов* (Брест) 47, 57; *В. Чеботарь* (Дубоссары) 47; *Д. Чикатилов* (Москва) 49, 53; *В. Чуев* (Старый Оскол) 47; *С. Шинкевич* (Березники) 57; *З. Шония* (Тбилиси) 47; *С. Штовба* (Винница) 55, 57; *Р. Юнусов* (Термез) 47; *А. Яблоков* (с. Рождественское Костромской обл.) 50; *И. Ягольницер* (Черновцы) 52, 53, 55; *В. Янкевич* (Витебск) 50, 57; *И. Ясников* (Тольятти) 47, 53, 57.

Ответы, указания, решения

Уравнения думают за нас

1. $F\approx-53{,}3$ Н. Знак «минус» означает, что силу надо направить не вниз, а вверх под тем же углом к горизонту.
2. $t=100\ ^\circ$С.
3. $l=12{,}5$ м.

XXVIII Международная олимпиада по математике

3. Пользуясь неравенством Коши

$$|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\times\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}$$

и равенством $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$, получим

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|\leqslant\sqrt{n}.$$

Поэтому все суммы вида $\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_nx_n$, где $\varepsilon_i\in(0, 1, 2, \ldots, k-1)$, принадлежат отрезку $I=[0;\ (k-1)\cdot\sqrt{n}]$. Разобьем отрезок I на k^n-1 равных отрезка длины $(k-1)\sqrt{n}/(k^n-1)$. Так как всего существует k^n сумм, какие-то две из них окажутся в одном и том же отрезке разбиения. Для их разности выполнено неравенство.

Решение задач 1, 2, 4, 5, 6 см. в «Кванте» № 4 за 1988 год (задачи M1076—M1080).

XVIII Международная физическая олимпиада

Задача 1

1) $T_1 = T_0(p_1/p_0)^{1-1/\varkappa} = 279{,}4$ К. Здесь и далее при решении этой задачи используются уравнения адиабатического процесса, которые не входят в программу по физике для нашей средней школы. 2) $h_1 = 2(p_0 - p_1)/(g(\varrho_0 + \varrho_1)) = 1408$ м, где ϱ_1 вычисляется из уравнения состояния $p_0/(\varrho_0 T_0) = p_1/(\varrho_1 T_1)$. 3) Изменение температуры определяется двумя процессами: охлаждением до температуры T_x при адиабатическом поднятии и повышением температуры на ΔT в результате конденсации: $T_2 = T_x + \Delta T = 270{,}9$ К, где $T_x = T_1(p_2/p_1)^{1-1/\varkappa}$, $\Delta T = q_V m/c_p$. 4) $\Delta h = 35{,}3$ мм. 5) $T_3 = T_2 \times \times (p_3/p_2)^{1-1/\varkappa} = 300$ К. При обтекании горного массива воздух становится более теплым и сухим.

Задача 2

1) $B_1 = (1/R)\sqrt{2(m/e)U_0} = 0{,}37 \cdot 10^{-2}$ Тл. 2) $B = (4/R)\sqrt{2(m/e)U_0} = 1{,}48 \cdot 10^{-2}$ Тл. 3) Для ответа на этот вопрос задачи необходимо воспользоваться полярной системой координат (в плоскости, перпендикулярной оси симметрии тороида) и законом сохранения момента импульса, что не входит в нашу школьную программу по физике.

Задача 3

1) $\varphi = 2\arcsin(\omega\sqrt{LC}/2)$, где $0 \leqslant \omega < 2\sqrt{LC}$. 2) $v = \omega l/\varphi$. 3) Скорость волн слабо зависит от частоты колебаний при условии $\omega \leqslant 2/\sqrt{LC}$, и тогда $v_0 = l/\sqrt{LC} = l\omega_0$. 4) Возможные модели представлены на рисунке 1. Аналогия с данной электрической моделью основывается на законе сохранения энергии.

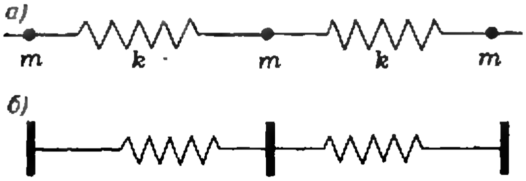


Рис. 1.

«Квант» для младших школьников

1. Пусть это числа x, y и z, причем $z = x^3 - y^3$. Тогда $z = (x-y)(x^2+xy+y^2)$. Чтобы число z было простым, необходимо, чтобы $x - y = 1$, а это возможно при условии простоты чисел x и y лишь для $x = 3$, а $y = 2$. Отсюда $z = 19$.

2. При повышении температуры длина маятника увеличивается, но ртуть, увеличиваясь в объеме, поднимается вверх по трубке, что при подборе объема ртути и диаметра трубки дает возможность сохранить постоянным расстояние от точки подвеса маятника до его центра тяжести. Тем самым увеличивается точность хода часов.

3. 331868:163 = 2036.

4. См. рис. 2.

5. Если обозначить через v объем воды в озере, через w — объем воды, вытекающей в сутки из родников, и через z — количество воды, выпиваемой в сутки слоном, то условия задачи запишутся в виде двух уравнений: $v + w = 183z$, $v + 5w = 5 \cdot 37 \cdot z$. Вычитая из второго уравнения первое, получим $4w = 2z$ или $z = 2w$. Подставляя это соотношение в первое уравнение, получим $v = 365w$. Пусть один слон выпивает озеро за x дней, тогда $v + xw = xz$. Подставляя $z = 2w$, получаем $v = xw$, или $x = \dfrac{v}{w}$. Но мы знаем, что $v = 365w$, поэтому слон опустошит озеро за 365 дней, после чего понадобится еще год, чтобы озеро вновь наполнилось от родников.

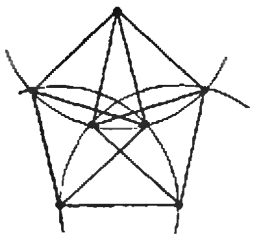


Рис. 2.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 11)

1. Нетрудно подсчитать, что всего было 10 партий, т. е. разыгрывалось 10 очков. *А* — победитель турнира — набрал не более 3 очков, так как одну партию он проиграл; но он не мог набрать и меньшее количество очков, так как 2,5+2+1,5+1+0,5=7,5. Значит, *А* одну партию проиграл, а остальные выиграл. Выиграть у *Б* он не мог, так как *Б* не проиграл ни одной партии; значит, он проиграл *Б* и выиграл у всех остальных. Заметим также, что 3+2,5+2+1,5+1=10, поэтому *Б* набрал 2,5 очка, *В* набрал 2 очка, *Г* набрал 1,5 и *Д* набрал 1 очко. Значит, *Б* остальные партии свел вничью. *Г* набрал 1,5 очка, сделав ничью с *Б* и выиграв у *В* или *Д*; но *В* проиграл *А*, сделав ничью с *Б* и, если он проиграл *Г*, то он набирает не более 1,5 очков, а он набрал 2 очка; значит, *В* выиграл у *Г* и сделал ничью с *Д*, и *Г* выиграл у *Д*. Турнирная таблица приводится на рисунке 3.

2. В морозный день кристаллы снега разрастаются и ломаются при наступании на снег, что и вызывает потрескивание.

3. Да, можно. Например, так: рассмотрим 18 пар гирек, равноотстоящих от концов: 1+101, 2+100, 3+99, ..., 18+84. Остальные 64 гирьки тоже разобьем на 32 пары, соединяя их по тому же принципу равной суммы: 20+83, 21+82, 22+81, ..., 51+52. Взяв 9 пар гирек из первого набора и 16 пар из второго произвольным образом, мы получим требуемое разбиение.

4. 94950+80850+74350=250150.

5. См. рис. 4.

	А	*Б*	*В*	*Г*	*Д*
А	▨	0	1	1	1
Б	1	▨	1/2	1/2	1/2
В	0	1/2	▨	1	1/2
Г	0	1/2	0	▨	1
Д	0	1/2	1/2	0	▨

Рис. 3.

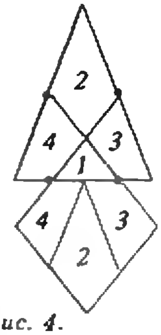


Рис. 4.

BeatriceGloria_personal library

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 11)

Вопросы и задачи

1. Сила давления равна нулю.
2. Закон Паскаля справедлив, закон Архимеда — нет, так как и тело, и вытесняемая жидкость невесомы.
3. С востока на запад, причем угловая скорость движения самолета вокруг центра Земли должна быть равна угловой скорости вращения Земли.
4. Скорость тела максимальна при прохождении центра Земли ($r=0$). Принимая, что потенциальная энергия тела равна нулю в центре Земли, получим

$$\frac{mv_0^2}{2}=\Pi,$$

где Π — потенциальная энергия на поверхности Земли, равная работе по перемещению тела из центра на поверхность Земли (см. заштрихованную площадь на рис. 5). Тогда

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mgR_0}{2},$$

где R_0 — радиус Земли. Отсюда

$$v_0=\sqrt{gR_0}\,.$$

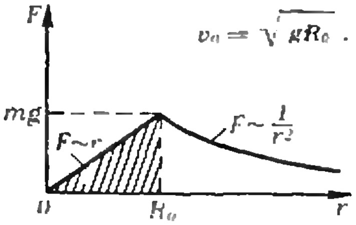


Рис. 5.

5. Нет, так как при этом у силы тяжести будет составляющая, не лежащая в плоскости орбиты.
6. При спуске, поскольку при запуске скорость ракеты в плотных слоях атмосферы мала, а при спуске — велика.
7. а) По касательной к орбите; б) стала бы падать на Землю.
8. Такая же, что и для Земли.
9. Плотность планеты. Воспользовавшись уравнением движения спутника по орбите, можно получить формулу

$$T=\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}\,.$$

10. Только пружинными, другие часы в невесомости работать не будут.
11. Включить двигатели.
12. Можно, так как взаимодействие молотка и обрабатываемого материала будет определяться их инерционными, а не гравитационными свойствами.

Микроопыт

Не будет, поскольку и банка, и вода в ней падают с одинаковым ускорением.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 9)

Задание 17 (Б. Брейдер, 1966 г.). 1. Кb5 c2 2. Кd4 c1Ф 3. Кb3+ Крb1 4. К:c1 Кр:c1 5. Кh7 g4 6. Кf6 g3 7. К:h5 g2 8. Кf4 с ничьей; 2...Крb1 3. К:c2 Кр:c2 4. Кe6 g4 5. Кg7 g3 (5... h4 6. Кf5 h3 7. Кe3+ и 8. К:g4) 6. Кf5 g2 7. Кe3+.

Задание 20 (Л. Прокеш, 1939 г.). 1. Кd7 d2 2. Сg5 d1Ф 3. С:e3+ Крa6 4. Кc5+ Крa5 5. Сd2+ Ф:d2 6. Кb3+ с ничьей; 1...e2 2. Сh4 d2 3. Сf2+ Крa6 4. Кc5+ Крa5 5. Кb3+ и 6. К:d2. После 1... С:d7 ничья совсем простая: 2. Сg5 e2 3. Сd2.

Напечатано в 1987 году

К 70-летию Великого Октября

Всенародный праздник 11 2
О математике Страны Советов 11 3
Достижения советских физиков 11 9

* * *

С Новым годом! 1 2
12 апреля — День космонавтики 4 2
Время творить, время дерзать! 5 2
30 лет космической эры 10 2

* * *

Интервью с академиком А. С. Боровиком-Романовым 9 2
Интервью с академиком Р. З. Сагдеевым 10 5

Статьи по математике

Арнольд В. И. Второй закон Кеплера и топология абелевых интегралов 12 17
Болтянский В. Г. Огибающая 3 2
Васильев Н. Б. Гексаграммы Паскаля и кубические кривые 8 2
Воронин С. М., Кулагин А. Г. О задаче Пифагора 1 10
Гальперин Г. А. Просто о простых числах 4 8
Гиндикин С. Г. Загадка Рамануджана 10 14
Дорофеева А. В. Рене Декарт и его «Геометрия» 9 15
Карпов Я. Ю. Оптимальная кодировка почтового индекса 11 19
Корепин В. Е. Узоры Пенроуза и квазикристаллы 6 2
Кострикин А. И. Простые группы 2 2
Лобковский А. Э. Математические узоры на плоскости 11 21
Панов А. А. Генеалогические деревья 7 8
Певзнер П. А. Лучшее пари для простаков 5 4
Пирогов И. З., Тюлина И. А. Мехматовцы МГУ в битве за Москву 12 3
Соловьев Ю. П. Арифметика эллиптических кривых 7 2
Сосинский А. Б. Конечные группы 2 8

Статьи по физике

Ашавский Б. С. Поверхность кристалла 7 14

Бернштейн П. Б. Несколько дополнений к уроку литературы, или Еще раз о научном предвидении	6	15
Бреус Т. К. Встреча с кометой Галлея состоялась!	10	8
Бреховских Л. М., Куртепов В. М. Акустика в Океане	3	8
Брук Ю. М., Геллер Б. И. Белые карлики — кристаллические звезды	6	8
Бялко А. В. Тепло твоих рук	4	3
Валянский С. И. Единицы: от системы к системе	7	20
Варламов А. А., Шапиро А. И. Пока чайник не закипел...	8	9
Крутогин Д. Г. Путешествие по микрокомпьютеру	2	19
Крутогин Д. Г. МК: проблемы общения	3	14
Крутогин Д. Г. По столбовым дорогам МК	4	15
Крутогин Д. Г. Кто управляет городом МК?	5	16
Михайлов А. С. Волны в сердце	9	8
Островский Л. А. Волны на воде	8	16
Семенчинский С. Г. Эффект Холла: год 1879 — год 1980	2	12
Симин Г. С. Оптическая электроника при свечах	5	9
Склокин Ф. Н. С рюкзаком по Арктике	4	20
Фабрикант В. А. Зачем мы зимой используем отопление?	10	21
Филонович С. Р. О столкновении шаров и «серьезной» физике	1	3
Филонович С. Р. Великая книга Ньютона	11 12	14 13
Хилькевич С. С., Зайцева О. А. Как построить траекторию?	7	26
Эдельман В. С. Эта простая теплоемкость	12	7

Новости науки

Прямое измерение расстояния до квазара	4	19
Мечта становится реальностью	5	44
Антипротон в ловушке	6	7
Туннельный микроскоп	7	19
Самый далекий квазар	12	43

Лаборатория «Кванта»

Бронштейн М. П. Изобретатели радиотелеграфа	2	43
Бубнов Б. М. Вихри... на патефоне	8	45
Буздин А. И., Сорокин В. В. Кипение жидкостей	6	39
Гаврилов С. Л. Постоянный или переменный?	4	45
Майер В. В. Может ли белое быть чернее черного?	10	40
Майер В. В., Майер Р. В. Наблюдение электростатической индукции	12	36

Математический кружок

Балк М. Б., Ландман Г. М. В поисках оптимального раскроя	3	44
Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М. Выбор наилучшего варианта	1	37
Ижболдин О. Т., Курляндчик Л. Д. Разбиение единицы	7	48
Саннинский В. Я. Размышляя об одной олимпиадной задаче	6	37
Соболев С. И. О случайных блужданиях	5	45
Табачников С. Л. Соображения непрерывности	9	45
Фукс Д. Б. Построения одним циркулем	6	34

Наш календарь

Многогранник — календарь	1	28
Дифракционной решетке — 200 лет	4	37
Ван-дер-Ваальс и его уравнение	7	34
Луиджи Гальвани	8	51

Школа в «Кванте»

Физика 8, 9, 10:

Закон Архимеда	1	29
Силы молекулярного взаимодействия	1	31
Поляризация света	1	34
Вязкое трение	3	38
Метод электростатических изображений	3	39
Ядерные спектры	3	42
Законы сохранения и системы отсчета	5	37
Как работает электродвигатель?	5	39
Физика музыкальной гармонии	5	41
Легко ли описывать движение?	9	38
Вокруг одной задачи	9	40
Давление газа в сосуде	9	41
Гармонические колебания и равновесие	9	42
Закон всемирного тяготения	11	36
Расширение газа в пустоту	11	38
Электромагнитная индукция и принцип относительности	11	39

Математика 8, 9, 10:

Выручает описанная окружность	2	41
Лишние условия в конкурсных задачах	2	42
Признак делимости на числа вида $10n \pm 1$	4	39
Первый замечательный предел	4	40
Формулы Виета	4	41
Преобразования плоскости в задачах на построение	8	40
Неравенство Коши — Буняковского	8	42
Основные теоремы	10	36
Избранные школьные задачи	4, 5, 8	

«Квант» для младших школьников

Задачи	1—	12
Асламазов Л. Г. Лунный тормоз	8	38
Ашавский Б. С. И один в поле воин	6	28
Буздин А. И., Кротов С. С. Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...	12	32
Виленкин Н. Я. Из истории дробей	5	34
Орлов А. И. «Все», «некоторые» и отрицание	11	34
Савин А. П. На круги свои	1	24
Савин А. П. Задачи на разрезание	7	44
Соловьев Ю. П. Старый алгоритм	3	34
Родина Н. А. О чем могут рассказать цифры	2	38
Штейнберг А. С. Дальтон взвешивает атомы	4	34
Угадай число	9	34

Калейдоскоп «Кванта»

Испарение, кипение, плавление	3	32
Замечательные числа	4	•
Законы сохранения	5	•
Замечательные линии и точки	6	•
Опыты и наблюдения	7	•
Замечательные числа $\sqrt{2}$ и e	8	•
Как движутся молекулы	9	•
Замечательные точки и линии	10	•
Тяготение	11	•

Задачник «Кванта»

Победители конкурса «Задачник «Кванта» 3 18
Задачи М1021—М1080, Ф1033—Ф1092 1—12
Решения задач М1001—М1060, Ф1013—Ф1072 1—12
Список читателей, приславших правильные решения 3,6,9,12
Трехзначные числа и орграфы 2 32
Маятник в магнитном поле и принцип суперпозиции 8 31

Искусство программирования

Об открытии Всесоюзной заочной школы программирования 10 48
Гурарий В. В., Стыркас К. А. Об одной рекуррентной последовательности 8 48
Дуванов А. А., Первин Ю. А. Язык Лого. Урок 1: Путешествия Черепахи 10 48
Дуванов А. А., Первин Ю. А. Язык Лого. Урок 2: Черепашья академия 11 42
Дуванов А. А., Первин Ю. А. Язык Лого. Урок 3: Рекурсии, функции 12 38
Ершов А. П. Мир языков программирования 10 42
Каймин В. А. Проверка правильности алгоритмов 6 43
Штернберг Л. Ф. Циклы, циклы, циклы... 1 43

Практикум абитуриента

Белонучкин В. Е. Маневрирование в космосе 2 48
Бодик В. А., Стрешинский И. Я. О графическом способе решения некоторых физических задач 4 49
Болибрух А. А., Уроев В. М., Шабунин М. И. Решение систем тригонометрических уравнений 11 46
Буздин А. И., Кротов С. С. Работа, энергия, тепло 8 55
Готман Э. Г. Правильное решение геометрической задачи 5 50
Дорофеев Г. В., Розов Н. Х. Функции периодические и непериодические 9 51
Ионин Ю. И., Некрасов В. Б. Вычисление расстояний и углов 1 47
Козел С. М. Задачи на газовые смеси 6 47
Можаев В. В. Конденсаторы с «избыточным» зарядом пластин 10 53
Нахшин В. А. Уравнения думают за нас 12 44
Ярский А. С. Неравенства с параметром 3 49

Варианты вступительных экзаменов

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1986 году 6 50
Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко 5 55
Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена 4 55
Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова 4 52
Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина 4 53
Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина) 4 56
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина 1 54
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 2 52
Московский инженерно-физический институт 3 55
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики 3 58
Московский институт стали и сплавов 3 56
Московский станкоинструментальный институт 5 60
Московский институт электронного машиностроения 1 54
Московский институт электронной техники 5 59
Московский физико-технический институт 1 53
Московский энергетический институт 5 56
Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана 5 57
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола 3 52

Олимпиады

VIII Московская олимпиада по программированию 6 57
Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике 9 59
Задачи пятидесятой Московской городской математической олимпиады 9 60
XIII Всероссийская олимпиада школьников 10 60
XXI Всесоюзная олимпиада по математике 11 50
XXI Всесоюзная олимпиада по физике 11 52
XXVIII Международная математическая олимпиада 12 48
XVIII Международная физическая олимпиада 12 51
Избранные задачи Ленинградской городской олимпиады по математике 12 56

Информация

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу 1 55
Новый прием на заочное отделение Малого мехмата 1 56
Заочная физико-техническая школа при МИСиСе 1 57
Заочная физическая школа при МГУ 4 44
Летняя школа «Юный программист» 6 57
Компьютеры на берегу Оби 7 59
Юные программисты в Ленинграде 7 61
Заочная школа при НГУ 7 62
Вечерняя физическая школа при МГУ 8 54
X Турнир юных физиков 8 59
II Научно-техническая конференция школьников в МФТИ 9 55
Новосибирск — Андовер 9 56
I Всесоюзная олимпиада школьников по информатике 11 30
Заочная физико-техническая школа при МФТИ 12 57
Игры и головоломки 1—12 4-я с. обл.
Перевертыши 7 54
Из чего угодно — что угодно 8 53

«Квант» улыбается

Новости археологии 2 18
Простота математики 2 18

Ни малейшей работы! 2 51
Крокодил в конверте 6 14
О классификации 6 18
Математика в жизни 7 58
Вести с экзаменов 7 58
Задачи, расположенные по цепочке 10 58
После экзаменов 12 55

Смесь

Несколько задач на один прием 1 36
Задача для исследования 2 36
Советуем прочесть 4 44
Сколько стоит дыня? 8 36
Задачи на исследование 9 20
Кто с кем танцует? 9 37
Вниманию наших читателей 11 64

Шахматная страничка

Итоги шахматного конкурса 1986 года 6 58
Компьютер анализирует эндшпиль 1 3-я с. обл.
Парадоксальные находки ЭВМ 2 »
Рекорды компьютера 3 »
Обезьяньи рекорды 4 »
Чемпионаты компьютеров 5 »
Чемпионат микрокомпьютеров 6 »
Фигуры возвращаются домой 7 »
Ретроспективный анализ 8 »
Статистика эндшпиля 9 »
Компьютер в компании гроссмейстеров 10 »
Геометрические темы 11 »
Метод треугольника 12 »
Наша обложка 2,7
Наша анкета 10 35

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Л. Рябов, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили
М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов,
Э. В. Назаров, Т. Н. Кольченко, Е. К. Темчурина,
И. Е. Смирнова, В. Б. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор Н. Б. Румянцева

Сдано в набор 20.10.87 Подписано к печати 24.11.87
Т 22573 Бумага 70×108/16 Печать офсетная Усл. кр.-отт. 23,8 Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,28 Тираж 200 828 экз. Цена 40 коп. Заказ 2883

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

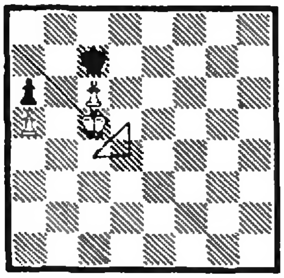
103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

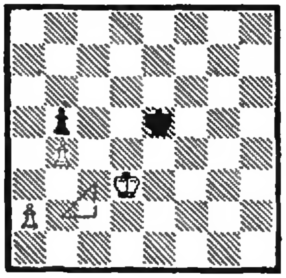
Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

МЕТОД ТРЕУГОЛЬНИКА

В теории окончаний, прежде всего пешечных, можно встретить немало математических и физических терминов: ключевые и критические поля, геометрическая оппозиция, пространство и время, система полей соответствия и т. д. С правилом квадрата знакомы все шахматисты. Сейчас мы расскажем о методе треугольника.



В этом положении после 1. Кpd5 Крс8 2. Кpd6 Кpd8 3. с7+ Крс8 4. Крс6 на доске пат, а 2. Крс5 Крс7 приводит к исходной позиции. Однако при своем ходе черные сразу проигрывают, так как вынуждены пропустить белого короля на поле b6, теряя единственную пешку. Итак, задача белых — передать очередь хода противнику. Эта цель достигается методом треугольника. Король осуществляет маневр по треугольнику d5 — d4 — c4. Черные гибнут после 1. Кpd5 Крс8 2. Кpd4! Крb8 3. Крс4 Крс8 4. Кpd5. Теперь на 4...Кpd8 решает 5. Кpd6 Крс8 6. с7, а на 4...Крс7 — 5. Крс5, позиция та же, но ход черных.



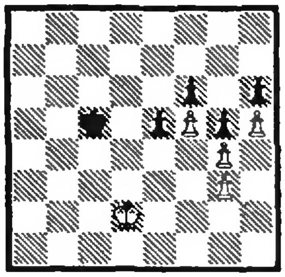
И. Клинг, 1848 г.

1. Крс3 Кpd5 2. Крb3 Крс6. Черным нельзя допускать ни противостояния Кpd4 — Кpd6 из-за наличия темпа a2 — a3, ни Крb3 — Кpd6 ввиду a2 — a4 с простым выигрышем. Отсюда следует, что если белый король стоит на d3, c3 или b3, то черный должен находиться на e5, d5 или c6. Пользуясь шахматно - математическим языком, можно сказать, что полям d3, c3 и b3 соответствуют поля e5, d5 и c6. В возникшей позиции белым надо передать очередь хода противнику, для чего их король идет по треугольнику, изображенному на рисунке (маневрирует на тыловых полях b2 и c2). Надежды черных на спасение связаны с построением аналогичного треугольника для своего короля.

При белом короле на c2 (b2) черный не может стоять на c7 (d7) из-за Крс3 и Кpd4 с выигрышем, то есть треугольник c7 — d7 — d6 черных не устраивает. Поскольку треугольником c5 — c6 — d6 они вообще не располагают (поле c5 под контролем), остается лишь треугольник d6 — d5 — c6. Но при короле на d5 (c6) белые ставят своего короля соответственно на c3 (b3) и берут верх.

3. Крс2 (можно начать и с b2) Кpd6 (3...Кpd5 4. Крс3 Кре5 5. Крb3 и 6. a4) 4. Крb2! Крс6 5. Крb3 Крb6 (5...Кpd6 6. a4) 6. Крс3 Крс6 7. Кpd4 Кpd6 8. a3 Крс6 9. Кре5 Крb6 10. Кpd5, и все кончено.

Любопытную историю, также связанную с «треугольником», рассказал в своих воспоминаниях гроссмейстер С. Флор.



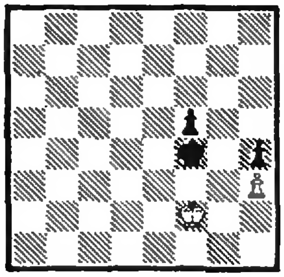
М. Видмар — С. Флор. Блед, 1931 г.

1. Кре3 Кpd5 2. Кpd3 Крс6 3. Кре4 Кpd6 4. Кре3 Кpd7 5. Кpd3 Крс6 6. Кре4 Крс5.

Здесь Видмар спросил: «Ничья?» Флор задумался и вспомнил, как *однажды* Видмар предложил ничью Рубинштейну, а тот деликатно ответил: «Если специалисты сочтут нашу позицию ничейной, я согласен». Скоро Видмар сдался.

Флор тоже ответил уклончиво: «Разве эта позиция ничейная?».

«Ну, хорошо, — сказал гроссмейстер Видмар,— ищите, молодой человек, ищите!» Этот призыв подстегнул Флора, и он припомнил, что когда-то читал про треугольник. Через пять минут партия закончилась. 7. Кре3 Кpd5 8. Кpd3 e4+ 9. Кре3 Кре5 10. Кре2 Кpd4 11. Кpd2 e3+ 12. Кре1 Кpd5. «Вот он — мой треугольник!» — воскликнул Флор. 13. Крf1 Кре5 14. Кре1 Кpd4 15. Кpd1 Кpd3. Белые сдались.



Л. Юдасин — В. Оснос. Ленинград, 1987 г.

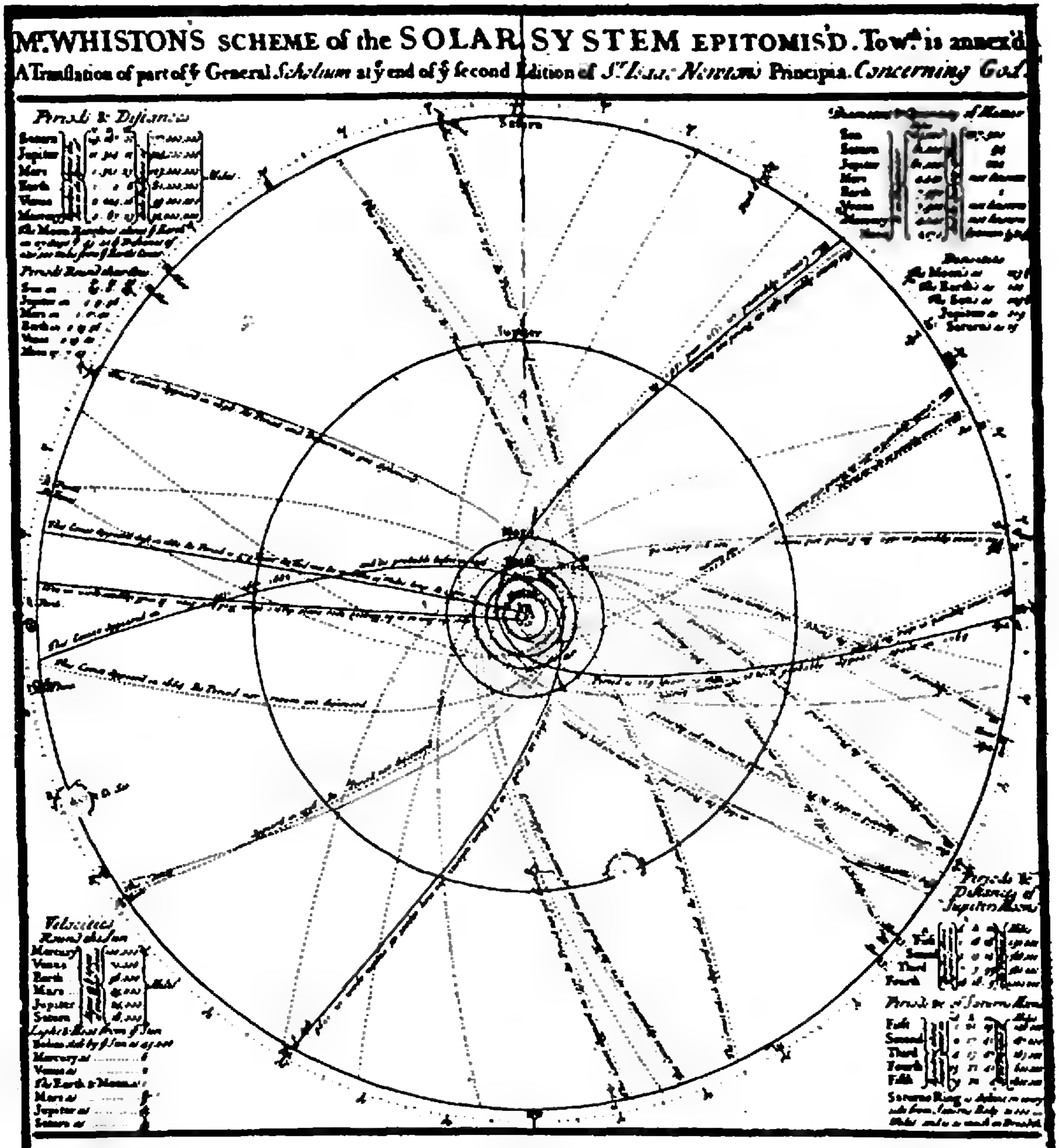
Переставив последним ходом короля с e2 на f2, Юдасин предложил ничью, сообщив своему партнеру, что позиция теоретически ничейная. «Уличенный» в элементарных эндшпильных пробелах, опытный Оснос не рискнул спорить с молодым авторитетом и позволил себя уговорить. А между тем после 1...Кре4 2. Кре2 f4 3. Крf2 f3 4. Крf1 Кре5! на доске возникала позиция, симметричная первой рассмотренной (после второго хода белых и с переменой цветов).

Конкурсные задания

23. Белые: Кра2, п п. b3, c2; черные: Крb4, п. d5. Белые начинают и выигрывают.

24. Белые: Крf8, п п. a3, b3, c4; черные: Крс8, п п. a6, b6, c5. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 февраля 1988 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 23, 24».

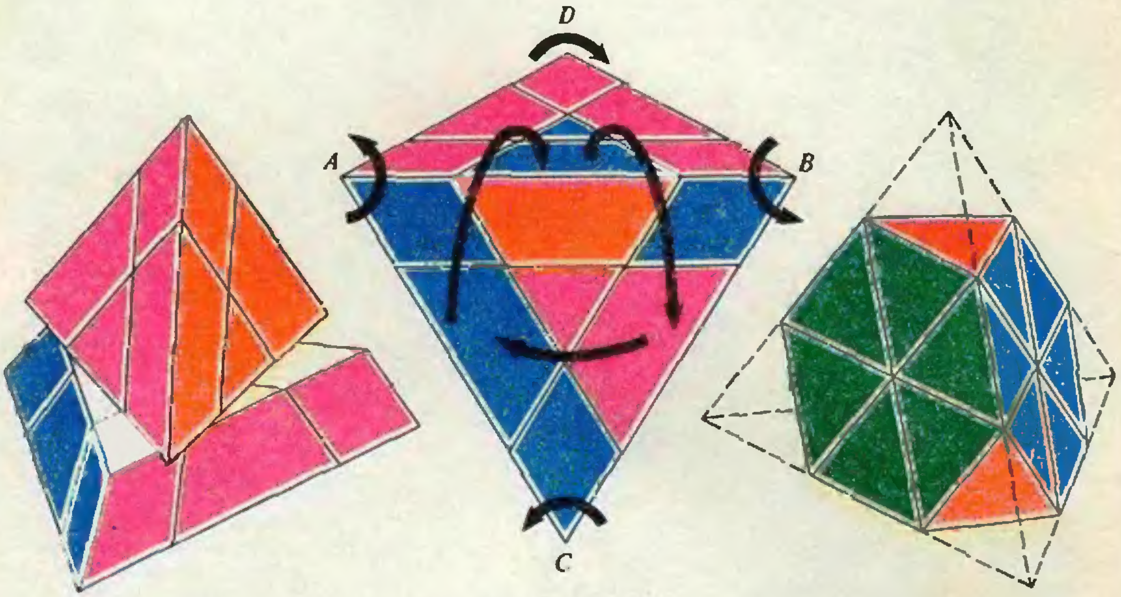

Mr. WHISTON'S SCHEME of the SOLAR SYSTEM EPITOMIS'D. Tow.ch is annex'd
A Translation of part of ye General Scholium at ye end of ye second Edition of Sr Isaac Newton's Principia. Concerning God.
Periods & Distances
Saturn
Jupiter
Mars
Earth
Venus
Mercury
Velocities Round the Sun
Mercury
Venus
Earth
Mars
Jupiter
Saturn
Periods & Distances of Jupiter's Moons
First
Second
Third
Fourth
Fifth
Saturn
Jupiter
Mars

В этом номере мы продолжаем знакомство
с «Математическими началами натуральной
философии» Ньютона (см. статью
«Великая книга Ньютона»).
Эта книга оказала огромное влияние
на развитие науки и человеческой мысли.
Построенная Ньютоном механика
позволила проанализировать и обобщить
многие весьма сложные явления,
в том числе и астрономические.
Воспроизведенная здесь
«Схема Солнечной системы», изданная в 1724 году
английским ученым В. Вистоном
(который после Ньютона занял
профессорскую должность в Кембридже),—
попытка представить
«ньютоновскую систему мира»,
основываясь на сформулированных
в «Началах» законах движения
и законе всемирного тяготения.

Цена 40 коп.

Индекс 70465

«Волшебная пирамидка» — очередной персонаж наших заметок о головоломках — была придумана до кубика Рубика, но почему-то не была тогда оценена по достоинству. Особенность объемных шарнирных головоломок, пирамидки и кубика в том числе, отличающая их от игрушек из предыдущих номеров, за исключением «перевертышей» (см. «Квант», №№ 1, 2), состоит в том, что их подвижные части могут не только переходить с одного места на другое, но и по-разному «садиться» на данное место. Так, в пирамидке на рисунке слева 3 типа блоков — 4 угловых, 6 реберных и 4 центральных. Первые можно повернуть на том же месте тремя способами, вторые — двумя, третьи — тремя; правда, повороты центральных блоков на вид неразличимы. У нас выпускают несколько вариантов пирамидки. Более распространен тот, что показан справа, причем к его угловым блокам обычно прикреплены пирамидальные макушки, вращающиеся каждая сама по себе. Но гораздо интереснее пирамидка с центральными блоками. Наверное, излишне объяснять, как с ней обращаться: допустимый поворот показан слева; надо перепутать блоки такими поворотами вокруг всех 4 осей, а затем восстановить исходную раскраску — одноцветную на каждой грани. Мы уже не раз объясняли, как подступить к решению такой задачи. Сначала рассмотрим коммутаторы двух поворотов (рисунок в центре; на нем видны и обозначения поворотов). Под действием $K_1 = AB^{-1}A^{-1}B$ циклически переставляются 3 реберных блока: $AB \to CB \to AC \to AB$ (порядок букв существен!), а центральные блоки переставляются парами: $a \leftrightarrow b$, $c \leftrightarrow d$, где a, b, … — центры граней BCD, CDA, … . Аналогично действует $K_2 = BC^{-1}B^{-1}C$: $AB \to CB \to CA \to AB$, только 2 блока — CB и AC — иначе поворачиваются. Поэтому операция $K_1K_2^{-1}$ переворачивает эти блоки на своих местах, а остальные реберные блоки не затрагивает. Еще одна полезная операция получится, если трижды повторить K_1: K_1^3 переставляет только центральные блоки $a \leftrightarrow b$, $c \leftrightarrow d$. Теперь можно расставлять блоки в следующем порядке: 1) угловые (их надо повернуть, чтобы согласовать цвета на каждой грани пирамиды), 2) реберные DA, DB, DC — можно ставить их поочередно, пользуясь коммутаторами $ABA^{-1}B^{-1}$, $B^{-1}A^{-1}BA$ и т. п., заменяющими по одному из этих блоков 3) реберные AB, BC, CA — сначала пользуясь K_1 или K^{-1}, а затем, если нужно, перевернуть, пользуясь K_1K^{-1} и т. п., 4) центральные — с помощью операций типа K_1^3. Попробуйте показать, что указанных операций всегда достаточно для полной сборки (это отнюдь не очевидно!). Вам поможет статья «Математика волшебного кубика» («Квант» № 8, 1982 г.). И еще задача: докажите, что, вращая пирамидку, можно получить $3^4 \cdot 6! \cdot 2^6 = 3732480$ различных расцветок.



$K_1 = AB^{-1}A^{-1}B$